ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SILVIO CINQUINI

Condizioni sufficienti per la semicontinuità nel calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 1 (1933), p. 41-58

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_1_41_0>

CONDIZIONI SUFFICIENTI PER LA SEMICONTINUITÀ NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI (*)

di SILVIO CINQUINI (Pisa).

Nella Memoria: *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du calcul des variations* (1) il prof. TONELLI ha stabilito le condizioni sufficienti per la semicontinuità degli integrali doppi

$$I_D[z]=\iint\limits_D f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))dxdy$$

su *tutte* le superficie della forma $z=z(x, y)$, ove $z(x, y)$ appartiene alla classe $\mathcal{C}$ delle funzioni definite e assolutamente continue (nel senso del prof. TONELLI) nel campo D e tali che l'integrale $I_D[z]$ esista finito.

Se, in tutto un intorno di una *data* superficie S_0, definita da $z=z_0(x, y)$, $z_0(x, y)$ essendo una funzione della classe $\mathcal{C}$, è verificata una di quelle condizioni, l'integrale $I_D[z_0]$ è funzione semicontinua sulla superficie S_0, quindi dalle condizioni stabilite dal prof. TONELLI, si deducono immediatamente altrettante condizioni per la semicontinuità dell'integrale $I_D[z]$ su una data superficie.

Nel presente lavoro, analogamente a quanto ha fatto il prof. TONELLI nel suo trattato: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (2) per gli integrali curvilinei, mi propongo, seguendo il suo metodo, di trovare qualche altra condizione sufficiente per la semicontinuità dell'integrale $I_D[z]$ su una data superficie, definita da una funzione della classe $\mathcal{C}$.

Mi occupo soltanto della ricerca delle condizioni per la semicontinuità inferiore, perchè quelle relative alla semicontinuità superiore, analogamente a quanto avviene per gli integrali curvilinei (3), si deducono immediatamente dalle prime cambiando il senso delle disuguaglianze che vi figurano.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) L. TONELLI: *Sur la semi-continuité des intégrales doubles du calcul des variations*, Acta Mathematica, T. 53 (1929); pp. 325-346.

(2) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, due volumi, Zanichelli, Bologna. Vedasi vol. I, cap. VII, n.i 105-106, pp. 287-290 e cap. XI, § 3, pp. 407-419.

(3) Vedi L. TONELLI, op. cit. in (2), vol. I, cap. X, § 1, n.o 142, pag. 369.

1. - **Generalità** (4). — Sia $f(x, y, z, p, q)$ una funzione finita e continua con le sue derivate parziali f_p, f_q per ogni (x, y) di un campo D aperto limitato del piano (x, y) e per tutti i valori finiti di z, p, q.

Considerato un punto (x, y, z), tale che (x, y) sia un punto di D, e una terna di assi cartesiani ortogonali (p, q, u) dicesi *figurativa* della funzione $f(x, y, z, p, q)$, relativa al punto (x, y, z) la superficie definita, rispetto agli assi (p, q, u), dall'equazione

$$u = f(x, y, z, p, q).$$

Il piano tangente alla figurativa nel punto corrispondente a $(\overline{p}, \overline{q})$ è definito dall'equazione

$$u - f(x, y, z, \overline{p}, \overline{q}) = (p - \overline{p}) f_p(x, y, z, \overline{p}, \overline{q}) + (q - \overline{q}) f_q(x, y, z, \overline{p}, \overline{q})$$

e la differenza fra la u della figurativa, in corrispondenza di (p, q), e la u del piano tangente è espressa da

$$\begin{aligned} f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z, \overline{p}, \overline{q}) - (p - \overline{p}) f_p(x, y, z, \overline{p}, \overline{q}) - \\ - (q - \overline{q}) f_q(x, y, z, \overline{p}, \overline{q}) = \mathcal{E}(x, y, z\,;\ \overline{p}, \overline{q}\,;\ p, q)\,; \end{aligned}$$

si ha così un semplice significato geometrico per la nota funzione $\mathcal{E}$ di WEIERSTRASS.

Ne segue che, se per tutte le coppie (p, q) è

$$\mathcal{E}(x, y, z\,;\ \overline{p}, \overline{q}\,;\ p, q) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0),$$

la figurativa non scende (sale) mai al disotto (disopra) del suo piano tangente; e che, se per tutte le coppie p, q sufficientemente prossime a $(\overline{p}, \overline{q})$ è

$$\mathcal{E}(x, y, z\,;\ \overline{p}, \overline{q}\,;\ p, q) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0),$$

la figurativa, nel suo punto corrispondente a $(\overline{p}, \overline{q})$, volge la concavità verso la direzione positiva (negativa) dell'asse delle u.

Considerata la classe $\mathfrak{C}$ delle funzioni $z(x, y)$ definite e assolutamente continue (nel senso del prof. TONELLI) in D (5) e tali che esista finito l'integrale doppio

$$I_D[z] = \iint_D f(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))\,dx\,dy,$$

ove si è posto

$$p(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \qquad q(x, y) = \frac{\partial z(x, y)}{\partial y},$$

l'integrale $I_D[z_0]$, ove $z_0(x, y)$ è una funzione della classe $\mathfrak{C}$, dicesi *semicontinuo inferiormente sulla superficie* S_0, definita da $z = z_0(x, y)$, se, preso un ε positivo ad arbitrio, si può determinare un $\varrho > 0$ in modo che sia

$$I_D[z] > I_D[z_0] - \varepsilon$$

(4) Cfr. L. TONELLI, op. cit. in (2), vol. I, cap. V, § 1, n.° 78, pp. 212-213. Vedi L. TONELLI, luogo cit. in (1), n.i 1-4.

(5) Vedi luogo cit. in (4), n.° 2.

per tutte le funzioni della classe $\mathcal{C}$, soddisfacenti in tutti i punti di D alla disuguaglianza

$$|z(x, y)-z_0(x, y)|<\varrho.$$

2. - **Lemma I.** — *Sia $\overline{D}$ un campo limitato chiuso del piano (x, y) e sia $f(x, y, z, p, q)$ una funzione finita e continua con le sue derivate parziali f_p, f_q, in tutti i punti di $\overline{D}$ e per tutti i valori finiti di z, p, q.*

Se $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ è un punto tale che $(\overline{x}, \overline{y})$ appartenga a $\overline{D}$, ed esistono tre numeri ϱ, $\overline{p}$, $\overline{q}$, il primo dei quali positivo, in modo che per tutti i punti (x, y, z), appartenenti alla sfera $(\overline{P}, \varrho)$ e tali che (x, y) sia un punto di $\overline{D}$, per tutte le coppie p, q soddisfacenti alla condizione $(p-\overline{p})^2+(q-\overline{q})^2\leqslant\varrho^2$ e per tutte le coppie $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, tali che non sia contemporaneamente $\tilde{p}=p$, $\tilde{q}=q$, si abbia

$$\mathcal{E}(x, y, z\,;\ p, q\,;\ \tilde{p}, \tilde{q})>0\,; \tag{1}$$

preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, è possibile determinare cinque numeri λ, μ, ν, $\overline{\varrho}$, γ, con $0<\overline{\varrho}<\varrho$ e $\gamma>0$, in modo che, per ogni punto (x, y, z), appartenente alla sfera $(\overline{P}, \overline{\varrho})$ e tale che (x, y) sia un punto di $\overline{D}$, risulti

$$f(x, y, z, p, q)-(\lambda p+\mu q+\nu)>\gamma\sqrt{p^2+q^2}, \tag{2}$$

qualunque siano p, q e

$$f(x, y, z, p, q)-(\lambda p+\mu q+\nu)<\varepsilon, \tag{3}$$

se è $(p-\overline{p})^2+(q-\overline{q})^2\leqslant\overline{\varrho}^2$.

Si osservi, innanzi tutto, che in virtù della (1) la

$$\frac{df(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}+r\cos\theta, \overline{q}+r\,\mathrm{sen}\,\theta)}{dr}$$

è, per ogni valore di θ compreso fra 0 e 2π, funzione crescente di r in $(0, \varrho)$. Infatti, fissato un θ, tale che $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$, si ha

$$\frac{df(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}+r\cos\theta, \overline{q}+r\,\mathrm{sen}\,\theta)}{dr}=\cos\theta f_p(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}+r\cos\theta, \overline{q}+r\,\mathrm{sen}\,\theta)+$$
$$+\mathrm{sen}\,\theta f_q(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}+r\cos\theta, \overline{q}+r\,\mathrm{sen}\,\theta).$$

Considerata la figurativa, relativa al punto $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$,

$$u=f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, p, q),$$

si osservi che, in virtù della (1), per le considerazioni fatte al n.° 1, essa non scende mai al disotto di ogni suo piano tangente, il cui punto di tangenza abbia come proiezione ortogonale sul piano (p, q) un punto del cerchio Ω di centro $(\overline{p}, \overline{q})$ e raggio ϱ. Pertanto il piano, perpendicolare al piano (p, q), passante per il punto $(\overline{p}, \overline{q}, 0)$, e definito da

$$q-\overline{q}=(p-\overline{p})\,\mathrm{tg}\,\theta$$

taglia la figurativa secondo una curva $\Gamma(\theta)$, la quale non scende mai al disotto di ogni sua tangente, il cui punto di tangenza abbia per proiezione ortogonale sul piano (p, q) un punto del cerchio Ω. Perciò, per ogni valore di θ compreso fra 0 e 2π, la

$$\frac{df(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+r\cos\theta, \bar{q}+r\operatorname{sen}\theta)}{dr}$$

è funzione non decrescente di r in $(0, \varrho)$.

Inoltre questa derivata non può nemmeno mantenersi costante in tutto un intervallo (r_1, r_2) di $(0, \varrho)$, perchè in tal caso, essendo

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{p}+r_1\cos\theta, \bar{q}+r_1\operatorname{sen}\theta;\ \bar{p}+r_2\cos\theta, \bar{q}+r_2\operatorname{sen}\theta)= \\
&\quad = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+r_2\cos\theta, \bar{q}+r_2\operatorname{sen}\theta) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+r_1\cos\theta, \bar{q}+r_1\operatorname{sen}\theta) - \\
&\quad -(r_2-r_1)\left\{\cos\theta f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+r_1\cos\theta, \bar{q}+r_1\operatorname{sen}\theta)+\operatorname{sen}\theta f_q(....)\right\}= \\
&\quad =(r_2-r_1)\left\{\cos\theta f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+\tilde{r}\cos\theta, \bar{q}+\tilde{r}\operatorname{sen}\theta)+\operatorname{sen}\theta f_q(....)\right\}- \\
&\quad -(r_2-r_1)\left\{\cos\theta f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+r_1\cos\theta, \bar{q}+r_1\operatorname{sen}\theta)+\operatorname{sen}\theta f_q(....)\right\}= \\
&\quad =(r_2-r_1)\left[\frac{df(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+\tilde{r}\cos\theta, \bar{q}+\tilde{r}\operatorname{sen}\theta)}{dr}-\frac{df(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+r_1\cos\theta, \bar{q}+r_1\operatorname{sen}\theta)}{dr}\right],
\end{aligned}$$

ove $\tilde{r}$ è compreso fra r_1 e r_2, risulterebbe

$$\mathcal{E}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{p}+r_1\cos\theta, \bar{q}+r_1\operatorname{sen}\theta;\ \bar{p}+r_2\cos\theta, \bar{q}+r_2\operatorname{sen}\theta)=0$$

contrariamente alla (1).

Dunque per ogni valore di θ (con $0\leq\theta\leq 2\pi$) e per ogni ϱ' tale che $0<\varrho'\leq\varrho$ risulta verificata la disuguaglianza

$$\begin{aligned}
&\cos\theta f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+\varrho'\cos\theta, \bar{q}+\varrho'\operatorname{sen}\theta)+\operatorname{sen}\theta f_q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+\varrho'\cos\theta, \bar{q}+\varrho'\operatorname{sen}\theta)> \\
&\qquad > \cos\theta f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q})+\operatorname{sen}\theta f_q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}).
\end{aligned}$$

Considerata nel piano (p, q) la circonferenza Ω' di centro $(\bar{p}, \bar{q})$ e raggio ϱ', con $0<\varrho'<\varrho$, le tangenti alla curva $\Gamma(\theta)$ nei punti, le cui proiezioni ortogonali sul piano (p, q) appartengono alla circonferenza Ω', sono definite dal sistema

$$\left\{\begin{aligned}
&q-\bar{q}=(p-\bar{p})\operatorname{tg}\theta \\
&u-f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+\varrho'\cos\theta, \bar{q}+\varrho'\operatorname{sen}\theta)= \\
&\qquad =(p-\bar{p}-\varrho'\cos\theta)f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}+\varrho'\cos\theta, \bar{q}+\varrho'\operatorname{sen}\theta)+(q-\bar{q}-\varrho'\operatorname{sen}\theta)f_q(....)
\end{aligned}\right.$$

e da quello che si ottiene dal precendente cambiandovi θ in $\theta+\pi$.

Si consideri il punto $Q(\theta)$, comune a tali tangenti; poichè la $\frac{df}{dr}$ è, per ogni valore di θ compreso fra 0 e 2π, funzione crescente di r in $(0, \varrho)$, $Q(\theta)$ trovasi al disotto della tangente alla curva $\Gamma(\theta)$ nel punto corrispondente a $(\bar{p}, \bar{q})$; quindi la u di $Q(\theta)$ è minore della u del punto Q', appartenente al piano tangente in $(\bar{p}, \bar{q}, f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}))$ alla figurativa e avente le coordinate p, q uguali a quelle di $Q(\theta)$ (vedi Fig. 1). Tale considerazione può ripetersi per tutti i valori di θ

(con $0 \leqq \theta \leqq \pi$); se ne scelga uno $\overline{\theta}$ $\left(\text{per esempio, per fissare le idee, } \overline{\theta} = \frac{\pi}{4}\right)$ e per il punto $Q(\overline{\theta})$ si consideri il piano

$$(4) \qquad u - \overline{\overline{u}} = f_p(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q})(p - \overline{\overline{p}}) + f_q(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q})(q - \overline{\overline{q}}),$$

parallelo al piano tangente in $(\overline{p}, \overline{q}, f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q}))$ alla figurativa.

Poichè in virtù della (1) quest'ultimo piano ha in comune colla figurativa soltanto il punto di tangenza, ne segue che il piano (4) è tutto al disotto della figurativa senza avere con questa alcun punto in comune, onde indicata più brevemente con

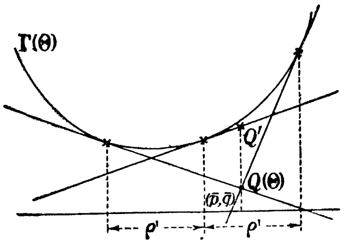

Fig. 1.

$$u = \lambda p + \mu q + \nu$$

la sua equazione, ove si è posto

$$(5) \quad \lambda = f_p(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q}), \qquad \mu = f_q(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q}),$$

risulta per tutti i p e q

$$f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, p, q) - (\lambda p + \mu q + \nu) > 0.$$

Si supponga ϱ' uguale alla metà del limite superiore dei suoi valori che rendono soddisfatta la disuguaglianza

$$f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, p, q) - (\lambda p + \mu q + \nu) < \varepsilon$$

per tutte le coppie p, q verificanti la

$$(6) \qquad (p - \overline{p})^2 + (q - \overline{q})^2 \leqq \varrho'^2.$$

Sia ϱ'' un numero positivo $\leqq \varrho'$, tale che per ogni punto (x, y, z) appartenente alla sfera $(\overline{P}, \varrho'')$ e la cui proiezione sul piano (x, y) sia un punto di $\overline{D}$, e per tutte le coppie (p, q) soddisfacenti alla (6), si abbia

$$(7) \qquad 0 < f(x, y, z, p, q) - (\lambda p + \mu q + \nu) < \varepsilon.$$

Il numero ϱ'' si supponga inoltre tale che risulti in ogni punto (x, y, z) della sfera $(\overline{P}, \varrho'')$, ($(x, y)$ essendo inoltre un punto di $\overline{D}$), e per ogni valore di θ, con $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$:

$$(8) \qquad \begin{aligned} &[\cos\theta f_p(x, y, z, \overline{p} + \varrho' \cos\theta, \overline{q} + \varrho' \operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen}\theta f_q(....)] - \\ &\qquad - [\cos\theta f_p(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{p}, \overline{q}) + \operatorname{sen}\theta f_q(....)] > 0 \end{aligned}$$

e sia $m' > 0$ il minimo di tale differenza per i valori indicati di x, y, z, θ.

Nei punti (x, y, z) indicati, in virtù della (1), si ha, se non è contemporaneamente $p = \overline{p} + \varrho' \cos\theta$, $q = \overline{q} + \varrho' \operatorname{sen}\theta$,

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ \overline{p} + \varrho' \cos\theta, \overline{q} + \varrho' \operatorname{sen}\theta;\ p, q) > 0$$

ossia

$$(9) \qquad \begin{aligned} f(x, y, z, p, q) &> f(x, y, z, \overline{p} + \varrho' \cos\theta, \overline{q} + \varrho' \operatorname{sen}\theta) + \\ &+ (p - \overline{p} - \varrho' \cos\theta) f_p(x, y, z, \overline{p} + \varrho' \cos\theta, \overline{q} + \varrho' \operatorname{sen}\theta) + \\ &+ (q - \overline{q} - \varrho' \operatorname{sen}\theta) f_q(....) \end{aligned}$$

e tenendo conto della (7)

$$
\begin{aligned}
(10) \qquad f(x, y, z, p, q) > \lambda(\bar{p}+\varrho' \cos\theta) + \mu(\bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) + \nu + \\
+ (p-\bar{p}-\varrho' \cos\theta) f_p(x, y, z, \bar{p}+\varrho' \cos\theta, \bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) + \\
+ (q-\bar{q}-\varrho' \operatorname{sen}\theta) f_q(....).
\end{aligned}
$$

Si osservi ora che, per ogni coppia $p=\bar{p}+r\cos\theta$, $q=\bar{q}+r\operatorname{sen}\theta$, con $r>\varrho'>0$, si ha per la (8)

$$
\begin{aligned}
(p-\bar{p}-\varrho' \cos\theta) f_p(x, y, z, \bar{p}+\varrho' \cos\theta, \bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) + (q-\bar{q}-\varrho' \operatorname{sen}\theta) f_q(....) = \\
= (r-\varrho') \{ \cos\theta f_p(x, y, z, \bar{p}+\varrho' \cos\theta, \bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen}\theta f_q(....) \} > \\
> (r-\varrho') \{ \cos\theta f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) + \operatorname{sen}\theta f_q(....) \} = \\
= (p-\bar{p}-\varrho' \cos\theta) f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) + (q-\bar{q}-\varrho' \operatorname{sen}\theta) f_q(....)
\end{aligned}
$$

e poichè la (8) è valida per ogni valore di θ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$, quest'ultima disuguaglianza è verificata per tutte le coppie (p, q) tali che $(p-\bar{p})^2+(q-\bar{q})^2>\varrho'^2$, e dalla (10) risulta

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z, p, q) > \lambda(\bar{p}+\varrho' \cos\theta) + \mu(\bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) + \nu + \\
+ (p-\bar{p}-\varrho' \cos\theta) f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) + (q-\bar{q}-\varrho' \operatorname{sen}\theta) f_q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}),
\end{aligned}
$$

ed anche per le (5)

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z, p, q) > \lambda(\bar{p}+\varrho' \cos\theta) + \mu(\bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) + \nu + \\
+ (p-\bar{p}-\varrho' \cos\theta)\lambda + (q-\bar{q}-\varrho' \operatorname{sen}\theta)\mu = \lambda p + \mu q + \nu.
\end{aligned}
$$

Pertanto dalla (7) e da quest'ultima risulta per gli (x, y, z) indicati e per ogni coppia p, q

$$
(11) \qquad f(x, y, z, p, q) - (\lambda p + \mu q + \nu) > 0.
$$

Si prenda $\bar{\varrho}$ uguale alla metà del limite superiore di tutti i possibili valori di ϱ''.

Si osservi ora che in ogni punto (x, y, z), appartenente alla sfera $(\bar{P}, \bar{\varrho})$ e tale che (x, y) sia un punto di $\bar{D}$, in virtù della (9), tenendo presenti le (5), posto $p=\bar{p}+r\cos\theta$, $q=\bar{q}+r\operatorname{sen}\theta$, risulta per $r>\varrho'$

$$
\begin{aligned}
f(x, y, z, p, q) - (\lambda p + \mu q + \nu) > f(x, y, z, \bar{p}+\varrho' \cos\theta, \bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) + \\
+ (p-\bar{p}-\varrho' \cos\theta) f_p(x, y, z, \bar{p}+\varrho' \cos\theta, \bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) + (q-\bar{q}-\varrho' \operatorname{sen}\theta) f_q(....) - \\
- p f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) - q f_q(....) - \nu = \\
= [f(x, y, z, \bar{p}+\varrho' \cos\theta, \bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) - \varrho' \cos\theta f_p(x, y, z, \bar{p}+\varrho' \cos\theta, \bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) - \\
- \varrho' \operatorname{sen}\theta f_q(x, y, z, \bar{p}+\varrho' \cos\theta, \bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) - \bar{p} f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) - \\
- \bar{q} f_q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) - \nu] + \\
+ r[\{ \cos\theta f_p(x, y, z, \bar{p}+\varrho' \cos\theta, \bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) + \\
+ \operatorname{sen}\theta f_q(x, y, z, \bar{p}+\varrho' \cos\theta, \bar{q}+\varrho' \operatorname{sen}\theta) \} - \\
- \{ \cos\theta f_p(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) + \operatorname{sen}\theta f_q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}) \}],
\end{aligned}
$$

ove $r=\sqrt{(p-\bar{p})^2+(q-\bar{q})^2}$.

Pertanto in virtù dell'esistenza del numero m' si può determinare un numero positivo γ' e un altro numero l positivo e abbastanza grande in modo che, in ogni punto (x, y, z), appartenente alla sfera $(\overline{P}, \overline{\varrho})$ e tale che (x, y) sia un punto di $\overline{D}$, e per tutte le coppie (p, q) tali che $(p-\overline{p})^2+(q-\overline{q})^2 \geqslant l^2$, risulti

$$f(x, y, z, p, q)-(\lambda p+\mu q+\nu) >$$
$$> \gamma' \sqrt{(p-\overline{p})^2+(q-\overline{q})^2}.$$

Ma per ogni coppia (p, q) tale che

$$\sqrt{p^2+q^2} \geqslant l+\sqrt{\overline{p}^2+\overline{q}^2}$$

si ha

$$\sqrt{(p-\overline{p})^2+(q-\overline{q})^2} \geqslant \sqrt{p^2+q^2}-\sqrt{\overline{p}^2+\overline{q}^2}=$$
$$=\sqrt{p^2+q^2}\left(1-\sqrt{\frac{\overline{p}^2+\overline{q}^2}{p^2+q^2}}\right) \geqslant \sqrt{p^2+q^2}\,\frac{l}{l+\sqrt{\overline{p}^2+\overline{q}^2}}.$$

Esistono quindi due numeri positivi

$$l'=l+\sqrt{\overline{p}^2+\overline{q}^2}, \qquad \gamma''=\gamma'\,\frac{l}{l+\sqrt{\overline{p}^2+\overline{q}^2}},$$

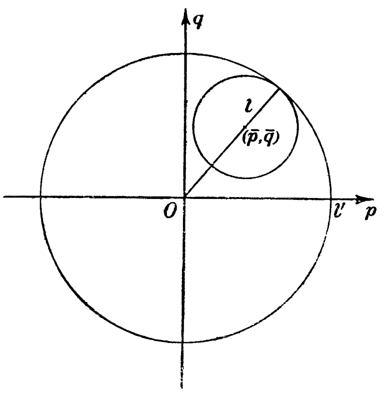

Fig. 2.

in modo che, per tutti gli (x, y, z) indicati e per ogni coppia (p, q) tale che $p^2+q^2 \geqslant l'^2$, risulta

$$f(x, y, z, p, q)-(\lambda p+\mu q+\nu) > \gamma'' \sqrt{p^2+q^2}.$$

Ma poichè la (11) è valevole in tutti i punti (x, y, z) appartenenti alla sfera $(\overline{P}, \overline{\varrho})$ e tali che (x, y) sia un punto di $\overline{D}$, e per ogni coppia (p, q), esiste un numero $\gamma''' > 0$, tale che per tutti gli (x, y, z) indicati e per ogni coppia p, q verificante la condizione $p^2+q^2 \leqslant l'^2$ sia

$$f(x, y, z, p, q)-(\lambda p+\mu q+\nu) > \gamma'''.$$

Se si prende dunque γ positivo minore di γ'' e di $\frac{\gamma'''}{l'}$, in tutti i punti (x, y, z) appartenenti alla sfera $(\overline{P}, \overline{\varrho})$ e tali che (x, y) sia un punto di $\overline{D}$, e per tutte le coppie p, q risulta verificata la disuguaglianza

$$f(x, y, z, p, q)-(\lambda p+\mu q+\nu) > \gamma \sqrt{p^2+q^2}.$$

La disuguaglianza (2) che figura nell'enunciato del lemma è con ciò provata e la (3) è contenuta nella (7).

3. - **Lemma II.** — *Sia D un campo aperto limitato del piano (x, y) e si indichi con $\overline{D}$ il campo chiuso costituito da tutti i punti di D e della sua frontiera. Sia $f(x, y, z, p, q)$ una funzione continua con le sue derivate parziali f_p, f_q in ogni punto (x, y) di $\overline{D}$ e per tutti i valori di z, p, q, e sia S_0 una superficie definita per ogni (x, y) di $\overline{D}$ dalla funzione $z=z_0(x, y)$, la quale sia continua in tutto $\overline{D}$ e assolutamente continua in D. Supposto*

che, per ogni suo punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0(x_0, y_0))$, *esistano tre numeri* $\varrho(x_0, y_0)$, $\bar{p}(x_0, y_0)$, $\bar{q}(x_0, y_0)$, *il primo dei quali positivo, in modo che per tutti i punti* (x, y, z) *appartenenti alla sfera* $(P_0, \varrho(x_0, y_0))$ *e tali che* (x, y) *sia un punto di* $\bar{D}$, *per tutte le coppie* p, q *soddisfacenti alla condizione*

$$[p-\bar{p}(x_0, y_0)]^2+[q-\bar{q}(x_0, y_0)]^2 \leq \varrho^2(x_0, y_0),$$

e per tutte le coppie $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, *tali che non sia contemporaneamente* $\tilde{p}=p$, $\tilde{q}=q$, *si abbia*

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ p, q;\ \tilde{p}, \tilde{q})>0,$$

è possibile decomporre il campo $\bar{D}$ *in un numero finito di campi* $\Delta_0^{(1)}$, $\Delta_0^{(2)}, \ldots, \Delta_0^{(m)}$, *e determinare due numeri positivi* ϱ *e* γ *ed* m *terne di numeri* $(\lambda^{(r)}, \mu^{(r)}, \nu^{(r)})$, $(r=1, 2, \ldots, m)$, *in modo che, indicata con* $S_0^{(r)}$ *la parte di* S_0, *che ha* $\Delta_0^{(r)}$ *come proiezione ortogonale sul piano* (x, y), *per ogni punto* (x, y, z) *appartenente all'intorno* (ϱ) *di* $S_0^{(r)}$ (6) *e tale che* (x, y) *sia un punto di* $\bar{D}$, *e per tutte le coppie* p, q *si abbia*

$$f(x, y, z, p, q)-(\lambda^{(r)}p+\mu^{(r)}q+\nu^{(r)})>\gamma\sqrt{p^2+q^2}.$$

Preso comunque un $\varepsilon>0$ si può applicare ad ogni punto P_0 della superficie S_0 il lemma del n.° 2 e determinare i corrispondenti numeri $\lambda, \mu, \nu, \bar{\varrho}$ e γ, che si indicheranno con $\lambda(x_0, y_0)$, $\mu(x_0, y_0)$, $\nu(x_0, y_0)$, $\bar{\varrho}(x_0, y_0)$, $\gamma(x_0, y_0)$. Sia a_0 la massima parte di S_0 che contiene P_0 ed è contenuta nella sfera $\left(P_0, \frac{1}{2}\bar{\varrho}(x_0, y_0)\right)$; in ogni punto (x, y, z) appartenente all'intorno $\left(\frac{1}{2}\bar{\varrho}(x_0, y_0)\right)$ di a_0 e tale che (x, y) sia un punto di $\bar{D}$, in virtù del lemma citato, è, per tutte le coppie p, q,

$$f(x, y, z, p, q)-\{\lambda(x_0, y_0)p+\mu(x_0, y_0)q+\nu(x_0, y_0)\}>\gamma(x_0, y_0)\sqrt{p^2+q^2}.$$

In tal modo, indicando con $\bar{P}_0$ la proiezione ortogonale di P_0 sul piano (x, y), ad ogni punto $\bar{P}_0$ di $\bar{D}$ corrisponde un campo Δ_0 proiezione ortogonale di a_0 sul piano (x, y); e il punto $\bar{P}_0$ è interno a Δ_0, o appartiene alla sua frontiera, a seconda che P_0 è interno oppure appartiene alla frontiera di $\bar{D}$. Applicando il noto lemma di PINCHERLE-BOREL (7) si potrà scegliere un numero finito di punti di $\bar{D}$; $P_1, P_2, \ldots, P_l$, in modo che i campi $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_l$ ad essi corrispondenti ricoprano tutto il campo $\bar{D}$. Soppresse le parti di ogni campo di tale gruppo che risultassero ricoperte da altri campi dello stesso gruppo aventi indice minore, si otterrà un numero finito di campi $\Delta_0^{(1)}, \Delta_0^{(2)}, \ldots, \Delta_0^{(m)}$, a due a due senza punti interni comuni e ricoprenti interamente tutto il campo $\bar{D}$, e, indicata con $S_0^{(r)}$ la parte della superficie S_0, che ha $\Delta_0^{(r)}$ come proiezione ortogonale sul piano (x, y),

---

(6) Con *intorno* (ϱ) di una superficie S si intende l'insieme dei punti (x, y, z) distanti dalla S non più di ϱ (con $\varrho>0$). Cfr. L. TONELLI, op. cit. in (2), vol. I, cap. IX, n.° 132, pag. 347.

(7) Vedi L. TONELLI, op. cit. in (2), vol. I, cap. III, § 1, n.° 33, pp. 111-112.

in corrispondenza ad ogni $\Delta_0^{(r)}$ si avrà una terna di numeri $\lambda^{(r)}$, $\mu^{(r)}$, $\nu^{(r)}$, la quale soddisferà alla disuguaglianza

$$f(x, y, z, p, q) - (\lambda^{(r)}p + \mu^{(r)}q + \nu^{(r)}) > \gamma\sqrt{p^2 + q^2}$$

per tutte le coppie p, q e per tutti gli (x, y, z), tali che (x, y) sia un punto di $\overline{D}$ e appartenenti all'intorno (ϱ) di $S_0^{(r)}$, ϱ essendo la metà del minore dei numeri $\bar{\varrho}$ corrispondenti ai punti P_1, P_2,...., P_l e γ il minore dei $\gamma(x, y)$ corrispondenti ai punti stessi.

4. - **Prima condizione sufficiente.** — *Sia D un campo aperto limitato del piano (x, y) e sia $f(x, y, z, p, q)$ una funzione finita e continua con le sue derivate parziali f_p, f_q in ogni punto di D e per tutti i valori finiti di z, p, q e sia sempre*

$$f(x, y, z, p, q) \geqslant N, \tag{12}$$

N essendo un numero fisso.

Allora data una superficie S_0, definita per ogni (x, y) di D dalla funzione $z = z_0(x, y)$ assolutamente continua, e tale che l'integrale

$$I_D[z_0] = \iint_D f(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy \quad [8]$$

sia finito,

1°) *se ad ogni suo punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0(x_0, y_0))$ corrispondono tre numeri $\varrho(x_0, y_0)$, $\bar{p}_0(x_0, y_0)$, $\bar{q}_0(x_0, y_0)$, il primo dei quali positivo, in modo che in tutti i punti (x, y, z) appartenenti alla sfera $(P_0, \varrho(x_0, y_0))$ e tali che (x, y) sia un punto di D, per tutte le coppie p, q soddisfacenti alla disuguaglianza*

$$[p - \bar{p}_0(x_0, y_0)]^2 + [q - \bar{q}_0(x_0, y_0)]^2 \leqslant \varrho^2(x_0, y_0)$$

e per tutte le coppie $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, tali che non sia contemporaneamente $\tilde{p} = p$, $\tilde{q} = q$, si abbia

$$\mathcal{E}(x, y, z\,;\ p, q\,;\ \tilde{p}, \tilde{q}) > 0\,;$$

2°) *se in quasi tutti i punti (x_0, y_0) di D è*

$$\bar{p}_0(x_0, y_0) = p_0(x_0, y_0), \qquad \bar{q}_0(x_0, y_0) = q_0(x_0, y_0)\,;$$

l'integrale I_D è funzione semicontinua inferiormente sulla superficie S_0.

Sia Q un quadrato, a lati paralleli agli assi (x, y), in cui è contenuto il campo D; si divida Q in 4^n quadrati uguali (n intero positivo), e di questi quadrati si considerino quelli i cui punti sono tutti punti di D. Sia D_n l'insieme, interno a D (limitato e chiuso), costituito da tutti i loro punti.

---

[8] È $p_0 = \dfrac{\partial z_0}{\partial x}$, $q_0 = \dfrac{\partial z_0}{\partial y}$. Tali notazioni verranno usate anche in seguito.

In virtù dell'ipotesi (12) per dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_D[z_0]$, basta dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_{D_n}[z_0]$ ([9]).

Poichè il campo D_n è chiuso, in virtù della condizione 1°) si può, applicando il lemma del n.° 3, decomporlo in un numero finito di campi $\Delta^{(1)}$, $\Delta^{(2)}$,...., $\Delta^{(m)}$, che possono senz'altro supporsi rettangoli a lati paralleli agli assi coordinati ([10]), e determinare due numeri positivi ϱ e γ ed m terne di numeri $(\lambda^{(r)}, \mu^{(r)}, \nu^{(r)})$, $(r=1, 2,...., m)$ in modo che, chiamata $S_0^{(r)}$ la parte della superficie S_0 che ha $\Delta^{(r)}$ come proiezione ortogonale sul piano (x, y), per ogni (x, y, z) appartenente all'intorno (ϱ) di $S_0^{(r)}$ e tale che (x, y) sia un punto di D_n, e per tutte le coppie p, q si abbia

$$f(x, y, z, p, q) - (\lambda^{(r)}p + \mu^{(r)}q + \nu^{(r)}) > \gamma\sqrt{p^2+q^2}.$$

Evidentemente per dimostrare il teorema basterà provare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I_{\Delta^{(r)}}[z_0]$, esteso a uno qualunque dei rettangoli $\Delta^{(r)}$.

Inoltre, posto

$$f^{(r)}(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p, q) - (\lambda^{(r)}p + \mu^{(r)}q + \nu^{(r)})$$

poichè, per un lemma stabilito dal prof. TONELLI ([11]) l'integrale

$$\iint\limits_{\Delta^{(r)}} (\lambda^{(r)}p(x, y) + \mu^{(r)}q(x, y) + \nu^{(r)})dxdy,$$

ove $\lambda^{(r)}$, $\mu^{(r)}$, $\nu^{(r)}$ sono delle costanti, è continuo nella classe delle funzioni continue in $\overline{\Delta}^{(r)}$ e assolutamente continue in $\Delta^{(r)}$, basterà dimostrare la semicontinuità inferiore dell'integrale $I^{(r)}_{\Delta^{(r)}}[z_0]$ della funzione $f^{(r)}(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))$ esteso al rettangolo $\Delta^{(r)}$.

In tutto un intorno convenientemente piccolo di $S_0^{(r)}$ è sempre

$$f^{(r)}(x, y, z, p, q) > 0,$$

e la funzione $\mathcal{E}$ relativa alla $f^{(r)}$ è identica a quella relativa alla f.

Preso un $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si scelga nel rettangolo aperto $\Delta^{(r)}$ un insieme chiuso E, il quale:

a) sia tutto costituito di punti in cui sia

$$\overline{p}_0(x, y) = p_0(x, y), \qquad \overline{q}_0(x, y) = q_0(x, y);$$

([9]) Ciò è stato dimostrato dal prof. TONELLI. Vedi luogo cit. in ([1]) n.° 6.

([10]) Tenendo presente che il campo D_n è costituito di un numero finito di quadrati a lati paralleli agli assi coordinati, ciò risulta da una lieve modificazione della dimostrazione del lemma del n.° 3.

([11]) Luogo cit. in ([1]) n.° 10. Tale lemma è ancora completamente valido per quanto il campo $\Delta^{(r)}$ sia un rettangolo, anzichè un quadrato. Con $\overline{\Delta}^{(r)}$ sarà indicato il campo chiuso corrispondente a $\Delta^{(r)}$.

b) soddisfi alla disuguaglianza

$$\iint\limits_{\Delta^{(r)}-E} f^{(r)}(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy < \varepsilon; \tag{13}$$

c) sia tale che in esso le derivate parziali $p_0(x, y)$, $q_0(x, y)$ siano funzioni continue.

Si indichi con R un numero non inferiore al massimo modulo delle $p_0(x, y)$, $q_0(x, y)$ in E.

Considerato un punto (x_0, y_0) qualunque di E e determinati i numeri λ, μ, ν e $\bar{\varrho}$ ad esso corrispondenti secondo il lemma del n.° 2 applicato alla funzione $f^{(r)}$ (numeri che si indicheranno con $\lambda(x_0, y_0)$, $\mu(x_0, y_0)$, $\nu(x_0, y_0)$, $\bar{\varrho}(x_0, y_0)$), è possibile mostrare che esiste un limite superiore finito oltrechè per $|\lambda(x_0, y_0)|$, $|\mu(x_0, y_0)|$, anche per $|\nu(x_0, y_0)|$. Infatti indicato con M' un numero positivo maggiore dei massimi moduli di $f_p^{(r)}(x, y, z, p, q)$ e di $f_q^{(r)}(x, y, z, p, q)$ per ogni (x, y, z) appartenente a $S_0^{(r)}$ e per ogni coppia p, q tale che $|p| \leqq R$, $|q| \leqq R$, avendosi per le (5) del n.° 2, applicate alla funzione $f^{(r)}$,

$$|\lambda(x_0, y_0)| < M', \qquad |\mu(x_0, y_0)| < M'$$

ed essendo inoltre per le (2) e (3) del n.° 2

$$\begin{aligned} |\nu(x_0, y_0)| < |f^{(r)}(x_0, y_0, z_0(x_0, y_0), p_0(x_0, y_0), q_0(x_0, y_0))| + \\ + |\lambda(x_0, y_0)||p_0(x_0, y_0)| + |\mu(x_0, y_0)||q_0(x_0, y_0)| + \varepsilon \end{aligned}$$

esiste un M positivo tale che risulti per qualunque (x, y) di E,

$$|\lambda(x, y)| < M, \qquad |\mu(x, y)| < M, \qquad |\nu(x, y)| < M. \tag{14}$$

Se (x_0, y_0) è un punto di E, dalla continuità della $z_0(x, y)$ in tutto $\Delta^{(r)}$ e da quella delle $p_0(x, y)$, $q_0(x, y)$ nell'insieme E, per il lemma del n.° 2 applicato alla funzione $f^{(r)}$ si può determinare un numero δ tale che per ogni (x, y) di E, appartenente al quadrato H_0 definito da $|x - x_0| \leqq \delta$, $|y - y_0| \leqq \delta$, si abbia

$$\begin{aligned} 0 < f^{(r)}(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y)) - \\ - \{\lambda(x_0, y_0)p_0(x, y) + \mu(x_0, y_0)q_0(x, y) + \nu(x_0, y_0)\} < \varepsilon, \end{aligned} \tag{15}$$

e che si abbia inoltre

$$f^{(r)}(x, y, z, p, q) - \{\lambda(x_0, y_0)p + \mu(x_0, y_0)q + \nu(x_0, y_0)\} > 0 \tag{16}$$

per qualsiasi coppia p, q e per ogni punto (x, y, z), tale che (x, y) sia un punto di $\bar{\Delta}^{(r)}$, e appartenente all'intorno $\left(\frac{1}{2}\bar{\varrho}(x_0, y_0)\right)$ di quella parte di $S_0^{(r)}$, che ha H_0 come proiezione ortogonale sul piano (x, y).

Fra tutti i valori di δ si scelga la metà del limite superiore di quelli che risultano minori della minima distanza di (x_0, y_0) dal perimetro di $\bar{\Delta}^{(r)}$ e la si indichi con $\delta(x_0, y_0)$.

Applicando il noto lemma di PINCHERLE-BOREL si scelga un numero finito di punti di E: (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ in modo che i relativi quadrati

$$H_1, \quad H_2, \ldots, \quad H_n \tag{17}$$

(ove H_i è definito da $|x-x_i| \leqslant \delta(x_i, y_i)$, $|y-y_i| \leqslant \delta(x_i, y_i)$), ricoprano tutto l'insieme chiuso E. Poi si sopprima, in ciascuno di questi quadrati, quelle parti che risultano sovrapposte a quadrati dello stesso gruppo di indice minore; si suddivida quindi in rettangoli ognuno dei campi ottenuti che non avesse tale forma e si sopprimano, dai nuovi rettangoli così ottenuti, un certo numero di quelle loro parti che eventualmente non contenessero alcun punto di E, in modo che i nuovi campi ottenuti

$$K_1, \quad K_2, \ldots, \quad K_m$$

siano ancora rettangoli e la somma delle loro aree sia sufficientemente prossima alla misura $m(E)$ di E, affinchè indicato con E_1 l'insieme dei punti di questi K che non appartengono ad E, si abbia

$$m(E_1) < \frac{\varepsilon}{M}, \qquad \iint_{E_1} \{ |p_0(x, y)| + |q_0(x, y)| \} \, dxdy < \frac{\varepsilon}{M}. \tag{18}$$

Si indichi con $\overline{\overline{\varrho}}$ un numero positivo minore dei numeri $\frac{1}{2}\bar{\varrho}(x_i, y_i)$, e $\delta(x_i, y_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ e con $\Lambda_j^{(r)}$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ quel pezzo della superficie $S_0^{(r)}$ che ha K_j come proiezione ortogonale sul piano (x, y).

Ogni K_j appartiene completamente ad uno dei quadrati (17), e ad esso corrispondono tre numeri λ_j, μ_j, ν_j, per i quali si ha in conseguenza delle (14), (15), (16),

$$|\lambda_j| < M, \qquad |\mu_j| < M, \qquad |\nu_j| < M,$$

$$0 < f^{(r)}(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y)) - \{ \lambda_j p_0(x, y) + \mu_j q_0(x, y) + \nu_j \} < \varepsilon,$$

se (x, y) appartiene a K_j e ad E, e

$$f^{(r)}(x, y, z, p, q) - (\lambda_j p + \mu_j q + \nu_j) > 0, \tag{19}$$

qualunque sia la coppia p, q, se (x, y) è un punto di $\Lambda^{(r)}$ ed (x, y, z) appartiene all'intorno $(\overline{\overline{\varrho}})$ di $\Lambda_j^{(r)}$.

Indicate con $E^{(j)}$, $E_1^{(j)}$ rispettivamente le parti di E e E_1 contenute in K_j è

$$\iint_{E^{(j)}} f^{(r)}(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy - \\ - \iint_{E^{(j)}} \{ \lambda_j p_0(x, y) + \mu_j q_0(x, y) + \nu_j \} \, dxdy < \varepsilon m(E^{(j)}),$$

ed anche

$$I_{K_j}^{(r)}[z_0] - \iint_{K_j} (\lambda_j p_0(x, y) + \mu_j q_0(x, y) + \nu_j) dxdy < \\ < \varepsilon m(E^{(j)}) + \iint_{E_1^{(j)}} f^{(r)}(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y)) dxdy + \\ + M \left[m(E_1^{(j)}) + \iint_{E_1^{(j)}} \{ |p_0(x, y)| + |q_0(x, y)| \} \, dxdy \right]$$

da cui, tenendo presenti le (13) e (18), e osservando che E_1 è un componente di $\Delta^{(r)}-E$, risulta

$$\sum_{j=1}^{m} I_{K_j}^{(r)}[z_0]-\sum_{j=1}^{m}\iint_{K_j}(\lambda_j p_0(x,y)+\mu_j q_0(x,y)+\nu_j)dxdy<\varepsilon(\Delta^{(r)}+3),$$

e per la (13), osservando che i rettangoli K_j ricoprono interamente l'insieme E, si ha

$$I_{\Delta^{(r)}}^{(r)}[z_0]-\sum_{j=1}^{m}\iint_{K_j}(\lambda_j p_0(x,y)+\mu_j q_0(x,y)+\nu_j)dxdy<\varepsilon(\Delta^{(r)}+4). \tag{20}$$

Poichè λ_j, μ_j, ν_j sono delle costanti, l'integrale di $\lambda_j p(x,y)+\mu_j q(x,y)+\nu_j$ esteso a K_j è funzione continua ([12]) nella classe $\mathfrak{C}$ delle funzioni $z(x,y)$ definite e continue in $\overline{\Delta}^{(r)}$ e assolutamente continue in $\Delta^{(r)}$; pertanto si può determinare un numero positivo $\varrho^*<\overline{\overline{\varrho}}$, in modo che se S è una qualsiasi superficie, definita da una funzione $z(x,y)$ della classe $\mathfrak{C}$ e tale che per ogni (x,y) di $\Delta^{(r)}$ sia

$$|z(x,y)-z_0(x,y)|<\varrho^*,$$

si abbia

$$\left|\iint_{K_j}(\lambda_j p(x,y)+\mu_j q(x,y)+\nu_j)dxdy-\right. \\ \left.-\iint_{K_j}(\lambda_j p_0(x,y)+\mu_j q_0(x,y)+\nu_j)dxdy\right|<\frac{\varepsilon}{m}. \tag{21}$$

Allora, siccome per la (19) è

$$I_{K_j}^{(r)}[z]-\iint_{K_j}(\lambda_j p(x,y)+\mu_j q(x,y)+\nu_j)dxdy>0$$

e si ha inoltre, sommando e tenendo presente che è $f^{(r)}>0$,

$$I_{\Delta^{(r)}}^{(r)}[z]-\sum_{j=1}^{m}\iint_{K_j}(\lambda_j p(x,y)+\mu_j q(x,y)+\nu_j)dxdy>0,$$

risulta per la (21)

$$I_{\Delta^{(r)}}^{(r)}[z]>\sum_{j=1}^{m}\iint_{K_j}(\lambda_j p_0(x,y)+\mu_j q_0(x,y)+\nu_j)dxdy-\varepsilon$$

e quindi anche, per la (20),

$$I_{\Delta^{(r)}}^{(r)}[z]>I_{\Delta^{(r)}}^{(r)}[z_0]-\varepsilon(\Delta^{(r)}+5).$$

([12]) Vedi L. Tonelli, luogo cit. in ([11]).

Questa disuguaglianza, nella quale ε è arbitrario, e che risulta soddisfatta per ogni superficie S definita da una funzione $z=z(x, y)$ assolutamente continua in $\Delta^{(r)}$ e tale che per ogni (x, y) di $\Delta^{(r)}$ si abbia

$$|z(x, y)-z_0(x, y)|<\varrho^*,$$

dimostra la semicontinuità inferiore dell'integrale $I^{(r)}_{\Delta^{(r)}}[z_0]$ sulla superficie $S_0^{(r)}$.

Per quanto si è già osservato ciò basta per provare il teorema enunciato al principio del presente numero.

5. - Seconda condizione sufficiente. — Mi propongo di far vedere, nel presente numero, che il teorema del numero precedente è valido anche se non è soddisfatta la condizione $f(x, y, z, p, q)\geqslant N$, purchè si facciano ulteriori ipotesi sul campo D.

Dimostro precisamente il teorema seguente:

Sia D un campo aperto limitato del piano (x, y), racchiuso da una curva continua C chiusa, senza punti multipli, rettificabile, e si indichi con $\overline{D}$ il campo chiuso costituito da tutti i punti di D e di C; sia poi $f(x,y,z,p,q)$ una funzione finita e continua con le sue derivate parziali f_p, f_q, in tutti i punti di $\overline{D}$ e per tutti i valori finiti di z, p, q.

Allora, data una superficie S_0 definita per ogni (x, y) di $\overline{D}$ dalla funzione $z=z_0(x, y)$, la quale sia continua in tutto $\overline{D}$, assolutamente continua in D e tale che l'integrale $I_D[z_0]$ risulti finito:

1°) *se ad ogni suo punto $P_0\equiv(x_0, y_0, z_0(x_0, y_0))$ corrispondono tre numeri $\varrho(x_0, y_0)$, $\overline{p}_0(x_0, y_0)$, $\overline{q}_0(x_0, y_0)$, il primo dei quali positivo, in modo che, in tutti i punti (x, y, z) appartenenti alla sfera $(P_0, \varrho(x_0, y_0))$ e tali che (x, y) sia un punto di $\overline{D}$, per tutte le coppie p, q soddisfacenti alla disuguaglianza*

$$[p-\overline{p}_0(x_0, y_0)]^2+[q-\overline{q}_0(x_0, y_0)]^2\leqslant\varrho^2(x_0, y_0),$$

e per tutte le coppie $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$, tali che non sia contemporaneamente $p=\widetilde{p}$, $q=\widetilde{q}$, si abbia

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ p, q;\ \widetilde{p}, \widetilde{q})>0;$$

2°) *se, in quasi tutti i punti di D, è*

$$\overline{p}_0(x, y)=p_0(x, y), \qquad \overline{q}_0(x, y)=q_0(x, y),$$

l'integrale I_D è funzione semicontinua inferiormente sulla superficie S_0.

In virtù del lemma del n.° 3 si può decomporre il campo $\overline{D}$ in un numero finito di campi $D^{(r)}$ $(r=1, 2,...., m)$, e determinare due numeri positivi ϱ e γ ed m terne di numeri $(\lambda^{(r)}, \mu^{(r)}, \nu^{(r)})$, $(r=1, 2,...., m)$, in modo che, indicata con $S_0^{(r)}$ la parte di S_0, che ha $D^{(r)}$ come proiezione ortogonale sul piano (x, y), per ogni punto (x, y, z) appartenente all'intorno (ϱ) di $S_0^{(r)}$ e tale che (x, y) sia un punto di $\overline{D}$, e per tutte le coppie p, q si abbia

$$f(x, y, z, p, q) - (\lambda^{(r)}p + \mu^{(r)}q + \nu^{(r)}) > \gamma\sqrt{p^2 + q^2}.$$

Per la condizione posta nel nostro enunciato che la frontiera di D sia costituita da una curva continua chiusa C priva di punti multipli e rettificabile, si può eseguire la suddivisione di $\overline{D}$ nei campi $D^{(r)}$ in modo che la frontiera di ciascun $D^{(r)}$ goda delle stesse proprietà di C.

Per dimostrare la semicontinuità dell'integrale $I_D[z_0]$, basta dimostrare quella dell'integrale stesso, esteso ad uno qualunque dei campi $D^{(r)}$. Inoltre, posto

$$f^{(r)}(x, y, z, p, q) = f(x, y, z, p, q) - (\lambda^{(r)}p + \mu^{(r)}q + \nu^{(r)}),$$

poichè, per un lemma stabilito dal prof. TONELLI ([13]), l'integrale

$$\iint\limits_{D^{(r)}} (\lambda^{(r)}p(x, y) + \mu^{(r)}q(x, y) + \nu^{(r)})dxdy$$

(ove $\lambda^{(r)}$, $\mu^{(r)}$, $\nu^{(r)}$ sono delle costanti) è continuo nella classe delle funzioni $z(x, y)$ continue in tutto $\overline{D}$ e assolutamente continue in D, basterà provare la semicontinuità dell'integrale

$$I_{D^{(r)}}^{(r)}[z_0] = \iint\limits_{D^{(r)}} f^{(r)}(x, y, z_0(x, y), p_0(x, y), q_0(x, y))dxdy,$$

dove, sempre in virtù del lemma del n.° 3, è, in tutto un intorno convenientemente piccolo di $S_0^{(r)}$ e per tutte le coppie p, q,

$$f^{(r)}(x, y, z, p, q) > 0.$$

Ora la semicontinuità dell'ultimo integrale scritto risulta dal teorema del n.° 4; così anche il teorema sopra enunciato è provato.

6. - Terza condizione sufficiente. — Darò ora una condizione sufficiente, la cui dimostrazione si riconduce facilmente a quella di un teorema stabilito dal prof. TONELLI ([14]).

Sia D un campo aperto limitato del piano (x, y), sia $f(x, y, z, p, q)$ una funzione finita e continua colle sue derivate parziali f_p, f_q in tutti i punti di D e per tutti i valori finiti di z, p, q e si supponga che:

I) *sia sempre $f(x, y, z, p, q) \geqq N$, N essendo un numero fisso,*

([13]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([1]), n.° 14.

([14]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([1]), § 2 e in particolare n.° 8.

II) *a ogni numero positivo Z si possano far corrispondere tre numeri* $a>1$, $\mu>0$, $\Lambda>0$ *in modo che in ogni punto* (x,y) *di* D, *se è*

$$|z|\leq Z, \qquad |p|+|q|\geq \Lambda$$

risulti

$$f(x,y,z,p,q)\geq\mu\{|p|^{a}+|q|^{a}\}.$$

Allora, considerata una superficie S_0, *definita in* D *dalla funzione* $z=z_0(x,y)$, *la quale sia assolutamente continua in* D *e tale da rendere finito l'integrale* $I_D[z_0]$, *e supposto che ad ogni punto* (x,y) *di* D *in cui esistono finite ambedue le derivate parziali* $p_0(x,y)$, $q_0(x,y)$, *eccettuati al più i punti di un insieme di misura nulla, corrisponda un numero* $\varrho(x,y)$, *in modo che, se* (x,y) *è un punto di* D *ed è*

$$|z-z_0(x,y)|\leq\varrho(x,y),$$

e si abbia per tutte le coppie $\tilde{p}$, $\tilde{q}$

$$\mathcal{E}(x,y,z;\ p_0(x,y),\ q_0(x,y);\ \tilde{p},\tilde{q})\geq 0,$$

l'integrale $I_D[z_0]$ *è funzione semicontinua inferiormente sulla superficie* S_0.

Per dimostrare tale teorema si osservi innanzi tutto che in virtù della condizione I) basta limitarsi alla dimostrazione della semicontinuità dell'integrale $I_\Delta[z_0]$, esteso ad un quadrato Δ del piano (x,y), a lati paralleli agli assi coordinati, completamente interno al campo D ([15]).

Preso un numero positivo R, sia E l'insieme dei punti di Δ, in cui esistono ambedue le derivate parziali p_0, q_0 ed è inoltre

$$|p_0|\leq R, \qquad |q_0|\leq R.$$

Per $R\to\infty$, si ha

$$m(E)\to m(\Delta),$$

$$\iint_E f(x,y,z_0(x,y),p_0(x,y),\ q_0(x,y))dxdy\to I_\Delta[z_0].$$

Preso un σ positivo ad arbitrio e scelto R in modo che sia

$$\iint_{\Delta-E}|f(x,y,z_0,p_0,q_0)|\,dxdy<\frac{\sigma}{2}; \qquad |N|[\Delta-m(E)]<\frac{\sigma}{2},$$

si prenda un componente chiuso E' di E, tale che in esso esista sempre il numero $\varrho(x,y)$ e le $p_0(x,y)$, $q_0(x,y)$ risultino funzioni continue, e tale inoltre che siano soddisfatte le disuguaglianze

$$\iint_{\Delta-E'}|f(x,y,z_0,p_0,q_0)|\,dxdy<\frac{\sigma}{2}; \qquad |N|[\Delta-m(E')]<\frac{\sigma}{2}.$$

([15]) Vedi L. TONELLI, luogo cit. in ([1]), n.° 6.

Siccome ad ogni (x, y), a cui corrisponde un $\varrho(x, y)$, ne corrispondono infiniti altri soddisfacenti alla stessa condizione indicata nell'enunciato, si può supporre che il $\varrho(x, y)$ considerato sia la metà del limite superiore di tutti quelli, fra questi numeri che non superano 2. Così precisato, il $\varrho(x, y)$ risulta sempre $\leqslant 1$. Inoltre, in virtù della continuità della funzione $\mathcal{E}(x, y, z\,;\, p, q\,;\, \tilde{p}, \tilde{q})$ rispetto alle sue sette variabili, $\varrho(x, y)$ risulta in E' funzione semicontinua superiormente e perciò se n è un intero positivo qualunque e E_n' indica il componente di E', in cui è sempre $\varrho(x, y) \geqslant \frac{1}{n}$, l'insieme E_n' è chiuso. Ma E' è l'insieme di tutti i punti di tutti gli E_n' $(n=1, 2, ...)$, ed E_n' è contenuto in E'_{n+1}; quindi $m(E_n') \rightarrow m(E')$ per $n \rightarrow \infty$, e per $\bar{n}$ sufficientemente grande si avrà

$$\iint\limits_{\Delta - E'_{\bar{n}}} |f(x, y, z_0, p_0, q_0)|\, dxdy < \frac{\sigma}{2}; \qquad |N|[\Delta - m(E'_{\bar{n}})] < \frac{\sigma}{2}.$$

Per tutte le funzioni $z(x, y)$ assolutamente continue e soddisfacenti in tutto Δ alla disuguaglianza

$$|z(x, y) - z_0(x, y)| < \frac{1}{\bar{n}}$$

risulta, in virtù dell'ipotesi I),

$$\begin{aligned} I_\Delta[z] - I_\Delta[z_0] &= \iint\limits_{E'_{\bar{n}}} \{f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z_0, p_0, q_0)\}\, dxdy + \\ &+ \iint\limits_{\Delta - E'_{\bar{n}}} f(x, y, z, p, q) dxdy - \iint\limits_{\Delta - E'_{\bar{n}}} f(x, y, z_0, p_0, q_0) dxdy > \\ &> \iint\limits_{E'_{\bar{n}}} \{f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z_0, p_0, q_0)\}\, dxdy + \\ &+ N[\Delta - m(E'_{\bar{n}})] - \iint\limits_{\Delta - E'_{\bar{n}}} |f(x, y, z_0, p_0, q_0)|\, dxdy > \\ &> \iint\limits_{E'_{\bar{n}}} \{f(x, y, z, p, q) - f(x, y, z_0, p_0, q_0)\}\, dxdy - \sigma. \end{aligned}$$

Da questo punto in poi, riprendendo la dimostrazione fatta dal prof. TONELLI per il teorema citato al principio del presente numero, e avendo l'avvertenza di sostituire al numero ϱ e all'insieme E, che si considerano in tale teorema, $\frac{1}{\bar{n}}$ e $E'_{\bar{n}}$ rispettivamente, si prova l'asserto.

7. - Esempio. — Termineremo col dare un esempio al quale sono applicabili le condizioni del teorema del n.° 6, mentre non lo sono quelle dei teoremi dei n.i 4 e 5. Si consideri l'integrale

$$\iint\limits_{D} [p_0^2(x, y) + q_0^2(x, y) - 1]^2 dxdy,$$

ove D è un qualunque campo aperto limitato del piano (x, y) e la funzione $z_0(x, y)$ è definita da

$$z=x \operatorname{sen} \theta+y \cos \theta+k, \tag{22}$$

θ essendo un qualunque valore dell'intervallo $(0, 2\pi)$ e k un numero qualsiasi.

Tale integrale soddisfa a tutte le ipotesi del numero precedente. Infatti:

I) si ha sempre $[p^2+q^2-1]^2 \geqslant 0$,

II) per qualunque z, si può prendere $a=2$, $\mu=1$, $A=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; e se è

$$|p|+|q| \geqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

risulta

$$[p^2+q^2-1]^2 \geqslant p^2+q^2.$$

Per qualunque z e per tutti i $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ è:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, y, z;\ p_0(x, y), q_0(x, y);\ \tilde{p}, \tilde{q}) &= [\tilde{p}^2+\tilde{q}^2-1]^2-[p_0^2(x, y)+q_0^2(x, y)-1]^2- \\ &-4\{(\tilde{p}-p_0(x, y))p_0(x, y)+(\tilde{q}-q_0(x, y))q_0(x, y)\}[p_0^2(x, y)+q_0^2(x, y)-1],\end{aligned}$$

onde, avendosi dalla (22) $p_0^2(x, y)+q_0^2(x, y)=1$, risulta

$$\mathcal{E}(x, y, z;\ p_0(x, y), q_0(x, y);\ \tilde{p}, \tilde{q})=(\tilde{p}^2+\tilde{q}^2-1)^2 \geqslant 0.$$

È dunque applicabile il teorema del numero precedente, ma non quelli dei n.[i] 4 e 5.