ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CHARLES DE LA VALLÉE POUSSIN

Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 2 (1933), p. 167-197

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_2_167_0>

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS HARMONIQUES DANS UN DOMAINE OUVERT LIMITÉ PAR DES SURFACES À COURBURE BORNÉE

par CHARLES DE LA VALLÉE POUSSIN (Louvain).

§ 1. - Propriétés d'un potentiel de couche [1].

1. - Surfaces à courbure bornée. — Nous disons qu'une surface S est *à courbure bornée* si elle admet un plan tangent en chaque point et si l'angle des normales en deux points infiniment voisins Q_0 et Q est un infiniment petit d'ordre au moins égal à la distance Q_0Q des deux points. Dans ce cas, la distance du point Q au plan tangent en Q_0 à la surface est un iufiniment petit du second ordre au moins par rapport à la distance Q_0Q. De plus, il est immédiat que la surface est *quarrable.*

Dans ce Mémoire, nous considérerons des domaines d'un nombre quelconque (mais limité) de connexions, et qui seront toujours supposés bornés par des surfaces (simples ou multiples) soumises aux conditions précédentes.

2. - Théorème I. — *Si une masse positive μ est repartie d'une manière quelconque sur une surface S à courbure bornée et que l'on mène une normale en un point O de cette surface, les actions exercées par cette masse sur deux points P et P' de masse 1 placés sur cette normale de part et d'autre à la même distance du point O, sont symétriques, à une dtfférence près dont le module ne peut surpasser l'expression*

$$k[u(P)+u(P')],$$

où k est une constante qui ne dépend que la surface S, et où $u(P)$ désigne le potentiel dû à la couche au point P.

Si la surface S est plane, les actions exercées par la couche sur les deux

---

[1] Nous avons établi les propriétés correspondantes pour un potentiel de ligne dans notre article: *Utilisation de la méthode du balayage dans la théorie de la représentation conforme.* Bull. de la Classe des Sciences de l'Ac. Royale de Belgique, 5e série, t. XVIII, mars 1932. Un résumé succinct des résultats obtenus dans le présent Mémoire a paru dans les Comptes rendus de l'Ac. des Sciences de Paris, t. 195 (séance du 4 juillet 1932). Pour le cas du plan, voir notre Note des Comptes rendus (du 11 juillet 1932).

points symétriques P et P' sont évidemment symétriques aussi. Le cas général se ramène au précédent, comme nous allons le montrer, par l'*aplanissement* de la surface.

Menons en O le plan tangent à la surface. Projetons les éléments d'aire dS sur ce plan avec les masses élémentaires $d\mu$ qu'ils portent. Cette déformation altère l'action exercée par la couche sur le point P de la normale en O dans une mesure qu'il s'agit de déterminer.

Soient $d\mu$ la masse potentiante en un point Q de la surfaoe S, et Q' la projection du point Q sur le plan tangent. Prenons le point potentié P comme origine de la variable complexe z dans le plan POQ et désignons par z et z' les vecteurs PQ et PQ' de modules r et r'. Les actions exercées sur le point P par la masse $d\mu$ sont, selon que $d\mu$ est en Q ou en Q', symétriques (par rapport à l'axe réel) des vecteurs $d\mu : rz$ ou $d\mu : r'z'$. La différence géométrique des deux actions a donc pour module

$$d\mu \left| \frac{1}{rz} - \frac{1}{r'z'} \right| .$$

Or on a

$$\frac{1}{rz} - \frac{1}{r'z'} = \frac{1}{r}\left(\frac{z'-z}{zz'} + \frac{r'-r}{r'z'} \right).$$

Observons que z et z' sont de modules supérieurs à leur projection commune OQ' sur le plan tangent, que $z'-z$ a pour module QQ' et que le module de $r'-r$ est inférieur au précédent. Il vient donc

$$\left| \frac{1}{rz} - \frac{1}{r'z'} \right| < \frac{1}{r}\,\frac{2QQ'}{(OQ')^2} < \frac{k}{r},$$

où k est une constante qui ne dépend que de la surface S. En effet, quand OQ' tend vers zéro, le quotient $(QQ'):(OQ')^2$ est borné puisque la surface est à courbure bornée (n.º 1).

L'altération de l'action exercée sur P par le déplacement de la masse élémentaire $d\mu$ est donc inférieure en valeur absolue à $kd\mu : r$, et celle de l'action exercée par la couche entière est alors inférieure à

$$k \iint \frac{d\mu}{r} = ku(P).$$

Enfin la différence des actions exercées sur les deux points P et P' est inférieure à la somme géométrique des différences d'action que le redressement de la couche détermine sur chacun d'eux. Elle est donc de module inférieur à

$$ku(P) + ku(P').$$

Remarque. - La démonstration précédente suppose implicitement que les éléments de masse $d\mu$ se projettent séparément sur le plan tangent au point O et que le segment OQ' ne tende vers zéro qu'avec OQ. Cette condition est toujours réalisée si l'on considère une portion suffisamment petite σ de la surface S au voisinage du point O. Cependant le théorème est général, *il suppose seulement que les deux points P et P' pris sur la normale soient plus voisins du point O que de tout autre point de la surface.* En effet, la formule s'applique à fortiori à l'action exercée par la portion σ de la couche S; et elle s'applique aussi à l'action exercée par la couche restant $S-\sigma$, mais en augmentant au besoin la valeur du coefficient k, car, vu l'hypothèse faite sur σ, cette couche est à une distance des points P et P' supérieure à un minimum assignable à priori et ne peut, par conséquent, exercer sur ces points qu'une action bornée. Donc, moyennant une valeur convenable de k, la formule s'applique à la couche entière.

3. - **Théorème II.** — *Supposons qu'une masse posilive μ soit répartie sur une surface S à courbure bornée et ayant deux côtés distincts; si l'action qu'elle exerce sur un point P de masse* 1 *varie d'une manière uniformément continue quand le point P se déplace d'un côté de la surface et peut en toucher le bord, la même chose à lieu quand le point P se déplace de l'autre côté de la surface: l'action varie aussi d'une manière uniformément continue.*

Observons d'abord que si une masse superficielle positive exerce une action bornée, son potentiel est borné à fortiori. Dans ce cas, le potentiel u dû à une portion σ de la surface S tend uniformément vers zéro avec l'aire de σ.

Il n'y a lieu à démonstration pour le théorème énoncé que si le point P est infiniment voisin de la surface, et il est alors situé sur la normale en un point O de la surface infiniment voisin de P. Soit P' le point de cette normale qui est le symétrique de P relativement au point O. Il faut montrer que l'action de la couche varie d'une manière continue sur P' comme on le suppose sur P quand ces deux points se déplacent simultanément.

Menons, du point O comme centre, une sphère enfermant une portion σ de la surface S, et soit $S-\sigma$ le reste de la surface. L'action exercée par $S-\sigma$ sur P et sur P' varie d'une manière continue quand ces points se déplacent. Il s'ensuit d'abord que l'action exercée sur P par σ varie aussi d'une manière continue (puisque l'action totale est continue). L'action exercée par σ sur P' est symétrique de la pɹécédente, à une différence près inférieure à $ku(P)+ku(P')$, donc aussi petite que l'on veut avec σ (car le potentiel u dû à σ tend uniformément vers zéro avec σ).

Donc l'action exercée sur P' par la masse entière est continue, à un infiniment petit près assignable à priori; donc elle est continue et elle l'est uniformément.

4. - **Corollaire.** — *Si le potentiel engendré par une couche superficielle positive, répandue sur una surface S à conrbure bornée, admet des dérivées premières continues d'un côté de la surface* (*bord compris*), *il en est de même de l'autre côté.*

Ce théorème se ramène au précédent puisque l'action exercée par la masse potentiante s'exprime par les dérivées premières du potentiel.

5. - **Théorème III.** — *Si une masse positive μ est répartie sur une surface S à courbure bornée, et si le potentiel U qu'elle engendre admet des dérivées premières uniformément continues d'un côté de la surface, cette masse est répartie sur S suivant une densité ϱ qui est une fonction continue du point Q de la surface, et qui s'exprime par la formule de Poisson*

$$\varrho = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'}\right),$$

dans laquelle les dérivées de U sont prises au point Q suivant les deux normales de sens opposés à la surface.

Enfermons une portion ΔS de la surface, comprenant le point Q, à l'intérieur d'une petite surface fermée simple Σ. La masse $\Delta\mu$ portée par ΔS et contenue dans Σ se calcule par l'intégrale suivante, faisant intervenir la dérivée normale extérieure,

$$\Delta\mu = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\Sigma.$$

Comme, en vertu du théorème précédent, les dérivées de U sont continues jusque sur le bord de S, nous pouvons aplatir la surface Σ sur ΔS jusqu'à ce quelle se confonde avec les deux bords de ΔS. Il vient alors

$$\Delta\mu = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\Delta S} \left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'}\right) dS.$$

Appliquons le théorème de la moyenne. Cette intégrale est égale au produit de ΔS par une valeur moyenne de la fonction à intégrer. Mais les dérivées sont continues et, ΔS tendant vers zéro, nous pouvons les remplacer par leurs limites qui sont leurs valeurs au point Q. Il vient ainsi, par définition de la densité au point Q,

$$\varrho = \lim \frac{\Delta\mu}{\Delta S} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial n} + \frac{\partial U}{\partial n'}\right).$$

C'est la formule de POISSON ([2]). Elle prouve que la densité ϱ est continue en même temps que les deux dérivées normales.

6. - **Théorème IV.** — *Sous les mêmes conditions, la différence des deux dérivées normales de sens oppcsés en un point O de la surface poten-*

([2]) C'est POISSON qui a démontré le premier cette formule dans su généralité, mais la démonstration n'est pas irréprochable (Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1911). La formule avait été pressentie antérieurement par COULOMB (mêmes Mémoires, 1788).

tiante S, est égale au double de l'action normale exercée sur le point O par la couche considérée à l'exclusion du point O.

En effet, soit σ un élément de la surface S contenant le point O et soit $S-\sigma$ le reste de la surface. Soient u le potentiel dû à σ et $U-u$ celui du reste. Les actions normales de sens opposés dues à σ sont égales, à une quantité près qui est infiniment petite avec σ et u (en vertu du théorème I); les actions normales de même sens dues à $S-\sigma$ sont les mêmes de part et d'autre du point O. Les premières se retranchent et les secondes s'ajoutent quand on fait la différence des dérivées normales de sens opposés au point O. Donc le théorème se démontre en faisant tendre σ vers zéro.

§ 2. - Propriétés de la couche provenant d'un balayage ([3]).

7. - Définition du domaine D. — Il doit être entendu (sauf affirmation explicite du contraire) que le domaine D dont il s'agit dans les théorèmes suivants est un domaine d'un seul tenant, d'un ordre fini de connexion, et dont la frontière S est formée par une surface ou plusieurs surfaces séparées à courbure bornée (n.° 1). La frontière ne comporte donc ni ligne ni point exceptionnels.

8. - Densité de la couche provenant du balayage d'une masse ponctuelle. — Soit P un point intérieur au domaine D et portant la masse 1. Le balayage du domaine répartit cette masse sur la frontière suivant une couche qui conserve, à l'extérieur et sur la frontière, le potentiel initial du point P. Soit, après le balayage, U le potentiel dû à cette couche. Celui-ci admet des dérivées premières continues à l'extérieur de D; donc, en vertu du théorème III, la couche admet une densité ϱ déterminée par la formule de POISSON et qui est une fonction continue du point Q sur la surface.

Cette densité est aussi une fonction continue du point potentiant P. Pour le montrer, enfermons P dans une sphère fixe Σ intérieure à D. Si l'on commence par balayer Σ, la densité de la couche est fonction continue de P en chaque point sur la surface sphérique. Si ensuite on balaye le domaine D contenant cette couche, il apparait immédiatement que la densité de la couche repartie sur S variera d'une manière continue avec celle de la couche répartie sur la surface sphérique ([4]).

Si le point P tend vers un point Q de la surface S, la densité augmente

---

([3]) Nous supposons connus les principes de la méthode du balayage tels que nous les avons exposés dans notre Mémoire: *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et principe de Dirichlet* (Ann. de l'Institut H. Poincaré, 2, III, 1932, p. 169-232).

([4]) Car chaque élément d'aire sur la sphère est assimilable à un point *fixe* dont la masse éprouve des variations relatives infiniment petites.

indéfiniment au point Q. Il est essentiel d'établir l'expression asymptotique de cette densité.

Pour cela, appliquons le théorème I, en considérant deux points P et P', situés sur la normale au point Q de la surface et qui viennent, à la limite, coïncider avec ce point. Les deux dérivées normales opposées, mesurant les actions normales, sont égales entre elles, à une différence près qui ne peut surpasser $2ku(Q)$. Nous pouvons donc écrire, en éliminant la dérivée normale intérieure de la formule de POISSON,

$$\varrho = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U}{\partial n} + \xi.$$

Cette formule ne contient plus que la dérivée sur la normale extérieure à D, et l'on a

$$|\xi| < \frac{1}{2\pi} kU(Q).$$

Désignons par r la distance PQ du point P (porteur de la masse balayée) au point Q de la surface S, et par φ l'angle de ce rayon PQ avec la normale extérieure à la surface. Nous avons

$$U(Q) = \frac{1}{r}, \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\cos\varphi}{r^2};$$

par conséquent,

$$\varrho = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2} + \xi, \qquad |\xi| < \frac{1}{2\pi}\frac{k}{r},$$

D'après le théorème précédent, la quantité $2\pi\xi$ mesure l'action normale exercée sur le point Q par la couche répartie sur la surface S entière, à l'exclusion d'une aire infiniment petite contenant le point Q.

9. - Théorème. — *Supposons que le point P qui porte l'unité de masse à balayer, tende normalement vers un point Q de la surface S (c'est-à-dire en suivant la normale en ce point). De P comme sommet, menons un cône de révolution autour de la normale PQ dont l'angle solide au sommet ait une valeur fixe $\gamma < 2\pi$. Ce cône limitera autour de point Q une portion infiniment petite σ de S. Je dis que la masse portée par σ après le balayage a pour limite $\gamma : 2\pi$.*

La masse portée par σ a pour valeur, d'après la formule précédente,

$$\iint_\sigma \varrho d\sigma = \frac{1}{2\pi}\iint_\sigma \frac{\cos\varphi d\sigma}{r^2} + \iint_\sigma \xi d\sigma.$$

Mais, en désignant par $d\gamma$ l'angle solide sous lequel $d\sigma$ est vu du point P, on a

$$\frac{1}{2\pi}\iint_\sigma \frac{\cos\varphi d\sigma}{r^2} = \frac{1}{2\pi}\iint_\sigma d\gamma = \frac{\gamma}{2\pi}.$$

Il suffit donc de montrer que, quand P tend vers Q, l'intégrale de $\xi d\sigma$ tend vers zéro. C'est la conséquence du théorème de la moyenne. On a, en effet,

$$\frac{2\pi}{k}\iint_\sigma |\xi|\, d\sigma < \iint_\sigma \frac{d\sigma}{r} = \iint_\sigma \frac{r d\gamma}{\cos\varphi} < \gamma \max \frac{r}{\cos\varphi}.$$

Or, dans le cône, r a pour limite 0; et la borne supérieure de φ à la limite est $<\frac{\pi}{2}$, car c'est l'inclinaison de la génératrice dn cône sur son axe. Donc cette dernière expression tend vers 0 avec r.

10. - Corollaire. — Il résulte du théorème précédent que si l'on assigne au cône un angle solide γ suffisammen voisin de 2π, la masse portée à la limite par l'aire σ interceptée par le cône sera aussi voisine que l'on veut de l'unité, tandis que celle portée par le reste de la surface frontière S sera rendue aussi petite que l'on voudra.

11. - Lemme ([5]). — *Soit Γ une sphère intérieure au domaine D et tangente à la surface S au seul point Q. Supposons que D renferme une certaine masse positive, également contenue tout entière dans Γ. Nous pouvons répartir cette masse sur S par le balayage de D, ou sur la sphère par le balayage de Γ. Je dis que, au point de contact Q, la densité de la couche répartie sur S est plus grande que celle de la couche répartie sur la sphère.*

Soit Γ' une sphère concentrique à Γ et dont le rayon surpasse d'un infiniment petit celui de Γ. Cette sphère Γ' coupe la surface S suivant une ligne fermée infiniment petite entourant le point Q. Cette ligne limite, sur les surfaces S et Γ' respectivement, des aires infiniment petites σ et σ' dont le rapport tend vers l'unité.

Le balayage du domaine D peut se faire en deux fois. On balaye d'abord le domaine $D\Gamma'$ commun à D et à Γ', ce qui amène une certaine masse μ sur σ; on balaye ensuite la domaine D, ce qui amène une masse supplémentaire sur σ. Donc le balayage de D amène sur σ une masse $>\mu$.

Le balayage de la sphère Γ' peut aussi se faire en deux fois. On balaye d'abord le domaine $D\Gamma'$, comme dans le cas précédent, ce qui amène sur σ la même masse μ; on balaye ensuite Γ' ce qui n'amène sur σ' qu'une partie seulement de la masse μ portée par σ. Donc le balayage de Γ' amène sur σ' une masse $<\mu$.

Ainsi le balayage de D amène sur σ une masse plus grande que celle que

---

([5]) J'ai indiqué la proposition analogue pour le plan dans mon Mémoire cité du Bull. Acad. R. des Sciences de Belgique (en note, p. 394).

le balayage de Γ' amène sur σ'. Passons à la limite; les aires infiniment petites σ et σ' deviennent égales, de sorte que la densité sur σ est plus grande que celle sur σ', et la densité au point Q est plus grande sur S que sur la surface sphérique Γ limite de Γ'.

On connaît l'expression analytique de la densité de la couche provenant du balayage de la sphère et cette densité ne peut jamais s'annuler. Le lemme précédent conduit ainsi au théorème suivant:

12. - **Théorème.** — *La densité de la couche provenant d'un balayage de masses positives ne s'annule en aucun point de S.*

Soit Q un point de la frontière S. Menons la même sphère Γ que dans le lemme précédent. Si cette sphère contient des masses positives, la densité au point Q de la couche provenant du balayage de D est plus grande que la densité au même point de la couche sphérique provenant du balayage de Γ, ce qui prouve le théorème.

Si toutes les masse sont extérieures à Γ, on se donne une sphère Γ' intérieure à Γ et l'on commence par faire le balayage du domaine $D-\Gamma'$, ce qui amène une certaine masse sur Γ', donc à l'intérieur de Γ, ce qui ramène au cas précédent.

13. - **Théorème.** — *On peut concevoir que le domaine D varie et soit borné par une surface S qui se déforme d'une manière continue, en restant à courbure bornée, et dont le plan tangent se déplace d'une manière continue. Dans ces conditions, si l'on balaye les mêmes masses fixes toujours intérieures au domaine D, la densité de la couche répartie sur S par le balayage varie d'une manière continue avec le point considéré sur la surface.*

Soit S_0 une situation particulière de S pour laquelle la densité est désignée par ϱ_0. Quand S tend vers S_0, la densité ϱ doit tendre vers ϱ_0, car, dans le cas contraire, on pourrait obtenir une densité limite différente de ϱ_0 et le principe d'unicité du balayage serait mis en défaut.

§ 3. - Propriétés des fonctions harmoniques définies dans un domaine ouvert D par une intégrale de Stieltjes sur la frontière [6].

14. - **Définition à priori d'une fonction harmonique $U(P)$ par une intégrale de Stieltjes.** — Soit D un domaine limite par une surface fermée (simple ou multiple) S, satisfaisant aux mêmes conditions que précédemment. Localisons

---

(6) Signalons un important Mémoire de M. N. GUNTHER: *Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes de la physique mathématique.* Travaux de l'Institut physico-mathématique Stekloff, I, 1932. Une partie du Mémoire est consacré aux solutions

l'unité de masse en un point intérieur P et balayons le domaine. La masse ainsi amenée sur une portion σ de la frontière S est une fonction harmonique du point P. Cette fonction $\mu(\sigma, P)$ de P et σ admet, en tout point Q de la surface, une dérivée par rapport à σ, qui est la *densité* $\varrho(Q, P)$ de la couche en ce point. Cette dérivée est existante et continue, en vertu des démonstrations précédentes, et elle est aussi une fonction harmonique du point P dans le domaine D.

Soit $F(\sigma)$ une fonction bornée et additive d'aire σ sur la surface S. Sa définition s'étend d'elle-même aux ensembles superficiels e sur la surface S (7). Désignons par dF la valeur de F sur un élément d'aire dS et formons l'intégrale de STIELTJES, étendue à la surface S,

$$U(P) = \iint_S \varrho(Q, P) dF.$$

Cette intégrale définit une fonction du point P qui est harmonique, en même temps que ϱ dans le domaine ouvert D.

Nous nous proposons de chercher comment se comporte $U(P)$ quand le point P tend vers un point Q_0 de la frontière du domaine D. L'existence d'une limite pour $U(P)$ est liée à celle de la dérivée de la fonction d'ensemble F et il est utile de rappeller d'abord la définition de cette dérivée.

15. - Dérivée. Dérivée symétrique (8). — La dérivée d'une fonction d'ensemble superficiel en un point Q de la surface S sur laquelle on définit les ensembles, est la limite, supposée existante, du quotient $F(e) : me$ quand on considère une suite *régulière* d'ensembles e dont les mesures me tendent vers zéro.

Pour définir la condition de *régularité* de la suite des ensembles e en un point Q de la surface, nous menons le plan tangent au point Q et nous appelons σ' le plus petit cercle de centre Q dans ce plan qui contient la projection de l'ensemble e. Pour que la suite soit régulière, il faut que le quotient des mesures $me : m\sigma'$ reste supérieur à un nombre fixe pour tous les ensembles e de la famille.

Nous dirons que la dérivée de F au point Q existe *au sens absolu*, ou *quelle qu'en soit la définition*, si sa valeur est déterminée et unique quelle que soit la suite régulière d'ensembles e servant à la définir.

La *dérivée symétrique* est celle qui se définit en choisissant comme famille

---

du problème de DIRICHLET généralisé. Les hypothèses et les méthodes s'écartent beaucoup des nôtres, mais le rôle de la fonction d'ensemble est parfaitement indiqué.

(7) Voir la note (8).

(8) Nous admettons ici les définitions et les propriétés des fonctions d'ensemble exposées dans notre ouvrage de la Collection BOREL: *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire* (Paris, 1916). Nous nous sommes bornés, dans cet ouvrage, à la considération des ensembles plans, mais l'extension aux ensembles sur une surface courbe est immédiate.

régulière d'ensembles e une famille d'aires σ qui se projettent suivant des cercles σ' de centre Q sur le plan tangent à la surface en ce point.

Quand les dérivées n'existent pas au point Q, la fonction F admet des *nombres dérivés*, finis ou infinis, et qui sont les plus petite et plus grande limites des quotients considérés.

Il y a lieu d'observer les propriétés suivantes:

1°) Si une fonction positive admet une dérivée symétrique nulle en un point, cette dérivée est encore nulle au sens absolu, c'est-à-dire quelle qu'en soit la définition. Ceci est immédiat.

2°) Si une fonction de signe variable admet une dérivée nulle au sens absolu, sa variation totale (qui est une fonction positive d'ensemble) admet aussi une dérivée nulle au même point (au sens absolu).

Il n'y a que cette dernière propriété à démontrer. Considérons la famille des aires σ qui sert à définir la dérivée symétrique. L'aire σ se compose de deux ensembles e' et e'' sur chacun desquels la fonction F ne change pas de signe. Soit ε un nombre positif donné, aussi petit qu'on veut. On a, par hypothèse, dès que σ est assez petit, puisque la dérivée est supposée nulle,

$$|F(e')+F(e'')|<\varepsilon\sigma.$$

Mais l'un au moins des deux ensembles e', e'', par exemple e', est régulier; et l'on a aussi, dès que me' est assez petit,

$$|F(e')|<\varepsilon me'<\varepsilon\sigma.$$

On tire de la comparaison de ces relations $|F(e'')|<2\varepsilon\sigma$ et

$$|F(e')-F(e'')|<3\varepsilon\sigma.$$

Le premier membre est la variation totale de F sur σ. Donc cette variation totale a sa dérivée symétrique nulle au point Q et, par conséquent, aussi sa dérivée au sens absolu, puisque cette fonction est positive.

16. - Lemme. — *Considérons sur la surface S un point particulier Q_0 et un point P situé sur la normale à la surface en ce point. Soit σ_1 une portion de la surface S qui se projette sur le plan tangent suivant un cercle de centre Q_0. Formons l'intégrale de Stieltjes*

$$\iint_{\sigma_1}\frac{dF}{r},$$

où r est la distance du point P à l'élément dS de la surface σ_1 sur lequel F prend la valeur dF. Je dis que si F est continue au point Q_0 et admet en ce point une dérivée symétrique bornée, cette intégrale peut être rendue *aussi petit que l'on veut avec* σ_1, *quelle que soit la position du point* P *sur la normale au point* Q_0.

On dit que la fonction F est continue en un point si sa valeur tend vers zéro sur tout ensemble contenant ce point et dont le diamètre tend vers zéro. Il est donc immédiat que si une fonction d'ensemble est continue en un point, sa variation totale l'est aussi.

Passons à la démonstration du lemme énoncé.

Menons le plan tangent au point Q_0. Désignons par Q le point de la surface S qui fixe la position de l'élément dS, de sorte que r désigne la distance PQ. Soit Q' la projection du point Q sur le plan tangent et désignons par r' la distance PQ'. La différence

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{r'-r}{rr'}$$

est bornée quelle que soit la position du point P sur la normale, car r et r' sont $> Q_0 Q'$ qui est leur projection commune sur le plan tangent, tandis que $|r'-r|$ est $< QQ'$ qui est un infiniment petit du second ordre par rapport à $Q_0 Q'$ quand ces deux segments tendent vers zéro.

Nous pouvons donc remplacer r par r' dans l'intégrale sans changer son ordre de grandeur, car l'altération qui en résulte pour l'intégrale est de l'ordre de la variation totale de F sur σ_1, donc aussi petite que l'on veut avec σ_1, puisque F et sa variation totale sont continues au point Q_0 par hypothèse.

Considérons donc l'intégrale
$$\iint\limits_{\sigma_1} \frac{dF}{r'}.$$

Le lieu des points du plan tangent où r' garde une même valeur donnée, est une circonférence bornant un cercle σ' de centre Q_0. Désignons par $\Phi(r)$ la valeur de F dans l'aire σ dont σ' est la projection, par r_0' et r_1' les valeurs extrêmes de r' dans σ'; l'intégrale précédente se met sous la forme

$$\int_{r_0'}^{r_1'} \frac{d\Phi}{r'}.$$

C'est une intégrale simple de Stieltjes, dans laquelle r' est la variable indépendante (continue et croissante), et où $\Phi(r)$ est à variation bornée. Le facteur $1:r'$ est une fonction continue, ce qui autorise l'intégration par parties; et, par cette opération, l'intégrale se transforme dans l'expression

$$\frac{\Phi(r_1')}{r_1'} + \int_{r_0'}^{r_1'} \frac{dr'}{r'^2}\,\Phi(r').$$

Mais le dérivée symétrique de Φ est supposée bornée au point Q_0. Donc $\Phi(r')$, qui est égale à $F(\sigma)$, est de l'ordre de grandeur de σ, donc aussi de σ' et de λ^2, en appelant λ le rayon de σ'. On peut donc assigner une constante k telle que l'on ait, pour $r' \lesseqgtr r_1'$,

$$|\Phi(r')| < k\lambda^2.$$

Ainsi l'expression précédente est de module moindre que

$$k\left[\frac{\lambda_1^2}{r_1'} + \int_{r_0'}^{r_1'} \left(\frac{\lambda}{r'}\right)^2 dr'\right],$$

où λ_1 est le rayon du cercle σ_1' projection de σ_1. Mais $\lambda : r'$ a pour maximum $\lambda_1 : r_1'$, et la borne trouvée est inférieure à

$$2k\frac{\lambda_1^2}{r_1'} < 2k\lambda_1.$$

Elle est aussi petite que l'on veut avec λ_1, donc avec σ_1, ce qui prouve la proposition.

Nous allons avoir à appliquer ce lemme dans le cas plus particulier où la dérivée de F est nulle au sens absolu.

17. - Théorème. — *Soit P un point situé sur la normale en un point Q_0 de la frontière S. Si le point P tend vers Q_0, la fonction harmonique*

$$U(P) = \iint_S \varrho(Q, P)dF$$

tend vers la dérivée $F'(Q_0)$ de la fonction F, pourvu que cette dérivée existe au sens absolu et soit finie au point Q_0.

La démonstration de ce théorème se ramène au cas où la fonction F est positive et où sa dérivée est nulle au point Q_0.

En effet, en remplaçant la fonction $F(\sigma)$ par la fonction $F(\sigma) - \sigma F'(Q_0)$, on est ramené au cas où la dérivée au sens absolu s'annule au point Q_0.

Mais si la dérivée de F s'annule au sens absolu, celle de sa variation totale s'annule de même (n.° 15, 2°). D'ailleurs si la fonction harmonique $U_1(P)$ qu'on obtient en remplaçant dans l'intégrale F par sa variation totale, tend vers zéro quand P converge vers Q_0, la même conclusion s'impose à fortiori pour $U(P)$. Nous admettrons donc que F est une fonction positive dont la dérivée s'annule au point Q_0 et il suffit de démontrer que $U(P)$ tend vers zéro quand le point P tend normalement vers Q_0.

Nous conserverons les notations de la démonstration précédente. Nous circonscrivons, autour du point Q_0, une petite portion σ_1 de la surface S dont la projection sur le plan tangent est un cercle de centre Q_0. Quand le point P tand vers Q_0, la limite de $U(P)$ est la même que celle de la fonction

$$u(P) = \iint_{\sigma_1} \varrho dF,$$

et cela quelque petite que soit la surface fixe σ_1, car la densité ϱ tend uniformément vers zéro sur la portion négligée de la surface S (n.° 10). Il suffit donc de démontrer que $u(P)$ peut être rendu aussi petit que l'on veut avec σ_1, la position du point P restant arbitraire sur la normale. Faisons cette démonstration.

Remplaçons ϱ dans l'intégrale précédente par l'expression asymptotique trouvée précédemment (n.° 8)

$$\varrho = \frac{1}{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r^2} + \xi.$$

Dans cette formule, r est le rayon PQ mené au point Q qui décrit la surface σ_1; φ est l'angle de ce rayon avec la normale au point Q. Le terme complémentaire ξ est de l'ordre de $1:r$ au plus quand r tend vers zéro.

En faisant cette substitution dans l'intégrale, nous pouvons négliger ξ qui est de l'ordre de $1:r$. En effet, dF étant supposé positif (comme on l'a expliqué plus haut), l'intégrale de ξdF est du même ordre que celle de $dF:r$, donc (en vertu du lemme précédent) aussi petite que l'on veut avec σ_1.

Il reste encore à démontrer que l'intégrale

$$\iint_{\sigma_1} \frac{\cos\varphi}{r^2}\, dF$$

est aussi petite que l'on veut avec σ_1.

La démonstration est analogue à celle du lemme précédent, dont nous reprenons encore une fois les notations. Soit Q' la projection de Q sur le plan tangent. Désignons par r' le rayon PQ' et par φ' son inclinaison sur la normale au point Q. Observons que la différence

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} - \frac{\cos\varphi'}{r'^2} = \cos\varphi\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2}\right) + \frac{\cos\varphi - \cos\varphi'}{r'^2}$$

est de l'ordre de $1:r$ (où de $1:r'$, car r et r' sont du même ordre). Nous savons, en effet, que $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}$ est borné (n.° 16). D'autre part, l'angle $\varphi - \varphi'$ ne surpasse pas l'angle des deux rayons r et r' (qui est de l'ordre de $QQ':r$). Cet angle est donc de l'ordre de r, car QQ' est du second ordre par rapport à Q_0Q qui est $<r$.

Cette différence peut donc être négligée au même titre que ξ, et par conséquent, on peut remplacer $\cos\varphi : r^2$ par $\cos\varphi' : r'^2$ dans l'intégrale.

Désignons enfin par φ'' l'angle du rayon r' avec la normale au point Q_0. La différence $\varphi' - \varphi''$ est de l'ordre de la variation de direction de la normale entre Q_0 et Q, donc de l'ordre du segment $Q_0Q < r$. Ainsi la différence entre $\cos\varphi' : r'^2$ et $\cos\varphi'' : r'^2$ est négligeable, pour la même raison que les différences précédentes. Finalement, nous sommes conduits à considérer l'intégrale

$$\iint_{\sigma_1} \frac{\cos\varphi''}{r'}\, dF.$$

dans laquelle r' désigne le rayon PQ', et φ'' son inclinaison sur la normale au plan tangent en Q_0.

Désignons, de nouveau, par σ' les cercles du plan tangent bornés par les circonférences de centre Q_0 sur lesquelles r' garde une valeur constante. Soit σ la portion de l'aire S qui se projette sur σ'. Posons

$$\Phi(r) = F(\sigma).$$

Il vient, en intégrant par parties et en désignant par r_0' et r_1' les valeurs extrêmes de r' dans σ',

$$\iint\limits_{\sigma_1} \frac{\cos\varphi''}{r'^2}\, dF = \int_{r_0'}^{r_1'} \frac{\cos\varphi''}{r'^2}\, d\Phi = \frac{\cos\varphi_1''}{r_1'^2}\, \Phi(r_1') + \int_{r_0'}^{r_1'} \left(\frac{\sin\varphi''\, d\varphi''}{r'^2} + \frac{2\cos\varphi''\, dr'}{r'^3}\right) \Phi(r').$$

Mais, ε positif étant donné, on peut prendre σ_1 assez petit pour que $\Phi(r')$ soit $< \varepsilon r'^2$. Alors l'expression précédente (dans laquelle toutes les quantités sont positives) devient inférieure à

$$2\varepsilon \left[\cos\varphi_1'' + \int_{r_0'}^{r_1'} \frac{\cos\varphi''\, dr'}{r'}\right] < 2\varepsilon\left(1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

En effet, cette dernière intégrale mesure l'angle sous lequel le segment Q_0Q' d'une tangente est vu du point P, et cet angle est $< \frac{\pi}{2}$. La dernière expression est aussi petite que l'on veut avec ε, donc avec σ, ce qui achève la démonstration.

18. - Extension du théorème précédent. — *Le théorème précédent subsiste quand le point P tend vers le point Q_0 de la frontière sans être astreint à demeurer sur la normale, pourvu que la distance du point P à la surface frontière S ne soit pas infiniment petite par rapport à sa distance à cette normale. Dans ce cas encore, $U(P)$ aura pour limite $F'(Q_0)$ si cette dérivée existe au sens absolu et est finie au point Q_0.*

Il est plus commode de modifier les notations de cet énoncé pour faire la démonstration. Nous désignerons par P_1 le point qui tend obliquement vers Q_0 et par P la projection de P_1 sur la normale au point Q_0, de façon que ce point P varie comme dans la démonstration précédente.

Nous désignerons, comme précédemment, par r le rayon PQ, mais nous appellerons r_1 le rayon P_1Q mené au même point de la surface. Soit φ_1 l'angle du rayon r_1 avec la normale au point Q_1 et soit σ_1 l'élément de surface considéré dans la démonstration précédente. Nous avons à démontrer que, dF étant supposé positif et $F'(Q_0)$ nul, l'intégrale

$$u(P_1) = \iint\limits_{\sigma_1} \frac{\cos\varphi_1}{r_1^2}\, dF$$

peut être rendue aussi petite que l'on veut avec σ_1 sous la condition imposée à la position du point P.

Remarquons d'abord que, en vertu de cette condition, le quotient $r:r_1$ est borné. On a, en effet,

$$r < r_1 + PP_1,$$

d'où

$$\frac{r}{r_1} < 1 + \frac{PP_1}{r_1}.$$

Or $PP_1 : r_1$ est borné par hypothèse, car r_1 (distance à la surface) ne peut être infiniment petite par rapport à PP_1 (distance au point P_1). Cette remarque nous permet de modifier successivement la forme de l'intégrale considérée.

D'abord nous pouvons remplacer φ_1 (inclinaison de r_1 sur la normale au point Q) par l'inclinaison φ_1' de r_1 sur la normale au point Q_0. En effet, la différence est de l'ordre de r au plus, et l'altération qui en résulte pour l'intégrale considérée est de l'ordre de

$$\iint\limits_{\sigma_1} \frac{r dF}{r_1^2} = \iint\limits_{\sigma_1} \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{dF}{r},$$

donc de l'ordre de l'intégrale de $dF:r$ (supposé positif), intégrale que nous pouvons négliger (n.° 16). Nous sommes ramenés à considérer l'intégrale

$$\iint\limits_{\sigma_1} \frac{\cos \varphi_1'}{r_1^2} dF.$$

Soit φ' l'inclinaison du rayon r sur la normale $Q_0 P$. En projetant le triangle PQP_1 sur cette normale, nous avons

$$r \cos \varphi' = r_1 \cos \varphi_1';$$

d'où

$$\iint\limits_{\sigma_1} \frac{\cos \varphi_1'}{r_1^2} dF = \iint\limits_{\sigma_1} \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 \frac{\cos \varphi'}{r^2} dF.$$

Notre intégrale est donc du même ordre de grandeur que

$$\iint\limits_{\sigma_1} \frac{\cos \varphi'}{r^2} dF.$$

Mais, dans celle-ci, nous pouvons encore remplacer l'inclinaison φ' de r sur la normale en Q_0 par celle φ sur la normale en Q, car l'erreur ainsi commise sur cette intégrale est de l'ordre de l'intégrale de $dF:r$ et, par conséquent, négligeable. Finalement, nous retrouvons l'intégrale qui a fait l'objet de la démonstration du théorème précédent et le nouveau théorème est démontré.

Remarque. - La condition imposée au point P dans l'énoncé du théorème, revient à dire que le point P ne peut pas sortir d'un cône, de révolution autour de la normale, dont le sommet est au point Q_0 et dont l'angle solide est $<2\pi$.

19. - **Théorème.** — *Si le point P est assujetti à tendre vers le point Q_0 de la frontière sur la normale en ce point, $U(Q)$ tend vers la dérivée symétrique $F'(Q_0)$, pourvu que cette dérivée symétrique existe et que les nombres dérivés de la variation totale de F soient bornés au point Q_0.*

La démonstration du théorème avant précédent (n.° 17) s'étend d'elle-même à ce cas plns général.

En effet, cette démonstration suppose que le lemme du n.° 16 (concernant l'intégrale de $dF:r$) soit applicable et permette de négliger, comme susceptible d'être rendus aussi petits qu'on veut, les termes de la forme

$$\iint_{\sigma_1} a\frac{dF}{r}$$

quand a est borné et $F'(Q_0)$ nul.

Cette conclusion s'appuyait, dans la démonstration du théorème rappelé, sur l'hypothèse que dF était positif. Montrons qu'elle subsiste sans cette hypothèse si les nombres dérivés de la variation totale de F son bornés au point Q_0.

La variation totale de F s'exprime par l'intégrale de STIELTJES

$$\iint |dF|,$$

Si cèlle-ci a ses nombres dérivés $<M$ au point Q_0 et si a est une fonction continue de module $<m$ aux environs de ce point, la fonction d'ensemble

$$F_1 = \iint a dF$$

aura, au point Q_0, ses nombres dérivés de module $<mM$. Il suit de là que les intégrales de la forme considérée se ramènent à l'intégrale du lemme du n.° 16 par la formule

$$\iint_{\sigma_1} a\frac{dF}{r} = \iint_{\sigma_1} \frac{dF_1}{r}$$

et, comme F_1 vérifie les conditions du lemme, cette intégrale tend vers zéro avec σ_1.

20. - **Théorème.** — *Si le point P tend vers un point Q_0 de la frontière S, soit normalement, soit obliquement (sous la réserve connue), la fonction $U(P)$ tend, presque partout sur S (c'est-à-dire sauf sur un ensemble de mesure nulle), vers la dérivée $F'(Q_0)$, celle-ci étant existante et bornée presque partout sur la surface S.*

On prouve dans la théorie des fonctions d'ensemble que la dérivée F' est presque partout existante et finie. Ce point établi, la convergence de $U(P)$ est la conséquence de l'un quelconque des trois théorèmes précédents (n.os 17, 18 ou 19) dont il ne fait plus que reproduire l'énoncé.

§ 4. - Expression la plus générale d'une fonction harmonique bornée dans le domaine ouvert D.

21. - Solution du problème de Dirichlet. — La fonction $U(P)$, harmonique dans un domaine ouvert D', qui prend une suite continue de valeurs données $U(Q)$ sur la frontière S' du domaine D', est donnée par la méthode du balayage, sous la forme [9]

$$U(P) = \iint_{S'} U(Q) d\mu(S', P).$$

C'est une intégrale de STIELTJES dans laquelle $d\mu(S', P)$ représente la masse portée par le balayage sur l'élément d'aire dS' localisé au point Q. On suppose qu'au début le domaine à balayer D contient la masse unité localisée au point P de l'intérieur.

Nous allons utiliser cette formule.

Considérons un domaine D dont la frontière S est formée par une surface ou par plusieurs surfaces séparées à courbure bornée. Soit $U(P)$ une fonction harmonique donnée dans le domaine ouvert D. Il s'agit d'abord d'étudier les propriétés de cette fonction sur la frontière dans l'hypothèse ou elle est bornée.

22. - Première fonction additive d'ensemble sur la frontière définie par $U(P)$. — Considérons une fonction harmonique $U(P)$ supposée donnée et bornée dans le domaine ouvert D. Soit σ une portion de la surface frontière S bornée par un contour simple C. Construisons un domaine D_1, intérieur à D, dont la frontière (toujours à courbure bornée) n'emprunte que la seule portion σ de la surface S. Cette frontière de D_1 sera donc complétée par une surface S_1 intérieure à D et qui se raccorde à σ le long de C.

Maintenant remplaçons σ par un lambeau de surface σ' se raccordant encore à S le long de C, mais intérieur à D. Les surfaces S_1 et σ' enferment un domaine D_1' intérieur à D_1. La fonction harmonique bornée $U(P)$ est complètement définie dans D_1' par ses valeurs sur la frontière qui sont continues sauf éventuellement sur C. En un point donné P_0 de l'intérieur de D, cette fonction s'exprime par la formule du numero précédent, à savoir

$$U(P_0) = \iint_{S_1} + \iint_{\sigma'} U(Q) d\mu(S, P_0).$$

[9] Voir notre Mémoire cité des Ann. de l'Inst. H. Poincaré, 1932.

Maintenant faisons tendre vers S les surfaces S_1 et σ' sans modifier le contour C commun et de manière que la convergence s'étende aux plans tangents. La distribution $d\mu$ de la masse tend vers celle que le balayage de D déterminerait sur S (n.° 13). Ainsi, U étant borné, nous pouvons confondre ces deux distributions dans la formule précédente. Celle-ci met en évidence (P_0 étant fixe) que l'intégrale sur σ' est déterminée par celle sur S_1, et l'intégrale sur S_1 par celle sur σ', alors que les deux intégrales sont indépendantes l'une de l'autre. Donc chacune des deux intégrales a une valeur limite et ces limites sont indépendantes l'une de l'autre. Nous pouvons donc définir une fonction d'aire $\Phi(\sigma)$ sur la surface S en posant, puisque la limite ne dépend que de σ,

$$\Phi(\sigma) = \lim \iint_{\sigma'} U(Q) d\mu(S, P_0).$$

Dans cette formule, σ' est infiniment voisin de σ et la distribution $d\mu$ est celle qui résulte du balayage du domaine D après qu'on a placé la masse 1 au point P_0.

Cette fonction $\Phi(\sigma)$ jouit des propriétés fondamentales suivantes:

La fonction $\Phi(\sigma)$ est complètement additive sur S.

Supposons que σ soit la somme d'un nombre limité ou illimité de morceaux σ_1, σ_2,.... séparés par des lignes. Nous pouvons construire des aires σ_1', σ_2',.... intérieures à D, dont la somme soit infiniment voisines de celle des précédentes, et limitées par les mêmes lignes le long desquelles elles se raccorderont à S. L'intégrale sur $\sigma_1' + \sigma_2' + ...$ est la somme des intégrales sur chaque morceau. Par conséquent, à la limite,

$$\Phi(\sigma) = \Phi(\sigma_1) + \Phi(\sigma_2) + ...$$

La fonction $\Phi(\sigma)$ est bornée.

Il faut entendre par là que la somme de ses valeurs sur un nombre fini ou infini de morceaux de S non empiétants, est bornée. Ceci résulte immédiatement de sa définition comme limite d'une intégrale dans laquelle la fonction à intégrer est bornée.

Il suit de là, d'après la théorie générale des fonctions d'ensemble, que *la fonction d'aire $\Phi(\sigma)$ définit une fonction bornée et complètement additive d'ensembles superficiels (mesurables B) sur la surface S.*

23. - Seconde fonction d'ensemble sur la frontière définie par $U(P)$. — Considérons encore sur la frontière S l'aire σ limitée par le contour C, et l'aire σ' intérieure au domaine D qui est limitée par le même contour, le long duquel elle se raccorde à S. On a

$$\iint_{\sigma'} U d\sigma' = \iint_{\sigma'} U d\mu \frac{d\sigma'}{d\mu} = \iint_{\sigma'} \frac{U d\mu}{\varrho},$$

où $d\mu$ est, comme au numéro précédent, la masse provenant du balayage du domaine D, et où $d\mu : d\sigma$ est la densité de la couche qui en résulte, que nous désignons par $\varrho(Q, P)$ ou simplement ϱ, et qui ne s'annule pas (n.° 12).

Comme la fonction U est bornée, nous pouvons, sans difficulté, imposer autant de lignes de contact que nous voulons entre σ' et σ; les intégrales précédentes restent déterminées. Nous pouvons par ces lignes de contact décomposer σ en un nombre indéfiniment croissant d'éléments infiniment petits $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n, \ldots$ Soient ϱ_k' et ϱ_k'' les bornes supérieure et inférieure de ϱ dans σ_k; la dernière intégrale est comprise entre les deux bornes:

$$\sum \frac{1}{\varrho_k'} \Phi(\sigma_k) \pm \sum \left(\frac{1}{\varrho_k''} - \frac{1}{\varrho_k'}\right) |\Phi(\sigma_k)|.$$

Par conséquent, cette intégrale est égale à la limite du premier terme, à savoir l'intégrale de STIELTJES

$$\iint_\sigma \frac{d\Phi}{\varrho},$$

car le seconde terme a pour limite zéro. On s'en assure en observant que ϱ est une fonction continue qui ne s'annule pas et que Φ est à variation bornée.

En définitive, σ' ayant pour limite σ, il vient

$$\lim \iint_{\sigma'} U d\sigma' = \iint_\sigma \frac{d\Phi}{\varrho} = F(\sigma).$$

La fonction $F(\sigma)$ ainsi définie est une seconde fonction bornée et additive d'ensemble superficiel sur S. Elle est, de plus, *absolument continue* comme limite de l'intégrale d'une fonction bornée sur une aire infiniment voisine de S.

24. - Expression de $U(P)$ par une intégrale de Stieltjes. — La fonction F d'ensemble superficiel définie au numéro précédent permet d'exprimer la fonction $U(P)$, harmonique et bornée dans le domaine ouvert D, par une intégrale de STIELTJES étendue à la frontière S du domaine. Soit, en effet, $\varrho(Q, P)$ la densité au point Q de la couche qui provient du balayage du domaine D contenant la masse 1 en P. Nous allons montrer que l'on a

$$U(P) = \iint_S \varrho dF. \tag{1}$$

À cet effet, soit S' une surface intérieure à D, mais infiniment voisine de S. Nous avons (n.° 21), car $d\mu = \varrho dS'$,

$$U(P) = \iint_{S'} U\varrho dS'.$$

Divisons l'aire S en éléments d'aires σ_k infiniment petits et faisons tendre S'

vers S en imposant le contact des deux aires le long des lignes de partage (comme dans la démonstration précédente); nous partageons, en même temps, S' en éléments σ_k' infiniment voisins des σ_k respectivement. Nous avons

$$U(P) = \sum \iint_{\sigma_k'} U\varrho dS,$$

car les éléments dS' et dS se confondent et ϱ est, à la limite, la densité sur S.

Soient encore ϱ_k' et ϱ_k'' les bornes de ϱ dans σ_k; la somme précédente est comprise entre les deux bornes:

$$\sum \varrho_k' F(\sigma_k) \pm \sum (\varrho_k'' - \varrho_k') \,|\, F(\sigma_k) \,|.$$

Mais le second terme tend vers zéro avec σ_k, parce que ϱ est continue et F à variation bornée. Quant à la première somme, elle a pour limite l'intégrale (1) et la formule (1) est établie.

Cette formule conduit au théorème suivant:

25. - Théorème. — *Si une fonction harmonique $U(P)$ est bornée dans le domaine ouvert D, elle tend presque partout vers une limite déterminée quand le point P tend (non tangentiellement) vers un point Q de la frontière S. Si l'on désigne cette limite par $U(Q)$, on a, dans le domaine D,*

$$U(P) = \iint_S U(Q) d\mu(S, P). \tag{2}$$

Appliquons le théorème (17) à la formule (1) du numéro précédent. Nous en concluons que $U(P)$ tend, presque partout sur S, vers la dérivée $F'(Q)$ de F (existante et bornée), et nous pouvons poser $F'(Q) = U(Q)$.

Soit S' une surface intérieure à D et infiniment voisine de S; nous avons

$$U(P) = \iint_{S'} \varrho U dS'.$$

Mais ϱ tend uniformément vers sa limite sur S, et U tend presque partout vers $U(Q)$ en restant borné. Il vient donc, à la limite,

$$U(P) = \iint_S \varrho U(Q) dS = \iint_S U d\mu.$$

C'est la formule (2). La dernière intégrale à la forme de STIELTJES, mais la précédente est une intégrale de LEBESGUE. Donc *une fonction harmonique et bornée dans un domaine ouvert D, s'exprime par une intégrale de Lebesgue sur la frontière.*

26. - Extension à un domaine D dont la frontière S admet des lignes singulières. — *Le théorème précédente et la formule* (2) *subsistent pour un domaine dont la frontière comporte des lignes singulières, pourvu que ces lignes soient de capacité nulle* [10].

Quand nous disons qu'une surface admet des lignes singulières, nous la supposons à courbune bornée sur toute portion excluant ces lignes. Nous pouvons alors délimiter un domaine D' compris dans D, mais à frontière régulière, au moyen de surfaces de raccord σ excluant les lignes singulières et ne retranchant que des parties aussi petites qu'on veut de S. Nous faisons décroître indéfiniment ces surfaces auxiliaires σ de manière qu'elles aient pour limite les lignes singulières elles-mêmes. Nous désignons par S' la frontière de D', composée de σ et de $S-\sigma$. Nous avons alors, par le théorème précédent,

$$U(P)=\iint\limits_{S-\sigma} U(Q)d\mu+\iint\limits_{\sigma} Ud\mu.$$

À la limite, la charge μ portée par σ s'annule, car le potentiel est borné sur σ, et le potentiel dû à la ligne est la limite de celui qui est dû à σ. Donc, U étant borné, la dernière intégrale tend vers zéro.

D'autre part, sur $S-\sigma$, les éléments $d\mu$ tendent vers la valeur qu'ils prendraient sur S. Il vient donc, comme dans le cas précédent,

$$U(P)=\iint\limits_{S} U(Q)d\mu=\iint\limits_{S} U\varrho dS.$$

§ 5. - Expression la plus générale d'une fonction harmonique positive dans un domaine ouvert D.

27. - Lignes singulières. Réseau régulier. — Soit $U(P)$ une fonction harmonique positive, bornée ou non, dans un domaine ouvert D. On suppose, comme précédemment, que la frontière S du domaine est formée par une surface ou plusieurs surfaces séparées à courbure bornée. La fonction $U(P)$ définit, sur la frontière S, des fonctions additives d'ensemble superficiel, mais d'un caractère plus général que dans le cas d'une fonction harmonique bornée. Cela tient à l'existence éventuelle sur la surface S de lignes singulières dont nous allons montrer l'origine.

Considérons un domaine D', intérieur à D au sens étroit, et borné par une

[10] Une ligne est *de capacité nulle* si toute charge qu'elle porte détermine un potentiel non borné. En particulier, une ligne rectifiable est de capacité nulle. (Voir notre Mémoire das Ann. de l'Inst. Poincaré, n.° 46). Les intersections de surfaces à courbure bornées sont donc de capacité nulle. Ainsi le théorème précédent (n.° 25) s'étend à un domaine D limité par des surfaces à courbure bornée qui se coupent.

surface S', infiniment voisine de la surface S mais ne la rencontrant pas. Nous faisons correspondre entre eux les points infiniment voisins de S et de S' situés sur une même normale à S et nous supposons que les plans tangents aux deux surfaces en ces points correspondants sont infiniment voisins.

Donnons-nous un point fixe P_0 intérieur à D (donc aussi à D'); la valeur $U(P_0)$ s'exprime, sans difficulté, par l'intégrale sur S'

$$U(P_0) = \iint_{S'} U d\mu = \iint_{S'} U \varrho dS', \tag{1}$$

où la densité ϱ est celle de la couche amenée sur S' par le balayage de D'.

Comme la densité ϱ ne s'annule pas et ne peut tendre vers zéro (sous les conditions imposées à S'), elle admet ici un minimum positif, d'où il suit que l'intégrale (à éléments positifs)

$$\iint_{S'} U dS' \tag{2}$$

est bornée. Dès lors une variation infiniment petite de ϱ altère infiniment peu l'intégrale (1) et, par conséquent, nous pouvons remplacer, dans cette intégrale, la densité provenant du balayage de D' par la densité au point correspondant de S provenant du balayage de D. Dorénavant c'est cette densité ϱ *indépendante de* S' qui doit figurer dans l'intégrale (1) et dans les autres intégrales analogues que nous allons considérer.

Nous pouvons aborder maintenant l'étude d'une ligne singulière.

Soit C un segment de ligne tracé arbitrairement sur la surface S. Imposons maintenant à la surface S' la condition de toucher S le long de C et de C seulement. La fonction donnée U est encore définie sur S' sauf peut-être sur C, et l'intégrale de U sur S' se réduit à celle sur la surface ouverte S_1' obtenue en excluant C de S'. On a donc maintenant

$$\iint_{S'} U\varrho dS' = \iint_{S_1'} U\varrho dS' \leqq U(P_0).$$

Si le contact de S' avec la ligne C provoque un abaissement de la valeur de l'intégrale, nous dirons que le ligne C est *singulière* et que la différence est le ***déchet*** dû à cette ligne. Ce déchet éventuel est la valeur limite de l'intégrale de $U\varrho dS$ sur une bande superficielle, infiniment étroite, intérieure à D' et se raccordant à S' de manière à exclure la ligne singulière C du domaine D'. On remarquera que ce déchet ne peut tenir qu'à la forme de S' au voisinage immédiat de C. Si la surface S' se rapproche de S, de nouveaux éléments dS s'ajoutent à la bande et, par conséquent, le déchet dû à C ne peut être décroissant.

Il est important de remarquer que si une ligne est singulière, cette propriété est indépendante du choix du point P_0. En effet, le changement du point P_0 remplace la densité ϱ par une autre, mais la densité ne peut s'annuler ni tendre vers zéro et, par conséquent, si l'intégrale n'est pas nulle sur la bande avec la première densité, elle ne le sera pas non plus avec la seconde.

Au lieu d'un seul segment de ligne C, nous pouvons en considérer plusieurs distincts C_1, C_2,.... Si plusieurs sont singuliers, la somme des déchets correspondants est toujours $< U(P_0)$, car ces déchets s'ajoutant entre eux quand S' touche simultanément les divers segments. Il suit de là que si l'on considère une famille donnée de lignes sur la surface S, il ne peut y avoir dans la famille qu'un nombre limité ou une infinité dénombrable de lignes singulières. Le contact de S' avec les autres lignes n'altérera pas la valeur de l'intégrale sur S'.

Nous pouvons maintenant construire sur S un *réseau régulier*. Concevons, sur la surface S, deux familles de lignes qui se coupent et qui permettent de décomposer la surface en éléments infiniment petits. Chacune des deux familles à la puissance du continu, mais les lignes singulières sont dénombrables et nous convenons de les écarter. Avec les autres nous constituons notre réseau régulier qui permet encore de partager la surface S en éléments σ finis ou infiniment petits. *Ce réseau est indépendant du choix du point P_0.*

28. - Première fonction d'ensemble sur la frontière attachée à $U(P)$. — Donnons-nous un réseau régulier sur la surface S. Soit σ un élément de l'aire S borné par un contour C appartenant au réseau. Soit ensuite S' une aire intérieure au domaine D, infiniment voisine de S comme précédemment, et tangente à S le long de C et de C seulement. Soit σ' la portion de S' limitée par le contour C qui est infiniment voisine de σ. Nous avons

$$\iint_{\sigma'} U\varrho dS' = U(P_0) - \iint_{S'-\sigma'} U\varrho dS'.$$

Dans cette formule ϱ et dS' sont les mêmes que sur S et, par suite, indépendants des déformations infiniment petites de S'. Seule la fonction U peut encore varier avec ces déformations. Mais la formule même met en évidence que les intégrales sur σ' et sur $S-\sigma'$ ont atteint des limites invariables. En effet, les déformations de σ' et $S-\sigma'$ sont indépendantes l'une de l'autre, et l'intégrale sur σ' prend une valeur fixe quand on immobilire $S-\sigma'$. D'ailleurs la limite de l'intégrale sur σ' ne peut dépendre que de σ et nous pouvons poser

$$\Phi(\sigma) = \lim \iint_{\sigma'} U\varrho dS', \tag{3}$$

où (sauf les réserves stipulées) σ' tend vers σ d'une manière quelconque.

La fonction $\Phi(\sigma)$ est *complètement additive* pour les aires du réseau. En effet, soit σ_1, σ_2,.... une suite d'aires non empiétantes; on peut leur faire correspondre des aires σ_1', σ_2',.... sur une surface S' infiniment voisine de S de façon que les quotients $\sigma' : \sigma$ soient uniformément voisins de l'unité. Pour démontrer la formule

$$\Phi(\sigma_1 + \sigma_2 + ...) = \Phi(\sigma_1) + \Phi(\sigma_2) + ...,$$

il suffit de légitimer le passage à la limite terme à terme dans la série

$$\iint_{\sigma_1'} U\varrho dS' + \iint_{\sigma_2'} U\varrho dS' + ...,$$

ce qui résulte immédiatement du fait que l'intégrale (2) est bornée.

La fonction Φ n'est encore définie jusqu'ici que sur les aires du réseau, mais sa définition s'étend à tous les ensembles mesurables B par la théorie générale des fonctions additives d'ensemble. Elle est d'ailleurs bornée, car $\Phi(e)$ est $< U(P_0)$ sur tout ensemble e.

Remarque. - Dans la formule (3), nous avons dit que σ' tend vers σ d'une manière quelconque, mais il est entendu que les plans tangents aux points infiniment voisins sur σ et σ' tendent vers le parallélisme, et l'on a supposé que σ' touche σ le long du contour C non singulier. Cette dernière condition est inutile. En effet, l'intégrale de $U\varrho dS$ est négligeable sur une bande de la surface σ', infiniment étroite et infiniment voisine de C, car cette bande peut être considérée comme une partie de celle qui sert à évaluer le déchet quand la ligne C est singulière, bande sur laquelle l'intégrale est infiniment petite si la ligne est non singulière, ce qui est ici le cas.

En particulier, on peut supposer que σ' est une portion d'une surface S' parallèle à S et bornée par une normalie élevée à S le long de C.

29. - Primitive sur la frontière. — Avec la fonction Φ nous définissons une nouvelle fonction additive d'ensemble sur la frontière par la formule

$$F(\sigma) = \iint_{\sigma} \frac{d\Phi}{\varrho}. \tag{4}$$

Cette intégrale de STIELTJES sur S est bien déterminée, puisque ϱ est une fonction continue qui ne s'annule pas. Nous dirons que la fonction F est la ***primitive de U sur la frontière***, parce que cette fonction jouit de la propriété suivante:

Soit σ une portion de S limitée par un contour C non singulier, ensuite σ' une aire intérieure à D et qui tend vers σ d'une manière quelconque (sauf la tendance au parallélisme des plans tangents); on a la propriété:

$$F(\sigma) = \lim \iint_{\sigma'} U d\sigma'. \tag{5}$$

Pour établir cette formule, décomposons σ en éléments σ_k par des lignes du réseau, et σ' en éléments σ_k' correspondants par les normalies élevées à S le long des lignes précédentes. Désignons par ϱ_k une moyenne convenable de ϱ dans σ_k et utilisons le théorème de la moyenne. Nous avons

$$\iint\limits_{\sigma'} U d\sigma' = \sum \frac{\varrho U d\sigma'}{\varrho} = \sum \frac{1}{\varrho_k} \iint\limits_{\sigma_k'} \varrho U d\sigma'$$

$$\lim \iint\limits_{\sigma'} U d\sigma' = \sum \frac{\Phi(\sigma_k)}{\varrho_k}.$$

Faisons tendre tous les éléments σ_k vers zéro et passons à la limite, la dernière somme a pour limite $F(\sigma)$ par définition ([11]).

30. - Expression de $U(P)$ par une intégrale de Stieltjes. — Soit S' une surface intérieure à D, parallèle à S dont elle est infiniment voisine. Décomposons S en éléments σ_k par des lignes du réseau, et S' en éléments σ_k' par les normalies correspondantes. Nous avons, ϱ_k' désignant une moyenne convenable de ϱ dans σ_k,

$$U(P) = \sum \iint\limits_{\sigma_k'} \varrho U dS' = \sum \varrho_k' \iint\limits_{\sigma_k'} U dS'$$

et, à la limite,

$$U(P) = \sum \varrho_k F(\sigma_k)\,;$$

Faisons tendre tous les éléments σ_k vers zéro. À la limite, il vient, par définition de l'intégrale,

$$U(P) = \iint\limits_{S} \varrho dF. \tag{6}$$

Donc *toute fonction harmonique positive dans un domaine ouvert D, s'exprime par une intégrale de Stieltjes de la forme même étudiée au § 3.*

Nous pouvons donc attribuer à cette fonction les propriétés reconnues au § 3 et énoncer, en particulier, le théorème suivant (n.° 20) :

Une fonction $U(P)$ harmonique et positive dans un domaine ouvert D, tend presque partout sur la frontière vers une limite déterminée $U(Q)$ quand le point P tend (non tangentiellement) vers un point Q de la frontière.

Remarque. - Dans ce qui précède, nous avons supposé la fonction U donnée et nous en avons déduit l'existence de la primitive F satisfaisant à la condition (5), ce qui nous a conduit à la formule (6).

On peut se poser la question réciproque. Définissant à priori la fonction U par la formule (6) après s'être donné F, on se demande si F est bien la primi-

---

([11]) Le quotient $F(\sigma):\sigma$ est la *valeur moyenne* de U sur σ. M. GUNTHER a fait un usage systématique de cette notion dans l'ouvrage cité (note ([6]), p. 8).

tive de U, c'est-à-dire si F vérifie la condition (5). La réponse est affirmative, mais pour le prouver, il faut établir au préalable une loi asymptotique de réciprocité applicable à la densité.

31. - Loi asymptotique de réciprocité propre à la densité. — Nous considérons encore un domaine D, d'un ordre quelconque de connexion, dont la frontière est formée par une ou plusieurs surfaces à courbure bornée. Nous désignons par Q un point de cette frontière S, et par P un point intérieur au domaine portant la masse unité. Le balayage du domaine répartit cette masse sur la frontière suivant une couche dont nous représentons, comme précédemment, la densité par $\varrho(Q, P)$.

Donnons-nous un point P *voisin de la surface* S, en entendant par là que sa distance a la surface est inférieure au minimum des rayons de courbure normaux de la surface (ou de leurs limites d'indétermination).

Désignons par r le rayon PQ mené du point potentiant P au point Q de la surface, et par φ son inclinaison sur la normale au point Q. Nous avons, sauf une erreur qui peut croître à l'infini avec $1:r$, mais est de l'ordre de $1:r$ au plus (n.° 8),

$$\varrho(Q, P) = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r^2}.$$

Abaissons (fig. 1) la plus courte distance PQ_0 du point P à la surface. D'autre part, prenons, sur la normale intérieure au point Q, un segment $QP_0 = Q_0P$. Construisons dans le plan du triangle PQP_0 un triangle rectangle $PQ'P_0$ en élevant P_0Q' normal à PP_0, de même longueur que les segments PQ_0 et P_0Q et du même côté. Soient r' le rayon PQ' et φ' son inclinaison sur P_0Q'. Je dis que l'on a, sauf une erreur, de l'ordre de $1:r$ au plus si elle croît indéfiniment,

$$\frac{\cos\varphi}{r^2} = \frac{\cos\varphi'}{r'^2}.$$

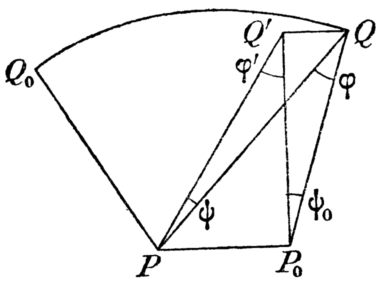

Fig. 1.

Démontrons cette relation. Soit ψ_0 l'angle QP_0Q'; il est de l'ordre de grandeur de la variation d'orientation de la normale sur la distance Q_0Q. Donc $\psi_0 : Q_0Q$ est borné et les quotients $\psi_0 : r$ et $\psi_0 : r'$ le sont à fortiori.

On a, dans le triangle QPQ',

$$|r - r'| < QQ' < P_0Q' \cdot \psi_0 < r\psi_0.$$

Quand r tend vers zéro, $r\psi_0$ est petit du second ordre et, par conséquent, r et r' sont deux infiniment petits du même ordre.

Soit ψ l'angle QPQ'; on a $\psi < \psi_0$. Mais de la considération des deux triangles opposés déterminés par les diagonales dans le quadrilatère PP_0QQ', on tire ([12])

$$\psi+\varphi'=\psi_0+\varphi, \quad \text{d'où} \quad |\varphi-\varphi'|=|\psi_0-\psi|.$$

Donc la différence $\varphi-\varphi'$ est petite de l'ordre de r et r' quand ces rayons tendent vers zéro; et, en remplaçant $\cos\varphi$ par $\cos\varphi'$ dans le quotient $\cos\varphi : r^2$, on commet une erreur de l'ordre de $1:r$ au plus.

Enfin on peut aussi, au même ordre d'approximation, remplacer r par r' dans ce même quotient, car on a, en valeur absolue,

$$\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r'^2}=\left(\frac{r+r'}{r'}\cdot\frac{r-r'}{rr'}\right)\frac{1}{r}<\left(\frac{r+r'}{r'}\cdot\frac{\psi_0}{r'}\right)\frac{1}{r}$$

et cette expression est de l'ordre de $1:r$. La relation proposée est donc démontrée.

De cette relation il résulte immédiatement que l'on a, sauf une erreur de l'ordre de grandeur de $1:r$ au plus,

$$\varrho(Q, P)=\frac{1}{2\pi}\frac{\cos\varphi'}{r'^2}.$$

Cette formule conduit à la loi de réciprocité que nous avons en vue. Faisons, en effet, subir à l'expression de $\varrho(Q_0, P_0)$ la transformation que nous avons effectuée sur celle de $\varrho(Q, P)$; nous trouvons une formule identique à la précédente avec une erreur du même ordre ([13]). Nous avons donc, sauf une erreur qui est, au plus, de l'ordre de $1:r$ où $r=PQ$,

$$\varrho(Q, P)=\varrho(Q_0, P_0).$$

32. - Théorème. — *Si l'on se donne à priori une fonction d'ensemble $F(\sigma)$, positive et additive, sur la frontière S du domaine D, et que l'on construise la fonction*

$$U(P)=\iint_S \varrho\, dF,$$

qui sera harmonique dans ce domaine, la fonction F sera la primitive de U (elle vérifiera la relation 5 du n.° 29).

Nous savons que U admet une primitive sur la frontière: désignons-la par $F_1(\sigma)$. Il faut prouver que $F_1=F$.

La fonction primitive F_1 de U est définie par la formule (n.° 29)

$$F_1(\sigma)=\lim\iint_{\sigma'} U d\sigma',$$

([12]) Nous supposons que les sommets du quadrilatère se suivent dans l'ordre PP_0QQ' sur le périmètre, comme dans la figure. Si Q et Q' se permutaient, φ et φ' devraient être permutés en même temps.

([13]) En effet, P_0Q_0 et $r=PQ$, tendant vers zéro, tendent à devenir les diagonales d'un rectangle et leur quotient tend vers l'unité.

où l'on suppose que σ est borné par un contour C tel que $F_1(C)$ soit nul, et nous pouvons admettre que $F(C)$ le soit aussi. La surface σ' est intérieure à D et tend vers σ; nous pouvons prendre comme surface σ' la surface parallèle à σ construite en portant une même longueur ε sur chaque normale (n.° 28). Nous ferons correspondre entre eux les points de σ et de σ' qui sont sur la même normale et nous les désignerons par la même lettre, mais accentuée sur σ'. Nous aurons à considérer deux couples de points correspondants P et P' d'une part, Q et Q' de l'autre.

Revenons à l'intégrale sur σ' écrite ci-dessus. Désignons par P' le point qui parcourt σ'. Substituons à U sa valeur

$$U(P') = \iint_S \varrho(Q, P')\,dF,$$

où le point P' décrit la surface S; il vient

$$F_1(\sigma) = \lim \iint_{\sigma'} d\sigma' \iint_S \varrho(Q, P')\,dF = \lim \iint_S dF \iint_{\sigma'} \varrho(Q, P')\,d\sigma'.$$

Cette interversion d'intégration est permise (car ϱ est fonction continue de Q et de P') et elle se justifie aisément en considérant les intégrales de STIELTJES comme limites de sommes.

Si le point Q qui parcourt S est en dehors de σ, la densité $\varrho(Q, P')$ est nulle, car toute la masse se concentre sur le point P limite de P'. Comme la valeur de F est nulle sur le contour C de σ, l'intégrale sur S se réduit à celle sur le domaine intérieur à σ; et l'on a

$$F_1(\sigma) = \lim \iint_\sigma dF \iint_{\sigma'} \varrho(Q, P')\,d\sigma'.$$

Nous allons évaluer l'intégrale intérieure de cette formule

$$\iint_{\sigma'} \varrho(Q, P')\,d\sigma'.$$

Rappelons que Q est un point donné sur σ et que le point P' parcourt σ'. Appliquons la loi de réciprocité du numéro précédent. Nous pouvons (en tenant compte du changement des notations) remplacer $\varrho(Q, P')$ par $\varrho(P, Q')$, sauf une erreur sur laquelle nous allons revenir. Après ce changement, c'est P qui devient fixe sur σ et c'est Q' qui parcourt σ'. Il vient, par cette transformation,

$$\iint_{\sigma'} \varrho(Q, P')\,d\sigma' = \iint_\sigma \varrho(P, Q')\,d\sigma = 1.$$

En effet, cette intégrale sur σ mesure la masse que le balayage de la masse 1 en Q' amène sur σ, et c'est toute la masse puisque Q' est infiniment voisin de σ.

Il vient donc, sauf une erreur éventuelle provenant de celle commise sur ϱ,

$$F_1(\sigma) = \iint_\sigma dF = F(\sigma).$$

Il reste seulement à montrer que l'erreur commise sur ϱ n'invalide pas ce résultat.

Si nous posons $r = PQ$, l'erreur commise sur ϱ est $< A : r$ où A est une constante pour toute la surface S. L'erreur totale commise dans l'évaluation de $F_1(\sigma)$ est donc inférieure à

$$A \iint_\sigma dF \iint_\sigma \frac{d\sigma}{r}.$$

Si l'élément d'aire σ est assez petit pour être confondu avec son plan tangent, nous prenons le point Q comme pôle, le rayon $r = QP$ comme rayon vecteur, et son inclinaison λ comme angle polaire. Nous avons, dans l'intégrale intérieure, $d\sigma = r dr d\lambda$; d'où, en désignant par δ le diamètre de σ,

$$\iint_\sigma \frac{d\sigma}{r} \leqq \int_0^{2\pi} d\lambda \int_0^\delta dr = 2\pi\delta.$$

Il en résulte que l'erreur commise dans l'évaluation de $F_1(\sigma)$ est inférieure à $2\pi\delta A F(\sigma)$. Ceci est seulement approximatif si σ n'est pas infiniment petit et ne prouve pas non plus que l'erreur soit nulle, mais ce premier résultat conduit aisément à la démonstration complète de la proposition.

En effet, décomposons σ en une somme d'éléments σ_k de diamètres $< \delta$ infiniment petit. Le raisonnement précédent devient rigoureux pour chaque σ_k. Nous avons

$$F_1(\sigma_k) = F(\sigma_k)$$

avec une erreur $< 2\pi\delta A F(\sigma_k)$. Faisons la somme pour tous les σ_k; il vient

$$F_1(\sigma) = F(\sigma)$$

avec une erreur inférieure à

$$2\pi\delta A \sum F(\sigma_k) = 2\pi\delta A F(\sigma).$$

Donc l'erreur est nulle, puisqu'elle est inférieure à un nombre que l'on peut rendre aussi petit qu'on veut avec δ.

33. - Conclusion des théorèmes précédents. — En vertu des théorèmes précédents, *il existe une correspondance biuniforme entre les fonctions harmoniques positives dans le domaine D et les fonctions positives et additives d'ensemble sur la frontière S du domaine.* À toute fonction harmonique correspond une primitive distincte sur la frontière, et à toute fonction d'ensemble donnée sur la frontière correspond une fonction harmonique distincte dans D dont elle est la primitive.

34. - Décomposition d'une fonction harmonique positive. — Cette décomposition est liée à celle de la primitive F. La fonction positive et additive la plus générale F est la somme de trois fonctions : une fonction absolument continue F_1 ; une fonction continue singulière F_2, qui s'annule sur le complémentaire d'un ensemble E de mesure nulle (dit ensemble des singularités); une fonction discontinue F_3, qui s'annule partout sauf sur un ensemble dénombrable de points. Cette dernière est la fonction des sauts dont la valeur sur chacun des points de cet ensemble est égale à la discontinuité de F en ce point.

La fonction harmonique positive la plus générale dans le domaine D se décompose en trois fonctions qui correspondent aux trois précédentes.

La première s'exprime par une intégrale absolument continue et, par suite, par une intégrale de LEBESGUE

$$U_1(P)=\iint_S \varrho dF_1=\iint_S \varrho F_1'(Q)dS.$$

La seconde s'exprime par une intégrale singulière de STIELTJES étendue à l'ensemble des singularités, qui est de mesure nulle,

$$U_2(P)=\iint_E \varrho dF_2.$$

Enfin la troisième s'exprime par une série, étendue à tous les points de discontinuité Q_k,

$$U_3(P)=\sum_k a_k\varrho(Q_k, P),$$

où a_k est le saut (ou la discontinuité) de F au point Q_k.

Comme F_2 et F_3 ont leurs dérivées nulles *presque partout*, la dérivée de F est *presque partout* la même que celle de F_1. Si le point P tend vers un point Q de la frontière, U_2 et U_3 tendent *presque partout* vers zéro, et U_1 tend *presque partout* vers $F_1'(Q)$ ou $F'(Q)$ que nous pouvons désigner par $U(Q)$. La fonction U_1 peut donc s'exprimer aussi sous la forme

$$U_1(P)=\iint_S \varrho U dS.$$

En définitive, la fonction harmonique positive dans D la plus générale, U, admet la décomposition

$$U(P)=\iint_S \varrho U dS+\iint_S \varrho dF_2+\sum_k a_k\varrho(Q_k, P).$$

La fonction $\varrho(Q_k, P)$ est une fonction harmonique positive qui constitue une sorte d'élément simple. Elle s'annule sur toute la frontière S du domaine D, sauf au seul point Q_k où elle devient infinie. La fonction qui jouit de cette propriété est définie à un facteur numérique près.

35. - Fonctions harmoniques de signe variable réductibles aux précédentes. — La théorie des lignes singulières (n.° 27), la définition de la fonction d'ensemble Φ (n.° 28) et celle de la primitive F sur la frontière (n.° 29), enfin la preuve de l'additivité complète de ces fonctions, dans l'hypothèse d'une fonction harmonique positive U, reposent sur deux observations seulement: 1°) La somme des *déchets* (n.° 27) sur diverses lignes C ne peut surpasser $U(P_0)$; 2°) l'intégrale de UdS' est bornée sur une surface S' à courbure bornée infiniment voisine de S avec une borne commune pour toutes ces surfaces.

Si la fonction U est de signe variable dans le domaine D, les raisonnements analogues subsistent sous la condition que l'intégrale de $|U|\, dS'$ soit bornée comme celle de UdS' dans le cas précédent. Dans ce cas, la somme des *déchets absolus* sur plusieurs lignes ne peut surpasser le produit $A\varrho_1$ du maximum de l'intégrale par le maximum de ϱ, de sorte que la théorie des lignes singulières subsiste. La définition des fonctions Φ et F et la preuve de leur additivité complète se justifie de même par la condition que l'intégrale de $|U|\, dS'$ soit bornée, mais ces fonctions sont maintenant de signe variable. La primitive sur la frontière F est donc la différence $F_2 - F_1$ de deux fonctions non négatives sur S, d'où il suit que la fonction U est la différence $U_2 - U_1$ de deux fonctions harmoniques et positives dans D. Nous avons donc le théorème suivant:

Soit U une fonction harmonique dans un domaine ouvert D limité par une ou plusieurs surfaces séparées à courbure bornée; la condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit la différence de deux fonctions harmoniques positives dans le même domaine, est que l'intégrale

$$\iint_{S} |U|\, dS'$$

soit bornée pour l'ensemble des surfaces à courbure uniformément bornée tracées dans le domaine D, et il suffit évidemment qu'elle le soit pour les surfaces infiniment voisines de la frontière.