

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

ALFRED HAAR

**Über die Multiplikationstabelle der unitär-orthogonalen  
Funktionensysteme**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 2, n° 1  
(1933), p. 21-40

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1933\\_2\\_2\\_1\\_21\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_1_21_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ÜBER DIE MULTIPLIKATIONSTABELLE DER UNITÄR-ORTHOGONALEN FUNKTIONENSYSTEME

Von ALFRED HAAR (Szeged).

## Einleitung.

Ist  $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots$  ein in einer Punktmenge  $\mathfrak{M}$  definiertes *reelles* orthogonales Funktionensystem, so bilden die unendlichvielen reellen Größen

$$c_{pqr} = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s) \varphi_q(s) \varphi_r(s) ds, \quad (p, q, r = 1, 2, 3, \dots)$$

vermöge deren man die Produkte  $\varphi_p(s) \varphi_q(s)$  durch die Funktionen des vorgelegten Systems ausdrücken kann, *die Multiplikationstabelle* dieses Orthogonalsystems. Analogien zu der Theorie der hyperkomplexen Zahlensysteme (von unendlichvielen Einheiten) führen auf den Gedanken, die Eigenschaften solcher Größen  $c_{pqr}$  zu untersuchen, in denen sich die wesentlichen Eigenschaften des zugehörigen Orthogonalsystems widerspiegeln müssen. Ich habe aus diesem Grunde die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgestellt, die die Multiplikationstabellen aller beschränkten Orthogonalsysteme charakterisieren <sup>(1)</sup>. Im selben Gedankenkreis habe ich im Falle einer aus abzählbar unendlichvielen Elementen bestehenden kommutativen Gruppe  $A, B, C, \dots$  die Existenz einer zu der Gruppe isomorphen Funktionensystems  $\chi_A(s), \chi_B(s), \chi_C(s), \dots$  bewiesen <sup>(2)</sup>, das also den Gleichungen  $\chi_A(s) \chi_B(s) = \chi_{AB}(s)$  genügt. Dieses im Intervall  $0 \leq s \leq 1$  definierte Funktionensystem — ein Analogon der Gruppencharaktere von endlichen Abelschen Gruppen — ist kein Orthogonalsystem; seine Funktionen sind aber so beschaffen, daß das Integral <sup>(3)</sup>

$$\int_0^1 \chi_A(s) \bar{\chi}_B(s) ds$$

---

<sup>(1)</sup> Über die *Multiplikationstabelle der orthogonalen Funktionensysteme*, Math. Zeitschrift, Bd. 31 (1930), S. 769-798.

<sup>(2)</sup> Über *unendliche kommutative Gruppen*, Math. Zeitschrift, Bd. 33 (1931), S. 129-159.

<sup>(3)</sup> Die zu einer beliebigen komplexen Größe  $x$  konjugiert komplexe Zahl wird stets mit  $\bar{x}$  bezeichnet.

gleich 0 oder 1 ist, je nachdem  $A$  und  $B$  verschieden oder gleich sind; d. h. die  $\chi_A(s)$  bilden ein unitär-orthogonales Funktionensystem. Man bezeichnet bekanntlich ein in der Punktmenge  $\mathfrak{M}$  definiertes (komplexwertiges) Funktionensystem  $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots$  als ein *unitär-orthogonales Funktionensystem*, falls die Integralrelationen

$$\int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s) \bar{\varphi}_q(s) ds = \delta_{pq} = \begin{cases} 0, & \text{für } p \neq q, \\ 1, & \text{für } p = q \end{cases}$$

erfüllt sind.

Es liegt nun der Gedanke nahe, die *Multiplikationstabellen der unitär-orthogonalen Funktionensysteme zu untersuchen*. Die Fouriersche Entwicklung der Produkte  $\varphi_p(s)\varphi_q(s)$

$$\varphi_p(s)\varphi_q(s) \sim \sum_{r=1}^{\infty} c_{pqr} \varphi_r(s)$$

führt zu den Entwicklungskoeffizienten

$$c_{pqr} = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s)\varphi_q(s)\bar{\varphi}_r(s) ds \quad (p, q, r = 1, 2, 3, \dots)$$

deren Gesamtheit als *Multiplikationstabelle des unitär-orthogonalen Systems*  $\varphi_n(s)$  bezeichnet wird. Um die Existenz der auftretenden Integrale zu sichern, werden wir annehmen, daß der absolute Betrag jeder einzelnen Funktion des betrachteten Systems beschränkt bleibt. Das System  $\varphi_n(s)$  ist bekanntlich *abgeschlossen*, wenn man jede in  $\mathfrak{M}$  definierte Funktion, deren absoluter Betrag quadratisch integrierbar ist, durch lineare Aggregate der  $\varphi_n(s)$  (mit konstanten Koeffizienten) im Mittel beliebig genau approximieren kann. Etwas weniger fordert die Eigenschaft, daß das System « *in sich* » *abgeschlossen* ist<sup>(4)</sup>; hierzu ist nur erforderlich, daß die Produkte

$$\varphi_p(s)\varphi_q(s), \quad \varphi_p(s)\bar{\varphi}_q(s), \quad \bar{\varphi}_p(s)\bar{\varphi}_q(s)$$

sowie 1 durch Aggregate der genannten Art im Mittel beliebig genau approximierbar sind.

Auf Grund der sog. Vollständigkeitsrelation, die ja nur eine Umformung des Begriffs der Abgeschlossenheit ist, gelangt man unschwer zu *drei notwendigen Bedingungen* (§ 1, S. 26), die die Multiplikationstabelle jedes beschränkten abgeschlossenen oder in sich abgeschlossenen unitär-orthogonalen Funktionensystems erfüllt. Im § 2. wird gezeigt, daß diese Bedingungen auch *hinreichend* sind, indem zu irgendwelchem, die fraglichen drei Bedingungen I, II, III erfüllenden Größensystem  $c_{pqr}$  ein beschränktes unitär-orthogonales Funktionensystem konstruiert wird, dessen Multiplikationstabelle aus den vorgelegten Größen  $c_{pqr}$  besteht; dieses Funktionensystem ist außerdem *in sich abgeschlossen*. Wir stellen endlich

(<sup>4</sup>) Vgl. den analogen Begriff bei den reellen Orthogonalsystemen, a. a. O. (<sup>1</sup>), S. 774.

im § 3. eine IV<sup>te</sup> Bedingung auf, die zusammen mit den vorangehenden drei Bedingungen I, II, III die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines *abgeschlossenen* beschränkten unitär-orthogonalen Funktionensystems angibt.

§ 1.

**Notwendige Bedingungen für die Multiplikationstabelle eines unitär-orthogonalen Funktionensystems.**

1. - Es sei  $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots$  ein in der Punktmenge  $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$  definiertes unitär-orthogonales Funktionensystem:

$$\int_{\mathfrak{D}\mathfrak{C}} \varphi_p(s) \bar{\varphi}_q(s) ds = \delta_{pq}; \quad (p, q = 1, 2, 3, \dots)$$

wir nehmen an, daß der absolute Betrag jeder Funktion dieses Systems beschränkt ist, d. h.  $|\varphi_p(s)| \leq M_p$  (wobei  $M_p$  für alle  $p$  nicht beschränkt zu sein braucht). Ein solches System bezeichnen wir als ein *beschränktes unitär-orthogonales Funktionensystem*. Man bezeichnet bekanntlich dieses Funktionensystem als *vollständig oder abgeschlossen*, wenn man jede quadratisch integrierbare Funktion  $f(s)$  (definiert in derselben Menge  $\mathfrak{D}\mathfrak{C}$ ) « im Mittel » durch lineare Aggregate der  $\varphi_n(s)$  beliebig genau approximieren kann, d. h. wenn man zu jeder positiven Größe  $\varepsilon$  endlich viele Konstanten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  derart finden kann, daß

$$\int_{\mathfrak{D}\mathfrak{C}} |f(s) - a_1\varphi_1(s) - a_2\varphi_2(s) - \dots - a_n\varphi_n(s)|^2 ds < \varepsilon$$

ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung der Vollständigkeit ist bekanntlich das Bestehen der folgenden sog. *Vollständigkeitsrelation*:

$$(1) \quad \int_{\mathfrak{D}\mathfrak{C}} |f(s)|^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{\mathfrak{D}\mathfrak{C}} f(s) \bar{\varphi}_k(s) ds \right|^2$$

für alle quadratisch integrierbare Funktion  $f(s)$ . Gilt diese Relation für die beiden Funktionen  $f_1(s)$  und  $f_2(s)$ , so gilt sie auch für  $x_1 f_1(s) + x_2 f_2(s)$ , woraus man unmittelbar die Richtigkeit der Beziehung

$$(2) \quad \int_{\mathfrak{D}\mathfrak{C}} f_1(s) \bar{f}_2(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{D}\mathfrak{C}} f_1(s) \bar{\varphi}_k(s) ds \int_{\mathfrak{D}\mathfrak{C}} \bar{f}_2(s) \varphi_k(s) ds$$

erkennt.

Wir werden im folgenden diese Relationen (1) und (2) ausschließlich nur für die Funktionen

$$(3) \quad f(s) = \varphi_\alpha(s) \varphi_\beta(s), \quad \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s), \quad \bar{\varphi}_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) \quad \text{und} \quad f(s) = 1$$

( $\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots$ )

anwenden und setzen daher die Abgeschlossenheit des vorgelegten Systems nicht voraus und nehmen nur an, daß dieses System so beschaffen sind, daß man die Funktionen (3) durch lineare Aggregate der  $\varphi_n(s)$  im Mittel beliebig genau approximieren kann. Ein solches unitär-orthogonales Funktionensystem soll als in sich abgeschlossen bezeichnet werden.

2. - Die Multiplikationstabelle des vorgelegten unitär-orthogonalen Systems wird durch die Fourierschen Entwicklungskoeffizienten der Produkte  $\varphi_p(s)\varphi_q(s)$  d. h. durch die Größen

$$c_{pqr} = \int_{\mathfrak{I}\mathfrak{C}} \varphi_p(s)\varphi_q(s)\bar{\varphi}_r(s) ds \quad (p, q, r = 1, 2, 3, \dots)$$

gebildet<sup>(5)</sup>; wir beginnen mit der Aufzählung der charakteristischen Eigenschaften dieser unendlichen kubischen Matrix.

Zu diesem Ende betrachten wir die unendlichvielen Bilinearformen (von unendlichvielen Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots; y_1, y_2, \dots$ )

$$C_p(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\alpha y_\beta = \int_{\mathfrak{I}\mathfrak{C}} \varphi_p(s) \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} x_\alpha y_\beta \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) \right\} ds,$$

bzw. die zugehörigen Matrizen

$$C_p = (c_{p\alpha\beta}), \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

ferner diejenigen Matrizen, die man aus diesen durch Transposition (Vertauschung der Zeilen und Kolonnen) und Ersetzen jedes Elementes durch die konjugiert komplexe Größe erhält:

$$\bar{C}_p' = (\bar{c}_{p\beta\alpha}), \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

bzw. die zugehörigen Bilinearformen

$$\bar{C}_p'(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \bar{c}_{p\beta\alpha} x_\alpha y_\beta = \int_{\mathfrak{I}\mathfrak{C}} \bar{\varphi}_p(s) \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} x_\alpha y_\beta \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) \right\} ds.$$

Man erkennt vorab unmittelbar, daß diese Bilinearformen bzw. Matrizen beschränkt sind, da die  $n^{\text{ten}}$  Abschnitte, d. h. die endlichen Bilinearformen

$$\int_{\mathfrak{I}\mathfrak{C}} \varphi_p(s) \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^n x_\alpha y_\beta \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) \right\} ds \quad \text{und} \quad \int_{\mathfrak{I}\mathfrak{C}} \bar{\varphi}_p(s) \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^n x_\alpha y_\beta \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) \right\} ds.$$

dem Betrage nach kleiner als

$$M_p \int_{\mathfrak{I}\mathfrak{C}} \left| \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha \varphi_\alpha(s) \right| \left| \sum_{\beta=1}^n y_\beta \bar{\varphi}_\beta(s) \right| ds \leq M_p \left\{ \sum_{\alpha=1}^n |x_\alpha|^2 \sum_{\beta=1}^n |y_\beta|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

<sup>(5)</sup> Die Existenz der bei der Definition von  $c_{pqr}$  auftretenden Integrale wird durch die vorausgesetzte Beschränktheit der  $\varphi_p(s)$  gewährleistet.

bleiben. Es ergibt sich ferner die *Vertauschbarkeit der Matrizen*  $C_1, \bar{C}_1', C_2, \bar{C}_2', \dots, C_p, \bar{C}_p', \dots$  durch Anwendung der Vollständigkeitsrelationen (2) für die Funktionen (3) in folgender Weise: man findet für das  $\beta^{\text{te}}$  Element der  $\alpha^{\text{ten}}$  Zeile in den Matrizen  $C_p C_q$  bzw.  $C_p \bar{C}_q', \bar{C}_q' C_p, \bar{C}_p' \bar{C}_q'$  die Ausdrücke

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{pak} c_{qk\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s) \varphi_a(s) \bar{\varphi}_k(s) ds \int_{\mathfrak{M}} \varphi_q(s) \varphi_k(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds =$$

$$= \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s) \varphi_q(s) \varphi_a(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds,$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{pak} \bar{c}_{q\beta k} = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s) \bar{\varphi}_q(s) \varphi_a(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_{q\alpha k} c_{pk\beta} = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_p(s) \bar{\varphi}_q(s) \varphi_a(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_{pka} \bar{c}_{q\beta k} = \int_{\mathfrak{M}} \bar{\varphi}_p(s) \bar{\varphi}_q(s) \varphi_a(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds.$$

Diese Formeln zeigen die Vertauschbarkeit der obigen Matrizen; insbesondere ergibt sich daraus, daß  $C_p$  eine *Normalmatrix* ist, da sie mit  $\bar{C}_p'$  vertauschbar ist. Man beachte, daß man bei den Umformungen in den zuletzt aufgeschriebenen Beziehungen die Relationen (2) nur für die Produkte  $\varphi_a(s) \varphi_\beta(s), \bar{\varphi}_\alpha(s) \varphi_\beta(s), \bar{\varphi}_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s)$  verwendet hat.

Eine weitere notwendige Eigenschaft der Multiplikationstabelle erhält man durch Anwendung der Vollständigkeitsrelationen auf die Funktion  $f(s) = 1$ . Es seien nämlich  $e_k$  die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion:

$$e_k = \int_{\mathfrak{M}} \bar{\varphi}_k(s) ds; \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

man findet unmittelbar

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k c_{k\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} \bar{\varphi}_k(s) \int_{\mathfrak{M}} \varphi_k(s) \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds = \delta_{\alpha\beta},$$

d. h. es gilt — falls man, wie üblich, die Einheitsmatrix  $(\delta_{\alpha\beta})$  mit  $E$  bezeichnet — die Matrixrelation

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k C_k = E,$$

wobei

$$\sum_{k=1}^{\infty} |e_k|^2$$

endlich ist.

Wir können diese Tatsachen wie folgt zusammenfassen: *Die Multiplikationstabelle*

$$c_{pqr} = \int_{\mathfrak{K}} \varphi_p(s) \varphi_q(s) \bar{\varphi}_r(s) ds \quad (p, q, r = 1, 2, 3, \dots)$$

eines beschränkten und in sich abgeschlossenen (also umsomehr eines abgeschlossenen) unitär-orthogonalen Funktionensystems erfüllt die folgenden drei Bedingungen:

I. es ist  $c_{pqr} = c_{qpr}$ ;

II. die unendlichvielen Bilinearformen

$$C_p(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \quad \bar{C}_p'(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \bar{c}_{p\beta\alpha} x_\alpha y_\beta \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

sind beschränkt und vertauschbar;

III. es existiert ein Wertsystem  $e_1, e_2, \dots$ , für das  $\sum_{k=1}^{\infty} |e_k|^2$  konvergent ist, mit dessen Hilfe man die Einheitsmatrix  $E$  in der Form

$$E = e_1 C_1 + e_2 C_2 + e_3 C_3 + \dots$$

darstellen kann.

3. - Man kann die Bedingung III durch die folgende allgemeinere ersetzen:

III'. jede beschränkte Matrix  $A = (a_{\alpha\beta})$ , die mit allen Matrizen  $C_1, C_2, C_3, \dots$  der Multiplikationstabelle vertauschbar ist, ist in der Form

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} x_k C_k$$

darstellbar, wobei die Quadratsumme  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$  konvergent ist.

In der Tat, es liefert die Vertauschbarkeit von  $A$  mit  $C_\alpha$  die Gleichungen

$$(4) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{pk} c_{ak\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha pk} a_{k\beta}; \quad (\alpha, \beta, p = 1, 2, 3, \dots)$$

ferner ist die Bilinearform, deren Matrix das Produkt  $A\bar{A}'$  ist,

$$\sum_{p, q, l=1}^{\infty} a_{pl} \bar{a}_{ql} x_p y_q$$

ebenfalls beschränkt. Setzt man daher

$$x_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{pk} e_p \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

so findet man, daß die Quadratsumme

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{p, q, k=1}^{\infty} a_{pk} \bar{a}_{qk} e_p \bar{e}_q$$

der Wert der obigen Bilinearform für  $x_p = e_p, y_p = \bar{e}_p$  ist, also jedenfalls konvergent ist. Andererseits ist — mit Rücksicht auf I, III und (4) —

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k c_{k\alpha\beta} = \sum_{p,k=1}^{\infty} e_p a_{pk} c_{k\alpha\beta} = \sum_{p,k=1}^{\infty} e_p c_{\alpha pk} a_{k\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\alpha k} a_{k\beta} = a_{\alpha\beta}$$

d. h. es ist (6)

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} x_k C_k,$$

4. - Der soeben bewiesene Satz gestattet die folgende interessante Anwendung; wir beschränken uns dabei auf abgeschlossene (natürlich beschränkte) Systeme  $\varphi_n(s)$ . Ist nämlich  $f(s)$  eine beliebige beschränkte Funktion, so kann man ihr die unendliche Matrix

$$M_f = \left( \int_{\mathfrak{M}_0} f(s) \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds \right)$$

bzw. die Bilinearform

$$M_f(x, y) = \int_{\mathfrak{M}_0} f(s) \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} x_\alpha y_\beta \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds$$

zuordnen. Auf diese Verallgemeinerung der bekannten Toeplitzischen Laurentformen hat bereits O. Toeplitz selbst hingewiesen (7).  $M_f$  ist offenbar beschränkt und mit allen  $C_1, C_2, \dots$  vertauschbar; es ist ja — in dieser Schreibweise —

$$C_p = M_{\varphi_p}, \quad \bar{C}_p' = M_{\bar{\varphi}_p} \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

und man erkennt unmittelbar auf Grund der (jetzt für alle beschränkte  $f_1(s), f_2(s)$  gültige) Relationen (2), daß

$$M_{f_1} M_{f_2} = M_{f_1 f_2}$$

ist. Mit Hülfe des Satzes III' können wir nun zeigen, daß umgekehrt zu jeder mit allen  $C_p$  vertauschbaren beschränkten Matrix  $A = (a_{\alpha\beta})$  eine im wesentlichen beschränkte Funktion (8)  $f(s)$  gehört, so daß  $A = M_f$  wird. Da nämlich

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} x_k C_k \quad \text{ist und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$$

(6) Daß auch umgekehrt aus III' die ursprüngliche Bedingung III folgt, ist trivial, da  $E$  mit jeder Matrix vertauschbar ist.

(7) Vgl. auch A. WINTNER: *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen*, Leipzig (1929), S. 184.

(8) D. h. eine Funktion, deren Wertevorrat mit Ausnahme einer Nullmenge dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.



konvergent ist, so folgt aus dem Riesz-Fischerschen Satze die Existenz einer Funktion  $f(s)$ , für die

$$\int_{\mathfrak{M}} |f(s)|^2 ds$$

existiert, so daß

$$x_k = \int_{\mathfrak{M}} f(s) \bar{\varphi}_k(s) ds \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

ist. Da ferner

$$a_{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_{k\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathfrak{M}} f(s) \bar{\varphi}_k(s) ds \int_{\mathfrak{M}} \varphi_k(s) \varphi_{\alpha}(s) \bar{\varphi}_{\beta}(s) ds = \int_{\mathfrak{M}} f(s) \varphi_{\alpha}(s) \bar{\varphi}_{\beta}(s) ds$$

ist, so ist jedenfalls  $A = M_f$ . Die Beschränktheit dieser Funktion  $f(s) = f_1(s) + if_2(s)$  erkennt man wie folgt: Aus der Beschränktheit der Matrix

$$A = \left( \int_{\mathfrak{M}} (f_1(s) + if_2(s)) \varphi_{\alpha}(s) \bar{\varphi}_{\beta}(s) ds \right)$$

folgt die Beschränktheit ihrer « Hermiteschen Komponenten »:

$$\frac{1}{2} (A + \bar{A}') = \left( \int_{\mathfrak{M}} f_1(s) \varphi_{\alpha}(s) \bar{\varphi}_{\beta}(s) ds \right)$$

und

$$\frac{1}{2i} (A - \bar{A}') = \left( \int_{\mathfrak{M}} f_2(s) \varphi_{\alpha}(s) \bar{\varphi}_{\beta}(s) ds \right).$$

Es sei  $N$  der absolut genommen größte Wert, den die zugehörigen Hermiteschen Formen bei der Nebenbedingung

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 = 1$$

annehmen. Wäre die reelle Funktion  $f_1(s)$  (oder  $f_2(s)$ ) an einer Punktmenge  $m$  vom positiven Maße  $\mu$  etwa größer als  $N$  ( $N > 0$ ), so sei  $m(s)$  diejenige Funktion, die  $= \frac{1}{\sqrt{\mu}}$  oder  $= 0$  ist, je nachdem  $s$  innerhalb oder außerhalb der Punktmenge  $m$  liegt; ich setze

$$\xi_{\alpha} = \int_{\mathfrak{M}} m(s) \bar{\varphi}_{\alpha}(s) ds,$$

also

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} |\xi_{\alpha}|^2 = \int_{\mathfrak{M}} (m(s))^2 ds = 1.$$

Die Hermitesche Form, deren Matrix  $\frac{1}{2} (A + \bar{A}')$  ist, würde für dieses Wertesystem  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$  den Wert

$$\int_{\mathfrak{M}} f_1(s) \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \xi_{\alpha} \bar{\xi}_{\beta} \varphi_{\alpha}(s) \bar{\varphi}_{\beta}(s) ds = \int_{\mathfrak{M}} f_1(s) (m(s))^2 ds = \frac{1}{\mu} \int_m f_1(s) ds > N$$

annehmen <sup>(9)</sup>, im Widerspruch zu der Voraussetzung.

Unser Resultat ist ein Analogon des Riesz-Fischerschen Satzes; es liefert eine Charakterisierung derjenigen Größen, die sich aus einer beschränkten Funktion  $f(s)$  vermöge der Formel

$$\int_{\mathfrak{M}} f(s) \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s)$$

ergeben:

Ist  $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots$  ein (in  $\mathfrak{M}$ ) beschränktes unitär-orthogonales Funktionensystem und  $A = (a_{\alpha\beta})$  eine beliebige beschränkte Matrix, welche mit allen Matrizen  $C_1, C_2, \dots$  der Multiplikationstabelle vertauschbar ist, so existiert eine im wesentlichen beschränkte Funktion  $f(s)$ , so daß

$$a_{\alpha\beta} = \int_{\mathfrak{M}} f(s) \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) ds \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots)$$

ist und umgekehrt.

5. - Wir werden im folgenden noch von einer geringen Verallgemeinerung dieser Begriffe Gebrauch machen. Es sei  $\sigma(s)$  eine im Intervall  $a \leq s \leq b$  definierte reelle nicht abnehmende Funktion,  $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s), \dots$  aber ein System von Funktionen (definiert im selben Intervall), für das

$$\int_a^b \varphi_\alpha(s) \bar{\varphi}_\beta(s) d\sigma(s) = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \dots)$$

ist; man bezeichnet diese Funktionen als ein im bezug auf  $\sigma(s)$  unitär-orthogonales Funktionensystem. Es werden im folgenden nur solche Systeme dieser Art auftreten, bei denen alle Funktionen  $\varphi_n(s)$  beschränkt und stetig sind. Das System wird als abgeschlossen bezeichnet, wenn für jedes Paar von stetigen Funktionen  $f_1(s), f_2(s)$  die Beziehung

$$(3') \quad \int_a^b f_1(s) f_2(s) d\sigma(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_1(s) \bar{\varphi}_k(s) d\sigma(s) \int_a^b f_2(s) \varphi_k(s) d\sigma(s)$$

statthat. (Den Begriff der Abgeschlossenheit « in sich » werden wir in diesem Falle nicht benötigen).

Als Multiplikationstabelle definieren wir in diesem Falle naturgemäß die unendliche kubische Matrix, gebildet aus den Größen

$$c_{\alpha\beta\gamma} = \int_a^b \varphi_\alpha(s) \varphi_\beta(s) \bar{\varphi}_\gamma(s) d\sigma(s) \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \dots)$$

<sup>(9)</sup> Aus der Beschränktheit dieser Bilinearform folgt nämlich in bekannter Weise ihre « zeilenweise Konvergenz », vgl. E. HELLINGER und O. TOEPLITZ: *Theorie der Unendlichen Matrizen*, Math. Annalen, Bd. 69 (1910), insbesondere S. 297-299.

und man erkennt ohne Mühe, daß die Bedingungen I, II, III des Satzes auf S. 26 auch für diesen Fall notwendige Bedingungen für die Multiplikationstabelle liefern.

Wir kommen nun zur Umkehrung des erwähnten Satzes.

## § 2.

### Beweis, daß die notwendigen Bedingungen I, II, III auch hinreichend sind.

1. - Es seien

$$c_{\alpha\beta\gamma} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \dots)$$

beliebige komplexe Größen, welche die Bedingungen I, II, III unseres Satzes S. 26 erfüllen; wir werden zunächst nur von der Bedingung II Gebrauch machen, demzufolge die unendlichen Bilinearformen

$$C_p(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \quad \bar{C}_p'(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \bar{c}_{p\beta\alpha} x_\alpha y_\beta \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

beschränkt und vertauschbar sind. Diese Formen sind im allgemeinen keine Hermitesche Formen; man gelangt aber in wohlbekannter Weise zu Hermiteschen Formen, indem man die Matrizen

$$(5) \quad C_p^{(1)} = \frac{1}{2} (C_p + \bar{C}_p') \quad \text{bzw.} \quad C_p^{(2)} = \frac{1}{2i} (C_p - \bar{C}_p')$$

bildet. Aus der für  $C_p$  und  $\bar{C}_p'$  gemachten Voraussetzungen folgt unmittelbar die Beschränktheit und Vertauschbarkeit der unendlichvielen Hermiteschen Matrizen (5) bzw. der zugehörigen Hermiteschen Formen.

Für eine abzählbare Menge von beschränkten Hermiteschen Matrizen  $A_p = (a_{\alpha\beta}^{(p)})$ , bzw. für die zugehörigen Formen

$$A_p(x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} a_{\alpha\beta}^{(p)} x_\alpha y_\beta \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

gilt aber der folgende Satz, den ich in Anlehnung an gewisse Untersuchungen von Herrn J. v. NEUMANN bewiesen habe <sup>(10)</sup>:

Es gibt zu den  $A_p(x, y)$  eine Schar von Hermiteschen Einzelformen bzw. Einzelmatrizen

$$\sigma(\lambda; x, y) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\lambda) x_\alpha y_\beta, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

bzw.

$$(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda)) \quad (\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\lambda) = \sigma_{\beta\alpha}(\lambda))$$

<sup>(10)</sup> a. a. O. <sup>(1)</sup>, § 2, S. 781-791.

mit den folgenden Eigenschaften:

a) es gelten für alle  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 1$  die Matrizengleichungen

$$(6) \quad (\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_1))(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_2)) = (\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_2))(\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_1)) = (\sigma_{\alpha\beta}(\lambda_1));$$

$\beta$ ) ist  $x_1, x_2, x_3, \dots$  ein beliebiges Wertsystem, für das die unendliche Summe  $\sum |x_k|^2$  konvergent ist, so ist die (wegen  $\bar{\sigma}_{\alpha\beta}(\lambda) = \sigma_{\beta\alpha}(\lambda)$  jedenfalls reelle) Funktion von  $\lambda$

$$\sigma(\lambda; x, \bar{x}) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\lambda) x_{\alpha} \bar{x}_{\beta}$$

eine nicht abnehmende, an jeder inneren Stelle des Intervalls  $0 \leq \lambda \leq 1$  von links stetige Funktion von  $\lambda$ , welche außerdem den Gleichungen  $\sigma(0; x, \bar{x}) = 0$ ,

$\sigma(1; x, \bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$  genügt. Es gibt ferner ein System von reellen, im Inter-

vall  $0 \leq \lambda \leq 1$  definierten stetigen Funktionen  $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda), \dots$ , so daß mit Hülfe der *Spektralform*  $\sigma(\lambda; x, y)$  und dieser Funktionen die vorgelegten vertauschbaren Hermiteschen Formen durch die Stieltjesschen Integrale

$$A_p(x, y) = \int_0^1 f_p(\lambda) d\sigma(\lambda; x, y) \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

simultan dargestellt werden. Aus den Beziehungen (6) folgt (in wohlbekannter Weise) die für alle stetigen Funktionen  $u(\lambda)$  und  $v(\lambda)$  geltende *Hilbertsche Vollständigkeitsrelation*

$$(7) \quad \int_0^1 u(\lambda)v(\lambda) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 u(\lambda) d\sigma_{\alpha k}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda) d\sigma_{k\beta}(\lambda).$$

Wenden wir diesen Satz auf die Matrizen (5) an, so gelangen wir — indem wir die zugehörigen Funktionen mit  $\omega_p^{(1)}(\lambda)$  bzw.  $\omega_p^{(2)}(\lambda)$  bezeichnen — für die Matrizen  $C_p^{(1)}$  bzw.  $C_p^{(2)}$  zu den Darstellungen

$$C_p^{(1)} = \left( \int_0^1 \omega_p^{(1)}(\lambda) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \right), \quad C_p^{(2)} = \left( \int_0^1 \omega_p^{(2)}(\lambda) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \right),$$

woraus man, wenn man zur Abkürzung

$$\omega_p^{(1)}(\lambda) + i\omega_p^{(2)}(\lambda) = \omega_p(\lambda) \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

einführt, durch Addition bzw. Subtraktion die Darstellungen

$$(7') \quad C_p(x, y) = \int_0^1 \omega_p(\lambda) d\sigma(\lambda; x, y), \quad \bar{C}_p'(x, y) = \int_0^1 \bar{\omega}_p(\lambda) d\sigma(\lambda; x, y)$$

gewinnt. Die Anwendung der Hilbertschen Vollständigkeitsrelation (7) liefert (für  $u = \omega_p(\lambda)$ ,  $v = \bar{\omega}_q(\lambda)$ ) für die Matrix  $C_p \bar{C}'_q$  die Darstellung

$$(8) \quad C_p \bar{C}'_q = \left( \int_0^1 \omega_p(\lambda) \bar{\omega}_q(\lambda) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \right)$$

und man gelangt durch nochmalige Anwendung dieser Relation zu der Formel:

$$(9) \quad C_p C_q \bar{C}'_r = \left( \int_0^1 \omega_p(\lambda) \omega_q(\lambda) \bar{\omega}_r(\lambda) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \right).$$

2. - Um die Eigenschaften der stetigen Funktionen  $\omega_p(\lambda)$  zu studieren, ziehen wir die Bedingungen I und III des Satzes auf S. 26 heran:

I.

$$c_{pqr} = c_{qpr},$$

III.

$$\sum_{k=1}^{\infty} e_k c_{k\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Wir betrachten die Bilinearformen, deren Matrizen die obigen  $C_p \bar{C}'_q$  bzw.  $C_p C_q \bar{C}'_r$  sind:

$$C_p \bar{C}'_q(x, y) = \sum_{k, \alpha, \beta=1}^{\infty} c_{pak} \bar{c}_{q\beta k} x_{\alpha} y_{\beta},$$

$$C_p C_q \bar{C}'_r(x, y) = \sum_{k, l, \alpha, \beta=1}^{\infty} c_{pak} c_{qkl} \bar{c}_{r\beta l} x_{\alpha} y_{\beta}$$

und setzen darin  $x_{\alpha} = e_{\alpha}$ ,  $y_{\alpha} = \bar{e}_{\alpha}$ . Es ergibt sich auf diese Weise — mit Rücksicht auf I und III —

$$(10) \quad C_p \bar{C}'_q(e, \bar{e}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{pak} e_{\alpha} \right) \left( \sum_{\beta=1}^{\infty} \bar{c}_{q\beta k} \bar{e}_{\beta} \right) = \delta_{pq},$$

$$(11) \quad C_p C_q \bar{C}'_r(e, \bar{e}) = \sum_{k, l=1}^{\infty} \left( \sum_{\alpha=1}^{\infty} c_{pak} e_{\alpha} \right) \left( \sum_{\beta=1}^{\infty} \bar{c}_{r\beta l} \bar{e}_{\beta} \right) c_{qkl} = c_{pqr}.$$

Wir führen noch zur Abkürzung

$$\tilde{\sigma}(\lambda) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} \sigma_{\alpha\beta}(\lambda) e_{\alpha} \bar{e}_{\beta}$$

ein, wo also (wegen  $\beta$ )  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  eine reelle nichtabnehmende, von links stetige Funktion bedeutet; der Vergleich der Formel (8) und (10) bzw. (9) und (11) liefert unmittelbar

$$\int_0^1 \omega_p(\lambda) \bar{\omega}_q(\lambda) d\tilde{\sigma}(\lambda) = \delta_{pq},$$

$$\int_0^1 \omega_p(\lambda) \omega_q(\lambda) \bar{\omega}_r(\lambda) d\tilde{\sigma}(\lambda) = c_{pqr}, \quad (p, q, r = 1, 2, 3, \dots)$$

Diese Formel zeigen, daß die im Intervall  $0 \leq \lambda \leq 1$  definierten stetigen Funktionen  $\omega_p(\lambda)$  ein im bezug auf die reelle nichtabnehmende Funktion  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  unitär-orthogonales Funktionensystem bilden, dessen Multiplikationstabelle aus den vorgelegten Größen  $c_{pqr}$  besteht.

Die Vollständigkeit dieses Funktionensystems zeigen wir, wie folgt: Es sei  $u(\lambda)$  und  $v(\lambda)$  ein Paar von stetigen Funktionen im Intervall  $0 \leq \lambda \leq 1$ ; wir betrachten die beiden Matrizen

$$U = (u_{pq}) = \left( \int_0^1 u(\lambda) d\sigma_{pq}(\lambda) \right), \quad V = (v_{pq}) = \left( \int_0^1 v(\lambda) d\sigma_{pq}(\lambda) \right)$$

und die Matrizenprodukte

$$\begin{aligned} UV &= \left( \int_0^1 u(\lambda)v(\lambda) d\sigma_{pq}(\lambda) \right), \\ U\bar{C}'_k &= \left( \int_0^1 u(\lambda)\bar{\omega}_k(\lambda) d\sigma_{pq}(\lambda) \right), \\ C_k V &= \left( \int_0^1 v(\lambda)\omega_k(\lambda) d\sigma_{pq}(\lambda) \right); \end{aligned}$$

die zugehörigen Bilinearformen bezeichnen wir bzw. mit

$$U(x, y), \quad V(x, y), \quad UV(x, y), \quad U\bar{C}'_k(x, y), \quad C_k V(x, y).$$

In dieser Schreibweise ist

$$\begin{aligned} UV(e, \bar{e}) &= \int_0^1 u(\lambda)v(\lambda) d\tilde{\sigma}(\lambda), \\ U\bar{C}'_k(e, \bar{e}) &= \int_0^1 u(\lambda)\bar{\omega}_k(\lambda) d\tilde{\sigma}(\lambda), \\ C_k V(e, \bar{e}) &= \int_0^1 v(\lambda)\omega_k(\lambda) d\tilde{\sigma}(\lambda), \end{aligned}$$

so daß die zu beweisende Vollständigkeitsrelation (3') in die Gleichung

$$(12) \quad UV(e, \bar{e}) = \sum_{k=1}^{\infty} U\bar{C}'_k(e, \bar{e}) C_k V(e, \bar{e})$$

übergeht. Nun ist aber — mit Rücksicht auf I und III —

$$\begin{aligned} U\bar{C}'_k(e, \bar{e}) &= \sum_{a, p, q=1}^{\infty} u_{pa} \bar{c}_{kqa} e_p \bar{e}_q = \sum_{p=1}^{\infty} u_{pk} e_p, \\ C_k V(e, \bar{e}) &= \sum_{a, p, q=1}^{\infty} c_{kpa} v_{aq} e_p \bar{e}_q = \sum_{q=1}^{\infty} v_{kq} \bar{e}_q \end{aligned}$$

und

$$UV(e, \bar{e}) = \sum_{k, p, q=1}^{\infty} u_{pk} v_{kq} e_p \bar{e}_q = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{p=1}^{\infty} u_{pk} e_p \right) \left( \sum_{q=1}^{\infty} v_{kq} \bar{e}_q \right);$$

der Vergleich der letzten drei Gleichungen liefert die Relation (12) und damit die Vollständigkeitsrelation (3').

Erfüllen daher die Größen  $c_{pqr}$  die Bedingungen I, II, III (S. 26), so existiert ein im Intervall  $0 \leq \lambda \leq 1$  definiertes, im bezug auf eine reelle nichtabnehmende Funktion  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  unitär-orthogonales und abgeschlossenes System von stetigen Funktionen  $\omega_n(s)$ , dessen Multiplikationstabelle aus den vorgelegten Größen  $c_{pqr}$  besteht.

3. - Der Übergang zu gewöhnlichen Integralen geschieht — in gleicher Weise, wie in meiner angeführten Arbeit <sup>(11)</sup> — auf Grund einer Bemerkung von Herrn LEBESGUE über die Zurückführung von Stieltjesschen Integralen auf Lebesguesche. Es handelt sich im vorliegenden Falle um Integrale

$$\int_0^1 f(\lambda) d\tilde{\sigma}(\lambda),$$

mit stetigen  $f(\lambda)$  und nichtabnehmendem, reellen  $\tilde{\sigma}(\lambda)$ . Man ordne der stetigen Funktion  $f(\lambda)$  eine Funktion  $F(s)$ , die im Intervall

$$a = \tilde{\sigma}(0) \leq s \leq \tilde{\sigma}(1) = b$$

definiert ist <sup>(12)</sup>, wie folgt zu: Ist  $s_0$  ein solcher Wert, der an einer einzigen Stelle  $\lambda_0$  von  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  angenommen wird ( $\tilde{\sigma}(\lambda_0) = s_0$ ), so setze man

$$F(s_0) = f(\lambda_0);$$

nimmt  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  den Wert  $s_1$  an mehreren Stellen an, also an jeder (inneren) Stelle eines Intervalls, so bezeichne man etwa den Mittelpunkt dieses Intervalls mit  $\lambda_1$  und setze

$$F(s_1) = f(\lambda_1);$$

ist endlich  $s_2$  ein solcher Wert im obigen Intervall, den  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  nicht abnimmt, so gibt es jedenfalls eine Stelle  $\lambda_2$  derart, daß

$$\tilde{\sigma}(\lambda_2 - 0) \leq s_2 \leq \tilde{\sigma}(\lambda_2 + 0)$$

ausfalle, wobei — wie üblich —  $\tilde{\sigma}(\lambda_2 + 0)$  bzw.  $\tilde{\sigma}(\lambda_2 - 0)$  den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert der nichtabnehmenden Funktion  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  an der Stelle  $\lambda_2$  bezeichnet; in diesem Falle setze man

$$F(s_2) = f(\lambda_2).$$

<sup>(11)</sup> a. a. O. <sup>(1)</sup>, S. 795.

<sup>(12)</sup> Wegen  $\sigma(0; x, \bar{x}) = 0$  ist übrigens  $a = 0$ .

Für die so definierte Funktion  $F(s)$  gilt offenbar

$$(13) \quad \int_a^b F(s) ds = \int_0^1 f(\lambda) d\tilde{\sigma}(\lambda),$$

wobei das linksstehende Integral ein gewöhnliches Integral im Riemannschen Sinne ist, wie man sich durch den Vergleich der endlichen Summen, deren Grenzwert die beiden Integrale sind, leicht überzeugt. Die Funktion  $F(s)$  kann offenbar nur an einer solchen Stelle  $s_1 = \tilde{\sigma}(\lambda_1)$  unstetig werden, welche einer Stelle  $\lambda_1$  entspricht, die Mittelpunkt eines Intervalls ist, in dem  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  konstant ist. Ist ferner  $\lambda_2$  eine Sprungsstelle von  $\tilde{\sigma}(\lambda)$ , so ist im Intervall  $\tilde{\sigma}(\lambda_2 - 0) \leq s \leq \tilde{\sigma}(\lambda_2 + 0)$  jede dieser Funktionen  $F(s)$  konstant. Man erkennt auch, daß diese Zuordnung der Funktionen  $F(s)$  zu allen stetigen  $f(\lambda)$  distributiv ist, daß  $\bar{f}(\lambda)$  die Funktion  $\bar{F}(s)$  zugeordnet ist und endlich, daß dem Produkt  $f_1(\lambda)f_2(\lambda)$  das Produkt  $F_1(s)F_2(s)$  der zu  $f_1(\lambda)$  und  $f_2(\lambda)$  zugeordneten Funktionen  $F_1(s)$  bzw.  $F_2(s)$  entspricht.

Bezeichnen wir daher die zu unseren  $\omega_n(s)$  vermöge der obigen Konstruktion zugeordneten Funktion mit  $\Omega_n(s)$ , so gelten — mit Rücksicht auf (13) — die Beziehungen

$$\int_a^b \Omega_p(s)\Omega_q(s) ds = \delta_{pq}, \quad \int_a^b \Omega_p(s)\Omega_q(s)\bar{\Omega}_r(s) ds = c_{pqr}.$$

Die für die  $\omega_p(s)$  geltenden Vollständigkeitsrelationen

$$\int_0^1 u(\lambda)v(\lambda) d\tilde{\sigma}(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 u(\lambda)\bar{\omega}_k(\lambda) d\tilde{\sigma}(\lambda) \int_0^1 v(\lambda)\omega_k(\lambda) d\tilde{\sigma}(\lambda)$$

gehen in die Gleichungen

$$(14) \quad \int_a^b U(s)V(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b U(s)\bar{\Omega}_k(s) ds \int_a^b V(s)\Omega_k(s) ds$$

über, wobei  $U(s)$  und  $V(s)$  die zu den willkürlichen stetigen Funktionen  $u(\lambda)$  und  $v(\lambda)$  zugeordneten Funktionen bedeuten. Setzt man insbesondere  $u, v = \omega_p\omega_q$  bzw.  $\omega_p\bar{\omega}_q, \bar{\omega}_p\bar{\omega}_q, 1$ , so drücken die Gleichungen (14) — mit Rücksicht darauf, daß der Funktion  $f(\lambda) = 1$  offenbar  $F(s) = 1$  entspricht — die Tatsache aus, daß das im Intervall  $a \leq s \leq b$  definierte unitär-orthogonale beschränkte Funktionensystem  $\Omega_n(s)$  in sich abgeschlossen ist und die kubische Matrix  $c_{pqr}$  als Multiplikationstabelle besitzt.

Damit dieses Funktionensystem  $\Omega_n(s)$  im gewöhnlichen Sinne abgeschlossen sei, ist das Bestehen der Relation (14) für alle stetigen Funktionen  $U(s), V(s)$  erforderlich. Dies trifft jedenfalls zu, falls die Funktion  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  überall stetig ist, da man ja in diesem Falle zu jeder stetigen Funktion  $F(s)$  ( $a \leq s \leq b$ ) eine ebenfalls stetige Funktion  $f(\lambda)$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) derart angeben kann, daß die zu  $f(\lambda)$



vermöge der obigen Vorschrift zugeordnete Funktion mit  $F(s)$  übereinstimmt. Umgekehrt, wenn  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  eine Unstetigkeitsstelle  $\lambda_2$  besitzt, so kann das soeben konstruierte Funktionensystem  $\Omega_n(s)$  nicht abgeschlossen sein, da — wie oben bemerkt — jedes  $\Omega_p(s)$  im Teilintervall  $\tilde{\sigma}(\lambda_2 - 0) \leq s \leq \tilde{\sigma}(\lambda_2 + 0)$  konstant ist.

## § 3.

**Kriterien für ein abgeschlossenes  
unitär-orthogonales Funktionensystem.**

1. - Wir wollen noch die *notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Multiplikationstabelle eines abgeschlossenen, beschränkten unitär-orthogonalen Funktionensystems ableiten.*

Wir knüpfen zu diesem Ende an das zuletzt gewonnene Ergebnis an, demzufolge das im vorangehenden Paragraphen gewonnene System  $\Omega_n(s)$  jedenfalls abgeschlossen ist, falls die Funktion  $\tilde{\sigma}(\lambda)$  überall stetig ist. Ist dies nicht der Fall, so muß mindestens eine der Funktionen  $\sigma_{pq}(\lambda)$  — etwa  $\sigma_{ij}(\lambda)$  — an einer Stelle  $\lambda_0$  einen endlichen Sprung  $\sigma_{ij}(\lambda_0 + 0) - \sigma_{ij}(\lambda_0 - 0) \neq 0$  erleiden. Man zeigt dann in derselben Weise, wie in der Hilbertschen Theorie der quadratischen Formen, daß in diesem Falle für jedes  $p=1, 2, \dots$  das homogene unendliche Gleichungssystem

$$(15) \quad \sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_{\beta} = \omega_p(\lambda_0) x_{\alpha} \quad (\alpha=1, 2, 3, \dots)$$

eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, für die  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$  konvergent ist. In der Tat, setzt man bei  $h > 0$

$$x_{\alpha}(h) = \sigma_{\alpha j}(\lambda_0 + h) - \sigma_{\alpha j}(\lambda_0 - h) = \int_{\lambda_0 - h}^{\lambda_0 + h} d\sigma_{\alpha j}(\lambda), \quad (\alpha=1, 2, 3, \dots)$$

so ergibt sich mit Hülfe der Hilbertschen Vollständigkeitsrelation (7), einerseits

$$(16) \quad \sum_{\alpha=1}^{\infty} |x_{\alpha}(h)|^2 = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \int_{\lambda_0 - h}^{\lambda_0 + h} d\sigma_{\alpha j}(\lambda) \int_{\lambda_0 - h}^{\lambda_0 + h} d\sigma_{j\alpha}(\lambda) = \int_{\lambda_0 - h}^{\lambda_0 + h} d\sigma_{jj}(\lambda) \leq 1,$$

andererseits aber, mit Rücksicht auf (7'), das Gleichungssystem

$$(17) \quad \sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_{\beta}(h) = \sum_{\beta=1}^{\infty} \int_0^1 \omega_p(\lambda) d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \int_{\lambda_0 - h}^{\lambda_0 + h} d\sigma_{\beta j}(\lambda) = \int_{\lambda_0 - h}^{\lambda_0 + h} \omega_p(\lambda) d\sigma_{\alpha j}(\lambda).$$

Der Grenzübergang  $h=0$  führt die linken Seiten dieser Gleichungen — wenn man zur Abkürzung

$$(18) \quad x_{\alpha}(0) = x_{\alpha} = \sigma_{\alpha j}(\lambda_0 + 0) - \sigma_{\alpha j}(\lambda_0 - 0) \quad (x_i \neq 0)$$

setzt — in

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_{\beta}$$

über (mit Rücksicht auf (18) und auf die Konvergenz von  $\sum_{\beta=1}^{\infty} |c_{p\alpha\beta}|^2$ , die eine Folge der Beschränktheit der Matrix  $C_p$  ist). Da ferner  $\omega_p(\lambda)$  eine stetige Funktion von  $\lambda$  war, so ist der Grenzwert der rechten Seite in (17) gleich

$$\omega_p(\lambda_0)[\sigma_{aj}(\lambda_0 + 0) - \sigma_{aj}(\lambda_0 - 0)] = \omega_p(\lambda_0) x_a$$

d. h. die Größen (18) bilden ein nichttriviales Lösungssystem der homogenen Gleichungen (15). Man kann dies auch so formulieren, daß unter den gemachten Voraussetzungen

$$\omega_p(\lambda_0) = \mu_p$$

ein Eigenwert der beschränkten Matrix  $C_p$  ist (d. h. dem Punktspektrum angehört) und die obigen Größen  $x_a$  eine Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems bilden. Ist daher das im vorigen Paragraphen zu der kubischen Matrix  $c_{pqr}$  konstruierte unitär-orthogonale Funktionensystem  $\Omega_n(s)$  nicht abgeschlossen, so besitzt jede der Matrizen  $C_p = (c_{p\alpha\beta})$  einen Eigenwert  $\mu_p$  und die entsprechenden homogenen Gleichungssysteme besitzen für alle  $p$  eine gemeinsame (nichttriviale) Lösung:

$$(19) \quad \sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_{\beta} = \mu_p x_{\alpha} \quad (p, \alpha = 1, 2, 3, \dots).$$

2. - Wir beweisen noch die Umkehrung dieser Tatsache. Sind die Größen  $c_{pqr}$  so beschaffen, daß das Gleichungssystem (19) eine nichttriviale Lösung besitzt, für die  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$  konvergiert, so kann es in keinem Intervall  $a \leq s \leq b$  ein beschränktes und abgeschlossenes unitär-orthogonales Funktionensystem  $F_1(s), F_2(s), \dots$  geben, für das

$$\int_a^b F_p(s) F_q(s) \bar{F}_r(s) ds = c_{pqr}$$

ist.

Denn es sei  $\Psi(s)$  diejenige Funktion, für die

$$\int_a^b \Psi(s) \bar{F}_p(s) ds = \bar{x}_p \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

ist;  $\Psi(s)$  ist eine Funktion, deren absolute Betrag quadratisch integrierbar und  $\neq 0$  ist, und es ist

$$x_p = \int_a^b \bar{\Psi}(s) F_p(s) ds.$$

Das Gleichungssystem (19) erhält die Form :

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} \int_a^b F_p(s) F_\alpha(s) \bar{F}_\beta(s) ds \int_a^b \bar{\Psi}(s) F_\beta(s) ds = \mu_p \int_a^b \bar{\Psi}(s) F_\alpha(s) ds;$$

würden die  $F_n(s)$  ein abgeschlossenes System bilden, so wäre die linke Seite dieser Gleichung

$$= \int_a^b \bar{\Psi}(s) F_p(s) F_\alpha(s) ds,$$

d. h. es wäre

$$\int_a^b \bar{\Psi}(s) [F_p(s) - \mu_p] F_\alpha(s) ds = 0 \quad (p, \alpha = 1, 2, 3, \dots).$$

Diese Gleichungen zeigen, daß alle Fourier-Koeffizienten der Funktion

$$\Psi(s) [\bar{F}_p(s) - \bar{\mu}_p]$$

verschwinden; da ferner wegen der angenommenen Beschränktheit des Systems  $F_n(s)$  das Quadrat von

$$|\Psi(s) [\bar{F}_p(s) - \bar{\mu}_p]|$$

integrierbar ist, so folgt, daß mit Ausnahme einer Nullmenge

$$(20) \quad \Psi(s) [\bar{F}_p(s) - \bar{\mu}_p] = 0 \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

sein muß. Dies liefert aber sofort einen Widerspruch mit der Abgeschlossenheit des Systems  $F_n(s)$ ; denn man kann mit Leichtigkeit eine beschränkte, *nirgends verschwindende* Funktion  $u(s)$  derart bestimmen <sup>(13)</sup>, daß

$$\int_a^b \Psi(s) u(s) ds = 0$$

ist. Aus (20) folgt dann unmittelbar

$$\int_a^b u(s) \Psi(s) \bar{F}_p(s) ds = \bar{\mu}_p \int_a^b u(s) \Psi(s) ds = 0; \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

<sup>(13)</sup> Man wähle etwa eine Stelle  $a$  zwischen  $a$  und  $b$ , für die

$$\int_a^a \Psi(s) ds = A \neq 0$$

ist; man setze  $u(s) = 1$  für  $a < s \leq b$  und berechne für  $a \leq s \leq a$  den Wert von  $u(s)$  aus

$$Au(s) + \int_a^b \Psi(s) ds = 0.$$

Diese streckenweis konstante Funktion  $u(s)$  ist von der erfordernten Art.

also wäre fast überall

$$u(s)\Psi(s)=0, \quad \text{d. h.} \quad \Psi(s)=0$$

im Widerspruch zu

$$\int_a^b |\Psi(s)|^2 ds = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 > 0.$$

Wir sind daher zu dem folgenden Satz gelangt:

Die kubische Matrix  $c_{pqr}$  ist dann und nur dann die Multiplikationstabelle eines abgeschlossenen, beschränkten unitär-orthogonalen Funktionensystems, wenn außer den Bedingungen I, II, III des Satzes S. 26 noch die folgende Bedingung IV erfüllt ist:

IV. die homogenen Gleichungen

$$\sum_{\beta=1}^{\infty} c_{p\alpha\beta} x_{\beta} = \mu_p x_{\alpha} \quad (p, \alpha = 1, 2, 3, \dots)$$

haben kein gemeinsames (nichttriviales) Lösungssystem, für das  $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$  konvergiert, d. h. es besitzen die Matrizen  $C_p$  keine Eigenwerte  $\mu_p$  von der Beschaffenheit, daß die zugehörigen homogenen Gleichungssysteme eine gemeinsame Lösung haben.

3. - Daß diese Bedingung IV von I, II, III unabhängig ist, d. h. daß es Multiplikationstabellen gibt, zu denen in sich abgeschlossene aber keine abgeschlossene Funktionensystems gehören, zeigt das folgende Beispiel:

Es sei  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  eine solche Zahlenfolge, für die

$$l = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\lambda_k} \right|^2$$

konvergent ist: man setze  $c_{ppp} = \lambda_p$  und  $c_{pqr} = 0$  falls nicht alle drei Indizes  $p, q, r$  gleich sind. Die Bedingungen I, II, III sind offenbar erfüllt;  $C_p$  ist ja eine Diagonalmatrix, deren  $p^{\text{tes}}$  Diagonalelement  $= \lambda_p$ , alle übrigen Elemente  $= 0$  sind, und es ist

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} C_k.$$

Die Bedingung IV ist aber nicht erfüllt, da die Gleichungen (19) z. B. durch

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, & x_2 &= x_3 = \dots = 0 \\ \mu_1 &= \lambda_1, & \mu_2 &= \mu_3 = \dots = 0 \end{aligned}$$

befriedigt werden.

Ein in sich abgeschlossenes Orthogonalsystem, das zu dieser Multiplikationstabelle gehört, ist übrigens leicht anzugeben. Man trage vom Nullpunkte ausgehend

hintereinander die Intervalle von der Länge  $\left|\frac{1}{\lambda_1}\right|^2 = l_1$ ,  $\left|\frac{1}{\lambda_2}\right|^2 = l_2$ ,  $\left|\frac{1}{\lambda_3}\right|^2 = l_3, \dots$  auf, und definiere in dem Gesamtintervall von der Länge  $l_1 + l_2 + l_3 + \dots = l$  ein Orthogonalsystem vermöge der folgenden Vorschrift: es sei  $\varphi_p(s) = \lambda_p$ , falls  $s$  im  $p^{\text{ten}}$  der obigen Teilintervalle (deren Länge  $l_p$  beträgt) liegt, für alle anderen  $s$  sei  $\varphi_p(s) = 0$ . Dann ist offenbar

$$\int_0^l \varphi_p(s) \bar{\varphi}_q(s) ds = \delta_{pq},$$

und

$$\varphi_p(s) \varphi_q(s) = \begin{cases} \lambda_p \varphi_p(s) & \text{für } p = q, \\ 0 & \text{für } p \neq q; \end{cases}$$

daher ist  $c_{ppp} = \lambda_p$  und  $c_{pqr} = 0$ , falls die Indizes  $p, q, r$  nicht gleich sind.