ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIOVANNI SANSONE

Sulle serie lacunari di polinomi di Legendre di funzioni sommabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 3 (1933), p. 289-296
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_3_289_0>

SULLE SERIE LACUNARI
DI POLINOMI DI LEGENDRE DI FUNZIONI SOMMABILI

di GIOVANNI SANSONE (Firenze).

In questa nota vogliamo dimostrare che per le funzioni $f(x)$ sommabili in $(-1, 1)$, le quali rispetto al sistema ortogonale di polinomi di LEGENDRE $\{[(2n+1)/2]^{\frac{1}{2}} P_n(x)\}$

$$(1) \qquad P_0 = 1, \qquad P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

ammettono uno sviluppo in serie lacunare, sussistono due teoremi analoghi a quelli dei Signori A. KOLMOGOROFF e S. SZIDON per le serie trigonometriche lacunari ([1]).

§ 1.

TEOREMA. - *Se* $\{n_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *è una successione di numeri interi positivi, soddisfacenti alla condizione*

$$(2) \qquad n_{i+1}/n_i \geqslant q > 1,$$

e se rispetto al sistema ortogonale e normale in $(-1, 1)$ *di polinomi di Legendre* $\{[(2n+1)/2]^{\frac{1}{2}} P_n(x)\}$ *i coefficienti di Fourier di una funzione sommabile* $f(x)$ *sono tutti nulli eccettuati quelli di indice* n_i, *allora la* $f(x)$ *è di quadrato sommabile e la sua serie di Fourier, rispetto al sistema* $\{[(2n+1)/2]^{\frac{1}{2}} P_n(x)\}$, *ha per somma* $f(x)$ *quasi dappertutto in* $(-1, 1)$ ([2]).

Noi qui supponiamo

$$(3) \qquad \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx = 0 \quad \text{per} \quad n \neq n_i, \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

e posto

$$(4) \qquad a_i = \frac{2n_i + 1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_{n_i}(x)\, dx, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

([1]) Cfr. L. TONELLI: *Serie trigonometriche* [Bologna, 1928], p. 306 e p. 270, oppure: *a*) A. KOLMOGOROFF: *Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier*, Fund. Mathematicae, t. V, 1924, pp. 96-97; *b*) S. SZIDON: *Verallgemeinerung eines Satzes ueber die absolute Konvergenz von Fourierreihen mit Lüchen*, Mathem. Annalen, Bd. 97 (1927), pp. 675-676.

([2]) Cfr. per le serie trigonometriche A. KOLMOGOROFF, loc. cit. ([1]).

dobbiamo far vedere che

(5)
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2a_i^2}{2n_i+1} < +\infty$$

e che la serie

(6)
$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i P_{n_i}(x)$$

ha per somma $f(x)$ quasi dappertutto in $(-1, 1)$.

a) La successione $\{|a_i| n_i^{-\frac{1}{2}}\}$ *è limitata.*

Si ha
$$n_{i+1} - n_i \geqslant (q-1)n_i \geqslant q^{i-1}(q-1)n_1$$
esiste quindi un i_0 tale che per $i > i_0$ si ha

(7)
$$n_i < n_i + 4 < n_{i+1} - 4 < n_{i+1},$$

e considerando in luogo di $f(x)$ la funzione $f(x) - \sum_{i=1}^{i_0} a_i P_{n_i}(x)$ possiamo supporre che la (7) sia verificata qualunque sia l'indice i, e perciò per la (3)

(8)
$$\int_{-1}^{1} f(x) P_{n_i \pm r}(x) dx = 0 \quad \text{per} \quad r = 1, 2, 3, 4; \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Abbiamo in particolare $\int_{-1}^{1} f(x) P_{n_i+2}(x) dx = 0$ e perciò

$$|a_i| = \frac{2n_i+1}{2} \left| \int_{-1}^{1} f(x) P_{n_i}(x) dx \right| = \frac{2n_i+1}{2} \left| \int_{-1}^{1} f(x)[P_{n_i}(x) - P_{n_i+2}(x)] dx \right|,$$

ma per x variabile in $(-1, 1)$ vale la formula di STIELTJES (³)

$$|P_n(x) - P_{n+2}(x)| < Cn^{-\frac{1}{2}} \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

con C costante assoluta, e si avrà quindi

$$|a_i| \leqslant C \frac{2n_i+1}{2\sqrt{n_i}} \int_{-1}^{1} |f(x)| dx < \sqrt{n_i} \left(1 + \frac{1}{2n_i}\right) C \int_{-1}^{1} |f(x)| dx$$

od anche, posto

$$2C \int_{-1}^{1} |f(x)| dx = A$$

si ottiene

(9)
$$|a_i| n_i^{-\frac{1}{2}} < A \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

b) La serie di Fourier della funzione $f(x)(1-x^2)$ *rispetto al sistema* $\{[(2n+1)/2]^{\frac{1}{2}} P_n(x)\}$ *è data da*

(10)
$$(1-x^2) f(x) \sim c_{n_1-2} + c_{n_1} + c_{n_1+2} + \ldots + c_{n_i-2} + c_{n_i} + c_{n_i+2} + \ldots$$

(³) Cfr. E. W. HOBSON: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* [Cambridge, 1931], p. 315.

con

$$(10')\quad \begin{cases} c_{n_i-2}=-\dfrac{n_i(n_i-1)}{(2n_i+1)(2n_i-1)}\,a_iP_{n_i-2}(x); \qquad c_{n_i}=\dfrac{2(n_i^2+n_i-1)}{(2n_i+3)(2n_i-1)}\,a_iP_{n_i}(x);\\ c_{n_i+2}=-\dfrac{(n_i+2)(n_i+1)}{(2n_i+3)(2n_i+1)}\,a_iP_{n_i+2}(x). \end{cases}$$

Dalle note relazioni ricorrenti tra i polinomi di LEGENDRE si ha

$$(2n+1)x^2P_n(x)=(n+1)xP_{n+1}(x)+nxP_{n-1}(x),$$

$$(2n+3)xP_{n+1}=(n+2)P_{n+2}+(n+1)P_n, \qquad (2n-1)xP_{n-1}=nP_n+(n-1)P_{n-2}$$

quindi

$$(2n+1)x^2P_n=\frac{(n+2)(n+1)}{2n+3}P_{n+2}+\left[\frac{(n+1)^2}{2n+3}+\frac{n^2}{2n-1}\right]P_n+\frac{n(n-1)}{2n-1}P_{n-2}$$

e perciò, posto

$$(11_1)\qquad b_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)(1-x^2)P_n(x)dx$$

si avrà

$$(11_2)\qquad b_n=-\frac{1}{2}\frac{(n+2)(n+1)}{2n+3}\int_{-1}^{1}f(x)P_{n+2}(x)dx+$$
$$+\frac{1}{2}\left[2n+1-\frac{(n+1)^2}{2n+3}-\frac{n^2}{2n-1}\right]\int_{-1}^{1}f(x)P_n(x)dx-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2n-1}\int_{-1}^{1}f(x)P_{n-2}(x)dx.$$

Si ha da qui che

$$(12_1)\qquad b_n=0 \quad \text{per} \quad n\neq n_i-2,\ n_i,\ n_i+2$$

mentre per $n=n_i-2,\ n_i,\ n_i+2$, tenuto conto delle (4) e (8), otteniamo rispettivamente

$$(12_2)\qquad b_{n_i-2}=-\frac{n_i(n_i-1)}{(2n_i+1)(2n_i-1)}\,a_i,$$

$$(12_3)\qquad b_{n_i}=\frac{2(n_i^2+n_i-1)}{(2n_i+3)(2n_i-1)}\,a_i,$$

$$(12_4)\qquad b_{n_i+2}=-\frac{(n_i+2)(n_i+1)}{(2n_i+3)(2n_i+1)}\,a_i,$$

donde le (10) e (10').

c) *Quasi dappertutto in* $(-1, 1)$ *la somma* $(C, 1)$ *della serie* $\sum_{i=1}^{\infty} a_iP_{n_i}(x)$ *è uguale ad* $f(x)$.

La funzione $f(x)(1-x^2)/(1-x^2)^{\frac{1}{4}}$ è sommabile nell'intervallo $(-1, 1)$, e ne viene per un teorema di HOBSON ([4]) che il comportamento della serie di LEGENDRE (10) della funzione $f(x)(1-x^2)$ nei punti interni dell'intervallo $(-1, 1)$ è identico al comportamento della serie di FOURIER della funzione

$$[f(\cos\theta)\,\mathrm{sen}^2\,\theta]\,\mathrm{sen}^{\frac{1}{2}}\,\theta\,;$$

([4]) Cfr. E. W. HOBSON, op. cit. ([3]), pp. 318-325.

per il teorema di LEBESGUE ([5]) si ha allora che la somma $(C, 1)$ della serie (10) converge quasi dappertutto in $(-1, 1)$ verso $f(x)(1-x^2)$.

In luogo della serie (10) consideriamo l'altra

$$(13) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{n_i}$$

con

$$(14) \qquad \gamma_{n_i} = c_{n_i-2} + c_{n_i} + c_{n_i+2}$$

cioè la serie ottenuta dalla (10) associando i termini di posto n_i-2, n_i, n_i+2.

È facile verificare con le (10'), (12_2), (12_3), (12_4) che si ha

$$(15) \qquad \gamma_{n_i} = (1-x^2) a_i P_{n_i}(x).$$

Se indichiamo rispettivamente con σ_n, σ_n' le medie di CESARO di rango 1 dei primi n termini delle serie (10) e (13), per $n = n_i + k < n_{i+1} - 2$ e $k \geqslant 2$ si ha:

$$\sigma_{n_i+k} = \frac{1}{n_i+k+1} \sum_{r=1}^{i} [(n_i - n_r + k + 3) c_{n_r-2} + (n_i - n_r + k + 1) c_{n_r} + \\ + (n_i - n_r + k - 1) c_{n_r+2}],$$

$$\sigma'_{n_i+k} = \frac{1}{n_i+k+1} \sum_{r=1}^{i} (n_i - n_r + k + 1)(c_{n_r-2} + c_{n_r} + c_{n_r+2}).$$

quindi

$$(16) \qquad \sigma_{n_i+k} - \sigma'_{n_i+k} = \frac{2}{n_i+k+1} \sum_{r=1}^{i} (c_{n_r-2} - c_{n_r+2}).$$

Ora fissato il numero positivo η minore di 1, esiste una costante G dipendente soltanto da η tale che per x variabile in $(-1+\eta, 1-\eta)$ si ha ([6])

$$(17) \qquad |P_n(x)| < G n^{-\frac{1}{2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

e poichè

$$n(n-1)/(2n+1)(2n-1) < 1, \qquad (n+2)(n+1)/(2n+3)(2n+1) < 1$$

dalle (10'), (17), (9) per x in $(-1+\eta, 1-\eta)$ si ha

$$|c_{n_i-2}| < GA, \qquad |c_{n_i+2}| < GA$$

e dalla (16)

$$|\sigma_{n_i+k} - \sigma'_{n_i+k}| < \frac{4iGA}{n_i+k+1} < \frac{4iGA}{q^{i-1}},$$

e questo prova che $\lim\limits_{i\to\infty} \sigma'_{n_i+k} = \lim\limits_{i\to\infty} \sigma_{n_i+k}$ con $k \geqslant 2$, $n_i + k < n_{i+1} - 2$.

Analoga dimostrazione vale per $k = 1, 0, -1, -2$ e ne concludiamo che la

---

([5]) Cfr. L. TONELLI, op. cit. ([1]), p. 175.

([6]) Cfr. U. DINI: *Lezioni sulla teoria delle funzioni sferiche e delle funzioni di Bessel* [Pisa, 1912], p. 47; oppure: *a*) E. W. HOBSON, op. cit. ([3]), p. 299; *b*) D. JACKSON: *The Theory of Approximation* [American Math. Colloquium Pubblications, 1930], p. 28.

somma $(C, 1)$ della serie (13) ovvero, per la (15), la somma $(C, 1)$ della serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i P_{n_i}(x)$ è uguale quasi dappertutto in $(-1, 1)$ ad $f(x)$.

d) Dimostrazione del teorema enunciato.

Fissato il numero positivo η minore di 1, sia

$$\cos 2\eta_1 = 1 - \eta, \qquad 0 < 2\eta_1 < \frac{\pi}{2}$$

e consideriamo la trasformazione $x = \cos 2t$; se x varia in $(-1+\eta, 1-\eta)$ si ha

$$\eta_1 \leq t \leq \frac{\pi}{2} - \eta_1 \tag{18}$$

e quando t soddisfa questa limitazione, dall'espressione assintotica dei polinomi di LEGENDRE (7) abbiamo

$$P_m(\cos 2t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{sen} t \cos t}} \frac{1}{\sqrt{m}} \cos\left[(2m+1)t - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{A(m, t)}{m\sqrt{m}}$$

con $A(m, t)$ funzione continua di t,

$$|A(m, t)| < H, \qquad m = 1, 2, \ldots, \qquad \eta_1 \leq t \leq \frac{\pi}{2} - \eta_1; \tag{19}$$

si avrà quindi

$$\sum_{i=1}^{k} a_i P_{n_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{sen} t \cos t}} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\sqrt{n_i}} \left[\cos (2n_i+1)t - \frac{\pi}{4}\right] + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i A(n_i, t)}{n_i \sqrt{n_i}}. \tag{20}$$

La serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i A(n_i, t)/n_i\sqrt{n_i}$ quando t varia in $\left(\eta_1, \frac{\pi}{2} - \eta_1\right)$ è per le (19) e (9) minorante della serie convergente $HA \sum_{i=1}^{\infty} 1/n_i$, essa è quindi asssolutamente e uniformemente convergente in $\left(\eta_1, \frac{\pi}{2} - \eta_1\right)$. Ne viene dalla (20) che la somma $(C, 1)$ della serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\sqrt{n_i}} \left[\cos (2n_i+1)t - \frac{\pi}{4}\right]$$

esiste quasi dappertutto in $(-1, 1)$, e in virtù di un teorema di ZYGMUND (8) ne segue la convergenza della serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2/n_i$ e perciò anche la convergenza della serie $\sum_{i=1}^{\infty} 2a_i^2/(2n_i+1)$, e ciò equivale a dire che $f(x)$ è di quadrato sommabile in $(-1, 1)$.

---

(7) Cfr. U. DINI, op. cit. (6), p. 47; E. W. HOBSON, op. cit. (3), p. 299.

(8) A. ZYGMUND: *On the convergence of lacunary trigonometric series*, Fund. Mathematicae, t. XVI (1930), pp. 90-107. Qui si applica il teorema *D* di p. 97: « Se la somma $(C, 1)$,

Infine poichè la somma $(C, 1)$ della serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i P_{n_i}(x)$ converge quasi dappertutto in $(-1, 1)$ verso $f(x)$, ed è $f(x) \subset L^2$, per il teorema di KOLMOGOROFF generalizzato ([9]) anche la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i P_{n_i}(x)$ converge quasi dappertutto in $(-1, 1)$ verso $f(x)$.

§ 2.

TEOREMA. - *Se $\{n_i\}$ è una successione di numeri interi positivi soddisfacenti alla condizione*

$$n_{i+1}/n_i \geqslant q > 1, \qquad i = 1, 2, \dots \tag{21}$$

se $f(x)$ è una funzione sommabile in $(-1, 1)$ e superiormente (o inferiormente) *limitata, e se, nella serie di Fourier della $f(x)$ rispetto al sistema ortogonale e normale di polinomi di Legendre $\{[(2n+1)/2]^{\frac{1}{2}} P_n(x)\}$ sono nulli tutti i termini di indice diverso dagli n_i, cioè se abbiamo*

$$f(x) < L, \tag{22}$$

$$f(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i P_{n_i}(x), \qquad a_i = \frac{2n_i + 1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_{n_i}(x) dx, \tag{23}$$

allora la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i P_{n_i}(x)$ converge assolutamente e uniformente in qualunque intervallo $(-1+\eta, 1-\eta)$ contenuto in $(-1, 1)$ ([10]).

---

e più in generale se la somma T o T^* di TOEPLITZ di una serie trigonometrica lacunare $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos n_i x + b_i \operatorname{sen} n_i x)$ esiste in un insieme di misura positiva, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2)$ è convergente ».

([9]) Cfr. G. SANSONE: *Sulla convergenza parziale degli sviluppi in serie di funzîoni ortogonali. Estensione del teorema di Kolmogoroff sugli sviluppi in serie di Fourier*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, XIII (6), 1931, pp. 842-847.

([10]) Cfr. per le serie trigonometriche, S. SZIDON, loc. cit. ([1]).

Giova osservare che per le serie lacunari di polinomi di LEGENDRE la convergenza nell'intervallo $(-1+\eta, 1-\eta)$ non porta di conseguenza la convergenza (assoluta) della serie in $(-1, 1)$. Ad esempio la serie $\sum_{i=1}^{\infty} P_{n_i}(x)$, a causa della convergenza della serie $\sum_{i=1}^{\infty} 2/(2n_i+1)$, appartiene ad una funzione di quadrato sommabile, ed essa è per la (17), quando x varia in $(-1+\eta, 1-\eta)$, minorante della serie convergente $G\sum_{i=1}^{\infty} n_i^{-\frac{1}{2}}$, essa è quindi (assolutamente e uniformemente) convergente in $(-1+\eta, 1-\eta)$. La serie considerata è però diver-

Quando la $f(x)$ sia a variazione limitata in $(-1, 1)$ la verifica del teorema è immediata ([11]), noi vogliamo però dimostrare il teorema in generale.

a) La serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i P_{n_i}(x)$ *quando* x *varia in* $(-1+\eta, 1-\eta)$, $0<\eta<1$, *ha le sue somme parziali superiormente limitate.*

Porremo per brevità

$$a_{n_i} = a_i P_{n_i}(x) \tag{24}$$

e noi dobbiamo far vedere che la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \tag{25}$$

ha le sue somme s_m superiormente limitate in $(-1+\eta, 1-\eta)$.

Avendosi per ipotesi $f(x) < L$, un teorema di FÉJER-KOGBETLIANTZ ([12]) ci assicura che per le somme $s_m^{(2)}$ di CESARO di rango 2 vale la limitazione

$$s_m^{(2)} < L \qquad m=0, 1, 2,.... \tag{26}$$

e da questa dedurremo subito un limite superiore per le s_m.

Siccome nella serie (25), eccettuati i termini di posto n_i, gli altri sono tutti nulli, si ha

$$s_{n_k}^{(2)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_k - n_i + 2)(n_k - n_i + 1)}{(n_k + 2)(n_k + 1)} a_{n_i}$$

---

gente per $x=1$, e per $x=-1$, se gli interi n_i sono alternativamente pari e dispari, è indeterminata.

La circostanza che abbiamo ora osservata non si verifica invece per le serie trigonometriche lacunari per le quali la convergenza in un intervallo contenuto in $(0, 2\pi)$, oppure la condizione meno restrittiva che in ciascun punto di *un intervallo* sia finito uno almeno tra i due numeri massimo e minimo limite delle somme parziali della serie, porta ovunque la convergenza assoluta della serie stessa. [Cfr. A. ZYGMUND: *Quelques théorèmes sur les séries trigonométriques et celles de puissances*, Studia Mathematica, III (1931), [pp. 76-91], pp. 81-82].

([11]) Se $f(x)$ è a variazione limitata in $(-1, 1)$ e indichiamo con V la variazione totale di $f(x)$, fissato un numero positivo $\eta < 1$ esiste una costante R_η, dipendente soltanto da η, tale che per x in $(-1+\eta, 1-\eta)$ si ha

$$|a_i P_{n_i}(x)| \leq R_\eta V / n_i \qquad i=1, 2,....$$

avremo quindi in $(-1+\eta, 1-\eta)$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i P_{n_i}(x)| \leq R_\eta V \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ... + \frac{1}{n_i} + ...\right) \leq R_\eta V \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + ... + \frac{1}{q^{i-1}} + ...\right) \frac{1}{n_1}.$$

Cfr. D. JACKSON, op. cit. ([6]), p. 73.

([12]) Per le medie di HÖLDER di rango 2 cfr. L. FÉJER: *Ueber die Laplacesche Reihe*, Mathem. Annalen, Bd. 67 (1909, pp. 76-109), p. 97; per le medie di CESARO di rango 2 cfr. E. KOGBETLIANTZ: *Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la* quindi

$$s_{n_k} - s^{(2)}_{n_k} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(2n_k - n_i + 3)}{(n_k+1)(n_k+2)} a_{n_i}.$$

Dalle (9) e (17) per x variabile in $(-1+\eta, 1-\eta)$ si ha

$$|a_{n_i}| = |a_i P_{n_i}(x)| \leqslant GA = G_1 \quad (^{13}), \tag{27}$$

è pure $(2n_k - n_i + 3)/(n_k+2) < 2$, quindi

$$|s_{n_k} - s^{(2)}_{n_k}| < 2G_1 \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n_k+1} < 2G_1 \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n_k} \leqslant 2G_1 \sum_{l=0}^{k-1} \left(\frac{1}{q}\right)^l < 2G_1 \frac{q}{q-1} = G_2$$

e perciò

$$s_{n_k} < L + G_2. \tag{28}$$

b) Dimostrazione del teorema.

Come abbiamo visto nel § 1 *d)*, effettuando la trasformazione $x = \cos 2t$, la quale muta $(-1+\eta, 1-\eta)$ in $\left(\eta_1, \frac{\pi}{2} - \eta_1\right)$ si ha

$$\sum_{i=1}^{k} a_i P_{n_i}(\cos 2t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \operatorname{sen} t \cos t}} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{\sqrt{n_i}} \left[\cos (2n_i+1)t - \frac{\pi}{4}\right] + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i A(n_i, t)}{n_i \sqrt{n_i}}, \tag{29}$$

e inoltre la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i A(n_i, t)/n_i\sqrt{n_i}$ è assolutamente e uniformemente convergente per t variabile in $\left(\eta_1, \frac{\pi}{2} - \eta_1\right)$. Ma abbiamo già dimostrato in *a)* che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i P_{n_i}(\cos 2t)$ ha in ogni punto t di $\left(\eta_1, \frac{\pi}{2} - \eta_1\right)$ le sue somme parziali superiormente limitate, segue allora dalla (29) che la serie trigonometrica lacunare $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\sqrt{n_i}} \left[\cos (2n_i+1)t - \frac{\pi}{4}\right]$ ha le sue somme parziali superiormente limitate in $\left(\eta_1, \frac{\pi}{2} - \eta_1\right)$ e in queste condizioni, un teorema di ZYGMUND ([14]) ci assicura che è convergente la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|/\sqrt{n_i}$$

e perciò, per la (17), la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i P_{n_i}(x)| < G \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|/\sqrt{n_i}$$

è assolutamente e uniformemente convergente in $(-1+\eta, 1-\eta)$.

---

méthode des moyennès arithmétiques, Journ. de Mathém. pures et appl., t. III (9), [1924, pp. 107-187], p. 179 (59).

([13]) Premettendo a questo teorema il ragionamento del § 1 *a)*, si possono rendere le dimostrazioni dei due teoremi l'una indipendente dall'altra.

([14]) Cfr. A. ZYGMUND, loc. cit. ([10]).