

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LEONIDA TONELLI

L'estremo assoluto degli integrali doppi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 2, n° 1
(1933), p. 89-130

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_1_89_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ESTREMO ASSOLUTO DEGLI INTEGRALI DOPPI

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

Mi sono proposto di estendere agli integrali doppi, del Calcolo delle Variazioni, la teoria dell'estremo assoluto da me sviluppata, per gli integrali curvilinei, nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* ⁽¹⁾. Questa teoria è fondata sul concetto di semicontinuità, il quale, in simili questioni, si dimostra particolarmente fecondo.

Nella presente Memoria, mi occupo dell'esistenza dell'estremo, riservando ad un prossimo lavoro la considerazione della variazione prima e dell'equazione a derivate parziali di LAGRANGE. E non è possibile che io mi astenga dal rammentare qui che, allo studio dell'estremo assoluto degli integrali doppi, hanno arrecato notevolissimi contributi ARZELÀ, HILBERT, HADAMARD, ZAREMBA, B. LEVI, FUBINI, LEBESGUE, S. BERNSTEIN, COURANT, HAAR.

§ 1.

Campi e funzioni.

1. - Campi aperti e limitati D e campi chiusi corrispondenti \bar{D} .

Chiameremo *campo aperto e limitato* un qualsiasi insieme di punti del piano (x, y) , soddisfacente alle due seguenti condizioni:

1° ogni punto dell'insieme è *interno* all'insieme stesso, vale a dire è il centro di un cerchio tutto costituito di punti dell'insieme;

2° è possibile di descrivere, nel piano (x, y) , un cerchio che contenga tutti i punti dell'insieme.

I punti del piano (x, y) che non appartengono ad un dato campo aperto e limitato, ma che sono punti di accumulazione (punti limiti) di punti del campo, costituiscono la *frontiera* di tale campo. Questa *frontiera* è un insieme *chiuso e limitato*.

⁽¹⁾ Bologna, Zanichelli, 1922-1923.

I punti di un campo aperto e limitato e quelli della sua frontiera costituiscono complessivamente un insieme *chiuso* e *limitato*, che sarà chiamato il *campo chiuso corrispondente al campo aperto e limitato* considerato.

Ordinariamente, indicheremo con D un campo aperto e limitato, con \bar{D} il campo chiuso corrispondente, con F la sua frontiera.

2. - Le condizioni $[C_\gamma]$ e $[C, \alpha]$.

a) Dato un numero $\gamma \geq 0$, diremo che un punto P_0 , della frontiera di un campo aperto e limitato D , soddisfa alla *condizione* $[C_\gamma]$, se è possibile di determinare un raggio r_0 , uscente da P_0 , e tre numeri $\varrho_0 > 0$, $k \geq 0$, $k' \geq 0$, di cui gli ultimi due fra loro diversi ($k \neq k'$), in modo che: 1°) assunto P_0 come polo e r_0 come asse polare di un sistema di coordinate polari, ϱ e ω (ϱ = raggio vettore, ω = anomalia), tutti i punti *interni* al triangolo mistilineo T_0 , formato dalle due curve

$$\omega = k\varrho^\gamma, \quad \omega = k'\varrho^\gamma,$$

uscanti da P_0 , e dal minore dei due archi della circonferenza di centro P_0 e raggio ϱ_0 determinati da tali curve, appartengano a D ; 2°) per ogni punto P di D , sufficientemente vicino a P_0 , si possa costruire un triangolo mistilineo T , appartenente a D , uguale a T_0 , avente il vertice corrispondente a P_0 in P , e tale che i suoi punti distino da quelli corrispondenti di T_0 di tanto poco quanto si vuole.

È evidente che, se il punto P_0 è il vertice di un settore circolare i cui punti interni appartengano tutti a D , tale punto soddisfa alla condizione $[C_\gamma]$, per qualsiasi $\gamma \geq 0$. Si è in tale caso, per esempio, se P_0 è un punto isolato della frontiera; oppure se, nell'intorno di P_0 , la frontiera è costituita da un arco di curva continua a tangente variabile in modo continuo; ecc. ecc.

Se il campo D fosse costituito da tutti e soli i punti (x, y) tali che

$$0 < x < \frac{1}{x}, \quad 0 < y < x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x},$$

il punto $(0, 0)$ della sua frontiera non verificherebbe, per nessun $\gamma \geq 0$, la condizione $[C_\gamma]$.

b) Dati un campo aperto e limitato D ed un numero $\alpha > 0$, diremo che *il campo* D *soddisfa alla condizione* $[C, \alpha]$ se, per ciascun punto P_0 della frontiera di D , esiste almeno un numero γ (che può variare al variare di P_0), con $0 \leq \gamma < \alpha$, e tale che il punto P_0 soddisfi alla condizione $[C_\gamma]$.

È evidente che il campo D verificherebbe la condizione $[C, \alpha]$, per qualunque $\alpha > 0$, se, per esempio, la sua frontiera fosse costituita da una curva continua, senza punti multipli, ovunque dotata di tangente variabile in modo continuo; oppure se la sua frontiera fosse costituita da un numero finito di archi di tale natura ed avente, nei punti privi di tangente, dei punti angolosi, con angolo non nullo rivolto verso l'interno del campo; ecc. ecc.

3. - La condizione [L].

a) Diremo che un punto P_0 , della frontiera F di un campo aperto e limitato D , soddisfa alla *condizione* [L] se i quadrati di centro P_0 e di lati paralleli agli assi x e y , oppure i cerchi di centro P_0 , aventi, rispettivamente, sui lati oppure sulla circonferenza almeno un punto *non* appartenente a D , hanno, in P_0 , una *densità minima positiva* ⁽²⁾. Con ciò intendiamo che, detta R' la metà del lato di uno qualunque dei quadrati indicati (oppure il raggio di uno dei cerchi detti), il rapporto $m_R:R$, fra la misura (nel senso di LEBESGUE) m_R dei valori di R' tali che $R' \leq R$, ed R , abbia, per $R \rightarrow +0$, un minimo limite maggiore di zero; il che equivale a dire che esistano due numeri $k_0 > 0$ e $R_0 > 0$ tali da rendere soddisfatta la disuguaglianza $m_R > k_0 R$, per tutti gli $R > 0$ e $\leq R_0$.

È evidente che, se alla frontiera F appartiene un arco di curva continua (non ridotto ad un solo punto) il quale contenga P_0 , questo punto soddisfa alla *condizione* [L]. Se, invece, P_0 fosse un punto isolato della frontiera, esso *non* verificherebbe la *condizione* [L].

b) Si dirà che un campo aperto e limitato D soddisfa alla *condizione* [L] se a tale condizione soddisfano tutti i punti della sua frontiera.

Se la frontiera di D fosse costituita soltanto da una o da un numero finito di curve continue (non mai ridotte ad un solo punto), D verificherebbe certamente la *condizione* [L].

4. - Funzioni assolutamente continue.

Una funzione $f(x, y)$, data in un campo aperto e limitato D , del piano (x, y) , si dice che è *assolutamente continua in D* se verifica le seguenti condizioni:

1°) essa è continua in tutti i punti di D ;

2°) per quasi tutti i valori di y_0 e di x_0 , $f(x, y_0)$ e $f(x_0, y)$ sono funzioni, rispettivamente di x e di y , assolutamente continue sulle intersezioni di D con le rette $y=y_0$ e $x=x_0$, rispettivamente, intendendosi con ciò che, per esempio, la $f(x, y_0)$ sia assolutamente continua come funzione della x su ogni segmento della retta $y=y_0$ tutto costituito di punti di D ;

3°) le derivate parziali

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

[le quali per 2°) esistono finite quasi dappertutto in D] sono integrabili (nel senso del LEBESGUE) in D ⁽³⁾.

⁽²⁾ In questa definizione, in luogo di quadrati e cerchi si potrebbero considerare dei rettangoli, delle ellissi, ecc. Cfr. H. LEBESGUE: *Sur le problème de Dirichlet* (Rend. Circolo Matematico di Palermo, t. XXIV (2° sem. 1907), pp. 371-402), pp. 390-391.

⁽³⁾ La definizione qui posta è equivalente a quella da me data in: *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du Calcul des Variations* (Acta Mathematica, t. 53, 1929, pp. 325-346). Vedi

Tutte le funzioni $f(x, y)$ continue in D , con derivate parziali del 1° ordine limitate in D , sono assolutamente continue in tale campo; altrettanto può dirsi delle funzioni continue con rapporti incrementali limitati in D .

Sono pure assolutamente continue, nel campo D definito dalle disuguaglianze $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, le funzioni $(x+y)^{\frac{1}{2}}$, $(x+y)^{-\frac{1}{2}}$.

5. - Teorema sull'assoluta continuità delle funzioni di accumulazione.

Sia $\{f(x, y)\}$ un insieme di infinite funzioni, assolutamente continue in uno stesso campo aperto e limitato D , ed esistano due numeri, maggiori di zero, α e A , tali che tutte le funzioni dell'insieme soddisfino alla disuguaglianza

$$(1) \quad \iint_D \{|p|^{1+\alpha} + |q|^{1+\alpha}\} dx dy \leq A.$$

Allora tutte le funzioni di accumulazione ⁽⁴⁾ dell'insieme $\{f(x, y)\}$, in D , risultano assolutamente continue in tale campo.

Per funzione di accumulazione di $\{f(x, y)\}$, in D , intendiamo una funzione $\varphi(x, y)$ tale che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esista sempre almeno una funzione $f(x, y)$, dell'insieme considerato, soddisfacente, in tutto D , alla disuguaglianza

$$|\varphi(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

La $\varphi(x, y)$ risulta, senz'altro, continua in D .

Fissiamo, nel piano (x, y) , un quadrato Q a lati paralleli agli assi x e y , e contenente tutto il campo D , e dividiamolo in 4^n (per n intero positivo) quadrati uguali. Indichiamo con \bar{D}_n l'insieme, chiuso e limitato, costituito da tutti i quadrati, della successione ottenuta, che appartengono completamente (lati compresi) a D ; allora \bar{D}_{n+1} contiene \bar{D}_n e, preso ad arbitrio un punto P di D , è sempre possibile di trovare un \bar{n} tale che, per tutti gli $n \geq \bar{n}$, \bar{D}_n contenga P . Perciò il campo D risulta costituito da un'infinità numerabile di quadrati q_1, q_2, q_3, \dots , a lati paralleli agli assi x e y (i quadrati di \bar{D}_1 più quelli di \bar{D}_2 che non fanno parte di \bar{D}_1 , ecc.) e la misura $m(\bar{D}_n)$ di \bar{D}_n , che è sempre $< m(D)$, tende, per $n \rightarrow \infty$, a $m(D)$.

Ciò premesso, sia $\varphi(x, y)$ una funzione di accumulazione dell'insieme $\{f(x, y)\}$ in D , e cominciamo col provare che essa è assolutamente continua in ognuno dei

anche le mie note: *Sulla quadratura delle superficie* (Rend. Lincei, Vol. III, 1926) e *Sur la quadrature des surfaces* (Comptes Rendus, t. 182, 1926).

G. C. EVANS, in: *Fundamental points of potential theory* (The Rice Institute Pamphlet, Vol. VII, 1920, pp. 252-329) ha definito quelle che Egli chiama le *funzioni potenziali di derivate generalizzate*. Queste funzioni, quando si introduca l'ipotesi della continuità, si riducono alle mie *funzioni assolutamente continue*. Ciò mette in maggior luce l'importanza che questi concetti hanno in svariati campi dell'Analisi.

(4) Se ne esistono.

quadrati q_1, q_2, \dots . Consideriamone uno qualunque, q_m , di questi quadrati, e, per semplicità di scrittura, supponiamo (ciò che è ben lecito) che le coordinate del suo vertice di ascissa e ordinata minime siano 0 e 0.

Se $f(x, y)$ è una qualsiasi delle funzioni del nostro insieme, la nuova funzione

$$(2) \quad \int_0^x f(x, y) dx$$

risulta, nel quadrato q_m , doppiamente assolutamente continua; e possiamo dire, di più, che le funzioni (2), che si ottengono in corrispondenza di tutte le $f(x, y)$ dell'insieme considerato, sono tutte equidoppiamente assolutamente continue in q_m . In altre parole, come ora proveremo, preso un $\sigma > 0$, ad arbitrio, è possibile di determinare un $\delta > 0$ in modo che, se R_1, R_2, \dots, R_s è un qualsiasi gruppo di rettangoli non sovrappoventisi, appartenenti a q_m , a lati paralleli agli assi x e y , e di area complessiva minore di δ , il valore assoluto della somma degli incrementi ⁽⁵⁾ della funzione (2) sui rettangoli del gruppo risulti minore di σ , per tutte le $f(x, y)$ dell'insieme $\{f(x, y)\}$. Abbiamo, infatti, in q_m , per essere $f(x, y)$ una funzione assolutamente continua,

$$\int_0^x f(x, y) dx = \int_0^x f(x, 0) dx + \int_0^x \int_0^y q dx dy,$$

e pertanto, indicando con

$$\Delta_R \int_0^x f dx$$

l'incremento della (2) sul rettangolo R ,

$$\left| \sum_{i=1}^s \Delta_{R_i} \int_0^x f dx \right| = \left| \sum_{i=1}^s \Delta_{R_i} \int_0^x \int_0^y q dx dy \right| \leq \sum_{R_i} \iint |q| dx dy,$$

donde, applicando la nota disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER,

$$\left| \sum_{i=1}^s \Delta_{R_i} \int_0^x f dx \right| \leq \left[\sum_{R_i} R_i \right]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \left[\sum_{R_i} \iint |q|^{1+\alpha} dx dy \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} < \delta^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} A^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Se dunque supponiamo $\delta < \left\{ \sigma^{1+\alpha} : A \right\}^{\frac{1}{\alpha}}$, abbiamo, come volevamo provare,

$$(3) \quad \left| \sum_{i=1}^s \Delta_{R_i} \int_0^x f dx \right| < \sigma.$$

⁽⁵⁾ Se (a, b) e $(a+h, b+k)$ sono due vertici opposti di un rettangolo R , a lati paralleli agli assi x e y , ed è $h > 0, k > 0$, l'incremento di una funzione $\psi(x, y)$ in R è dato da

$$\psi(a+h, b+k) - \psi(a+h, b) - \psi(a, b+k) + \psi(a, b).$$

Passando alla funzione di accumulazione $\varphi(x, y)$, fissiamo uno dei gruppi di rettangoli R_1, R_2, \dots, R_s ora considerati, e scegliamo una funzione $f(x, y)$, del nostro insieme, in modo che risulti, in tutto q_m , $|\varphi - f| < \sigma: 4s\Delta$, essendo Δ la lunghezza del lato di Q . Per essa sarà allora

$$\left| \sum \Delta_{R_i} \int_0^x \varphi dx - \sum \Delta_{R_i} \int_0^x f dx \right| = \left| \sum \Delta_{R_i} \int_0^x (\varphi - f) dx \right| < \sigma$$

e dalla (3) potremo dedurre

$$\left| \sum \Delta_{R_i} \int_0^x \varphi dx \right| < 2\sigma.$$

Siccome questa disuguaglianza vale per tutti i gruppi di rettangoli R_1, R_2, \dots, R_s più sopra indicati, risulta provata la doppia assoluta continuità, in q_m , della

funzione $\int_0^x \varphi dx$. Ne segue che, in q_m , è

$$(4) \quad \int_0^x \varphi(x, y) dx = \int_0^x \varphi(x, 0) dx + \int_0^x \int_0^y \psi(x, y) dx dy,$$

dove è quasi dappertutto

$$\psi(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_0^x \varphi dx = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \int_0^x \varphi dx.$$

Dunque, quasi dappertutto in q_m , la derivata parziale $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ esiste finita ed uguale a ψ ; essa è così anche integrabile e dalla (4) scende

$$\int_0^x \varphi(x, y) dx = \int_0^x \varphi(x, 0) dx + \int_0^x \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy,$$

donde, derivando, si ottiene

$$\varphi(x, y) = \varphi(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy,$$

uguaglianza che sussiste quasi dappertutto in q_m . Ma, su ogni parallela all'asse delle y sulla quale la $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ risulti integrabile, i due membri della precedente uguaglianza sono delle funzioni continue della y . Tale uguaglianza vale perciò su quasi tutti i segmenti di q_m paralleli all'asse delle y e ne viene così che la $\varphi(x, y)$ è, in q_m , per quasi tutti gli x , funzione assolutamente continua della y .

Partendo dall'integrale

$$\int_0^y f(x, y) dy,$$

invece che da (2), si prova, in modo analogo, che la $\varphi(x, y)$ è, in q_m , per quasi

tutti gli y , funzione assolutamente continua della x , e che la derivata $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ esiste finita quasi dappertutto in q_m ed è ivi integrabile. Dunque la $\varphi(x, y)$ è assolutamente continua in q_m .

Siccome poi i quadrati q_m sono in un'infinità numerabile, risulta anche provato che, per quasi tutti i valori di y_0 e di x_0 , $\varphi(x, y_0)$ e $\varphi(x_0, y)$ sono funzioni, rispettivamente di x e di y , assolutamente continue sulle intersezioni di D con le rette $y=y_0$ e $x=x_0$, rispettivamente.

Resta da dimostrare che le derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, le quali, per quanto abbiamo detto, esistono finite quasi dappertutto in D , sono, in tale campo, integrabili.

Dall'assoluta continuità di $\varphi(x, y)$ in ogni q_m , risulta la stessa proprietà anche in \overline{D}_n , e se consideriamo un qualsiasi gruppo R_1, \dots, R_s di rettangoli a lati paralleli agli assi x e y , non sovrappoventisi e appartenenti, non più a q_m , ma a \overline{D}_n , abbiamo

$$\sum_{i=1}^s \iint_{R_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^s \Delta_{R_i} \int_{a_i}^x \varphi dx.$$

dove a_i è la minima ascissa dei punti di R_i . Scelta ora una funzione $f(x, y)$ dell'insieme $\{f(x, y)\}$, in modo che sia

$$\left| \sum_{i=1}^s \Delta_{R_i} \int_{a_i}^x \varphi dx - \sum_{i=1}^s \Delta_{R_i} \int_{a_i}^x f dx \right| < 1,$$

(il che è possibile perchè la φ è funzione di accumulazione per $\{f\}$), per tale funzione avremo

$$\left| \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \right| < 1 + \left| \sum_{i=1}^s \Delta_{R_i} \int_{a_i}^x f dx \right| < 1 + \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| dx dy,$$

da cui, per la disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER, già applicata,

$$\left| \sum_{i=1}^s \iint_{R_i} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \right| < 1 + [m(D)]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} A^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Questa disuguaglianza prova che, indicando con P_n l'insieme dei punti di \overline{D}_n in cui la $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ esiste finita e ≥ 0 , è

$$\left| \iint_{P_n} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy \right| \leq 1 + [m(D)]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} A^{\frac{1}{1+\alpha}},$$

e quindi anche

$$\iint_{\overline{D}_n} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| dx dy \leq 2 + 2[m(D)]^{\frac{\alpha}{1+\alpha}} A^{\frac{1}{1+\alpha}}.$$

Siccome è, per $n \rightarrow \infty$, $m(\overline{D}_n) \rightarrow m(D)$, da questa disuguaglianza segue l'inte-

grabilità di $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ in D . In modo analogo si ottiene l'integrabilità di $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$; e così la dimostrazione del teorema enunciato risulta compiuta.

Osservazione. - Per quanto si dirà al § 3, anche la funzione di accumulazione $\varphi(x, y)$, soddisfa alla (1).

6. - Livellamento, a meno di $1:n$ e secondo una data giacitura, di una funzione assolutamente continua.

Sia $f(x, y)$ una funzione assolutamente continua nel campo aperto e limitato D , e continua in tutto il campo chiuso corrispondente \bar{D} .

Riferito lo spazio, a tre dimensioni, ad un sistema cartesiano ortogonale (x, y, z) , il cui piano (x, y) sia quello contenente il campo D , si consideri un piano Π , di tale spazio, *non* perpendicolare al piano (x, y) ; poi, fissato un numero intero positivo n , si indichino con P_0, P_1, \dots, P_q , tutti i punti dell'asse delle z corrispondenti ai valori di z della forma $k:n$, con k intero, e tali che i piani per essi condotti parallelamente a Π incontrino tutta la superficie S definita, sul campo \bar{D} , dall'equazione $z=f(x, y)$.

Intenderemo che i punti P_0, P_1, \dots, P_q , siano disposti sull'asse delle z in modo che i valori di z ad essi corrispondenti vadano crescendo.

Chiamati $\Pi_0, \Pi_1, \dots, \Pi_q$ i piani paralleli a Π passanti, rispettivamente, per P_0, \dots, P_q , considereremo, in primo luogo, l'intersezione della superficie S col piano Π_0 , per dedurre, nel modo che ora indicheremo, dalla funzione $f(x, y)$ una nuova funzione $f_0(x, y)$.

In ogni punto (x, y) , di D , appartenente ad un campo aperto e limitato D' , tutto contenuto in D e tale che la sua frontiera F' appartenga alla proiezione ortogonale sul piano (x, y) dell'intersezione di S con Π_0 , poniamo $f_0(x, y)$ uguale al valore che la z assume sul piano Π_0 in corrispondenza allo stesso punto (x, y) . In ogni altro punto di \bar{D} , poniamo $f_0(x, y)=f(x, y)$. Siccome la $f(x, y)$ è continua in \bar{D} e assolutamente continua in D , anche la $f_0(x, y)$ risulta, evidentemente, continua in \bar{D} e assolutamente continua in D ; inoltre, è $f_0(x, y)=f(x, y)$ su tutta la frontiera F di D .

Come dalla funzione $f(x, y)$ abbiamo dedotto la $f_0(x, y)$, dalla $f_0(x, y)$ deduciamo ora una nuova funzione $f_1(x, y)$, sostituendo, in ciò che abbiamo fatto più sopra, la funzione $f(x, y)$ con la $f_0(x, y)$ ed il piano Π_0 con Π_1 . Anche la $f_1(x, y)$ risulterà continua in tutto \bar{D} e assolutamente continua in D ; e si avrà $f_1(x, y)=f_0(x, y)=f(x, y)$ su F .

Proseguendo in modo analogo, verremo a dedurre, una dopo l'altra, le funzioni $f_2(x, y), f_3(x, y), \dots, f_q(x, y)$. L'ultima di esse sarà detta la *funzione dedotta, in \bar{D} , dalla $f(x, y)$, per livellamento, a meno di $1:n$, secondo la giacitura del piano Π* . Tale funzione $f_q(x, y)$ risulterà continua in \bar{D} , assolutamente continua in D , ed uguale alla $f(x, y)$ sulla frontiera F di D . Inoltre, in ogni punto (x, y) di D appartenente ad un campo aperto D' , tutto contenuto in D ed avente la

frontiera F' tutta costituita di punti della proiezione ortogonale sul piano (x, y) dell'intersezione della superficie $z=f_q(x, y)$ col piano Π_r ($r=0, 1, \dots, q$), $f_q(x, y)$ è uguale al valore che, nello stesso punto (x, y) , la z assume sul piano Π_r .

Se la funzione $f(x, y)$ avesse essa stessa le proprietà or ora indicate per la $f(x, y)$ (vale a dire, se la $f(x, y)$ coincidesse con la $f_q(x, y)$), diremmo che *la $f(x, y)$ è, in \bar{D} , livellata, a meno di $1:n$, secondo la giacitura del piano Π* .

Quando la $f(x, y)$ sia considerata soltanto in D (e, per esempio, non sia definita sulla frontiera, oppure su tale frontiera non sia continua), diremo che essa è, *in D , livellata, a meno di $1:n$, secondo la giacitura di un piano Π* , se, per ogni campo aperto D' , tutto contenuto, insieme con \bar{D}' , in D , essa risulta livellata in \bar{D}' .

§ 2.

Criteri di uguale continuità.

7. - Uguale continuità nell'interno di un campo aperto e limitato.

Dato un campo aperto e limitato D ed un insieme $\{f(x, y)\}$ di funzioni, tutte definite in D , diremo che queste funzioni sono *ugualmente continue nell'interno di D* se, considerato un qualsiasi gruppo di punti E , chiuso e tutto appartenente a D , le funzioni $f(x, y)$ risultano *ugualmente continue in E* (vale a dire, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile di determinare un $\delta > 0$ tale che, se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono due punti qualsiasi di E , distanti fra loro per meno di δ , la disuguaglianza $|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon$ risulta soddisfatta da tutte le funzioni dell'insieme considerato).

Osserviamo che un insieme E di punti, chiuso e tutto appartenente a D , non può mai contenere tutti i punti di D ; inoltre, la minima distanza dei punti di E dalla frontiera di D è sempre maggiore di zero; in altre parole, esiste un $\delta > 0$ tale che ogni cerchio di raggio minore di δ , ed avente il centro in un punto di E , risulta tutto costituito di punti di D .

È evidente che le funzioni di un insieme $\{f(x, y)\}$ possono essere ugualmente continue *nell'interno* di D senza essere ugualmente continue in tutto D .

8. - Criterio per l'uguale continuità nell'interno di un campo aperto e limitato.

Sia $\{f(x, y)\}$ un insieme di funzioni assolutamente continue in uno stesso campo aperto e limitato D , ed esistano due numeri maggiori di zero, α e A , tali che tutte le funzioni dell'insieme soddisfino alla disuguaglianza

$$(1) \quad \iint_{\bar{D}} \{ |p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha} \} dx dy \leq A.$$

Allora le funzioni dell'insieme $\{f(x, y)\}$ sono ugualmente continue nell'interno di D .

Scelto un $\varepsilon > 0$, cominciamo col determinare un $r_0 > 0$ in modo che, in ogni cerchio C di raggio $\leq r_0$ e tutto (circonferenza compresa) appartenente a D , le funzioni dell'insieme $\{f(x, y)\}$ abbiano un'oscillazione non superiore ad ε .

Consideriamo, a tale scopo, un cerchio C di raggio r , tutto appartenente a D (anche con la sua circonferenza), e supponiamo che, in esso, l'oscillazione di una $f(x, y)$, del nostro insieme, sia maggiore di ε . Potremo allora scegliere, nell'interno di C , due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , in modo da avere

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) > \varepsilon.$$

Indichiamo con γ_1 la parte della circonferenza di C in cui è sempre

$$f(x, y) > f(x_2, y_2) + \frac{\varepsilon}{3},$$

e con γ_2 quella in cui è sempre

$$f(x, y) < f(x_1, y_1) - \frac{\varepsilon}{3}.$$

La parte γ_1 o non contiene nessun punto oppure è costituita da un numero finito o da un'infinità numerabile di archi; ed altrettanto avviene per γ_2 . Ogni punto della circonferenza di C , se non appartiene a γ_1 , appartiene certamente a γ_2 , per modo che una almeno delle parti γ_1 e γ_2 ha una misura maggiore di πr . Supponiamo, per fissare le idee, che ciò avvenga per γ_1 , vale a dire che sia

$$(2) \quad m(\gamma_1) > \pi r.$$

Congiungiamo, mediante segmenti rettilinei, il punto (x_2, y_2) con tutti i punti degli archi che costituiscono γ_1 , ed anche con gli estremi e coi punti di accumulazione di tali archi. Tutti questi segmenti costituiranno un campo chiuso \bar{F} , e, in tutti quei punti di questo campo che trovansi sulla circonferenza di C , varrà la disuguaglianza

$$(3) \quad f(x, y) \geq f(x_2, y_2) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Osserviamo ora che, in virtù della (1), è

$$\iint_{\bar{F}} \{|p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha}\} dx dy \leq A$$

e perciò anche

$$(4) \quad \iint_{\bar{F}} \{p^2 + q^2\}^{1+\frac{\alpha}{2}} dx dy \leq 2^{1+\frac{\alpha}{2}} A.$$

Passiamo dalle coordinate cartesiane x e y a quelle polari $\bar{\rho}$ e ω , scegliendo come polo il punto (x_2, y_2) e come asse polare il raggio per (x_2, y_2) parallelo all'asse delle x e con lo stesso verso di questo asse. La (4) si trasforma allora in

$$\iint_{\bar{F}} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\rho}} \right)^2 + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^2 \right\}^{1+\frac{\alpha}{2}} \bar{\rho} d\bar{\rho} d\omega \leq 2^{1+\frac{\alpha}{2}} A,$$

da cui segue, *a fortiori*,

$$\iint_{\bar{F}} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{\varrho}} \right|^{2+\alpha} \bar{\varrho} d\bar{\varrho} d\omega \leq 2^{1+\frac{\alpha}{2}} A.$$

Ponendo $\bar{\varrho} = \varrho^\nu$, con $\nu > 0$, abbiamo

$$d\bar{\varrho} = \nu \varrho^{\nu-1} d\varrho, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{\varrho}} = \frac{1}{\nu \varrho^{\nu-1}} \frac{\partial f}{\partial \varrho},$$

$$\iint_{\bar{F}} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{\varrho}} \right|^{2+\alpha} \bar{\varrho} d\bar{\varrho} d\omega = \frac{1}{\nu^{1+\alpha}} \iint_{\bar{F}} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right|^{2+\alpha} \varrho^{1-\alpha(\nu-1)} d\varrho d\omega,$$

e perciò, scegliendo $\nu = \frac{1+\alpha}{\alpha}$,

$$\iint_{\bar{F}} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right|^{2+\alpha} d\varrho d\omega \leq 2^{1+\alpha} \left(\frac{1+\alpha}{\alpha} \right)^{1+\alpha} A.$$

Di qui segue, per la disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER,

$$\begin{aligned} \iint_{\bar{F}} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right| d\varrho d\omega &\leq \left[\iint_{\bar{F}} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right|^{2+\alpha} d\varrho d\omega \right]^{\frac{1}{2+\alpha}} \left[\iint_{\bar{F}} d\varrho d\omega \right]^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} \\ &\leq 2^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} A^{\frac{1}{2+\alpha}} \left[\iint_{\bar{F}} d\varrho d\omega \right]^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} \\ &\leq 2^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} A^{\frac{1}{2+\alpha}} [2\pi(2r)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}]^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} < 8\pi^{\frac{1+\alpha}{\alpha}} A^{\frac{1}{2+\alpha}} r^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}. \end{aligned}$$

D'altro lato, poichè sulla parte della frontiera di \bar{F} che trovasi sulla circonferenza di C vale la (3), si ha, tenendo conto della (2),

$$\iint_{\bar{F}} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right| d\varrho d\omega > \frac{\varepsilon}{3} \cdot \frac{\pi}{2},$$

e pertanto

$$\varepsilon < 48 \frac{1+\alpha}{\alpha} A^{\frac{1}{2+\alpha}} r^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}.$$

Se ne deduce che, per

$$(5) \quad r_0 = \left(\frac{\varepsilon \alpha}{48(1+\alpha)} \right)^{\frac{2+\alpha}{\alpha}} A^{-\frac{1}{\alpha}},$$

in ogni cerchio C di raggio $\leq r_0$, tutto appartenente (circonferenza compresa) a D , le funzioni dell'insieme $\{f(x, y)\}$ hanno tutte un'oscillazione non superiore ad ε .

Sia ora E un qualsiasi insieme chiuso di punti di D , e indichiamo con e la minima distanza dei punti di E dalla frontiera F di D . Diciamo poi δ un numero positivo minore di e e di r_0 . Allora, se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono due punti qualunque di E , distanti fra loro per meno di δ , poichè il cerchio di centro (x_1, y_1)

e raggio δ appartiene tutto (circonferenza compresa) a D , e poichè è $\delta < r_0$, nel cerchio indicato l'oscillazione di una qualsiasi $f(x, y)$, del nostro insieme, non supera ε , e ne viene

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon.$$

L'uguale continuità, nell'interno di D , è così dimostrata.

9. - Comportamento sulla frontiera di D .

Le funzioni $f(x, y)$, del teorema del n.º precedente, sono state considerate soltanto sul campo aperto e limitato D . Qui vogliamo esaminare se esse possono definirsi anche sulla frontiera F di D , in modo da risultare continue pure su tale frontiera. Vedremo che la cosa è sempre possibile se la frontiera soddisfa alla condizione $[C, \alpha]$ (n.º 2), e che non è invece sempre possibile nel caso contrario.

a) Una funzione $f(x, y)$, assolutamente continua nel campo aperto e limitato D , e tale che, per un $\alpha > 0$, esista finito l'integrale

$$(1) \quad \iint_D \{ |p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha} \} dx dy,$$

può definirsi in tutti i punti della frontiera di D che soddisfano ad una condizione $[C_\gamma]$, con $0 \leq \gamma < \alpha$, e in modo che la $f(x, y)$ risulti continua anche in siffatti punti.

Sia $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ un punto, della frontiera F di D , soddisfacente alla condizione $[C_\gamma]$, per $0 \leq \gamma < \alpha$. Dico che, al tendere del punto P , di D , a P_0 , il valore corrispondente della $f(x, y)$ tende ad un limite finito; dico cioè che esiste un numero (finito) L tale che la differenza $L - f(x, y)$ risulti, in modulo, minore di un numero positivo, arbitrariamente fissato, per tutti i punti (x, y) di D sufficientemente vicini a P_0 .

Basterà mostrare, a tal uopo, che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, l'oscillazione della $f(x, y)$, nei punti di D appartenenti ad un intorno sufficientemente piccolo di P_0 , risulta $\leq \varepsilon$.

Consideriamo il triangolo mistilineo T_0 relativo alla condizione $[C_\gamma]$ (n.º 2) e indichiamo con T_1 il nuovo triangolo mistilineo costituito dalla parte di T_0 che appartiene al cerchio di centro P_0 e raggio $\varrho_1 < \varrho_0$. Il lato p_1 , di tale triangolo, opposto al vertice P_0 , è costituito da un arco del cerchio di centro P_0 e raggio ϱ_1 , ed ha lunghezza data da

$$\varrho_1 |k - k'| \varrho_1^\gamma = |k - k'| \varrho_1^{\gamma+1} \quad (6).$$

Su tale arco, consideriamo quello \bar{p}_1 , di lunghezza metà, avente in comune con

(6) Possiamo sempre supporre ϱ_0 tale che $k\varrho_0^\gamma$ e $k'\varrho_0^\gamma$ siano entrambi $< 2\pi$.

esso il punto medio. Indichiamo poi con $\delta > 0$ un numero tale che, per ogni punto P' di D , distante da P_0 non più di δ , si possa considerare il triangolo mistilineo T , di cui si è detto al n.° 2, e che qui indicheremo con T' . Di questo triangolo T' consideriamo la parte T'_1 uguale a T_1 , l'arco \bar{p}'_1 uguale a \bar{p}_1 , e supponiamo δ abbastanza piccolo in modo che la differenza fra il valore della $f(x, y)$ in un punto qualunque di \bar{p}_1 e quello nel punto corrispondente di \bar{p}'_1 risulti sempre, in modulo, minore di $\frac{\varepsilon}{4}$. Proviamo che, se ϱ_1 è scelto convenientemente piccolo, nella parte di D appartenente al cerchio di centro P_0 e raggio δ , l'oscillazione della $f(x, y)$ è $\leq \varepsilon$.

Supponiamo, se è possibile, il contrario. Allora si potranno trovare due punti (x', y') e (x'', y'') , appartenenti a D , e ambedue distanti da P_0 di non più di δ , in modo che sia $f(x', y') - f(x'', y'') > \varepsilon$. Indicata con β_1 la parte di \bar{p}_1 in cui è sempre

$$f(x, y) \leq \frac{1}{2} \{f(x', y') + f(x'', y'')\},$$

e con β_2 quella in cui è sempre

$$f(x, y) \geq \frac{1}{2} \{f(x', y') + f(x'', y'')\},$$

una almeno di queste due parti avrà misura non inferiore alla metà della misura o lunghezza di \bar{p}_1 . Per fissare le idee, sia

$$m(\beta_1) \geq \frac{1}{4} |k - k'| \varrho_1^{\gamma+1}.$$

Considerato il punto $P' \equiv (x', y')$ ed il triangolo T' corrispondente, ed in esso la parte β'_1 uguale alla β_1 , avremo

$$(2) \quad m(\beta'_1) \geq \frac{1}{4} |k - k'| \varrho_1^{\gamma+1}$$

e, in tutto β'_1 , sarà

$$f(x, y) < \frac{1}{2} \{f(x', y') + f(x'', y'')\} + \frac{\varepsilon}{4} < f(x', y') - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Indicando con A un numero positivo, non inferiore all'integrale (1), avremo

$$\iint_{T'_1} \{|p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha}\} dx dy \leq A,$$

ed anche, analogamente a quanto abbiamo già fatto nel n.° 8,

$$(3) \quad \iint_{T'_1} (p^2 + q^2)^{1+\frac{\alpha}{2}} dx dy \leq 2^{1+\frac{\alpha}{2}} A.$$

Passiamo ora, dalle coordinate cartesiane x e y , alle polari ϱ e ω , prendendo come polo il punto P' e come asse polare il raggio corrispondente a quello r_0

indicato nel n.° 2; poi facciamo la trasformazione

$$(4) \quad \begin{cases} \varrho = \varrho_*^s \\ \omega = \omega_* \varrho_*^{s\gamma} \end{cases}$$

s essendo un numero maggiore di 1, che determineremo fra poco. Otteniamo allora, quasi dappertutto,

$$\frac{\partial f}{\partial \varrho_*} = \frac{\partial f}{\partial \varrho} s \varrho^{\frac{s-1}{s}} + \frac{\partial f}{\partial \omega} s \gamma \omega \varrho^{-\frac{1}{s}},$$

$$\frac{1}{\varrho_*^{2(s-1)}} \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho_*} \right)^2 \leq 2s^2 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho} \right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \omega} \right)^2 \gamma^2 \omega^2 \right\},$$

ed anche, poichè è $0 \leq \gamma < a$ e $0 \leq \omega < 2\pi$,

$$\frac{1}{\varrho_*^{2(s-1)}} \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho_*} \right)^2 \leq 2s^2 (1 + 4\pi^2 a^2) \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho} \right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \omega} \right)^2 \right\} = 2s^2 (1 + 4\pi^2 a^2) \{p^2 + q^2\},$$

$$\frac{1}{\varrho_*^{(s-1)(2+a)}} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho_*} \right|^{2+\alpha} \leq [2s^2 (1 + 4\pi^2 a^2)]^{1+\frac{\alpha}{2}} \{p^2 + q^2\}^{1+\frac{\alpha}{2}},$$

e quindi, per la (3),

$$\iint_{T_1'} \frac{1}{\varrho_*^{(s-1)(2+a)}} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho_*} \right|^{2+\alpha} s \varrho_*^{s(\gamma+2)-1} d\varrho_* d\omega_* \leq A [4s^2 (1 + 4\pi^2 a^2)]^{1+\frac{\alpha}{2}}.$$

Prendendo $s = \frac{1+a}{a-\gamma}$ (che è > 1), questa disuguaglianza si scrive

$$\iint_{T_1'} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho_*} \right|^{2+\alpha} d\varrho_* d\omega_* \leq A \left(\frac{1+a}{a-\gamma} \right)^{1+\alpha} [4(1 + 4\pi^2 a^2)]^{1+\frac{\alpha}{2}},$$

dalla quale, per la disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER, segue

$$(5) \quad \iint_{T_1'} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho_*} \right| d\varrho_* d\omega_* \leq A^{\frac{1}{2+\alpha}} \left(\frac{1+a}{a-\gamma} \right)^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} 2(1 + 4\pi^2 a^2) \left[\iint_{T_1'} d\varrho_* d\omega_* \right]^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}$$

$$\leq 2A^{\frac{1}{2+\alpha}} \left[|k-k'| \frac{1+a}{a-\gamma} \right]^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} (1 + 4\pi^2 a^2) \varrho_1^{\frac{\alpha-\gamma}{2+\alpha}},$$

perchè, per la trasformazione (4), il campo T_1' diventa nel sistema polare (ϱ_*, ω_*) , un settore circolare di raggio $\varrho_1^s = \varrho_1^{\frac{a-\gamma}{1+\alpha}}$ e di angolo al centro $|k-k'|$. Estendendo l'integrazione rispetto ad ω_* soltanto a quei valori che corrispondono ai punti di β_1' , valori che, per la (2), hanno una misura complessiva $\geq |k-k'|:4$ e per i quali è (ponendo $\varrho_{*1}^s = \varrho_1$, con $s = \frac{1+a}{a-\gamma}$)

$$\int_0^{\varrho_{*1}} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho_*} \right| d\varrho_* > \frac{\varepsilon}{4},$$

otteniamo

$$\iint_{T'} \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho_*} \right| d\varrho_* d\omega_* > \frac{\varepsilon}{16} |k - k'|.$$

Di qui e dalla (5) segue

$$(6) \quad \varepsilon < 32 \left\{ \frac{A}{|k - k'|} \right\}^{\frac{1}{2+\alpha}} \frac{1+\alpha}{\alpha-\gamma} (1 + 4\pi^2 \alpha^2) \varrho_1^{\frac{\alpha-\gamma}{2+\alpha}}.$$

Pertanto, intendendo che ϱ_1 sia stato scelto in modo da verificare la disuguaglianza contraria di quella ora scritta,

$$(7) \quad \varrho_1 < \varepsilon^{\frac{2+\alpha}{\alpha-\gamma}} \left[32 \left\{ \frac{A}{|k - k'|} \right\}^{\frac{1}{2+\alpha}} \frac{1+\alpha}{\alpha-\gamma} (1 + 4\pi^2 \alpha^2) \right]^{-\frac{2+\alpha}{\alpha-\gamma}},$$

la (6) risulta impossibile e l'oscillazione della $f(x, y)$, nella parte di D contenuta nel cerchio di centro P_0 e raggio δ , è effettivamente $\leq \varepsilon$.

Se ne conclude perciò che, al tendere di (x, y) , in D , al punto P_0 , $f(x, y)$ tende ad un limite finito L . Ed allora, se poniamo, per definizione, $f(x_0, y_0) = L$, la $f(x, y)$ risulta continua anche in (x_0, y_0) .

b) Se il punto P_0 della frontiera di D non soddisfacesse ad una condizione $[C_\gamma]$, con $0 \leq \gamma < \alpha$, quanto afferma il teorema dimostrato in a) non sussisterebbe in generale. Consideriamo, infatti, il campo D e la funzione $f(x, y)$ definiti nel seguente modo. Poniamo $\omega_n = 2^{-(n+2)(2+\alpha)}$ e, assunti come polo e asse polare l'origine O del piano (x, y) e il semiasse positivo delle ascisse, sia \bar{D} il campo chiuso costituito dall'origine O e da tutti i punti del piano (x, y) le cui coordinate polari ϱ e ω verificano, per almeno un n intero ≥ 0 , le disuguaglianze

$$2^{-(n+1)} \leq \varrho \leq 2^{-n}, \quad 0 \leq \omega \leq \omega_n.$$

Assumiamo come campo aperto e limitato D quello costituito da tutti i punti interni a \bar{D} . Poniamo poi, in D ,

$$f(x, y) \equiv \varphi(\varrho),$$

con

$$\begin{aligned} \varphi(\varrho) &= 2^{n+2}(\varrho - 2^{-(n+1)}) & \text{in } 2^{-(n+1)} \leq \varrho \leq 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)}, \\ \varphi(\varrho) &= 2^{n+2}(2^{-n} - \varrho) & \text{in } 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+2)} \leq \varrho \leq 2^{-n}. \end{aligned}$$

È, con ciò, quasi dappertutto in D ,

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1+\frac{\alpha}{2}} = \left| \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right|^{2+\alpha},$$

e perciò

$$\iint_D [p^2 + q^2]^{1+\frac{\alpha}{2}} dx dy = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} 2^{(n+2)(2+\alpha)} \varrho d\varrho = \frac{1}{2}.$$

E siccome è

$$|p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha} \leq 2[p^2 + q^2]^{1+\frac{\alpha}{2}},$$

risulta

$$\iint_{\bar{D}} [|p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha}] dx dy \leq 1.$$

Dunque, per la funzione $f(x, y)$ qui definita, che è assolutamente continua in D , l'integrale ora scritto esiste finito; peraltro, al tendere di (x, y) , in D , a $(0, 0)$, $f(x, y)$ non ha limite, perchè, nei punti in cui è $\varrho = 2^{-n}$, è $f(x, y) = 0$, ed in quelli in cui è $\varrho = 2^{-n} + 2^{-(n+1)}$, è $f(x, y) = 1$. È facile vedere che, nel punto $(0, 0)$, non è verificata nessuna condizione $[C_\gamma]$, con $0 \leq \gamma < \alpha$.

10. - Criteri per l'uguale continuità in tutto un campo aperto e limitato.

a) Sia $\{f(x, y)\}$ un insieme di funzioni assolutamente continue in uno stesso campo aperto e limitato D , ed esistano due numeri maggiori di zero a ed A , tali che tutte le funzioni dell'insieme soddisfino alla disuguaglianza

$$(1) \quad \iint_{\bar{D}} \{|p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha}\} dx dy \leq A.$$

Si supponga, di più, che il campo D soddisfi alla condizione $[C, a]$. Allora le funzioni dell'insieme $\{f(x, y)\}$ sono tutte ugualmente continue in D .

Osserviamo, in primo luogo, che, in virtù del criterio del n.º 8, le funzioni del nostro insieme sono ugualmente continue nell'interno di D ; e pertanto, scelto ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, in corrispondenza di ogni punto P di D si hanno infiniti cerchi C_P , di centro P , tali che, in tutta la parte di D compresa in uno qualunque di essi, l'oscillazione della funzione $f(x, y)$ sia sempre $\leq \varepsilon$.

Osserviamo poi che, per quanto abbiamo dimostrato nel n.º precedente, ognuna delle funzioni $f(x, y)$ può essere definita anche su tutta la frontiera F di D , in modo da risultare continua in tutto il campo chiuso \bar{D} . Inoltre, poichè, come si è già detto, le $f(x, y)$ sono ugualmente continue nell'interno di D , per ogni punto P_0 di F il numero δ , indicato nella dimostrazione del n.º 9, può essere scelto in modo da servire per tutte le funzioni dell'insieme $\{f(x, y)\}$, e quindi si può asserire che esistono infiniti cerchi C_{P_0} , di centro P_0 , tali che, in tutta la parte di D compresa in uno qualunque di essi, l'oscillazione di una qualsiasi delle funzioni $f(x, y)$ sia sempre $\leq \varepsilon$.

Consideriamo i cerchi concentrici a quelli C_P e C_{P_0} e di raggio metà, e indichiamoli con C'_P e C'_{P_0} . Siccome l'insieme di tutti i punti di \bar{D} è chiuso, ed ogni punto di \bar{D} è interno ad infiniti cerchi C'_P , C'_{P_0} , nella totalità di questi cerchi possiamo sceglierne un numero finito, che indicheremo con C'_1, \dots, C'_n , in modo che ogni punto di \bar{D} sia interno ad almeno uno di questi n cerchi. Sia R il più piccolo dei raggi di C'_1, \dots, C'_n . Allora possiamo affermare che,

se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono due qualsiasi punti di \overline{D} , distanti fra loro per meno di R , la disuguaglianza

$$(2) \quad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq \varepsilon$$

risulta soddisfatta da tutte le funzioni dell'insieme $\{f(x, y)\}$. Ed infatti, il punto (x_1, y_1) è interno ad almeno uno dei cerchi C_1', \dots, C_n' : sia, per esempio, interno a C'_m e consideriamo il cerchio C_m concentrico ad esso e di raggio doppio. Questo C_m è uno dei cerchi C_P e C_{P_0} , ed in esso l'oscillazione di una qualunque $f(x, y)$ è $\leq \varepsilon$. Ma in C_m è contenuto anche (x_2, y_2) , perchè la distanza fra (x_2, y_2) e (x_1, y_1) è $< R$, e perciò la (2) risulta verificata. Siccome ε è arbitrario, si ha con ciò l'uguale continuità di tutte le $f(x, y)$ di $\{f(x, y)\}$, in \overline{D} .

b) Sia $\{f(x, y)\}$ un insieme di funzioni assolutamente continue in uno stesso campo aperto e limitato D , ed esistano due numeri, maggiori di zero, α e A , tali che tutte le funzioni dell'insieme soddisfino alla disuguaglianza

$$\iint_D \{ |p|^{2+\alpha} + |q|^{2+\alpha} \} dx dy \leq A.$$

Si supponga, di più, che le $f(x, y)$ siano definite anche sulla frontiera F di D , in modo da risultare continue in tutto \overline{D} , e che tali funzioni, se considerate soltanto su F , vi risultino ugualmente continue. Allora le funzioni di $\{f(x, y)\}$ sono ugualmente continue in tutto \overline{D} .

Proviamo che, preso un $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, ed un punto P_0 di F , è possibile determinare un $\delta > 0$ in modo che, in tutta la parte di \overline{D} contenuta nel cerchio di centro P_0 e raggio δ , l'oscillazione di ogni funzione di $\{f(x, y)\}$ risulti $\leq \varepsilon$.

A tale scopo, osserviamo, innanzi tutto, che, con lo stesso ragionamento usato nel n.º 8, si stabilisce senza difficoltà la possibilità di determinare un numero $r > 0$, in modo che, in nessun campo aperto e limitato D' tutto appartenente a D e tutto contenuto in un cerchio di raggio r , possa esistere un punto nel quale il valore di una funzione di $\{f(x, y)\}$ differisca da tutti quelli assunti dalla stessa funzione sulla frontiera di D' per una quantità in modulo $> \varepsilon : 8$; ed in modo anche, se D' è costituito da tutti i punti interni ad un rettangolo R , ed è sempre contenuto in D e in un cerchio di raggio r , che non possa esistere in D' nessun punto nel quale il valore di una funzione di $\{f(x, y)\}$ differisca, per una quantità in modulo $> \varepsilon : 8$, da quelli assunti dalla stessa funzione su almeno due lati consecutivi di R .

Ciò premesso, supponiamo, se è possibile, che in ogni cerchio del piano (x, y) di centro $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, si trovi sempre un punto in cui una almeno delle funzioni di $\{f(x, y)\}$ verifichi la disuguaglianza

$$f(x, y) > f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Scegliamo due numeri l_0 e l_1 tali che $0 < l_1 < l_0 < r : 2$ e tali, inoltre, che, in tutti

i punti di F appartenenti al quadrato Q_0 , di centro P_0 , a lati paralleli agli assi x e y , e di lunghezza $2l_0$, tutte le $f(x, y)$ verificino la disuguaglianza

$$(3) \quad f(x, y) < f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{8}.$$

Sia $f_0(x, y)$ una funzione di $\{f(x, y)\}$ soddisfacente, in un punto (x_1, y_1) interno al quadrato Q_1 , a lati paralleli agli assi x e y , di centro P_0 e lato $2l_1$, alla disuguaglianza

$$f_0(x_1, y_1) > f_0(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

e consideriamo il quadrato Q , analogo a Q_0 e Q_1 , e di lato $2l$, con $l_1 \leq l \leq l_0$. Sui lati di Q , esiste almeno un punto di D , perchè, in caso contrario, (x_1, y_1) apparterebbe ad un dominio aperto e limitato D' , tutto contenuto in D e in Q , con la frontiera F' tutta facente parte di F , e tale quindi che, per ogni punto (x, y) di F' , sarebbe

$$f_0(x, y) < f_0(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{8} < f_0(x_1, y_1) - \frac{3\varepsilon}{8},$$

ciò che è impossibile, per essere $l \leq l_0 < r : 2$. Per la stessa ragione, esiste almeno un punto (x', y') di D , sui lati di Q , in cui è

$$f_0(x', y') > f_0(x_0, y_0) + \frac{3\varepsilon}{8} \quad (?).$$

Inoltre, esiste almeno un punto (x'', y'') di D , sui lati di Q , in cui è

$$f_0(x'', y'') < f_0(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Infatti, in caso contrario, tutti i lati di Q apparterebbero a D e su di essi sarebbe sempre

$$(4) \quad f_0(x, y) \geq f_0(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{4};$$

allora, detto (\bar{x}, \bar{y}) il punto di F interno a Q e più vicino ai lati di questo quadrato (oppure uno qualunque di tali punti, se ve ne fossero diversi), ne risulterebbe un rettangolo R , appartenente a Q , avente tre lati sui lati di Q ed il quarto passante per (\bar{x}, \bar{y}) , rettangolo i cui punti, eccettuati quelli del lato passante per (\bar{x}, \bar{y}) , apparterebbero tutti a D . Ed essendo sempre valida la (4), sui tre lati non passanti per (\bar{x}, \bar{y}) , mentre nell'interno di R , in prossimità di (\bar{x}, \bar{y}) , sarebbe $f(x, y) < f(x_0, y_0) + (\varepsilon : 8)$, ci si troverebbe contro quanto si è osservato all'inizio di questa dimostrazione. Dunque, sul contorno di Q vi è (almeno) una parte continua s_l tutta costituita di punti di D ed avente per estremi un punto (x', y') ed uno (x'', y'') , tale quindi che su di essa l'oscillazione della $f_0(x, y)$ risulti $> \varepsilon : 8$.

(?) Ora la frontiera di D' sarebbe composta di punti di F e di punti di D in cui è sempre

$$f_0(x, y) \leq f_0(x_0, y_0) + \frac{3\varepsilon}{8}.$$

È perciò, se q_l indica il contorno di Q (ed escludendo al più i valori di l di un insieme di misura nulla)

$$\int_{q_l} \{ |p_0|^{2+\alpha} + |q_0|^{2+\alpha} \} ds > \int_{s_l} \{ |p_0|^{2+\alpha} + |q_0|^{2+\alpha} \} ds.$$

Ma è noto che, se $u(t)$ è una funzione assolutamente continua in (a, b) e tale che l'integrale

$$\int_a^b |u'(t)|^\beta dt,$$

con $\beta > 1$, sia finito, e se σ è l'oscillazione di $u(t)$ in (a, b) , dalla disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER segue

$$\sigma \leq \int_a^b |u'| dt \leq (b-a)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left[\int_a^b |u'|^\beta dt \right]^{\frac{1}{\beta}},$$

vale a dire,

$$\int_a^b |u'|^\beta dt \geq \frac{\sigma^\beta}{(b-a)^{\beta-1}}.$$

Abbiamo dunque, quasi dappertutto,

$$\int_{q_l} \{ |p_0|^{2+\alpha} + |q_0|^{2+\alpha} \} ds > \left(\frac{\varepsilon}{8} \right)^{2+\alpha} \frac{1}{8l} \quad (8),$$

donde

$$A \geq \iint_D \{ |p_0|^{2+\alpha} + |q_0|^{2+\alpha} \} dx dy \geq \int_{l_1}^{l_0} dl \int_{q_l} \{ |p_0|^{2+\alpha} + |q_0|^{2+\alpha} \} ds > \left(\frac{\varepsilon}{8} \right)^{2+\alpha} \int_{l_1}^{l_0} \frac{dl}{8l},$$

da cui

$$\lg \frac{l_0}{l_1} < 8A \left(\frac{8}{\varepsilon} \right)^{2+\alpha}.$$

Siccome possiamo scegliere l_1 piccolo quanto vogliamo, questa disuguaglianza prova che esiste un $\delta_1 > 0$ tale che, in tutti i punti (x, y) di D appartenenti al cerchio di centro P_0 e raggio δ_1 , sia, per tutte le funzioni di $\{f(x, y)\}$,

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Analogamente, si prova l'esistenza di un $\delta_2 > 0$ tale che, in tutti i punti (x, y) di D appartenenti al cerchio di centro P_0 e raggio δ_2 , sia, per tutte le funzioni di $\{f(x, y)\}$,

$$f(x, y) > f(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon}{2},$$

e ciò dimostra che, nel minore dei due cerchi di centro P_0 e di raggi δ_1 e δ_2 , l'oscillazione di ogni $f(x, y)$ (considerata nei punti di D) è $\leq \varepsilon$.

(*) Possiamo sempre supporre $8l \leq 8l_0 < 1$.

Provato così quanto ci siamo proposti nel principio di questa dimostrazione, non resta che ragionare come si è fatto in *a*).

c) Da quanto si è detto in ciò che precede, segue immediatamente un criterio generale, di cui quelli dati in *a*) e *b*) non sono che casi particolari.

Prima di enunciare tale criterio, è opportuno suddividere i punti della frontiera F di D in due categorie. Dato il campo D e l'insieme $\{f\}$ considerati negli enunciati *a*) e *b*), diremo che un punto P di F è di *prima categoria* se, per un $\delta > 0$, ogni funzione di $\{f\}$ può essere definita in tutti i punti di F contenuti nel cerchio di centro P e raggio δ , e in modo da risultare continua anche in tali punti, e se, di più, tutte le $f(x, y)$, considerate soltanto sulla parte di F contenuta nel cerchio detto, vi risultano ugualmente continue. I punti di F , che non sono di prima categoria, si diranno di *seconda categoria*. Ciò premesso, abbiamo:

Sia $\{f(x, y)\}$ un insieme di funzioni assolutamente continue in uno stesso campo aperto e limitato D , ed esistano due numeri maggiori di zero, α e A , tali che tutte le funzioni dell'insieme soddisfino alla disuguaglianza (1).

Sia poi δ un numero positivo e si indichi con D_δ il campo aperto e limitato costituito dai punti di D esterni a tutti i cerchi del piano (x, y) , di raggio δ , aventi i centri in quei punti della frontiera F di D che non soddisfano ad alcuna condizione $[C_\gamma]$, con $0 \leq \gamma < \alpha$, e che sono di seconda categoria. Allora le funzioni di $\{f(x, y)\}$ risultano ugualmente continue in D_δ .

Osservazione. - Se, nel punto P di F , non è verificata nessuna condizione $[C_\gamma]$, con $0 \leq \gamma < \alpha$, nell'intorno di P può mancare l'uguale continuità delle funzioni di $\{f(x, y)\}$. Un esempio in cui venga effettivamente a mancare tale uguale continuità si ottiene facilmente da quanto si è esposto nel n.º 9, *b*).

11. - Ulteriori criteri per l'uguale continuità nell'interno di un campo aperto e limitato.

a) *Sia $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y), \dots$ una successione di funzioni assolutamente continue in uno stesso campo aperto e limitato D , ed esista un numero $A > 0$, tale che, per tutti gli n , valga la disuguaglianza*

$$(1) \quad \iint_D \{p_n^2 + q_n^2\} dx dy \leq A.$$

Si supponga, di più, che la $f_n(x, y)$ ($n=1, 2, \dots$) sia, in D , livellata a meno di $1:n$, secondo la giacitura di un dato piano Π ⁽⁹⁾ (invariabile con n e non perpendicolare al piano (x, y)).

⁽⁹⁾ V. n.º 6.

Allora, tutte le funzioni $f_n(x, y)$ sono ugualmente continue nell'interno di D .

Affermiamo, in primo luogo, che, considerato un qualsiasi punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di D ed un $\varepsilon > 0$, si può determinare nel piano (x, y) un cerchio, di centro P_0 , tale che, nella parte di D contenuta in esso, l'oscillazione di ogni $f_n(x, y)$ risulti $\leq \varepsilon$. Supponiamo, se è possibile, che, in ogni cerchio di centro P_0 , si trovi sempre un punto (x, y) in cui una almeno delle $f_n(x, y)$ verifichi la disuguaglianza

$$f_n(x, y) > f_n(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sia n_0 il più piccolo intero positivo tale che $1 : n_0 < \varepsilon : 24$, e indichiamo con r un numero positivo abbastanza piccolo affinché, per nessun campo aperto e tutto contenuto in un cerchio di raggio r , una funzione livellata a meno di $1 : n$, con $n > n_0$, secondo la giacitura del piano II , possa assumere in un punto del campo un valore sempre superiore, oppure sempre inferiore, per più di $\varepsilon : 8$, ai valori assunti sulla frontiera. Scelti, allora, l_1 e l_0 , in modo che $0 < l_1 < l_0 < r : 2$ e che l_0 risulti pure minore della metà della minima distanza di P_0 dalla frontiera di D , consideriamo, per ogni l compreso fra l_1 e l_0 , il quadrato Q di centro P_0 e lati paralleli agli assi x e y e di lunghezza $2l$. Tutti questi quadrati Q risulteranno costituiti completamente di punti di D .

Scelta una funzione $f_n(x, y)$, che indicheremo con $f_{n_1}(x, y)$, tale che $n_1 > n_0$ e che in un punto (x_1, y_1) interno al quadrato Q relativo al valore l_1 soddisfi alla disuguaglianza

$$f_{n_1}(x_1, y_1) > f_{n_1}(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

sui lati di ciascun Q devono trovarsi almeno due punti (x', y') e (x'', y'') soddisfacenti alle disuguaglianze

$$f_{n_1}(x', y') > f_{n_1}(x_0, y_0) + \frac{3\varepsilon}{8}, \quad f_{n_1}(x'', y'') < f_{n_1}(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{8}.$$

Sul contorno di Q deve pertanto trovarsi una parte continua s_l su cui l'oscillazione della $f_{n_1}(x, y)$ risulti $> \varepsilon : 4$. Ed allora, ripetendo un calcolo fatto nel n.º 10, b), avremo

$$\lg \frac{l_0}{l_1} < 8A \left(\frac{4}{\varepsilon} \right)^2,$$

e questo prova anche qui, per la possibilità di scegliere l_1 arbitrariamente piccolo, che deve esistere un $\delta_1 > 0$ tale che, in tutti i punti (x, y) del cerchio di centro P_0 e raggio δ_1 , sia, per ogni n ,

$$f_n(x, y) < f_n(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cosa analoga può dimostrarsi per la disuguaglianza

$$f_n(x, y) > f_n(x_0, y_0) - \frac{\varepsilon}{2},$$

e ne viene così l'esistenza di un cerchio di centro P_0 in cui l'oscillazione di qualsiasi $f_n(x, y)$ è $\leq \varepsilon$.

L'affermazione con cui abbiamo iniziata questa dimostrazione è dunque provata, e con un ragionamento già usato nel n.º 10, *a*), si stabilisce allora l'uguale continuità di tutte le $f_n(x, y)$ in ogni insieme chiuso di punti di D .

Osservazione. - Nel teorema ora dimostrato, la condizione che le $f_n(x, y)$ siano livellate a meno di $1:n$, secondo la giacitura di un dato piano, non può essere senz'altro soppressa. Si possono facilmente costruire esempi in cui tale condizione non è soddisfatta e l'uguale continuità delle $f_n(x, y)$, nell'interno di D , non sussiste nonostante che risultino verificate le altre condizioni del teorema.

b) Se una funzione $f(x, y)$ è *monotona* (nel senso del LEBESGUE) in D (vale a dire, se, in qualunque campo aperto D' , contenuto in D insieme con la sua frontiera F' , i suoi limiti superiore e inferiore coincidono con quelli che essa ha su F'), essa funzione è anche, in D , livellata a meno di un qualsiasi $1:n$, secondo la giacitura del piano (x, y) . Pertanto, il ragionamento fatto in *a*) prova pure il seguente criterio (corollario di quello dato in *a*), se $\{f(x, y)\}$ è un insieme numerabile).

Sia $\{f(x, y)\}$ un insieme di funzioni monotone e assolutamente continue in uno stesso campo aperto e limitato D , ed esista un numero $A > 0$ tale che tutte le $f(x, y)$ verificchino la disuguaglianza

$$\iint_D \{p^2 + q^2\} dx dy \leq A.$$

Allora le funzioni dell'insieme $\{f(x, y)\}$ sono tutte ugualmente continue nell'interno di D ⁽¹⁰⁾.

12. - Ulteriori criteri per l'uguale continuità in tutto un campo aperto e limitato.

a) *Sia $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y), \dots$ una successione di funzioni assolutamente continue in uno stesso campo aperto e limitato D , ed esista un numero $A > 0$ tale che, per ogni n , valga la disuguaglianza*

$$\iint_D \{p_n^2 + q_n^2\} dx dy \leq A.$$

Si supponga, di più, che il campo D soddisfi alla condizione [L], che le $f_n(x, y)$ siano tutte definite e continue anche in \overline{D} , e tutte ugualmente continue, se considerate soltanto sulla frontiera F di D ; ed, infine, che

⁽¹⁰⁾ Questa proposizione fu data, per la prima volta, con qualche lieve modificazione di forma, da H. LEBESGUE (loc. cit. in ⁽²⁾).

la $f_n(x, y)$ ($n=1, 2, \dots$) sia, in \bar{D} , livellata, a meno di $1:n$, secondo la giacitura di un dato piano Π (invariabile con n , e non perpendicolare al piano (x, y)).

Allora tutte le $f_n(x, y)$ risultano ugualmente continue in \bar{D} .

Tenendo conto del teorema del n.º 11, a), basterà dimostrare che, preso un $\varepsilon > 0$, ad arbitrio, ed un punto P_0 di F , è possibile di determinare un $\delta > 0$ in modo che, in tutta la parte di \bar{D} contenuta nel cerchio di centro P_0 e raggio δ , l'oscillazione di ciascuna $f_n(x, y)$ risulti $\leq \varepsilon$.

Riprendiamo i numeri n_0 ed r già considerati nella dimostrazione data nel n.º 11, a). Possiamo sempre supporre che questo r sia abbastanza piccolo affinché ogni $f_n(x, y)$, considerata soltanto nei punti di F interni al cerchio di centro P_0 e raggio r , abbia ivi un'oscillazione $< \varepsilon : 8$; possiamo sempre supporre, inoltre, che r sia minore del numero R_0 considerato nella definizione della *condizione* [L] (n.º 3, a)) in corrispondenza di P_0 .

Supponiamo, se è possibile, che, in ogni cerchio di centro $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ del piano (x, y) , si trovi sempre un punto (x, y) in cui una almeno delle $f_n(x, y)$ verifichi la disuguaglianza

$$f_n(x, y) > f_n(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2},$$

e, scelti due numeri l_0 e l_1 , in modo che sia $0 < l_1 < l_0 < r : 2$, indichiamo con $f_{n_1}(x, y)$ una delle $f_n(x, y)$ tale che, in un punto (x_1, y_1) interno al quadrato Q_1 , di centro P_0 , lati paralleli agli assi x e y , ed eguali a $2l_1$, risulti

$$f_{n_1}(x_1, y_1) > f_{n_1}(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Consideriamo il quadrato Q analogo a Q_1 e di lato $2l$, con $l_1 \leq l \leq l_0$. Sui lati di Q , esiste almeno un punto (x', y') di D in cui è

$$f_{n_1}(x', y') > f_{n_1}(x_0, y_0) + \frac{3\varepsilon}{8}.$$

Se sui lati di Q vi è almeno un punto di F , vi è anche un punto (x'', y'') di D in cui è

$$f_{n_1}(x'', y'') < f_{n_1}(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{8},$$

e perciò esiste sul contorno di Q una parte continua s_l , tutta appartenente a D , su cui l'oscillazione della $f_n(x, y)$ risulta $> \varepsilon : 4$. Ripetendo un calcolo fatto nel n.º 10, b), avremo allora

$$A \geq \iint_D \{p_{n_1}^2 + q_{n_1}^2\} dx dy \geq \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \int_{E_{l_1}} \frac{dl}{8l},$$

dove E_{l_1} indica l'insieme dei valori di l , compresi fra l_1 ed l_0 , per ciascuno dei quali sui lati del quadrato corrispondente Q vi è almeno un punto di F .

Osserviamo ora che, per essere $l_0 < r:2$, la misura m_l dei valori di l' , tali che $0 \leq l' \leq l$ e che sul contorno del quadrato Q di lato l' esista un punto *non* appartenente a D , e quindi anche un punto di F (perchè su questo contorno vi è sicuramente, come già si è detto, un punto di D), verifica la disuguaglianza $m_l > k_0 l$, con $k_0 > 0$ e dipendente soltanto da P_0 e che noi possiamo supporre < 1 . Pertanto, la misura dei valori di l' indicati, contenuti nell'intervallo $(\frac{k_0 l_0}{2}, l_0)$, è $> \frac{k_0 l_0}{2}$. Parimenti, la misura dei valori di l' , contenuti in $(\frac{k_0^2}{4} l_0, \frac{k_0}{2} l_0)$, è $> \frac{k_0^2}{4} l_0$; e così via. Ne segue

$$\int_{E_{l_1}} \frac{dl}{l} > \int_{\frac{k_0 l_0}{2}}^{l_0} \frac{dl}{l} + \int_{(\frac{k_0}{2})^2 l_0}^{\frac{k_0}{2} l_0} \frac{dl}{l} + \dots + \int_{(\frac{k_0}{2})^{\nu} l_0}^{(\frac{k_0}{2})^{\nu-1} l_0} \frac{dl}{l},$$

ν essendo il massimo intero tale che $(\frac{k_0}{2})^{\nu} l_0 > l_1$, e quindi

$$\int_{E_{l_1}} \frac{dl}{l} > \lg l_0 - \lg \left(\frac{k_0}{2}\right)^{\nu} l_0 = -\nu \lg \frac{k_0}{2},$$

donde

$$A \geq -\frac{\nu}{8} \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 \lg \frac{k_0}{2}.$$

E siccome l_1 può essere scelto arbitrariamente piccolo, vale a dire, ν può essere preso grande a piacere, ne viene anche qui l'esistenza di un cerchio di centro P_0 in ogni punto (x, y) del quale tutte le $f_n(x, y)$ soddisfano alla disuguaglianza

$$f_n(x, y) < f_n(x_0, y_0) + \frac{\varepsilon}{2};$$

e la nostra dimostrazione può essere conclusa come abbiamo fatto per i teoremi dei n.º precedenti.

Osservazione. - Se, nel teorema ora dimostrato, si toglie l'ipotesi che il campo D soddisfi alla condizione $[L]$, il teorema stesso non resta più valido in generale.

b) *Se, ferme restando le altre ipotesi del teorema dato in a), si sopprime la condizione $[L]$ per il campo D e quella dell'uguale continuità delle $f_n(x, y)$ sulla frontiera F , si ha che, fissato un $\delta > 0$, le $f_n(x, y)$ risultano tutte ugualmente continue nel campo chiuso \bar{D}_δ ottenuto da \bar{D} sopprimendo in esso i punti che sono interni ad almeno uno dei cerchi, del piano (x, y) , di raggio δ , aventi i centri in quei punti di F nei quali non è soddisfatta la condizione $[L]$ oppure nell'intorno dei quali viene a mancare la uniforme continuità delle $f_n(x, y)$ sulla frontiera.*

c) *Sia $\{f(x, y)\}$ un insieme di funzioni assolutamente continue in uno*

stesso campo aperto e limitato D , e tutte soddisfacenti alla condizione

$$\iint_{\bar{D}} \{p^2 + q^2\} dx dy \leq A,$$

con A numero fisso, sempre lo stesso per tutte le $f(x, y)$.

Si supponga che il campo D soddisfi alla condizione $[L]$, che le $f(x, y)$ siano tutte definite e continue anche in \bar{D} , e che in \bar{D} risultino tutte monotone. Si supponga, infine, che le $f(x, y)$, considerate soltanto sulla frontiera di D , vi siano ugualmente continue.

Allora le $f(x, y)$ risultano tutte ugualmente continue nell'intero campo chiuso \bar{D} ⁽¹¹⁾.

§ 3.

Semicontinuità.

13. - La funzione $F(x, y, z, p, q)$ e l'integrale $\mathcal{J}_D[z]$.

Sia $F(x, y, z, p, q)$ una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali F_p, F_q , per tutti i punti (x, y) di un campo aperto e limitato D e per tutti i valori finiti di z, p e q . Posto

$$\mathcal{J}_D[z] \equiv \iint_{\bar{D}} F(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y)) dx dy,$$

dove è $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ⁽¹²⁾, e $z(x, y)$ è una funzione assolutamente continua in D e tale che l'integrale scritto risulta finito, l'integrale doppio \mathcal{J}_D si dirà *quasi-regolare positivo* se è sempre

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(x, y, z; p_0, q_0; p, q) &\equiv F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z, p_0, q_0) \\ &\quad - (p - p_0)F_p(x, y, z, p_0, q_0) - (q - q_0)F_q(x, y, z, p_0, q_0) \geq 0, \end{aligned}$$

per tutti i punti (x, y) di D , e per tutti i valori finiti di z, p_0, q_0, p, q .

Indicata con \mathcal{C} la classe di tutte le funzioni $z(x, y)$ assolutamente continue in D e tali che per esse l'integrale $\mathcal{J}_D[z]$ risulti sempre finito, l'integrale \mathcal{J}_D si dirà *semicontinuo inferiormente* se, fissata comunque una funzione $z_0(x, y)$ di \mathcal{C} , ad ogni $\varepsilon > 0$ può sempre farsi corrispondere un $\varrho > 0$ in modo che risulti

$$\mathcal{J}_D[z] > \mathcal{J}_D[z_0] - \varepsilon,$$

per tutte le funzioni $z(x, y)$ di \mathcal{C} che soddisfano, in tutto D , alla disuguaglianza

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho.$$

⁽¹¹⁾ Anche questa proposizione fu data per la prima volta, per quanto in forma lievemente diversa, da H. LEBESGUE (loc. cit. in ⁽²⁾).

⁽¹²⁾ Si porrà $p = 0$ dove $\frac{\partial z}{\partial x}$ non esiste finita; ed analogamente per q .

14. - **Richiamo di un teorema sulla semicontinuità.**

Sulla semicontinuità dell'integrale \mathcal{J}_D , si hanno vari teoremi ⁽¹³⁾ dei quali rammenteremo il seguente:

Supponiamo: 1° che esista un numero N tale da aversi $F(x, y, z, p, q) \geq N$, per tutti i punti (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q ;

2° che, a ciascun numero positivo Z , si possano far corrispondere tre numeri, maggiori di zero, α, μ, Λ , in modo che, in ogni punto (x, y) di D e per tutti gli z, p, q soddisfacenti alle disuguaglianze $|z| \leq Z, |p| + |q| \geq \Lambda$, risulti

$$F(x, y, z, p, q) \geq \mu \{ |p|^{1+\alpha} + |q|^{1+\alpha} \};$$

3° che l'integrale $\mathcal{J}_D[z]$ sia quasi-regolare positivo.

Allora $\mathcal{J}_D[z]$ è semicontinuo inferiormente.

15. - **Estensione all'infinito della semicontinuità.**

Occorre estendere la semicontinuità al caso in cui, per una data funzione $z(x, y)$, l'integrale $\mathcal{J}_D[z]$ risulti infinito, o, per esprimerci più esattamente, al caso in cui, per una data $z(x, y)$, la funzione $F(x, y, z, p, q)$ non risulti integrabile. Dimostriamo, pertanto, la seguente proposizione:

Supposte verificate le condizioni 1°, 2° e 3° del teorema del n.° precedente, sia $z_0(x, y)$ una funzione assolutamente continua nel campo aperto e limitato D e tale che la $F(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))$ risulti non integrabile in D . Allora, preso ad arbitrio un numero K , si può sempre determinare un $\varrho > 0$, in modo che, per ogni funzione $z(x, y)$ assolutamente continua in D , soddisfacente, in tutto D , alla disuguaglianza

$$(1) \quad |z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho,$$

e tale che $\mathcal{J}_D[z]$ esista finito, sia sempre

$$\mathcal{J}_D[z] > K.$$

a) Supponiamo, in primo luogo, che esista un quadrato Q , a lati paralleli agli assi x e y , interamente (lati compresi) costituito di punti di D , e sul quale la funzione $F(x, y, z_0, p_0, q_0)$ non sia integrabile. Allora, avendosi, per la condizione $F \geq N$,

$$\mathcal{J}_D[z] \geq -|N|D + \mathcal{J}_Q[z],$$

basterà dimostrare la proposizione enunciata per l'integrale \mathcal{J}_Q .

Sia R un numero positivo ed E rappresenti l'insieme dei punti di Q in cui è $|p_0| \leq R, |q_0| \leq R$. Siccome la $F(x, y, z_0, p_0, q_0)$ non è integrabile in Q , non è

⁽¹³⁾ V. L. TONELLI: *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du Calcul des Variations* (loc. cit. in ⁽³⁾).

integrabile neppure la $F(x, y, z_0, p_0, q_0) + |N|$, che risulta sempre ≥ 0 , e si ha perciò, per $R \rightarrow +\infty$,

$$\iint_{\bar{E}} \{F(x, y, z_0, p_0, q_0) + |N|\} dx dy \rightarrow +\infty,$$

e quindi anche

$$\iint_{\bar{E}} F(x, y, z_0, p_0, q_0) dx dy \rightarrow +\infty.$$

Per R sufficientemente grande, avremo perciò

$$\iint_{\bar{E}} F(x, y, z_0, p_0, q_0) dx dy > K + 1 + |N|Q,$$

donde, per ogni $z(x, y)$ assolutamente continua in D e tale che $\mathfrak{J}_Q[z]$ esista finito,

$$\mathfrak{J}_Q[z] > K + 1 + \iint_{\bar{E}} \{F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z_0, p_0, q_0)\} dx dy,$$

ed anche, per essere il nostro integrale quasi-regolare positivo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_Q[z] > K + 1 + \iint_{\bar{E}} \{F(x, y, z, p_0, q_0) - F(x, y, z_0, p_0, q_0)\} dx dy \\ + \iint_{\bar{E}} \{(p - p_0)F_p(x, y, z, p_0, q_0) + (q - q_0)F_q(x, y, z, p_0, q_0)\} dx dy. \end{aligned}$$

Siccome F, F_p, F_q sono supposte funzioni continue, preso ad arbitrio un $\sigma > 0$, per ρ sufficientemente piccolo e per tutte le funzioni $z(x, y)$ già indicate e soddisfacenti, di più, alla disuguaglianza (1) in tutto Q , si ha perciò

$$\begin{aligned} (2) \quad \mathfrak{J}_Q[z] > K + \frac{1}{2} + \iint_{\bar{E}} \{(p - p_0)F_p(x, y, z_0, p_0, q_0) + (q - q_0)F_q(x, y, z_0, p_0, q_0)\} dx dy \\ - \sigma \iint_{\bar{E}} \{|p - p_0| + |q - q_0|\} dx dy. \end{aligned}$$

Dividiamo le funzioni $z(x, y)$, or ora considerate, in due categorie, ponendo nella prima quelle per le quali è

$$(3) \quad \mathfrak{J}_Q[z] > K,$$

e nella seconda quelle per cui si ha

$$(4) \quad \mathfrak{J}_Q[z] \leq K.$$

Fissato un numero Z tale che risulti sempre, in Q , $|z_0(x, y)| + 1 < Z$, e supposto, come è ben lecito, $\rho < 1$, per le condizioni 1°) e 2°) del teorema del n.° precedente si ha

$$\mathfrak{J}_Q[z] > \mu \iint_Q \{|p|^{1+\alpha} + |q|^{1+\alpha}\} dx dy - |N|Q - 2\mu A^{1+\alpha}Q,$$

e perciò, per ogni $z(x, y)$ della seconda categoria,

$$(5) \quad \iint_Q \{ |p|^{1+\alpha} + |q|^{1+\alpha} \} dx dy < \frac{1}{\mu} (K + |N|Q) + 2A^{1+\alpha}Q \equiv H,$$

dove H risulta numero fisso indipendente dalla $z(x, y)$. Per ogni $z(x, y)$ della seconda categoria, si ha, pertanto, anche

$$(6) \quad \iint_Q \{ |p| + |q| \} dx dy < H + 2Q,$$

donde

$$(7) \quad \iint_E \{ |p - p_0| + |q - q_0| \} dx dy < H + 2Q + \iint_Q \{ |p_0| + |q_0| \} dx dy.$$

Inoltre, soddisfacendo le funzioni della seconda categoria alla (5), gli integrali

$$\int_a^x \int_b^y p dx dy, \quad \int_a^x \int_b^y q dx dy \quad (14),$$

per quanto si è già dimostrato nel n.º 5, sono in Q delle funzioni equidoppiamente assolutamente continue, e pertanto, scelto comunque un $\eta > 0$, è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che, se R_1, R_2, \dots, R_s è un qualsiasi gruppo di rettangoli non sovrappontisi, appartenenti a Q , a lati paralleli agli assi x e y , e di area complessiva $< \delta$, risulti

$$\left| \sum_{R_i} \iint p dx dy \right| < \frac{\eta}{2}, \quad \left| \sum_{R_i} \iint q dx dy \right| < \frac{\eta}{2},$$

e quindi anche

$$\left| \iint_e p dx dy \right| \leq \frac{\eta}{2}, \quad \left| \iint_e q dx dy \right| \leq \frac{\eta}{2},$$

dove e è un qualsiasi insieme (misurabile) di Q , di misura $< \delta$. Segue pure, per lo stesso e ,

$$(8) \quad \iint_e |p| dx dy \leq \eta, \quad \iint_e |q| dx dy \leq \eta.$$

Ragionando allora come ho fatto nel n.º 7 della mia Memoria: *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du Calcul des Variations* (15), con l'avvertenza però di sostituire all'uso della disuguaglianza di SCHWARZ-HÖLDER, quello delle (7), (8), si prova che, se Q è sufficientemente piccolo, per tutte le $z(x, y)$ della seconda categoria, risulta

$$(9) \quad \left| \iint_E \{ (p - p_0)F_p(x, y, z_0, p_0, q_0) + (q - q_0)F_q(x, y, z_0, p_0, q_0) \} dx dy \right| < \frac{1}{4}.$$

(14) (a, b) rappresenta un punto di Q .

(15) Loc. cit. in (3).

Per tutte le $z(x, y)$ indicate segue perciò, dalle (2), (7) e (9),

$$\mathfrak{J}_Q[z] > K + \frac{1}{4} - \sigma \left\{ H + 2Q + \iint_Q \{ |p_0| + |q_0| \} dx dy \right\},$$

vale a dire, prendendo σ opportunamente,

$$\mathfrak{J}_Q[z] > K.$$

Questa disuguaglianza, in contrasto con la (4), mostra che non esistono funzioni $z(x, y)$ della seconda categoria, vale a dire prova, nell'ipotesi ammessa in principio, il nostro teorema per l'integrale \mathfrak{J}_Q e quindi anche per \mathfrak{J}_D .

b) Supponiamo ora che la $F(x, y, z_0, p_0, q_0)$ risulti integrabile in ogni quadrato a lati paralleli agli assi x e y e tutto contenuto (lati compresi) in D , e riprendiamo il campo chiuso \overline{D}_n definito nel n.º 5. L'integrale

$$\mathfrak{J}_{\overline{D}_n} [z_0] \equiv \iint_{\overline{D}_n} F(x, y, z_0, p_0, q_0) dx dy$$

esisterà, finito, per ogni valore di n e dovrà tendere a $+\infty$, per $n \rightarrow \infty$. Potremo perciò determinare un n_0 tale che sia

$$\mathfrak{J}_{\overline{D}_{n_0}} [z_0] > K + 1 + |N| D,$$

e dopo di ciò, in virtù della semicontinuità dell'integrale $\mathfrak{J}_{\overline{D}_{n_0}} [z_0]$, semicontinuità stabilita dal teorema richiamato nel n.º 14, potremo determinare un $\varrho > 0$, in modo che, per tutte le $z(x, y)$ assolutamente continue in D , tali che per esse esista l'integrale $\mathfrak{J}_D [z]$, e soddisfacenti in tutto D alla $|z(x, y) - z_0(x, y)| < \varrho$, sia

$$\mathfrak{J}_{\overline{D}_{n_0}} [z] > \mathfrak{J}_{\overline{D}_{n_0}} [z_0] - 1.$$

Per queste $z(x, y)$, sarà allora

$$\mathfrak{J}_{\overline{D}_{n_0}} [z] > K + |N| D$$

e perciò

$$\mathfrak{J}_D [z] > \mathfrak{J}_{\overline{D}_{n_0}} [z] - |N| D > K.$$

Il teorema enunciato è dunque dimostrato in tutti i casi.

§ 4.

Esistenza del minimo.

16. - **Funzioni ugualmente limitate e funzioni di accumulazione, nell'interno di un campo aperto e limitato.**

a) Dato un campo aperto e limitato D , ed un insieme $\{f(x, y)\}$ di funzioni, tutte definite in D , diremo che queste funzioni sono *ugualmente limitate nell'in-*

terno di D se, considerato un qualsiasi gruppo di punti E , chiuso e tutto appartenente a D , esiste un numero positivo H tale che la disuguaglianza $|f(x, y)| \leq H$ valga in tutti i punti di E e per tutte le funzioni dell'insieme $\{f(x, y)\}$.

È evidente che, se le funzioni di $\{f(x, y)\}$ fossero ugualmente limitate in D (cioè tutte in modulo inferiori, in tutto D , ad uno stesso numero fisso), lo sarebbero anche nell'interno di D ; non vale però la reciproca.

b) Abbiamo già rammentato (n.º 5) che cosa si intenda per funzione di accumulazione, in D , di un insieme $\{f(x, y)\}$; ora diremo che una funzione $\varphi(x, y)$, definita in D , è *funzione di accumulazione nell'interno di D* per un insieme $\{f(x, y)\}$ di funzioni pure definite in D , se, considerato un qualsiasi gruppo di punti E , chiuso e tutto appartenente a D , e preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esiste sempre almeno una funzione $f(x, y)$, dell'insieme considerato, soddisfacente in tutto E alla disuguaglianza

$$|\varphi(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Se le $f(x, y)$ sono tutte continue in D , tale risulta anche la $\varphi(x, y)$.

17. - Insiemi di funzioni costituenti classi complete rispetto a \mathcal{J}_D .

Dato un campo aperto e limitato D , e considerato un insieme $\{f(x, y)\}$ di funzioni assolutamente continue in D , e tali che, per ciascuna di esse la

$$F\left(x, y, f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

risulti integrabile in D , diremo che questo insieme costituisce *una classe completa, in D , rispetto a \mathcal{J}_D* , quando ogni sua funzione di accumulazione, in D , $\varphi(x, y)$, che risulti assolutamente continua in D e che renda, in D , integrabile la

$$F\left(x, y, \varphi(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

appartiene essa pure all'insieme. Diremo, invece, che l'insieme considerato costituisce *una classe completa, nell'interno di D , rispetto a \mathcal{J}_D* , quando ciò che ora si è detto per la $\varphi(x, y)$ vale per le funzioni di accumulazione nell'interno di D .

Indicheremo, nel seguito, con \mathfrak{C} una qualsiasi *classe completa in D* , e con $\mathfrak{C}_{(i)}$ una qualsiasi *classe completa nell'interno di D* .

Per esempio, la classe di tutte le funzioni $f(x, y)$ assolutamente continue in D , continue in \bar{D} , che sulla frontiera di D assumono tutte gli stessi valori, e per le quali la $F(x, y, f, p, q)$ risulta integrabile in D , è una classe \mathfrak{C} , rispetto a \mathcal{J}_D . Un esempio, invece, di classe $\mathfrak{C}_{(i)}$, rispetto a \mathcal{J}_D , è dato da quella di tutte le funzioni $f(x, y)$ assolutamente continue in D , che in un dato insieme chiuso E di D assumono tutte gli stessi valori e per le quali la $F(x, y, f, p, q)$ risulta integrabile in D .

18. - I° Teorema d'esistenza.

Sia $\mathcal{J}_D[z]$ un integrale quasi regolare positivo, soddisfacente alla condizione seguente:

(I) esistono tre numeri $a > 0$, $\mu > 0$ e N tali che, in ogni punto (x, y) del campo aperto e limitato D , e per tutti i valori finiti di z, p, q , risulti

$$F(x, y, z, p, q) > \mu \{ |p|^{2+a} + |q|^{2+a} \} + N.$$

Allora, se le funzioni $z(x, y)$ di una classe $\mathbf{C}_{(i)}$, completa nell'interno di D , rispetto a \mathcal{J}_D , sono tutte ugualmente limitate nell'interno di D , in $\mathbf{C}_{(i)}$ esiste il minimo assoluto di $\mathcal{J}_D[z]$.

Indichiamo con i il limite inferiore dei valori di $\mathcal{J}_D[z]$ in $\mathbf{C}_{(i)}$. Per la condizione (I), è sempre $\mathcal{J}_D[z] > ND$, e perciò i è finito.

Sia

$$z_1(x, y), \quad z_2(x, y), \dots, \quad z_m(x, y), \dots$$

una successione minimizzante per $\mathcal{J}_D[z]$ in $\mathbf{C}_{(i)}$ ⁽¹⁶⁾, tale cioè che risulti

$$(1) \quad \mathcal{J}_D[z_m] \leq i + \frac{1}{m};$$

allora dalla (I) segue

$$\mathcal{J}_D[z_m] > \mu \iint_D \{ |p_m|^{2+a} + |q_m|^{2+a} \} dx dy - |N| D$$

e perciò

$$(2) \quad \iint_D \{ |p_m|^{2+a} + |q_m|^{2+a} \} dx dy < \frac{1}{\mu} (i + 1 + |N| D) \equiv H.$$

Dal criterio del n.° 8 segue, pertanto, che le $z_m(x, y)$ ($m=1, 2, \dots$) sono tutte ugualmente continue nell'interno di D .

Riprendiamo ora il campo chiuso \overline{D}_n definito nel n.° 5. In esso, le $z_m(x, y)$ sono tutte ugualmente limitate ed ugualmente continue, ed ammettono perciò almeno una funzione di accumulazione; e dalla successione delle $z_m(x, y)$ si può così estrarne un'altra uniformemente convergente in tutto \overline{D}_n . Facciamo allora $n=1$ e indichiamo con

$$(3) \quad z_{1,1}, \quad z_{1,2}, \dots, \quad z_{1,m}, \dots$$

una successione estratta da quella delle $z_m(x, y)$ ed uniformemente convergente in tutto \overline{D}_1 ; poi indichiamo con

$$(4) \quad z_{2,1}, \quad z_{2,2}, \dots, \quad z_{2,m}, \dots$$

⁽¹⁶⁾ Il presente ragionamento (e così quelli che faremo nel seguito) si libera dall'uso del postulato delle infinite scelte arbitrarie seguendo il metodo sviluppato nei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*.

una successione estratta dalla (3) ed uniformemente convergente in $\overline{D_2}$; e così via, facendo successivamente $n=3, 4, \dots$. La nuova successione

$$(5) \quad z_{1,1}, \quad z_{2,2}, \dots, \quad z_{m,m}, \dots$$

risulta anch'essa estratta da quella delle z_m , come pure dalla (3). Essa poi, quando si faccia astrazione dal suo primo elemento, risulta estratta anche dalla (4); e così via. Pertanto la (5) converge uniformemente, in ciascuno dei campi chiusi $\overline{D_n}$, verso una funzione $z_\infty(x, y)$, che risulta continua in tutto D . Inoltre, poichè è sempre, per ogni m ed ogni n ,

$$\iint_{\overline{D_n}} \{ |p_m|^{2+\alpha} + |q_m|^{2+\alpha} \} dx dy < H,$$

il teorema del n.º 5 assicura che la $z_\infty(x, y)$ è assolutamente continua in D_n ; e i teoremi dei n.º 15 e 14 mostrano poi che $|p_\infty|^{2+\alpha} + |q_\infty|^{2+\alpha}$ è integrabile in D_n e che è

$$\iint_{\overline{D_n}} \{ |p_\infty|^{2+\alpha} + |q_\infty|^{2+\alpha} \} dx dy \leq H.$$

Di qui segue

$$\iint_{\overline{D_n}} \{ |p_\infty| + |q_\infty| \} dx dy \leq H + 2D,$$

e siccome ciò vale per ogni n , si ha che $z_\infty(x, y)$ è assolutamente continua in tutto D .

Inoltre, essendo, per tutti gli m ed n ,

$$\mathcal{J}_D[z_{m,m}] > \mathcal{J}_{D_n}[z_{m,m}] - |N|(D - D_n),$$

donde

$$\mathcal{J}_{D_n}[z_{m,m}] < \left(i + \frac{1}{m}\right) + |N|(D - D_n) < (i+1) + |N|D,$$

il teorema del n.º 15 assicura l'integrabilità di $F(x, y, z_\infty, p_\infty, q_\infty)$ in D_n , e quello del n.º 14 dà poi

$$\mathcal{J}_{D_n}[z_\infty] \leq i + |N|(D - D_n) < i + |N|D.$$

Di qui e dalla (I) deduciamo che $F(x, y, z_\infty, p_\infty, q_\infty)$ è integrabile anche in tutto D , e che è

$$(6) \quad \mathcal{J}_D[z_\infty] \leq i.$$

Infine, essendo $\mathbf{C}_{(i)}$ una classe completa nell'interno di D , relativamente a \mathcal{J}_D , e risultando la $z_\infty(x, y)$ una funzione di accumulazione, nell'interno di D , per tale classe, questa $z_\infty(x, y)$ appartiene anch'essa a $\mathbf{C}_{(i)}$, e per la (6) si conclude che è

$$\mathcal{J}_D[z_\infty] = i,$$

vale a dire, che la $z_\infty(x, y)$ è una funzione minimante assoluta per l'integrale $\mathcal{J}_D[z]$ in $\mathbf{C}_{(i)}$.

Osservazione. - Supponiamo che il campo D sia *strettamente connesso*,

vale a dire tale che, se P_1 e P_2 sono due suoi punti qualunque, sempre esista un insieme chiuso e connesso (per esempio, una curva continua di JORDAN) di punti di D di cui P_1 e P_2 facciano parte. Allora, nel teorema ora dimostrato, l'ipotesi che le funzioni di $\mathfrak{C}_{(i)}$ siano tutte ugualmente limitate, nell'interno di D , si può sostituire con l'altra che esista un punto di D tale che, in esso, tutte le funzioni di $\mathfrak{C}_{(i)}$ restino, in modulo, inferiori ad uno stesso numero fisso. Ed infatti, siccome le $z_m(x, y)$ sono, come si è detto, tutte ugualmente continue nell'interno di D , un facile ragionamento prova che esse risultano pure ugualmente limitate nell'interno di D .

19. - II° Teorema d'esistenza.

Sia $\mathfrak{J}_D[z]$ un integrale quasi regolare positivo soddisfacente alla condizione (I) del teorema del n.° 18. Si supponga che il campo D verifichi la condizione $[C, a]$ e che le funzioni della classe \mathfrak{C} , completa in D , rispetto a \mathfrak{J}_D , siano definite e continue anche in tutto \overline{D} e che, sulla frontiera F di D , esse risultino ugualmente limitate. Allora esiste in \mathfrak{C} il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_D[z]$.

Riprendendo il ragionamento del n.° precedente, dalla disuguaglianza (2), ivi stabilita, segue, per il criterio del n.° 10, a), che le $z_m(x, y)$ sono tutte ugualmente continue in D , e quindi anche in \overline{D} .

Mostriamo che, in \overline{D} , le $z_m(x, y)$ sono anche ugualmente limitate. Indichiamo, a tale scopo, con λ un numero positivo tale che, se (x', y') e (x'', y'') sono due punti qualsiasi di \overline{D} distanti fra loro per non più di λ , risulti, per tutti gli m ,

$$(1) \quad |z_m(x', y') - z_m(x'', y'')| < 1.$$

Indichiamo poi con M un numero positivo tale che su tutta la frontiera F sia sempre, per tutti gli m ,

$$|z_m(x, y)| < M;$$

questo M esiste per una delle ipotesi fatte. Sia, allora, (x_1, y_1) un qualsiasi punto di D , e indichiamo con (\bar{x}, \bar{y}) il punto di F più prossimo ad esso (od uno qualunque dei più prossimi). Decomponiamo il segmento rettilineo, che ha per estremi i punti (x_1, y_1) e (\bar{x}, \bar{y}) , in parti tutte uguali a λ , eccettuata l'ultima che potrà essere anche $< \lambda$, mediante i punti

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_s, y_s), (x_{s+1}, y_{s+1}) \equiv (\bar{x}, \bar{y}),$$

ordinati nel senso da (x_1, y_1) a (\bar{x}, \bar{y}) . Per la (1), qualunque sia m , è

$$|z_m(x_r, y_r) - z_m(x_{r+1}, y_{r+1})| < 1, \quad r = 1, 2, \dots, s,$$

e perciò

$$\begin{aligned} |z_m(x_1, y_1) - z_m(\bar{x}, \bar{y})| &< s, \\ |z_m(x_1, y_1)| &< M + s. \end{aligned}$$

Se L è la massima distanza fra due qualsiasi punti di \overline{D} , risulterà $(s-1)\lambda < L$ e quindi

$$|z_m(x_1, y_1)| < M + \frac{L}{\lambda} + 1,$$

disuguaglianza la quale mostra appunto che le $z_m(x, y)$ sono tutte ugualmente limitate in \overline{D} . Queste funzioni che, come si è già detto, sono anche ugualmente continue in \overline{D} , ammettono almeno una funzione di accumulazione in \overline{D} . Esiste dunque una successione z_{m_1}, z_{m_2}, \dots , estratta da quella delle z_m , convergente uniformemente in tutto \overline{D} verso una funzione continua in \overline{D} , $z_\infty(x, y)$. Di qui, sfruttando i teoremi dei n.º 5, 15, 14, si giunge alla conclusione desiderata.

Osservazione. - Se il campo D è *strettamente connesso*, nel teorema ora dimostrato, l'ipotesi che le funzioni di \mathfrak{C} siano tutte ugualmente limitate sulla frontiera F , può sostituirsi con l'altra che esista un punto di \overline{D} tale che, in esso, tutte le funzioni di \mathfrak{C} restino in modulo, inferiori ad uno stesso numero fisso.

20. - III° Teorema d'esistenza.

Sia $\mathfrak{J}_D[z]$ un integrale quasi regolare positivo soddisfacente alla condizione (I) del teorema del n.º 18. Si supponga che le funzioni della classe \mathfrak{C} , completa in D , rispetto a \mathfrak{J}_D , siano definite e continue anche in ogni punto della frontiera F di D , e che tali funzioni, considerate soltanto su F , vi risultino ugualmente continue e ugualmente limitate. Allora, in \mathfrak{C} , esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_D[z]$.

Il ragionamento per provare questo teorema è quello stesso del n.º precedente, e occorre soltanto sostituire, in esso, l'uso del teorema 10, a) con quello del teorema del n.º 10, b).

Vale, anche qui, l'osservazione fatta alla fine del n.º 19.

21. - IV° Teorema d'esistenza.

Fissato un piano Π , non perpendicolare al piano (x, y) , indicheremo, nel seguito, con $\mathfrak{C}_{(i, \pi)}$ una classe di funzioni che sia una classe $\mathfrak{C}_{(i)}$ (n.º 17) e che, inoltre, soddisfi alla seguente condizione: considerato un qualsiasi campo aperto D' , tutto contenuto, insieme con \overline{D}' , in D , a $\mathfrak{C}_{(i, \pi)}$ appartenga ogni funzione dedotta, in \overline{D}' , da una qualunque $z(x, y)$ della classe, per livellamento, a meno di $1:n$ (n potendo essere un qualsiasi numero intero positivo), secondo la giacitura del piano Π , e coincidente, fuori di \overline{D}' , con la $z(x, y)$ considerata.

Per esempio, la classe di tutte le funzioni $z(x, y)$ assolutamente continue in D , in modulo sempre minori od uguali ad un numero fisso M , e tali che per esse risulti integrabile, in D , $F(x, y, z, p, q)$, è una classe $\mathfrak{C}_{(i, \pi)}$.

Ciò premesso, dimostriamo il seguente teorema:

Sia $\mathfrak{J}_D[z]$ un integrale quasi regolare positivo, soddisfacente alle seguenti condizioni:

1°) esistono due numeri $\mu > 0$ e N , tali che, per ogni punto (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q , risulti

$$F(x, y, z, p, q) > \mu(p^2 + q^2) + N;$$

2°) esiste sempre finita la derivata parziale F_z ⁽¹⁷⁾, ed esistono anche due numeri \bar{p} e \bar{q} , in modo da aversi sempre

$$F(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) \leq F(x, y, z, p, q), \quad F_z(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) \equiv 0,$$

per tutti i punti (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q .

Indicato con Π il piano $z = \bar{p}x + \bar{q}y$, se le funzioni di una classe $\mathfrak{C}_{(i, \pi)}$ sono tutte ugualmente limitate nell'interno di D , in $\mathfrak{C}_{(i, \pi)}$ esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_D[z]$.

In virtù della condizione 1°), il limite inferiore i dei valori di \mathfrak{J}_D , in $\mathfrak{C}_{(i, \pi)}$, è finito, e potremo scegliere, in $\mathfrak{C}_{(i, \pi)}$, una successione minimizzante, $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y), \dots$, tale cioè che sia

$$\mathfrak{J}_D[z_m] \leq i + \frac{1}{m}.$$

Indichiamo con $\bar{z}_m(x, y)$ la funzione coincidente con la $z_m(x, y)$ nei punti di D esterni a \bar{D}_m e dedotta, in \bar{D}_m , dalla $z_m(x, y)$, per livellamento, a meno di $1:m$, secondo la giacitura del piano Π . Dalla condizione 1°) e 2°), segue che, in quasi tutto D , è

$$N < F(x, y, \bar{z}_m, \bar{p}_m, \bar{q}_m) = F(x, y, z_m, \bar{p}_m, \bar{q}_m) \leq F(x, y, z_m, p_m, q_m),$$

e perciò, essendo integrabile, in D , la $F(x, y, z_m, p_m, q_m)$, lo è pure la $F(x, y, \bar{z}_m, \bar{p}_m, \bar{q}_m)$, e si ha

$$(1) \quad \mathfrak{J}_D[\bar{z}_m] \leq i + \frac{1}{m}.$$

Di qui, essendo per la condizione 1°),

$$\mathfrak{J}_D[\bar{z}_m] > \mu \iint_{\bar{D}} (\bar{p}_m^2 + \bar{q}_m^2) dx dy + ND,$$

segue

$$\iint_{\bar{D}} (\bar{p}_m^2 + \bar{q}_m^2) dx dy < \frac{1}{\mu} (i + 1) + \frac{|N|}{\mu} D.$$

Fissato un n , si scelga un $n_1 > n$, in modo che \bar{D}_n risulti tutto *interno* a \bar{D}_{n_1} . In \bar{D}_{n_1} , le $\bar{z}_m(x, y)$ sono, per ogni $m \geq n_1$, livellate, a meno di $1:m$, secondo la giacitura del piano Π ; perciò le $\bar{z}_m(x, y)$ sono, in virtù del teorema del n.° 11, α), tutte ugualmente continue nell'interno di D_{n_1} , e quindi, in particolare, in \bar{D}_n . In

(17) Oltre, si intende, le condizioni del n.° 13.

questo campo, esse sono anche, per le ipotesi fatte, ugualmente limitate, e si può così estrarre, dalla successione delle $\bar{z}_m(x, y)$, una successione parziale convergente uniformemente in tutto \bar{D}_n . E come già si è fatto nel n.º 18, si ottiene una successione

$$\bar{z}_{1,1}(x, y), \bar{z}_{2,2}(x, y), \dots, \bar{z}_{m,m}(x, y), \dots$$

estratta da quella delle $\bar{z}_m(x, y)$, e convergente uniformemente, in ciascuno dei campi chiusi \bar{D}_n , verso una funzione $z_\infty(x, y)$, assolutamente continua in D , appartenente alla classe $\mathbf{C}_{(i, \pi)}$, e per la quale è

$$\mathcal{J}_D[z_\infty] = i.$$

Osservazione. - Ammessa la condizione 1º), la 2º) risulta soddisfatta se la F è indipendente da x, y, z , vale a dire, se la F è soltanto funzione di p e q .

22. - Vº Teorema d'esistenza.

Fissato un piano Π , non perpendicolare al piano (x, y) , indicheremo con $\mathbf{C}_{(\pi)}$ una classe di funzioni, definite e continue in tutto \bar{D} , la quale sia una classe \mathbf{C} (n.º 17) e tale, inoltre, che ad essa appartenga ogni funzione dedotta, in \bar{D} , da una qualsiasi funzione della classe stessa, per livellamento, a meno di $1:n$ (n potendo avere un qualunque valore intero, positivo), secondo la giacitura del piano Π .

Per esempio, la classe di tutte le funzioni $z(x, y)$, assolutamente continue in D , continue in \bar{D} , assumenti tutte gli stessi valori sulla frontiera di D e tali da rendere integrabile, in D , la $F(x, y, z, p, q)$, è una classe $\mathbf{C}_{(\pi)}$.

Dopo di ciò, dimostriamo il teorema seguente:

Il campo aperto e limitato D verifichi la condizione [L] e l'integrale $\mathcal{J}_D[z]$ sia quasi-regolare positivo e soddisfi alle condizioni 1º) e 2º) del teorema del n.º 21.

Indicato con Π il piano $z = \bar{p}x + \bar{q}y$, si supponga che le funzioni della classe $\mathbf{C}_{(\pi)}$, se considerate soltanto sulla frontiera F di D , vi risultino tutte ugualmente continue ed ugualmente limitate. Allora, in $\mathbf{C}_{(\pi)}$, esiste il minimo assoluto di $\mathcal{J}_D[z]$.

Scelta una successione minimizzante $z_1(x, y), z_2(x, y), \dots, z_m(x, y), \dots$, si indichi con $\bar{z}_m(x, y)$ la funzione dedotta, in \bar{D} , dalla $z_m(x, y)$, per livellamento, a meno di $1:m$, secondo la giacitura del piano Π . Avremo, come nel n.º precedente,

$$\mathcal{J}_D[\bar{z}_m] \leq i + \frac{1}{m},$$

$$\iint_{\bar{D}} (\bar{p}_m^2 + \bar{q}_m^2) dx dy < \frac{1}{\mu} (i+1) + \frac{|N|}{\mu} D.$$

Allora, per il n.º 12, a), le $\bar{z}_m(x, y)$ risultano ugualmente continue in \bar{D} . Di qui segue, per un ragionamento già fatto nel n.º 19, che tali funzioni sono pure,

in \overline{D} , ugualmente limitate, e, nel solito modo, si conclude con l'esistenza di una funzione $z_\infty(x, y)$ appartenente alla classe $\mathfrak{C}_{(x)}$ e tale da verificare l'uguaglianza

$$\mathfrak{J}_D[z_\infty] = i.$$

Così, per esempio, fra tutte le funzioni $z(x, y)$, assolutamente continue in D , continue in \overline{D} , assumenti sulla frontiera F tutte gli stessi valori, e tali che l'integrale

$$\iint_D \{ (p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2 \} dx dy$$

abbia un valore finito, ve n'è una che rende minimo tale integrale; e lo stesso dicasi, se invece dell'integrale scritto, si ha

$$\iint_D (1 + x^2 + y^2 + z^2) \{ (p - \bar{p})^2 + (q - \bar{q})^2 \} dx dy.$$

23. - VI° Teorema d'esistenza.

Le proposizioni dei n.° 21 e 22 sono suscettibili di notevoli generalizzazioni. Così, ad esempio, se l'operazione di livellamento, descritta nel n.° 6, viene fatta, invece che coi piani paralleli ad un piano dato, con le superficie della famiglia

$$z = \varphi(x, y) + c,$$

dove c è una costante arbitraria e $\varphi(x, y)$ è una funzione data e continua, insieme con le sue derivate parziali del primo ordine, in tutto \overline{D} , si ottiene il seguente risultato:

Il campo aperto e limitato D verifichi la condizione [L] e l'integrale $\mathfrak{J}_D[z]$ sia quasi-regolare positivo e soddisfi alla condizione 1° del teorema del n.° 21. Esista sempre, inoltre, la derivata parziale F_z e sia, in tutto D e per tutti i valori finiti di z, p, q ,

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \leq F(x, y, z, p, q), \quad F_z\left(x, y, z, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \equiv 0.$$

Allora, nella classe di tutte le funzioni $z(x, y)$ assolutamente continue in D , continue in \overline{D} , assumenti sulla frontiera F di D dei valori dati, sempre gli stessi per tutte le $z(x, y)$, e tali che, per esse risulti integrabile, in D , $F(x, y, z, p, q)$, esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}_D[z]$.

Le condizioni poste in questo teorema sono, ad esempio, verificate per gli integrali

$$\iint_D \left\{ \left(p - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy,$$

$$\iint_D (1 + x^2 + y^2 + z^2) \left\{ \left(p - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy.$$

24. - Lemma.

Un'altra generalizzazione dei teoremi dei n.° 21 e 22 può essere ottenuta mediante il lemma che ora dimostreremo e che ci viene suggerito dai procedimenti usati da G. FUBINI nella sua fondamentale Memoria: *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari* ⁽¹⁸⁾.

Sia $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_n(x, y), \dots$ una successione di funzioni assolutamente continue in uno stesso campo aperto e limitato, continue in tutto \bar{D} , ugualmente continue se considerate soltanto sulla frontiera di D , e soddisfacenti alla disuguaglianza

$$(1) \quad \iint_{\bar{D}} \{ |p_n|^{1+a} + |q_n|^{1+a} \} dx dy \leq A,$$

dove a e A sono due numeri maggiori di zero, indipendenti da n . Fissato ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è sempre possibile di tracciare, nel piano (x, y) , con rette parallele agli assi x e y , un reticolato a maglie tutte di ampiezza minore di ε , e di scegliere fra le $f_n(x, y)$ infinite funzioni in modo che esse risultino ugualmente continue su tutte le intersezioni di D con le rette del reticolato.

Fissato un n , consideriamo i valori \bar{y} di y tali che l'integrale di $|p_n|^{1+a}$, su l'intersezione di D con la retta $y = \bar{y}$, o non esista finito oppure risulti $> 4A : \varepsilon$. Detto $E_{y,n}$ l'insieme di questi \bar{y} , da (1) si trae

$$A \geq \iint_{\bar{D}} |p_n|^{1+a} dx dy \geq \frac{4A}{\varepsilon} m(E_{y,n}),$$

onde la misura dell'insieme $E_{y,n}$ verifica la disuguaglianza

$$m(E_{y,n}) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Consideriamo ora tutti i valori di y tali che $k\varepsilon : 2 < y < (k+1)\varepsilon : 2$, k essendo un intero qualsiasi, e indichiamo con $\bar{E}_{y,n}^{(k)}$ l'insieme di quelli fra questi valori che non appartengono a $E_{y,n}$. Sarà

$$m(\bar{E}_{y,n}^{(k)}) > \frac{\varepsilon}{4}$$

ed esisterà (almeno) un valore y_k di y , interno all'intervallo $(k\varepsilon : 2, (k+1)\varepsilon : 2)$ e appartenente ad infiniti insiemi della successione $\bar{E}_{y,n}^{(k)}$ ($n = 1, 2, \dots$) ⁽¹⁹⁾. Questo y_k è tale che o sulla retta $y = y_k$ non esistono punti di D , oppure sull'intersezione di essa con D l'integrale di $|p_n|^{1+a}$ è $\leq 4A : \varepsilon$, per infiniti valori di n .

⁽¹⁸⁾ Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIII (1907), pp. 58-84.

⁽¹⁹⁾ Cfr. E. BOREL: *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, 1905, pp. 18-19.

Siano k_1 e k_2 i minimo e massimo interi tali che l'ordinata di un qualsiasi punto di D risulti sempre compresa fra $k_1\varepsilon:2$ e $k_2\varepsilon:2$, e indichiamo con

$$(2) \quad f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,n}, \dots$$

una successione estratta dalla f_1, f_2, \dots , identica ad essa, se sulla retta $y=y_{k_1}$ non esistono punti di D , e comprendente, invece, nel caso contrario, tutte le f_n per le quali l'integrale di $|p_n|^{1+\alpha}$, esteso all'intersezione di D con la $y=y_{k_1}$, risulta $\leq 4A:\varepsilon$. Indichiamo poi con

$$(3) \quad f_{2,1}, f_{2,2}, \dots, f_{2,n}, \dots$$

una successione estratta dalla (2), identica ad essa se sulla retta $y=y_{k_1+1}$ non esistono punti di D , e comprendente, invece, nel caso contrario, tutte le $f_{1,n}$ per le quali l'integrale di $|p_{1,n}|^{1+\alpha}$, esteso all'intersezione di D con la $y=y_{k_1+1}$, risulta $\leq 4A:\varepsilon$.

Così proseguendo, giungeremo ad una successione

$$(4) \quad f_{k_2-k_1,1}, f_{k_2-k_1,2}, \dots, f_{k_2-k_1,n}, \dots$$

di infinite funzioni, scelte fra le f_n e tali che l'integrale di $|p_{k_2-k_1,n}|^{1+\alpha}$, per $n=1, 2, \dots$, esteso all'intersezione di D con una qualsiasi delle rette $y=y_k$ ($k=k_1, k_1+1, \dots, k_2-1$), risulti sempre $\leq 4A:\varepsilon$, se l'intersezione indicata esiste.

Posto $k_2-k_1=r$, indichiamo con $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_r$, i valori $y_{k_1}, \dots, y_{k_2-1}$. Per questi valori è

$$\bar{y}_1 < \bar{y}_2 < \dots < \bar{y}_r, \quad \bar{y}_{r'+1} - \bar{y}_{r'} < \varepsilon \quad (r'=1, 2, \dots, r-1).$$

Partendo ora dalla successione (4) e ragionando, relativamente alle rette $x=\bar{x}$ e all'integrale di $|q_n|^{1+\alpha}$, in modo analogo a quanto abbiamo già fatto, giungiamo a dei valori, che indicheremo con $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_s$, tali che

$$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_s, \quad \bar{x}_{s'+1} - \bar{x}_{s'} < \varepsilon \quad (s'=1, 2, \dots, s-1),$$

e ad una successione estratta dalla (4):

$$f_{m_1}, f_{m_2}, \dots, f_{m_n}, \dots$$

per ciascuna funzione della quale l'integrale di $|p_{m_n}|^{1+\alpha}$, sull'intersezione, se esiste, di D con una qualsiasi delle rette $y=\bar{y}_{r'}$ ($r'=1, 2, \dots, r$), e quello di $|q_{m_n}|^{1+\alpha}$, sull'intersezione, se esiste, di D con una qualsiasi delle rette $x=\bar{x}_{s'}$ ($s'=1, 2, \dots, s$), risultano $\leq 4A:\varepsilon$. Siccome le f_{m_n} sono, per ipotesi, tutte ugualmente continue sulla frontiera di D , ne viene che esse sono pure ugualmente continue su tutte le intersezioni di D con le rette $y=\bar{y}_{r'}$, $x=\bar{x}_{s'}$. Se allora costituiamo il nostro reticolato con le rette ora indicate e con quelle $y=y_k$ esterne alla striscia limitata da $y=\bar{y}_1$ e $y=\bar{y}_r$, e con le $x=\bar{x}_k$ esterne all'altra striscia limitata da $x=\bar{x}_1$, $x=\bar{x}_s$, il nostro lemma risulta provato.

25. - VII° Teorema d'esistenza.

Diremo che l'integrale $\mathcal{J}_D[z]$ soddisfa alla condizione [E] se, per un $\varrho > 0$ e per ciascun punto (x_0, y_0) del campo chiuso \overline{D} corrispondente a D , esiste una funzione $\varphi_{(x_0, y_0)}(x, y, \zeta)$ ⁽²⁰⁾: 1°) definita e continua, insieme con le sue derivate parziali $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, in tutti i punti (x, y) del cerchio di centro (x_0, y_0) e raggio ϱ , e per tutti i valori finiti di ζ ; 2°) con le derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sempre, in modulo, inferiori ad un numero fisso Δ , indipendente da (x_0, y_0) ; 3°) verificante l'uguaglianza $\varphi_{(x_0, y_0)}(x_0, y_0, \zeta) = \zeta$; 4°) tale che, per ogni ζ , l'integrale $\mathcal{J}_{D'}[\varphi_{(x_0, y_0)}(x, y, \zeta)]$, esteso ad un qualsiasi campo aperto D' , contenuto in D e nel cerchio già indicato, risulti non superiore allo stesso integrale $\mathcal{J}_{D'}[z]$ relativo ad una funzione $z(x, y)$ assolutamente continua, coincidente con la $\varphi_{(x_0, y_0)}(x, y, \zeta)$ sulla frontiera di D' , e per la quale l'integrale scritto esista.

Premessa questa definizione, dimostriamo il teorema che segue:

Il campo aperto e limitato D verifichi la condizione [L] e l'integrale $\mathcal{J}_D[z]$ sia quasi-regolare positivo e soddisfacente alla condizione [E] ed a quella 1°) del teorema n.° 21.

Allora, nella classe di tutte le funzioni $z(x, y)$ assolutamente continue in D , continue in \overline{D} , assumenti sulla frontiera F di D dei valori dati (sempre gli stessi per tutte le $z(x, y)$), e tali che per esse esista finito l'integrale considerato, esiste il minimo assoluto di $\mathcal{J}_D[z]$.

Scegliamo una successione minimizzante per $\mathcal{J}_D[z]$ nella classe delle funzioni $z(x, y)$ considerate. In virtù del lemma del n.° precedente (le cui ipotesi sono qui verificate in forza della condizione 1°) del n.° 21) tracciamo, con rette parallele agli assi x e y , un reticolato R , a maglie tutte di ampiezza minore di $\varrho : 2$ (essendo il ϱ quello indicato nella definizione della condizione [E]) e in modo che si possa estrarre dalla successione minimizzante scelta, un'altra successione

$$(1) \quad z_1(x, y), \quad z_2(x, y), \dots, \quad z_m(x, y), \dots$$

le cui funzioni risultino ugualmente continue su tutte le intersezioni di D con le rette di R . E siccome, per ipotesi, le $z_m(x, y)$ sono ugualmente limitate sulla frontiera F di D , esse risultano, per l'uguale continuità, anche ugualmente limitate su tutte le intersezioni di D già dette. È possibile perciò di estrarre dalla (1) un'altra successione, che, per semplicità di scrittura, supporremo sia la (1) stessa, la quale converga uniformemente su tutte le intersezioni di D con le rette di R .

Sia ora r uno dei rettangoli di R contenente dei punti di D , e indichiamo con (a, b) uno di questi punti. Eseguiamo il livellamento della funzione $z_m(x, y)$,

⁽²⁰⁾ Generalmente variabile con (x_0, y_0) .

nella parte di \bar{D} contenuta in r , mediante le superficie

$$z = \varphi_{(a,b)}\left(x, y, \frac{k}{m}\right), \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

e operiamo in tal modo per tutti gli r di R . Detta $\bar{z}_m(x, y)$ la funzione così ottenuta dalla $z_m(x, y)$, anche la successione delle $\bar{z}_m(x, y)$ è minimizzante per \mathfrak{J}_D nella classe considerata, e si ha, come nel n.º 22,

$$\iint_{\bar{D}} \{\bar{p}_m^2 + \bar{q}_m^2\} dx dy < \frac{1}{\mu} (i+1) + \frac{|N|}{\mu} D.$$

Ragionamenti analoghi a quelli dei n.º 11, a) e 12, a) provano allora che le $\bar{z}_m(x, y)$ sono tutte ugualmente continue in \bar{D} , e non resta che concludere come già si è fatto nel n.º 22.

26. - VIIIº Teorema d'esistenza.

Il campo aperto e limitato D verifichi la condizione [L] e l'integrale $\mathfrak{J}_D[z]$ sia quasi-regolare positivo e tale che esistano tre numeri $\alpha > 0$, $\mu > 0$ e N , in modo da aversi, per ogni (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q

$$F(x, y, z, p, q) > \mu \{ |p|^{1+\alpha} + |q|^{1+\alpha} \} + N.$$

Nella classe di tutte le funzioni $z(x, y)$, assolutamente continue in D , continue in \bar{D} , assumenti sulla frontiera F di D valori dati (sempre gli stessi per tutte le $z(x, y)$), e tali che per esse risulti finito l'integrale $\mathfrak{J}_D[z]$, il minimo assoluto di \mathfrak{J}_D esiste se tale minimo esiste per campi aperti e limitati D' , verificanti la condizione [L] e sufficientemente piccoli, e se, di più, per questi campi la funzione minimante è unica e varia con continuità al variare dei valori prescritti sulla frontiera.

Procedendo come nel n.º precedente, possiamo ottenere una successione minimizzante per \mathfrak{J}_D ,

$$z_1(x, y), \quad z_2(x, y), \dots, \quad z_m(x, y), \dots,$$

la quale converga uniformemente su tutte le intersezioni di D con le rette di un reticolato R , a maglie tutte di ampiezza minore di un $\varepsilon > 0$, arbitrariamente prefissato.

Am messo che valga la condizione posta nell'enunciato, circa l'esistenza e l'unicità della funzione minimante per campi sufficientemente piccoli, nonchè la variazione in modo continuo di tale funzione, al variare dei valori prescritti sulla frontiera, si consideri un rettangolo r , del reticolato R , che contenga punti di D ; e supponendo ε convenientemente piccolo, si sostituisca a $z_m(x, y)$, nella parte D_r di D contenuta nell'interno di r , la soluzione del problema di minimo per \mathfrak{J}_{D_r} relativo alle funzioni che, sulla frontiera di D_r , assumono i valori

della $z_m(x, y)$. Si faccia altrettanto per tutti i rettangoli r , e si indichi con $\bar{z}_m(x, y)$ la funzione che così viene a risultare, funzione che coincide con la $z_m(x, y)$ sulle intersezioni di D con le rette di R . La successione

$$\bar{z}_1(x, y), \bar{z}_2(x, y), \dots, \bar{z}_m(x, y), \dots$$

è anch'essa minimizzante per \mathcal{J}_D nella classe considerata, e, convergendo uniformemente sulle intersezioni di D con le rette di R , converge uniformemente su tutto D , per quanto più sopra abbiamo ammesso. La funzione limite risulta poi, per le solite considerazioni, la funzione minimante cercata ⁽²¹⁾.

⁽²¹⁾ Per un teorema d'esistenza del minimo, relativo al caso in cui la F dipenda soltanto da p e q , vedasi A. HAAR: *Über das Plateausche Problem* (Mathematische Annalen, B. 97 (1926), pp. 124-158).