ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIULIO ANDREOLI

Geometria completa dei trasporti rigidi su una V_2 (Metrica lineare ed angolare, trasporto di fasci di direzioni, di punteggiate)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 2 (1933), p. 199-208

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_2_199_0>

GEOMETRIA COMPLETA DEI TRASPORTI RIGIDI SU UNA V_2

(METRICA LINEARE ED ANGOLARE, TRASPORTO DI FASCI DI DIREZIONI, DI PUNTEGGIATE)

di GIULIO ANDREOLI (Napoli).

Premesse.

1. - In una recente Memoria (1) ci siamo occupati di collegare fra di loro (su una superficie immersa per semplicità nell'S_3 euclideo), con sistemazione unica, i concetti di teleparallelismo, riferimenti locali (in prossimità di un punto) e trasporti rigidi lungo una curva di un fascio di direzioni spiccate da un punto, giungendo alla conclusione che (sotto certe condizioni, per la prima delle tre definizioni) esse sono equivalenti e basate, sostanzialmente, sulle « direttissime », cioè auto-parallele; queste ultime formando un sistema ∞^2 di linee tali che, per due punti sufficientemente vicini, ne passi una sola.

Ci proponiamo, ora, in questa Memoria, di completare la geometria dei trasporti metrici su una V_2, introducendo, anche, un trasporto metrico delle punteggiate o « metrismo ».

L'idea fondamentale di tale estensione sorge da una recente nota Lincea del dott. BARBA (2), ed ha, altresì, la seguente giustificazione nella teoria dello spazio fisico.

2. - L'incurvamento di uno spazio geometrico originario prodotto da una massa attraente, obbliga, di necessità, a riferire fra loro fasci di direzione spiccate da punti distinti conducendo così ai parallelismi. Nello stesso modo, se si considerano nel cronotopo originario due rette rappresentanti moti uniformi, sorge la necessità di poterle riferire ancora dopo che, per l'incurvamento prodotto, tali rette, mutatesi in geodetiche, cessano di essere complanari.

Ciò si vedrà, esplicitamente, pel caso generale, in quanto segue.

Tuttavia, sin da ora, vogliamo far notare che l'assunzione in una V_2 di un elemento fondamentale, punto orientato, costituito da un punto e da una geodetica per esso passante, completa, ulteriormente, la nozione di spazio riemanniano; a questa, già attraverso il parallelismo si è sovrapposto il concetto di spazio

(1) G. ANDREOLI: *Parallelismi, riferimenti locali, etc.* (questi Annali, Vol. I, Ser. II, 1932).

(2) G. BARBA: *Trasporti metrici di punteggiate e trasporti rigidi di fasci.* Rendiconti R. Acc. Lincei, 1931, II.

con torsione, mentre, ora, veniamo a sovrapporre un concetto di scorrimento: la connessione di parallelismo nei fasci essendo attaccata alla torsione, così come la connessione metrica di scorrimento è attaccata alla connessione di « metrismo » delle geodetiche (o delle punteggiate) ([3]).

3. - Pertanto, una V_2 dovrà intendersi, nella geometria completa dei trasporti, come dotata della solita metrica (puntuale ed angolare) riemanniana, collegata alle geodetiche: di una torsione e di un parallelismo, vincolate alle autoparallele (o « direttissime »), ed alle curve di scorrimento nullo.

E così come le autoparallele sostituiscono la geodetica nel trasporto dei fasci da un punto all'altro, così le curve di scorrimento nullo sostituiscono il punto nel trasporto di una punteggiata (geodetica) su una altra.

Per lo studio delle curve su una V_2, si presenteranno, pertanto, tre elementi distinti:

1°) la curvatura geodetica;

2°) la curvatura di parallelismo;

3°) la curvatura di « metrismo ».

Una osservazione importante che occorre fare, riguardante una differenza formale fra le leggi di « metrismo » e quelle di parallelismo è la seguente.

Su una superficie bilatera non esistono nè riferimenti lontani nè trasporti continui capaci di invertire il senso di rotazione del fascio; viceversa esistono trasporti metrici che invertono il senso di percorso di una geodetica.

La distinzione stessa manca nel caso di una superficie monolatera.

4. - Nella Memoria precedente ed in questa noi esaminiamo esclusivamente il lato geometrico della questione: il lato analitico, che speriamo di porre presto in atto, e che deve permettere l'estensione organica alle varietà qualunque, è molto più riposto. Esso, per quanto paradossale possa sembrare, si riconnette alla teoria della integrazione delle sostituzioni del VOLTERRA ed è la via più logica per estendere, altresì, in modo compatto tali ricerche alle connessioni affini etc.

È bene rilevare che, come vi sono parallelismi assoluti, così vi sono metrismi assoluti, e che l'ordinaria rotazione di rette nel piano non è un metrismo assoluto.

Del resto, una perfetta dualità esiste fra i due concetti: dualità che sviluppata conduce a certi nuovi tipi di problemi di calcolo delle variazioni. (Cfr. le già citate Note Lincee).

5. - Noi parleremo, abitualmente, nel corso di questa Memoria di geodetiche $a, b, \dots$.

Però, tutto quanto è in essa detto, resta valido (salvo enunciati speciali), se si considerano tutte le rette (euclidee, per semplicità) tangenti nei singoli punti $P, Q, \dots$

([3]) Cfr. anche, G. ANDREOLI: *Coppie reciproche di V_2*. Nota I e II, Rendiconti R. Acc. Lincei, 1932, I.

della stessa geodetica a, purchè riferite fra loro in modo che, nello sviluppo della sviluppabile circoscritta alla superficie lungo la geodetica stessa, esse ed i riferimenti metrici su di esse vengano a coincidere, sovrapponendosi **tutte** nella unica retta-sviluppo della geodetica.

In altre parole, due diverse tangenti alla stessa geodetica risulteranno metricamente definite dal fatto che i punti di contatto hanno coordinate metriche (sulle rispettive rette) differenti fra loro per la lunghezza geodetica d'arco intercetto.

Sarà bene intendersi fin da ora che sulla natura delle rette tangenti non si farà nessuna ipotesi, se non volta per volta; quindi esse potranno essere rette euclidee, riemanniane, ecc., oppure geodetiche di una altra eventuale varietà.

In tal modo, attraverso il parallelismo ed il metrismo riuniti, si viene a realizzare il seguente fatto.

Pensata la varietà come costituita dai fasci di tangenti, e quindi dalla congruenza delle sue tangenti (a lor volta punteggiate), restano assegnate le leggi di riferimento di un connesso qualsiasi punto-retta con un altro qualsiasi della stessa congruenza: assegnato, cioè, il punto P e la tangente t, resta fissata, in un altro qualsiasi punto P_1, la tangente t_1 e su di essa il punto Q_1^* che corrispondono a (P, t), incidenti fra loro.

La memoria stessa è divisa nei seguenti paragrafi:

a) Riferimenti metrici nello spazio euclideo;

b) Riferimenti metrici su una superficie qualunque;

c) Elementi caratteristici di una curva su una V_2 ed interpretazione cinematica.

Riferimenti metrici nel piano euclideo.

6. - Consideriamo ora il piano euclideo. Il più semplice parallelismo generalizzato in esso definito è quello geodetico di LEVI-CIVITA (cioè euclideo). Per esso, dati due punti A e B, si intendono riferiti i fasci spiccati da A e da B in modo tale che la $r \equiv AB$ resti riferita a sè stessa nel passaggio da A a B; e si conservano, dopo, gli angoli per riferire fra loro due direzioni qualunque dei fasci (A) e (B).

Dualmente, è ovvio che se su ciascuna delle due rette a, b, incontrantesi in R, è stabilito un sistema di coordinate metriche, il modo più semplice di riferire le misure avvenute sulle rette a e b è quello di considerare il punto R, come avente lo stesso riferimento (coordinata) tanto su a, quanto su b.

Però, se noi nel piano euclideo abbiamo un parallelismo generalizzato, avverrà che nel riferimento del fascio (B) a quello (A) la direzione da A verso B non è quella corrispondente uscente da B: cioè, non coincidono ambedue con la retta orientata AB. Quindi, è avvenuta una rotazione e nello spazio si è presentata una torsione.

Dualmente, potremo ammettere che nel riferimento di b ad a, il punto R non corrisponda a sè stesso: cioè che sia avvenuto uno scorrimento: come nel primo caso il trasporto ha fatto rotare il fascio su sè stesso, così, nel secondo caso, il trasporto ha fatto scorrere la retta su sè stessa; quindi, nello spazio, si è presentato uno « scivolamento ».

Se una curva è tale che lungo di essa si corrispondono metricamente le tangenti orientate, facendosi corrispondere i punti di contatto, questa curva sarà detta di scorrimento nullo (duale delle autoparallele). In tali curve si può pensare che la tangente scivoli completamente senza rotolare.

7. - Esaminiamo, ora, più da vicino il riferimento metrico nel caso del piano euclideo. Il tipo più semplice di metrismo è quello pel quale le curve (inviluppo) di scorrimento nullo si riducono ai punti.

Dato, dunque, un trilatero, a lati orientati, a, b, c, per riferire metricamente a a b si farà rotare a attorno al punto $C \equiv (a, b)$ fino a coincidere con b. E per quanto in questo caso non vi sia luogo a distinzione, converremo che la rotazione avvenga nel verso positivo degli angoli crescenti, andando da a verso b. In tal modo, al punto C corrisponde sè stesso sulle due punteggiate.

Similmente, per trasportare b su c, occorrerà far rotare b attorno al punto $A \equiv (b, c)$, fino a farlo coincidere con c, sempre nel senso degli angoli crescenti. In tal modo, però, il punto C viene ad assumere una posizione C_1 sulla C, distante da A, nel verso negativo, di AC. Similmente, nel riferire c ad a, si farà rotare intorno al punto $B \equiv (a, c)$ nel solito modo; il punto C_1 viene ad assumere una nuova posizione C_2 tale che $C_2B = BC_1$.

Sicchè, in definitiva, nel riferimento, successivo di a con sè stesso, attraverso b e c, il punto C viene ad assumere una posizione di riferimento C_2 situata nel verso negativo della a e tale che la distanza C_2C sia il perimetro del triangolo.

Se, più generalmente, si vuole eseguire il trasporto per metrismo (con curve di scorrimento nullo, date dai punti), lungo una qualunque curva γ, di una sua tangente t (orientata) in un punto A, sino a ritornare in A stesso, ciò si deve intendere come limite di riferimenti successivi lungo i vertici $A_1, A_2, A_3, \ldots$ su γ, allorchè l'insieme dei punti $[A_n]$ diventa denso su γ stesso.

Dunque, ripetendo il ragionamento fatto in precedenza, si vedrà che al punto A viene a corrispondere, dopo il trasporto, un punto A_γ situato sulla tangente, nel verso negativo, in modo che $A_\gamma A$ sia la lunghezza di γ.

Questo è lo *« scivolamento » collegato al ciclo γ.*

Lo scivolamento stesso è uguale per tutti i punti del ciclo.

8. - Se adesso proviamo a riferire la retta orientata a alla stessa retta, orientata in senso opposto, $\bar{a}$ (sempre avendo i punti come rette di scorrimento nullo) per l'intermediario di una qualsiasi altra retta b, osserveremo, senz'altro, che

nel riferimento di a ad $\bar{a}$, con tale intermediario si otterrà una simmetria metrica attorno al punto $B \equiv (a, b)$.

Similmente, eseguendo il riferimento attraverso una qualunque retta c, si otterrà un'altra simmetria di centro $C \equiv (a, c)$.

Pertanto, nel riferimento dianzi detto (i punti sono le curve di scorrimento nullo) di a con $\bar{a}$, resta assolutamente indeterminato il centro di simmetria e quindi il riferimento metrico stesso.

Si osservi, in generale, che, nel caso di trasporto lungo una curva γ, non si avrà mai la possibilità di riferire a ad $\bar{a}$ a meno che la curva γ non presenti una (od un numero dispari di) cuspide, in quanto, solo in una cuspide, pensata come caso limite di cappio, può avvenire, precisamente, l'inversione del senso della tangente.

9. - Se vogliamo un altro tipo di trasporti metrici nel piano euclideo, si può pensare, ad esempio, ad assumere come curve di trasporto, dei cerchi di raggio assegnato.

Con la condizione imposta di avere archi crescenti, si vede che tali cerchi dovranno tutti risultare interni alle zone angolari del trilatero, ed il trasporto lungo un qualunque trilatero di a su a stesso, darà, come scivolamento finale un segmento eguale al perimetro del triangolo diminuito del doppio dei segmenti di tangente determinati dai vertici e dai cerchi; ovverosia del doppio della somma

$$\varrho \cdot \left[\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right].$$

Quindi, tale segmento rappresenta lo svivolamento connesso al trilatero.

Se, più generalmente, si esegue il trasporto continuo lungo una curva γ, si otterrà, come scivolamento, il segmento dato dal perimetro del contorno γ diminuito del limite che si ottiene considerando γ come formata da un inviluppo poligonale di cerchi di raggio ϱ.

Quindi esso risulterà eguale al perimetro della curva γ, diminuito del perimetro del cerchio di raggio ϱ, se la curva γ è convessa, per semplicità.

In particolare si ritrova che il cerchio di raggio ϱ è una curva di scorrimento nullo.

Si osservi, anche qui, che risulta indeterminato il riferimento di una qualsiasi retta orientata a, con l'altra inversa $\bar{a}$.

Infine, osserviamo che le curve di scorrimento nullo devono sempre essere tali che:

a) trasportando a su b e b su a, i due archi di curva devono risultare tangenti negli stessi punti A e B;

b) che il riferimento metrico di a a $\bar{b}$, oppure di b ad $\bar{a}$ avviene lungo lo stesso arco di curva percorso, la prima volta, nel senso degli archi crescenti, la seconda, nel senso inverso.

10. - Se avviene che, nel riferimento di una retta orientata a ad una b, pel tramite di una generica retta c, si trovi, sempre, lo stesso riferimento, qualunque sia c, avremo definito nel piano euclideo un *metrismo assoluto*.

Ciò significa, sostanzialmente, che, su ogni retta a resta fissato un punto A. Allora, due rette a e b si riferiranno in modo che al punto A dell'una corrisponda il punto B dell'altra, e si vede che, riferendo a a b e b a c, si avrà lo stesso risultato che col riferimento diretto.

Inoltre, percorrendo un qualsiasi ciclo che da a faccia ritornare ad a, il punto A ritornerà in A, quindi, il metrismo assoluto è anche senza residuo. Avviene, cioè, la stessa scelta che nel parallelismo assoluto, di punti orientati.

Se, adesso, partiamo dal punto A e costruiamo la curva di scorrimento nullo tangente in A, veniamo ad avere una semplice infinità di rette del piano, cioè tutte le tangenti a quelle inviluppo, riferite fra loro attraverso i punti di contatto. Ripetiamo la stessa operazione per tutti gli altri punti della retta a: verremo, così, ad avere tutte le ∞^2 rette distribuite in ∞^1 serie di inviluppi. In analogia col parallelismo riterremo che:

1°) le rette dello stesso inviluppo sono riferite, l'una all'altra nel modo anzidetto;

2°) che le rette di due di tali inviluppi distinti, si devono riferire, metricamente, facendo corrispondere i punti di contatto.

Ma adesso occorre completare il sistema delle ∞^2 curve di scorrimento nullo: per fare ciò, dovremo tener presente la condizione 2°) ora detta.

In altri termini le curve inviluppo di scorrimento nullo devono, altresì, essere tali che permettano di passare da una retta tangente ad una curva del sistema fondamentale ad una altra tangente ad altra curva dello stesso sistema, tenendo presente il vincolo costituito dalla condizione 2ª). Ma poichè tutte le curve del sistema fondamentale sono tangenti alla retta a nei suoi diversi punti, in tale riferimento dovrà risultare il metrismo come caratterizzato dal passaggio dal punto A al punto B di tale retta.

In altri termini, le altre curve di scorrimento nullo dovranno essere collegate a quelle del sistema fondamentale in modo che avendole distribuite in una semplice infinità di sistemi, ciascuno di questi risulti composto da curve tali che il segmento intercetto fra la tangente comune ad essa ed a una curva del sistema fondamentale, risulti costante. Si scorge la perfetta dualità col parallelismo assoluto: per brevità chiameremo *sistemi isometrici* ad un certo sistema dato quelli che godono della proprietà ora detta, di segmenti tangenziali costanti. È ovvio che due sistemi isometrici ad un terzo sono anche isometrici tra di loro.

Quindi, un metrismo assoluto si otterrà:

a) assegnando un sistema fondamentale di curve di scorrimento nullo (con le condizioni dette dianzi);

b) considerando tutti i sistemi isometrici a quello fondamentale.

Si otterranno, così, le ∞^2 curve di scorrimento nullo.

Come esempio di un metrismo assoluto nel piano daremo il seguente.

Consideriamo una retta, consideriamone i suoi punti come inviluppo costituenti il sistema fondamentale.

È ovvio che i sistemi delle curve isometriche sono dati semplicemente dalle trattrici rispetto a questa retta.

Tali sistemi di trattrici definiscono un metrismo assoluto nel piano euclideo.

Riferimenti metrici sopra una superficie qualunque.

11. - Passiamo, ora, ad una superficie, per semplicità immersa in un S_3. Dati, allora, due suoi punti A e B, infinitamente vicini e portati i piani tangenti α e β, il riferimento geodetico di LEVI-CIVITA, com'è noto, avviene facendo rotare β attorno alla sua intersezione con α, sino a sovrapporsi e prendendo, poi, il riferimento euclideo ordinario.

Invece, il riferimento di parallelismo generalizzato, avverrà prendendo successivamente, nel piano euclideo, un parallelismo generalizzato, oppure (se si vuole una realizzazione più perspicua) facendo ruotare la retta d'intersezione del piano rotante β col piano fisso α attorno ad uno dei suoi punti, mentre che il piano β ruota attorno ad essa.

Per vedere che cosa accade nel « metrismo », consideriamo le due geodetiche a e b incontrantesi nel punto R della superficie; se si considera il piano ϱ tangente in R, basterà applicare in esso quello che si è detto per il piano euclideo.

In altri termini, costituite le due sviluppabili circoscritte alla superficie lungo a e b, allorchè una di esse si va a sovrapporre all'altra avviene, anche, uno scorrimento: cioè, il piano ruotante, nell'avvicinarsi a quello fisso, scorre su sè stesso, con una traslazione.

Definiamo, ora, il riferimento metrico generalizzato su una V_2: tale definizione sarà analoga a quello di parallelismo generalizzato. Ricordiamo, sempre, che, come si è detto in principio: si può tanto riferire direttamente le geodetiche a e b, quanto tutti i sistemi di rette tangenti ad a e tutte quelle tangenti a b, con le condizioni già dette.

Pertanto, assegnate due generiche geodetiche a e b, noi diremo di averle riferite allorchè, su di esse, fissato un verso, si corrispondono un punto P della prima ed un punto Q della seconda, restando subordinata la corrispondenza fra gli altri punti della prima e della seconda geodetica alla condizione di avere eguali distanze geodetiche da P e da Q, e uguale verso.

Si vede agevolmente che, ove le due geodetiche siano ambedue chiuse e di lunghezza diversa, ad un punto della prima corrispondono ∞ della seconda e reciprocamente: tuttavia, opportune convenzioni permettono di eliminare inconvenienti in proposito e cioè, ad esempio, sia riferendosi ad intorni sufficientemente piccoli dei punti Q e P, sia riferendosi ad intorni sufficientemente piccoli di un punto di intersezione prefissato delle due geodetiche stesse, se esiste, sia aprendo, opportunamente la superficie e considerandone una parte. Se la superficie fosse monolatera, occorrerà eventualmente considerare le geodetiche chiuse come percorse due volte.

In ogni caso, il considerare le porzioni sufficientemente piccole della superficie, potrebbe importare che nelle porzioni delle due geodetiche a e b, comprese su di essa, al punto P corrisponda il punto Q^* fuori della porzione; ma, in tal caso, se noi conveniamo di assegnare nel riferimento delle geodetiche a e b, un numero relativo corrispondente alla distanza da due altri punti corrispondentisi, tale numero basta a caratterizzare, completamente, la corrispondenza metrica tra a e b.

Infine, se si considerano geodetiche spiccate dallo stesso punto, allora, il riferimento riesce particolarmente semplice in quanto, basterà convenire che, nel passaggio da a a b, il punto P passi ad un punto P_1 della b e quindi vi sia uno scivolamento.

12. - Nel riferimento di due geodetiche a e b, occorre ovviamente, tener presente che lo slittamente subito dal punto P nel riferire a a b, dev'essere eguale e contrario a quello subito nel riferire b ad a. Ed inoltre che, per ovvii motivi di continuità, al tendere di b ad a, lo slittamento tenda a zero. Ben si intende che il riferimento deve essere tale da tener conto del verso (orientamento); e quindi, una geodetica a devesi considerare distinta dalla $\bar{a}$ (cioè da sè stessa con senso invertito). In effetti, già nel caso euclideo, si presenta tale evenienza, com'è noto.

13. - Consideriamo ora una geodetica a; su di essa un punto P, per questo punto una altra generica geodetica a_1, facente un angolo infinitesimo con a, sulla quale il punto corrispondente sia P_1, e si operi così continuando. Si verrà così, a costituire, con i punti P, P_1,.... e le rette a, a_1,.... una poligonale a lati infinitesimi, avente la proprietà che su un lato qualunque il relativo punto P corrisponpe agli altri. Al limite avremo una curva inviluppo di geodetiche, la quale avrà la proprietà che lungo di essa due qualsiasi geodetiche tangenti ad essa stessa, si corrispondono metricamente facendo corrispondere i relativi punti di contatto.

In altri termini, con tale procedimento e col passaggio al limite si è venuto a costituire un metrismo assoluto lungo la curva e pertanto, date tre qualsiasi tangenti t, t', t'' queste si corrispondono metricamente in modo che si corrispondono precisamente i punti di contatto P, P', P''; e pertanto il riferimento di P'' a P o direttamente o per l'intermediario di P' avviene, sempre, nello stesso modo.

Quindi, sulla V_2, noi veniamo a costituire un sistema ∞^2 di curve tale che, genericamente, ne esista una sola tangente a due geodetiche assegnate: nel caso piano euclideo o sferico, tali curve inviluppo si riducono, precisamente, ai punti.

14. - Se il metrismo è assoluto, date le tre geodetiche a, b, c e costruite le tre curve di scorrimento nullo $\{a, b\}$, $\{b, c\}$, $\{c, a\}$, avverrà quanto segue.

La $\{a, b\}$ sia tangente ad a nel punto P; trasportata, quindi, la stessa a lungo la $\{a, b\}$ fino a coincidere con la b, il punto P coinciderà sempre col punto di contatto e quindi, lo stesso riferimento. Ora la b dev'essere trasportata sulla c lungo la $\{b, c\}$; questa, in generale, risulterà tangente a b in un punto Q; quindi, nel trasporto della b sulla c noi avremo il segmento PQ da riportare dal punto di contatto, nel senso voluto.

Infine, se trasportiamo c su a, dovremo tener presente un terzo punto di contatto R, il quale darà luogo ad un altro segmento QR: e quindi, complessivamente, il riferimento di a ad a attraverso b e c porterà uno scorrimento dato dal segmento PR.

Per realizzare tale metrismo assoluto basterà ripetere le stesse considerazioni che nel caso di quello del piano euclideo.

Quindi, si assegnerà un sistema arbitrario di curve di scorrimento nullo ed il metrismo sarà costituito per mezzo di tutti i sistemi isometrici a quello.

Elementi caratteristici di una curva su una V_2 dotata di metrismo e di parallelismo. Interpretazione cinematica.

15. - Consideriamo ora una curva generica della V_2, supposta assegnata con metrismo e parallelismo, ed assumiamo come elemento fondamentale il punto orientato. La curva consterà di una semplice infinità di punti orientati, se la si suppone percorsa in un certo senso.

Siano $[P, t]$, $[P_1, t_1]$ due suoi punti orientati sufficientemente prossimi.

Per passare dal 1° al 2°, occorre tener presente diversi elementi.

a) Anzitutto consideriamo la corda (geodetica) $PP_1 \equiv \Delta s$ e l'angolo delle geodetiche orientate $(\widehat{t, t_1})$. Il rapporto di tale angolo (di contingenza) $\Delta\omega$, all'elemento d'arco, tenderà alla curvatura geodetica, allorchè P_1 tende a P.

b) Consideriamo, invece, l'angolo $\Delta\alpha$, di parallelismo formato in P dalla t^* parallela a t_1, con la t stessa.

Il rapporto di tale angolo all'elemento d'arco, definirà, al limite, la curvatura di parallelismo, e se si vuole avere una misura numerica del riferimento di parallelismo lungo la curva data, si potrà assumere il rapporto $\Delta\alpha/\Delta\omega$ come carattere di parallelismo; sicchè, in sostanza, tale carattere risulterà il quoziente della curvatura di parallelismo e di quella geodetica.

c) Infine, per tener conto del metrismo, consideriamo il segmento PP^* caratterizzato dal punto P^* che nel metrismo assegnato corrisponde, sulla t, al punto P_1 della $t_1 : \Delta\lambda$. Il rapporto $\Delta\lambda/\Delta s$, sarà il carattere di metrismo della curva considerata. Tale carattere risulta, ovviamente, nullo per le curve di scorrimento nullo

16. - Diamo, ora, una semplice interpretazione cinematica dei metrismi e parallelismi nel piano euclideo: ove, poi, mediante le sviluppabili circoscritte lungo una curva si passi dalla considerazione della curva sulla superficie, alla curva piana, si avrà l'interpretazione anche nel caso generale della V_2. Per quanto seguirà risulta chiaramente che una V_2, considerata come munita di parallelismo e di metrismo si può pensare come limite di una superficie poliedrica nella quale le singole facce ricevano delle rotazioni su loro stesse caratterizzanti il parallelismo; e degli scorrimenti su loro stesse, caratterizzanti il metrismo.

Sia dato, dunque, nel piano euclideo, munito di parallelismo e di metrismo, una qualsiasi linea γ aperta o chiusa.

Un osservatore, connesso con il punto tangente che scorre lungo la curva, vedrà che a causa del parallelismo, il fascio connesso ad ogni punto della curva sembra rotare, mentre, il primitivo punto di contatto scivolerà lungo la tangente allontanandosi dal punto di contatto attuale in misura diversa che non quella data dalla lunghezza effettivamente percorsa e ciò a causa del metrismo.

Pertanto, se in ogni punto della curva piana, si conduce la parallela alla tangente primitiva, dopo aver percorso tutto l'arco, l'osservatore misurerà un angolo dato dalla differenza fra l'angolo effettivo delle due tangenti estreme e l'angolo dovuto alla retta che trasportata per parallelismo lungo la curva, corrisponde nel secondo estremo, alla tangente al primo.

Similmente, in quanto a distanza, misurerà un percorso dato dalla differenza fra lunghezza d'arco e scorrimento totale. Se pensiamo alla realizzazione cinematica del trasporto effettivo di una tangente iniziale, col rispettivo punto di tangenza, lungo la curva γ, vedremo che tale trasporto può essere considerato come ottenuto con le ben note due curve Γ e Γ_1 che rotolano, l'una sull'altra, nel piano: e l'angolo osservato e la lunghezza misurata risulteranno, rispettivamente differenti dall'angolo delle tangenti estreme della γ e della sua lunghezza, per quantità che sono date, rispettivamente, dall'angolo delle tangenti estreme della Γ e dalla lunghezza della stessa. Sostanzialmente, nelle curve autoparallele vi è rotolamento puro senza strisciamento, sicchè la coppia cinematica Γ, Γ_1 è data dalla curva autoparallela e dalla retta tangente.

17. - Ad un qualunque circuito γ di una V_2, corrisponderanno sul piano euclideo, come immagini, tre distinti archi, e precisamente, oltre quello che ha in ogni punto l'angolo di contingenza $\Delta\omega$ e l'arco Δs della curva data, un secondo di solo parallelismo, nel quale è considerato il Δs, ma è modificato l'angolo in relazione al parallelismo; vi è poi l'altro, nel quale è conservato l'angolo di contingenza geodetica ma è modificata la lunghezza, in relazione allo scorrimento; infine, un ultimo complessivo (immagine di trasporto completo) nel quale si tien conto di ambedue le cose.

La effettiva costruzione di tali immagini si farebbe seguendo il metodo da noi indicato nella Memoria sul parallelismo.