

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MAURICE FRÉCHET

Compléments à la théorie des probabilités discontinues « en chaîne »

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 2, n° 1
(1933), p. 131-164

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_1_131_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLÉMENTS
À LA THÉORIE DES PROBABILITÉS DISCONTINUES
" EN CHAÎNE "

par MAURICE FRÉCHET (Paris).

TABLE DES MATIÈRES

Introduction. - Énoncé du problème.

CHAPITRE PREMIER

Cas régulier. - Condition de M. HOSTINSKY. - Autres formes de conditions pour le cas régulier. - L'équation « en s ». - Cas semi-régulier. - Étude des limites au sens de CESARO. - Une condition nécessaire et suffisante. - Limites égales. - Valeurs des probabilités limites. - Convergence des moyennes arithmétiques des $P_{hk}^{(n)}$.

CHAPITRE SECOND

Expressions des probabilités itérées $P_{hk}^{(n)}$ en fonction de n .

Résolution du système d'équations aux différences finies. - Étude de l'équation « en s ». - Cas semi-régulier. - Racines de module un. - Décomposition de $P_{hk}^{(n)}$. - Comportement des moyennes arithmétiques des $P_{hk}^{(n)}$. Critères pour le cas régulier.

CHAPITRE TROISIÈME

Valeurs moyennes. Fréquences moyennes.

Valeurs moyennes. - Fréquences moyennes. - Dispersion. Dispersion de $X_j^{(n)}$. - Extension d'un théorème de MARKOFF. - Dispersion de la fréquence moyenne.

Références bibliographiques.

Introduction.

La théorie des probabilités discontinues « en chaîne » a été conçue et magistralement développée par MARKOFF. On la trouvera résumée dans un excellent ouvrage de M. HOSTINSKY (I), voir aussi (I^{bis}) (1), avec quelques additions dues à différents mathématiciens (POINCARÉ, M. HADAMARD, M. HOSTINSKY et ses élèves, M. von MISES, M. ROMANOVSKY, etc.).

Dans mon cours du premier semestre 1931-32 à l'Institut Henri Poincaré, j'ai exposé ces résultats; j'ai pu y ajouter quelques précisions qui vont être indiquées dans le présent mémoire (voir surtout pages 133, 141, 148, 150, 151, 152, 153, 159, 160) et dont quelques unes ont été résumées dans une note aux C. R. de 1932.

(1) Voir la liste de références bibliographiques à la fin de ce Mémoire, p. 164.

Dans un autre mémoire sous presse dans les « *Commentarii Helvetica* » j'examine le cas d'une infinité continue d'états possibles suivant la méthode exposée dans ce même cours. Enfin, dans un troisième mémoire (résumé dans une seconde note aux C. R. de 1932), j'obtiens de nouveaux résultats par une méthode différente.

Dans mon ouvrage en préparation (fasc. 3, t. I du « *Traité de probabilités* de M. BOREL et divers auteurs »), ces différents points seront repris et encadrés dans la théorie générale.

Énoncé du problème.

Rappelons d'abord rapidement la position de la question en renvoyant pour plus de détails à l'ouvrage de M. HOSTINSKY (I, p. 13).

Nous supposons qu'un certain système matériel ne peut prendre qu'un nombre fini r d'états possibles E_1, \dots, E_r et qu'il y a une probabilité $P_{jk}^{(n)}$ pour qu'il passe en n épreuves de l'état E_j à l'état E_k .

On a alors les conditions

$$\begin{aligned} (P) \quad & P_{jk}^{(n)} \geq 0, \\ (T) \quad & \sum_{k=1}^{k=r} P_{jk}^{(n)} = 1, \\ (I) \quad & P_{jk}^{(n+n)} = \sum_{i=1}^{i=r} P_{ji}^{(n)} P_{ik}^{(n)}. \end{aligned}$$

Et l'on pose pour simplifier l'écriture

$$p_{jk} = P_{jk}^{(1)}.$$

CHAPITRE PREMIER

Une question importante est d'étudier le comportement des $P_{jk}^{(n)}$ quand $n \rightarrow \infty$. MARKOFF a démontré que si aucun des p_{jk} (qui sont tous ≥ 0) n'est nul, les $P_{jk}^{(n)}$ tendent quand $n \rightarrow \infty$ vers des limites P_k qui sont indépendantes de l'état initial E_j . Ces limites sont évidemment ≥ 0 ; mais, de plus, comme le montre le raisonnement de MARKOFF, aucune de ces limites n'est nulle.

Or, quand on étudie l'application la plus importante de ce résultat: le comportement quand n croît, des valeurs moyennes des variables aléatoires, on s'aperçoit que cette dernière particularité est de peu d'importance, la propriété qui compte étant l'indépendance à la limite de l'état initial.

Cas régulier.

En détaillant un peu une dénomination introduite par M. HADAMARD, j'ai donc étendu le nom de *cas régulier*, au cas où les $P_{jk}^{(n)}$ ont des limites P_k indé-

pendantes de l'état initial, en nommant *cas positivement régulier* celui où tous les P_k sont positifs. J'ai, en outre, appelé *le plus régulier* celui où les $P_{jk}^{(n)}$ ont une limite P indépendante non seulement de l'état initial E_j , mais aussi de l'état final E_k . En vertu de (T), il est alors visible que P ne sera pas nul, mais égal à $\frac{1}{r}$.

Ceci étant, le raisonnement de MARKOFF (I, p. 16) montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas *positivement régulier* est qu'il existe au moins une valeur de n telle que tous les $P_{jk}^{(n)}$ soient positifs. C'est un résultat bien connu.

Mais le même raisonnement permet aussi de prouver que: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas régulier est qu'il existe au moins un rang n tel que l'une au moins des lignes du déterminant*

$$D^{(n)} = \begin{vmatrix} P_{11}^{(n)}, \dots, & P_{r1}^{(n)} \\ \dots & \dots \\ P_{1r}^{(n)}, \dots, & P_{rr}^{(n)} \end{vmatrix}$$

ne contienne aucun terme nul ⁽²⁾.

Le même raisonnement montre, ce qui sera utile dans la suite, que dans le cas régulier, la série

$$(1) \quad s_{jk} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} (P_{jk}^{(n)} - P_k)$$

est absolument convergente et même qu'elle est majorée par une progression géométrique convergente.

Condition de M. Hostinsky.

M. HOSTINSKY (I, p. 35) a obtenu une condition *suffisante* très intéressante pour le cas *positivement régulier*: c'est que dans le déterminant D des p_{jk} la diagonale principale et les deux diagonales adjacentes soient formées de termes non nuls. On en déduit aisément que: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas positivement régulier est qu'il existe au moins un rang n tel que dans le déterminant itéré $D^{(n)}$ la diagonale principale et les deux diagonales adjacentes ne contiennent aucun terme nul.*

Alors que le fait qu'aucun terme de la diagonale principale ne doit être nul joue ici un rôle essentiel, il est remarquable de pouvoir précisément négliger la

⁽²⁾ Si les valeurs données des p_{hk} sont telles qu'une des lignes de D est positive; ou si une circonstance particulière, comme la réalisation, pour D , de la condition de M. HOSTINSKY indiquée plus loin, p. 133, permet de s'assurer que cette condition est réalisée pour un des $D^{(n)}$, alors on saura qu'on est dans le cas régulier. Mais la condition n'offrirait aucun intérêt si l'on devait, pour l'appliquer, calculer d'abord tous les $P_{hk}^{(n)}$. On indiquera p. 153, une condition qui n'exige aucune itération.

diagonale principale quand on passe au cas régulier (positivement ou non). Nous avons vu, en effet, plus haut que si, par exemple, la deuxième ligne de D :

$$p_{12}, p_{22}, \dots, p_{r2}$$

est positive, on est sûrement dans le cas régulier. Or si $p_{22} = 0$, les autres termes

$$p_{12}, p_{32}, \dots, p_{r2}$$

restant positifs, ce résultat subsiste sauf un cas exceptionnel reconnaissable sans qu'on ait recours à une itération illimitée.

En effet, p_{22} étant nul, on a

$$(2) \quad P_{22}^{(n)} = \sum_{j \neq 2} P_{2j}^{(n-1)} p_{j2} \geq \varepsilon \sum_{j \neq 2} P_{2j}^{(n-1)} = \varepsilon [1 - P_{22}^{(n-1)}]$$

où ε est le plus petits des nombres positifs

$$p_{12}, p_{32}, \dots, p_{r2};$$

et

$$P_{k2}^{(n)} = \sum_j p_{kj} P_{j2}^{(n-1)} \geq p_{k2} P_{22}^{(n-1)} \geq \varepsilon P_{22}^{(n-1)} \quad \text{si } k \neq 2.$$

Si donc $P_{22}^{(n-1)}$ est $\neq 0$ et $\neq 1$, la deuxième ligne de $D^{(n)}$ sera positive et on sera dans le cas régulier. Pour qu'on ne soit pas dans le cas régulier, il faudrait donc qu'on eut pour chaque valeur de n , $P_{22}^{(n)} = 0$ ou 1.

En particulier, ayant déjà $P_{22}^{(1)} = p_{22} = 0$ et d'après (2)

$$P_{22}^{(2)} \geq \varepsilon [1 - p_{22}] = \varepsilon > 0,$$

il faudrait qu'on eut $P_{22}^{(2)} = 1$. Mais alors en vertu de (T) on aurait $P_{2h}^{(2)} = 0$ pour $h \neq 2$, d'où :

$$P_{22}^{(2m+1)} = \sum_j P_{2j}^{(2)} P_{j2}^{(2m-1)} = P_{22}^{(2m-1)}$$

$$P_{22}^{(2m+2)} = \sum_j P_{2j}^{(2)} P_{j2}^{(2m)} = P_{22}^{(2m)}$$

Il suffit donc que $P_{22}^{(2)} = 1$, pour que les $P_{22}^{(n)}$ soient égaux de deux en deux et par suite que

$$P_{22}^{(2m+1)} = P_{22}^{(1)} = 0; \quad P_{22}^{(2m)} = P_{22}^{(2)} = 1.$$

Et dans ce cas $P_{22}^{(n)}$ étant égal à 0 et 1 alternativement n'a pas de limite: on n'est ni dans le cas régulier, ni même dans le cas semi-régulier (p. 136).

Si, au contraire, $P_{22}^{(2)} < 1$, la deuxième ligne de $D^{(2)}$ est positive et on est dans le cas régulier.

Ainsi dans le cas où une ligne de D est positive sauf le terme de la diagonale principale, on reste encore dans le cas régulier, *sauf lorsque dans $D^{(2)}$ le terme correspondant de la diagonale principale est égale à l'unité.*

On peut voir d'ailleurs quelle particularité de D lui-même distingue le cas exceptionnel. On devrait avoir en effet

$$0 = 1 - P_{22}^{(2)} = \sum_j p_{2j}(1 - p_{j2}).$$

Donc tous les produits $p_{2j}(1 - p_{j2}) \geq 0$, devraient être nuls. Il y a au moins un terme p_{2j} qui est nul, à savoir p_{22} ; appelons $p_{2j'}$ tous ceux qui sont nuls. Il y a au moins un terme p_{2j} qui n'est pas nul en vertu de (T); appelons $p_{2j''}$ ceux qui sont $\neq 0$. Alors on aura divisé les r indices j en deux groupes comprenant chacun au moins un élément, les j' et les j'' , tels que

$$p_{2j'} = 0, \quad p_{j''2} = 1.$$

Et cela suffit pour que $P_{22}^{(2)} = 1$.

Autres formes de conditions pour le cas régulier.

Il peut, dans beaucoup de cas, être aussi difficile de chercher s'il existe un rang pour lequel une ligne de $D^{(n)}$ est $\neq 0$, que de chercher directement les limites des $P_{hk}^{(n)}$. Il sera donc utile de donner des conditions qui puissent s'appliquer sans itération préalable.

L'équation « en s ».

Considérons, à cet effet, les équations suivantes dont l'origine s'expliquera plus loin (p. 146):

$$(3) \quad sx_k = \sum_j x_j p_{jk}.$$

S'il existe un système de solutions non toutes nulles X_1, X_2, \dots, X_r de ces équations, on a aussi $\Delta(s) = 0$ avec

$$\Delta(s) \equiv \begin{vmatrix} p_{11} - s, & p_{21}, & \dots, & p_{r1} \\ p_{12}, & p_{22} - s, & \dots, & p_{r2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1r}, & p_{2r}, & \dots, & p_{rr} - s \end{vmatrix}.$$

Et d'autre part, en itérant les équations (3), on voit que ces solutions vérifiaient les équations

$$(4) \quad s^n x_k = \sum_j x_j P_{jk}^{(n)}$$

de sorte que si s est racine de $\Delta(s)$, s^n est solution de $\Delta_n(\sigma)$ avec

$$(5) \quad \Delta_n(\sigma) = \begin{vmatrix} P_{11}^{(n)} - \sigma, & P_{21}^{(n)}, & \dots, & P_{r1}^{(n)} \\ P_{12}^{(n)}, & P_{22}^{(n)} - \sigma, & \dots, & P_{r2}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{1r}^{(n)}, & P_{2r}^{(n)}, & \dots, & P_{rr}^{(n)} - \sigma \end{vmatrix}.$$

Dans le cas général $\Delta(s)$ a r racines distinctes s_1, \dots, s_r et, en général, les puissances $n^{\text{ièmes}}$ de ces nombres complexes $(s_1)^n, \dots, (s_r)^n$ sont également distinctes. Dès lors $\Delta_n(\sigma)$, qui est de degré r , n'aura pas d'autres racines et on aura

$$(6) \quad \Delta_n(\sigma) \equiv [(s_1)^n - \sigma] \dots [(s_r)^n - \sigma].$$

Cette identité ayant lieu quand $(s_1)^n, \dots, (s_r)^n$ sont distincts, se conservera à la limite quand certaines de ces quantités deviennent égales. Si $\Delta(s)$ n'a que $q \leq r$ racines distinctes ; si, *par exemple*,

$$(7) \quad \Delta(s) \equiv (s_1 - s)^{\alpha_1} \dots (s_q - s)^{\alpha_q},$$

on aura

$$(8) \quad \Delta_n(\sigma) \equiv [(s_1)^n - \sigma]^{\alpha_1} \dots [(s_q)^n - \sigma]^{\alpha_q}.$$

D'ailleurs, $(s_1)^n, \dots, (s_q)^n$ ne sont pas nécessairement distinctes bien que s_1, \dots, s_q le soient. Donc : l'ordre de multiplicité de s_1 pour $\Delta(s)$ est au plus égal à l'ordre de multiplicité de $(s_1)^n$ pour $\Delta_n(\sigma)$.

Ceci étant, on voit que pour chaque racine s telle que $|s| \leq 1$, $|s^n - \sigma|$ reste borné. D'autre part, les $P_{hk}^{(n)}$ étant entre 0 et 1, $\Delta_n(\sigma)$ reste, pour σ fixe, borné, d'après (5), quand n varie. Si parmi $|s_1|, |s_2|, \dots$, des termes étaient > 1 , les termes correspondants $[(s_1)^n - \sigma], [(s_2)^n - \sigma]$, deviendraient infinis. Or les autres facteurs $(s^n - \sigma)$ ne tendent pas vers zéro, si l'on a pris par exemple $\sigma = 2$, d'où contradiction.

En résumé, on voit que les racines s_1, \dots, s_r de $\Delta(s)$, distinctes ou non, sont toujours toutes en module ≤ 1 . On voit d'ailleurs, en additionnant les lignes de $\Delta(s)$, que l'unité est racine de $\Delta(s)$.

Cas semi-régulier.

Ceci étant, plaçons nous dans le cas *semi-régulier*, c'est-à-dire, supposons que chaque $P_{jk}^{(n)}$ a une limite déterminée P_{jk} (dépendant ou non de j) quand n croît. Alors, d'après (5), $\Delta_n(\sigma)$ a aussi pour σ fixe, une limite déterminée $\delta(\sigma)$. Choisissons pour σ une valeur $\neq 1$ et de module 1, $\sigma = e^{i\psi}$; $0 < \psi < 2\pi$ qui ne soit pas racine du polynome $\delta(\sigma) = (-\sigma)^r + \dots$. Alors le produit $[(s_1)^n - \sigma][(s_2)^n - \sigma] \dots$ ne tend pas vers zéro. Les termes $(s^n - \sigma)$ où $s = 1$ et ceux où $|s| < 1$ tendent respectivement vers $1 - \sigma \neq 0$ et $-\sigma \neq 0$. S'il y avait des termes où $|s| = 1$ et $s \neq 1$, le produit de ces termes devrait avoir une limite finie et $\neq 0$. Pour une telle valeur de s , $s_k = e^{i\varphi_k}$, où l'on peut supposer $0 < \varphi_k < 2\pi$.

Si $\frac{\varphi_k}{2\pi}$ n'était pas un nombre rationnel, $[(s_k)^n - \sigma]$ s'approcherait de zéro autant que l'on veut pour certaines valeurs de n aussi grandes que l'on veut, tandis que les autres termes $s^n - \sigma$ restent bornés et pourtant $\Delta_n(\sigma)$ tendrait vers une limite différente de zéro. Ainsi, les racines s_1, \dots, s_r comprennent au plus trois sortes de nombres, les uns s_1, \dots, s_α égaux à 1, les autres $s_{\alpha+1}, \dots, s_\beta$

de modules < 1 , les derniers $s_{\beta+1}, \dots, s_r$ de la forme $s_k = e^{i\varphi_k}$ où $\frac{\varphi_k}{2\pi}$ est rationnel ⁽³⁾, $\varphi_k = \frac{2\pi Q_k}{R_k}$ avec $0 < \frac{Q_k}{R_k} < 1$. Soit N un multiple commun des R_k , et posons $\varphi_k = \frac{2\pi S_k}{N}$. Alors $(s_k)^{vN} = 1$ et $(s_k)^{vN+1} = s_k$. De sorte que, quand v tend vers l'infini, $\Delta_{vN}(\sigma)$ tendra vers

$$(1 - \sigma)^\alpha (-\sigma)^{\beta - \alpha} (1 - \sigma)^{r - \beta}$$

et $\Delta_{vN+1}(\sigma)$ tendra vers

$$(1 - \sigma)^\alpha (-\sigma)^{\beta - \alpha} (s_{\beta+1} - \sigma) \dots (s_r - \sigma)$$

avec $s_k \neq 0$ et $s_k \neq 1$ pour $\beta < k < r$. Or, quand $n \rightarrow \infty$, $\Delta_n(\sigma)$ a une limite déterminée $\delta(\sigma)$. Il y a donc contradiction si $\beta < r$.

En résumé, on ne peut être dans le cas semi-régulier que si l'équation en s , $\Delta(s) = 0$, n'a aucune racine de module 1 autre que l'unité. (On verra plus loin, p. 148, que cette condition est suffisante).

Passons au cas régulier. Dans ce cas, les $P_{jk}^{(n)}$ tendent vers des limites P_k indépendantes de l'état initial E_j . Donc

$$\delta(\sigma) \equiv \begin{vmatrix} P_1 - \sigma, & P_1 & \dots, & P_1 \\ P_2, & P_2 - \sigma, \dots, & P_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_r, & P_r & \dots, & P_r - \sigma \end{vmatrix} = (-\sigma)^r + (-\sigma)^{r-1}(P_1 + \dots + P_r)$$

$$\equiv (-\sigma)^{r-1}(1 - \sigma).$$

Or, d'après ce qui précède, on a aussi $\delta(\sigma) \equiv (1 - \sigma)^\alpha (-\sigma)^{r - \alpha}$ et par suite $\alpha = 1$. Ainsi, on ne peut être dans le cas régulier que si l'équation en s n'a pas de racine de module 1 autre que l'unité et si en outre l'unité n'est que racine simple. (On verra plus loin, p. 153, que cette condition est suffisante).

La même méthode peut d'ailleurs s'appliquer aux limites des moyennes arithmétiques des $P_{jk}^{(n)}$, soient

$$\Pi_{jk}^{(n)} = \frac{1}{n} [P_{jk}^{(1)} + P_{jk}^{(2)} + \dots + P_{jk}^{(n)}].$$

Quand une suite converge vers une limite, on sait qu'il en est de même de la suite des moyennes arithmétiques, mais que la réciproque n'est pas vraie. Si la suite des moyennes converge, on dit que la suite initiale converge au sens de CESARO.

Étude des limites au sens de Cesaro.

Supposons que les $P_{jk}^{(n)}$ convergent toutes au sens de CESARO, ce qui a lieu, au moins, dans le cas semi-régulier (on verra plus loin, p. 151, qu'il en est ainsi même dans le cas singulier). Alors les $\Pi_{jk}^{(n)}$ convergent vers des limites Π_{jk} et

⁽³⁾ Nous verrons plus loin (p. 150) que ce résultat subsiste même dans le cas singulier.

on peut se demander à quelle condition ces limites sont indépendantes du premier indice, j . La réponse s'obtient comme pour les P_{jk} .

Si $\Delta(s)=0$, alors comme on l'a vu, p. 135, les équations

$$s^t x_k = \sum_j x_j P_{jk}^{(t)}$$

et par suite aussi les équations

$$S^{(n)} x_k = \sum_j x_j \Pi_{jk}^{(n)}$$

où

$$S^{(n)} = \frac{1}{n} (s + s^2 + \dots + s^n)$$

ont un système de solutions en x_1, \dots, x_r non toutes nulles. Et, par suite, $S^{(n)}$ est racine de $F_n(S)$ où

$$F_n(S) \equiv \begin{vmatrix} \Pi_{11}^{(n)} - S, & \Pi_{21}^{(n)} & , \dots, & \Pi_{r1}^{(n)} \\ \Pi_{12}^{(n)}, & \Pi_{22}^{(n)} - S, & \dots, & \Pi_{r2}^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{1r}^{(n)}, & \Pi_{2r}^{(n)} & , \dots, & \Pi_{rr}^{(n)} - S \end{vmatrix},$$

Le raisonnement employé pour $\Delta_n(\sigma)$ montre alors que si $\Delta(s)$ n'a que $q \leq r$ racines distinctes s_1, \dots, s_q , de sorte que

$$\Delta(s) \equiv (s_1 - s)^{\alpha_1} \dots (s_q - s)^{\alpha_q}$$

on aura

$$F_n(S) \equiv (S_1^{(n)} - S)^{\alpha_1} \dots (S_q^{(n)} - S)^{\alpha_q}$$

avec

$$S_k^{(n)} = \frac{1}{n} [s_k + \dots + (s_k)^n].$$

Or, si les $\Pi_{hk}^{(n)}$ convergent vers des quantités Π_k indépendantes de h , alors, comme on a $\sum_k \Pi_k = 1$, la première expression de $F_n(S)$ montre que $F_n(S)$ tend vers $(1-S)(-S)^{r-1}$. D'autre part, $S_k^{(n)} = \frac{1}{n} \left[\frac{s_k - (s_k)^{n+1}}{1 - s_k} \right]$ tend vers 0 si $|s_k| < 1$ et aussi vers zéro quand $|s_k| = 1$, avec $s_k \neq 1$. On peut supposer $s_1 = 1$ et alors $S_1^{(n)} = 1$. D'après la seconde expression de $F_n(S)$, on voit que $F_n(S)$ tend vers $(1-S)^{\alpha_1} (-S)^{r-\alpha_1}$. Donc $\alpha_1 = 1$.

Ainsi, pour que les probabilités $P_{jk}^{(n)}$ convergent *au sens de Cesaro* vers des limites Π_k indépendantes du premier indice, j , il faut que l'unité ne soit que racine simple de l'équation en s , $\Delta(s) = 0$. (On verra, p. 153, que cette condition est suffisante).

Au moyen de la théorie des équations aux différences finies, nous prouverons plus loin les réciproques de ces diverses propositions, mais il nous a paru intéressant de montrer que ces conditions nécessaires peuvent être établies par des raisonnements plus directs.

Une condition nécessaire et suffisante.

D'ailleurs en mettant les conditions sous une autre forme, on peut obtenir dès maintenant, sans l'intermédiaire de la théorie des équations aux différences finies, certaines conditions à la fois nécessaires et suffisantes.

Observons d'abord que des équations

$$P_{jk}^{(t+1)} = \sum_i P_{ji}^{(t)} p_{ik} = \sum_i p_{ji} P_{ik}^{(t)}$$

ajoutées pour $t=1, \dots, n-1$ et divisées par n , on tire :

$$(9) \quad \Pi_{jk}^{(n)} - \frac{p_{jk}}{n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_i \Pi_{ji}^{(n-1)} p_{ik} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sum_i p_{ji} \Pi_{ik}^{(n-1)}.$$

Quand les $\Pi_{jk}^{(n)}$ ont des limites Π_{jk} (et nous verrons, p. 151, que ces limites existent toujours), on déduit des dernières relations que ces limites vérifient les équations

$$(10) \quad \Pi_{jk} = \sum_i \Pi_{ji} p_{ik} = \sum_i p_{ji} \Pi_{ik}.$$

On a de même aussi

$$\sum_i \Pi_{ji} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \Pi_{ji}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \sum_i P_{ji}^{(1)} + \dots + \sum_i P_{ji}^{(n)} \right\}.$$

D'où

$$(11) \quad \sum_i \Pi_{ji} = 1.$$

On voit que $\Pi_{j1}, \Pi_{j2}, \dots, \Pi_{jr}$ forment un système G_j de solutions du système (E) des équations

$$(E) \quad \begin{cases} x_k = \sum_{i=1}^r x_i p_{ik}, & (k=1, \dots, r) \\ \sum_{i=1}^r x_i = 1. \end{cases}$$

Ce système à r inconnues se réduit à r équations quand on observe qu'en vertu de la condition (T), la somme de ses r premières équations se ramène à une identité.

Si les Π_{jk} ne sont pas indépendants de j , il y aura au moins deux systèmes distincts de solutions G_j, G_h de (E).

Si, au contraire, les Π_{jk} sont indépendants de j , alors comme on l'a vu l'unité ne sera que racine simple de l'équation $\Delta(s)=0$. Par suite $\Delta'_s(s)$ ne sera pas nul pour $s=1$. Or, on a

$$(-1)^r (\Delta'_s)_{s=1} = \begin{vmatrix} 1-p_{22} & -p_{32} \dots & -p_{r2} \\ -p_{23} & 1-p_{33} \dots & -p_{r3} \\ \dots & \dots & \dots \\ -p_{2r} & -p_{3r} \dots & 1-p_{rr} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1-p_{11} & -p_{31} \dots & -p_{r1} \\ -p_{13} & 1-p_{33} \dots & -p_{r3} \\ \dots & \dots & \dots \\ -p_{1r} & -p_{3r} \dots & 1-p_{rr} \end{vmatrix} + \dots$$

avec

$$1 - p_{22} - p_{23} \dots - p_{2r} = p_{21} \geq 0, \quad 1 - p_{32} - p_{33} \dots - p_{3r} = p_{31} \geq 0, \dots,$$

$$1 - p_{11} - p_{13} \dots - p_{1r} = p_{12} \geq 0, \dots$$

Or MINKOWSKI a démontré — en vue d'un tout autre usage — le théorème suivant, déjà utilisé pour l'étude d'un cas moins général, par MARKOFF.

Tout déterminant de la forme

$$(12) \quad d = \begin{vmatrix} A_1 & -\tilde{\omega}_{21} & -\tilde{\omega}_{31} \dots & -\tilde{\omega}_{r1} \\ -\tilde{\omega}_{12} & A_2 & -\tilde{\omega}_{32} \dots & -\tilde{\omega}_{r2} \\ -\tilde{\omega}_{13} & -\tilde{\omega}_{23} & A_3 \dots & -\tilde{\omega}_{r3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\tilde{\omega}_{1r} & -\tilde{\omega}_{2r} & -\tilde{\omega}_{3r} \dots & A_r \end{vmatrix}$$

où les $\tilde{\omega}_{jk}$ sont tous ≥ 0 ainsi que les quantités

$$\alpha_j = A_j - \tilde{\omega}_{j1} - \tilde{\omega}_{j2} - \dots - \tilde{\omega}_{j,j-1} - \tilde{\omega}_{j,j+1} - \dots - \tilde{\omega}_{jr},$$

est lui même ≥ 0 . Si, de plus, aucun des α_j n'est nul, d est $\neq 0$.

En additionnant par colonnes, on voit d'ailleurs immédiatement que si tous les α_j sont nuls, d est nul. (MINKOWSKI avait également étudié les cas intermédiaires que nous n'aurons pas besoin de considérer).

Les déterminants dont la somme est $(-1)^r (\Delta_s')_{s=1}$ sont de la forme générale de MINKOWSKI et sont tous ≥ 0 . Comme par hypothèse leur somme n'est pas nulle, l'un d'eux au moins est $\neq 0$. Si, par exemple, c'est le premier, on voit que le déterminant des coefficients de x_2, \dots, x_r dans les $r-1$ équations homogènes

$$(E_1) \quad x_k = \sum_{i=1}^r x_i p_{ik} \quad (k=2, \dots, r)$$

est $\neq 0$. Ce système, qui fait partie de E , ne peut donc avoir qu'une seule solution en x_2, \dots, x_r , quand on donne x_1 . Si le système (E) qui est vérifié pour $x_1 = II_1, x_2 = II_2, \dots, x_r = II_r$ admettait un autre système de solutions X_1, X_2, \dots, X_r alors en prenant $x_1 = II_1 X_1$ le système (E_1) serait vérifié pour

$$x_2 = X_1 II_2, \dots, x_r = X_1 II_r$$

et aussi pour

$$x_2 = II_1 X_2, \dots, x_r = II_1 X_r.$$

On aurait donc

$$X_1 II_2 = II_1 X_2, \dots, X_1 II_r = II_1 X_r$$

d'où en ajoutant

$$X_1(1 - II_1) = II_1(1 - X_1)$$

d'où $X_1 = II_1$. Alors, en prenant $x_1 = X_1 = II_1$, le système (E_1) serait vérifié pour $x_2 = II_2, \dots, x_r = II_r$ et pour $x_2 = X_2, \dots, x_r = X_r$. D'où finalement

$$X_1 = II_1, \quad X_2 = II_2, \dots, \quad X_r = II_r.$$

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que les limites Π_{jk} au sens de Cesaro de $P_{jk}^{(n)}$ soient indépendantes de l'état initial E_j , est que le système (E) d'équations linéaires, ait un seul système de solutions en x_1, \dots, x_r .

Limites égales.

On peut aussi chercher à quelle condition les $\Pi_{jk}^{(n)}$ auront la même limite indépendante de j et de k . Il faut d'abord que les limites Π_{jk} aient des valeurs Π_k indépendantes de j . Alors elles vérifieront les équations déduites de (10) et (11)

$$(13) \quad \Pi_k = \sum_{i=1}^r \Pi_i p_{ik}$$

$$(14) \quad \sum_{i=1}^r \Pi_i = 1.$$

Si maintenant les Π_i sont égaux, la dernière équation montre que leur valeur commune est $\frac{1}{r}$. Et alors l'avant dernière équation montre que la condition

$$(T_1') \quad \sum_i p_{ik} = 1$$

devra être vérifiée, en outre de la condition

$$(T_1) \quad \sum_k p_{ik} = 1.$$

Réciproquement, si les $\Pi_{jk}^{(n)}$ ont des limites Π_k indépendantes du premier indice, j , la condition (T_1') suffit pour que ces limites soient égales. On aura, en effet

$$\Pi_k = \frac{1}{r} \sum_j \Pi_{jk} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{rn} \left\{ \sum_j P_{jk}^{(n)} + \dots + \sum_j P_{jk}^{(n)} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{rn} [1 + \dots + 1] = \frac{1}{r}.$$

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que les $\Pi_{jk}^{(n)}$ aient une même limite indépendante de j et de k est que: 1°) les équations (E) n'aient qu'un seul système de solutions; 2°) que la condition (T_1') soit vérifiée. Et alors la valeur commune des Π_{jk} sera $\frac{1}{r}$.

Valeurs des probabilités limites.

Dans le cas régulier, les limites P_k des $P_{hk}^{(n)}$ vérifient les équations obtenues en passant à la limite dans les conditions (T), (I). Ce sont donc aussi des solutions du système (E) d'équations linéaires en x_1, \dots, x_r :

$$(E) \quad \begin{cases} x_k = \sum_j p_{jk} x_j & (k=1, \dots, r) \\ \sum_j x_j = 1. \end{cases}$$

Il ne suffit pourtant pas que ce système d'équations ait un système de solutions pour que ce système de solutions soit un système de limites des $P_{jk}^{(n)}$. Et ceci reste vrai même si (E) n'a qu'un système de solutions, comme on le voit en prenant $r=2$ et en supposant que le déterminant D des p_{jk} soit

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

(Au contraire, si le système (E) n'a qu'un système de solutions, on a vu p. 141, que les Π_{jk} sont indépendants de j et dans l'exemple ci-dessus les Π_{jk} sont même indépendants à la fois de j et de k).

Par contre, nous allons montrer que *dans le cas régulier, les équations (E) n'ont qu'un seul système de solutions.*

Cela résulte d'abord du fait que les $P_{jk}^{(n)}$ ayant des limites P_k indépendantes de j , les $\Pi_{jk}^{(n)}$ auront des limites $\Pi_k = P_k$ indépendantes de j . Or la proposition a été établie, p. 141, pour les $\Pi_{jk}^{(n)}$.

On peut aussi démontrer la proposition concernant les $P_{jk}^{(n)}$ sans utiliser les propriétés des $\Pi_{jk}^{(n)}$, comme ci-après.

Il suffit pour cela de prouver que le système

$$(S) \quad x_k = \sum_j x_j p_{jk}$$

a un seul système de solutions non toutes nulles (à un facteur commun près). Car soit X_1, \dots, X_r ce système unique; on aura

$$P_1 = \lambda X_1, \dots, \quad P_r = \lambda X_r.$$

D'où

$$1 = \sum_j P_j = \lambda \sum_j X_j.$$

Ceci montre d'abord que les solutions seront nécessairement telles que $\sum_j X_j \neq 0$.

Et ensuite, qu'elles permettront d'obtenir les expressions effectives des P_k .

$$P_1 = \frac{X_1}{\sum_j X_j}, \dots, \quad P_r = \frac{X_r}{\sum_j X_j}.$$

Enfin on voit que les équations (E) auront alors un seul système de solutions, à savoir

$$x_1 = P_1, \dots, \quad x_r = P_r.$$

Pour démontrer l'énoncé concernant le système (S) , il faudrait pouvoir se servir de la condition de la p. 133, d'après laquelle, dans le cas régulier, il existe dans la suite des déterminants $D^{(n)}$ un déterminant $D^{(v)}$ dont une ligne est positive. Pour mettre à profit cette condition, nous ferons intervenir les $P_{hk}^{(v)}$ en itérant ν fois le système (S) .

On voit que toute solution de (S) sera solution du système

$$(S_r) \quad x_k = \sum x_j P_{jk}^{(v)}$$

Il suffit donc de prouver que ce système (S_r) n'admet aussi qu'un seul système de solutions non toutes nulles (à un facteur commun près), ou ce qui revient au même n'admet qu'un système de solutions où l'une des inconnues a une valeur donnée ≠ 0, par exemple la valeur un. D'autre part, comme en ajoutant les équations de (S_r), on obtient une identité, on peut supprimer une équation de (S_r). Supprimons celle dont les coefficients sont, par hypothèse, positifs. Supposons, par exemple, que ce soit la première et prenons alors x₁ = 1. Il suffira de montrer que le déterminant suivant est ≠ 0

$$\begin{vmatrix} P_{22}^{(v)} - 1, & P_{32}^{(v)}, & \dots, & P_{r2}^{(v)} \\ P_{23}^{(v)}, & P_{33}^{(v)} - 1, & \dots, & P_{r3}^{(v)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{2r}^{(v)}, & P_{3r}^{(v)}, & \dots, & P_{rr}^{(v)} - 1 \end{vmatrix}$$

ou encore le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_2, & -P_{32}^{(v)}, & \dots, & -P_{r2}^{(v)} \\ -P_{23}^{(v)}, & a_3, & \dots, & -P_{r3}^{(v)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -P_{2r}^{(v)}, & -P_{3r}^{(v)}, & \dots, & a_r \end{vmatrix}$$

où l'on a

$$a_2 = 1 - P_{22}^{(v)}, \quad a_3 = 1 - P_{33}^{(v)}, \dots, \quad a_r = 1 - P_{rr}^{(v)}$$

et par suite

$$a_2 - P_{23}^{(v)} - P_{24}^{(v)} - \dots - P_{2r}^{(v)} = P_{21}^{(v)} > 0, \quad a_3 - P_{32}^{(v)} - P_{34}^{(v)} - \dots - P_{3r}^{(v)} = P_{31}^{(v)} > 0, \dots, \\ a_r - P_{r2}^{(v)} - P_{r3}^{(v)} - \dots - P_{r,r-1}^{(v)} = P_{r1}^{(v)} > 0.$$

Or un déterminant de la forme ci-dessus est, dans les conditions présentes, nécessairement différent de zéro en vertu du théorème de MINKOWSKI. Ce qui légitime notre calcul des P_k.

Convergence des moyennes arithmétiques des P_{jk}⁽ⁿ⁾.

Posons

$$\Pi_{jk}^{(n)} = \frac{1}{n} (P_{jk}^{(1)} + P_{jk}^{(2)} + \dots + P_{jk}^{(n)}).$$

Dans le cas régulier P_{jk}⁽ⁿ⁾ tend vers P_k, donc Π_{jk}⁽ⁿ⁾ tend aussi vers P_k. Autrement dit Π_{jk}⁽ⁿ⁾ - P_k est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$. Mais de plus MARKOFF a démontré que n(Π_{jk}⁽ⁿ⁾ - P_k) a une limite.

Nous allons donner de ce fait une démonstration très simple qui nous fournira en outre une expression nouvelle, et simple, de la limite.

On peut écrire

$$n(\Pi_{jk}^{(n)} - P_k) = \sum_{t=1}^{t=n} (P_{jk}^{(t)} - P_k).$$

Or on a vu (p. 133) que la série

$$s_{jk} = \sum_{t=1}^{t=\infty} (P_{jk}^{(t)} - P_k)$$

est absolument convergente. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\Pi_{jk}^{(n)} - P_k) = s_{jk}.$$

Il n'est d'ailleurs *pas nécessaire* pour calculer s_{jk} de calculer préalablement tous les $P_{jk}^{(n)}$. Écrivons en effet

$$(15) \quad \sum_{t=2}^{t=n} (P_{jk}^{(t)} - P_k) = \sum_{i=1}^{i=r} \sum_{t=2}^{t=n} (P_{ji}^{(t-1)} - P_i) p_{ik},$$

et

$$\sum_{k=1}^{k=r} \sum_{t=1}^{t=n} (P_{jk}^{(t)} - P_k) = \sum_{t=1}^{t=n} \left\{ \sum_{k=1}^{k=r} P_{jk}^{(t)} \right\} - \sum_{k=1}^{k=r} P_k \Big\} = 0$$

et passons à la limite. On aura

$$(S_j) \quad \begin{cases} s_{jk} - (p_{jk} - P_k) = \sum_{i=1}^{i=r} s_{ji} p_{ik}, & (k=1, \dots, r) \\ \sum_{i=1}^{i=r} s_{ji} = 0. \end{cases}$$

Les r premières équations ne sont pas indépendantes comme on le voit en les ajoutant. Il reste donc, en supprimant l'une d'elles, un système de r équations linéaires en s_{j1}, \dots, s_{jr} à r inconnues. Le déterminant de ces r équations est précisément le même que celui des équations (E) dont nous avons vu qu'elles n'avaient dans le cas régulier qu'un seul système de solutions. Ainsi, *dans le cas régulier*, pour chaque valeur de j , le système S_j fournit, sans itération, un système unique de valeurs de s_{j1}, \dots, s_{jr} .

CHAPITRE SECOND

Expressions des probabilités itérées $P_{hk}^{(n)}$ en fonction de n .

Après avoir examiné ce que deviennent les $P_{hk}^{(n)}$ quand n est très grand, on peut réaliser un nouveau progrès en déterminant la forme explicite des $P_{hk}^{(n)}$ en fonction de n . C'est ce qui a été fait pour la première fois, semble-t-il, par M. ROMANOVSKY (II) dans le cas où les racines de $\Delta(s)$ sont distinctes. On peut arriver à cette détermination dans le cas général par une voie différente, mais

très naturelle, qui a l'avantage de préparer l'introduction des systèmes d'équations différentielles que l'on rencontre dans un cas plus général encore : celui où les épreuves forment une suite continue dans le temps. Dans le cas de MARKOFF, la suite étant discontinue, ce seront des équations aux différences finies qui joueront le rôle des équations différentielles.

Reprenons les équations

$$(1) \quad P_{hk}^{(n+1)} = \sum_j p_{hj} P_{jk}^{(n)} = \sum_j P_{hj}^{(n)} p_{jk}.$$

On peut les écrire

$$(2) \quad \Delta P_{hk}^{(n)} = \sum_{j=1}^{j=r} A_{jk} P_{hj}^{(n)}$$

où

$$(3) \quad \Delta P_{hk}^{(n)} = P_{hk}^{(n+1)} - P_{hk}^{(n)}, \quad (4) \quad A_{jk} = \begin{cases} p_{jk}, & \text{si } j \neq k \\ p_{kk} - 1, & \text{si } j = k. \end{cases}$$

On voit donc que pour chaque valeur de h le système de fonctions de n : $P_{h1}^{(n)}, \dots, P_{hr}^{(n)}$ est un système de solutions du système d'équations aux différences finies :

$$(5) \quad \Delta x_k(n) = \sum_{j=1}^{j=r} A_{jk} x_j(n), \quad (k=1, \dots, r).$$

Ce système est linéaire et homogène par rapport aux $x_j(n)$, $\Delta x_j(n)$ et ses coefficients A_{jk} sont indépendants de n .

Résolution du système d'équations aux différences finies.

Ce système détermine évidemment les fonctions de n qui représentent un système de solutions, quand on connaît les valeurs initiales $x_j(1)$ des $x_j(n)$. C'est ce que montre l'application répétée du système

$$(6) \quad x_k(n+1) = \sum_{j=1}^{j=r} p_{jk} x_j(n)$$

équivalent au système (5). Cette même méthode montre que les solutions seront de la forme

$$(7) \quad x_k(n) = B_{k1}(n)x_1(1) + \dots + B_{kr}(n)x_r(1)$$

où les B_{kj} sont indépendants de la solution considérée.

Considérons un système de r solutions S_g ,

$$X_{g1}(n), \dots, X_{gr}(n).$$

Si le déterminant des valeurs initiales de ces solutions, $\|X_{gi}(1)\|$ est nul, il y aura une relation de la forme

$$(8) \quad \mu_1 X_{g1}(1) + \dots + \mu_r X_{gr}(1) = 0$$

à coefficients μ non tous nuls et indépendants de g qui aura lieu pour $g=1, \dots, r$. En portant les $X_{gk}(n)$ à la place des $x_k(n)$ dans (7), multipliant par les μ_k et tenant compte de (8), on voit alors que l'on aura non seulement pour $n=1$, mais pour tout entier n

$$\mu_1 X_{g_1}(n) + \dots + \mu_r X_{g_r}(n) = 0.$$

On dira alors que les solutions S_1, \dots, S_r sont *linéairement dépendantes*.

Il est clair que toute combinaison linéaire et homogène de solutions de (5) est aussi une solution. Mais, inversement, si l'on choisit arbitrairement un système de r systèmes de r solutions linéairement indépendantes S_1, \dots, S_r , de (5), on peut représenter tout système S de solutions de (5) comme une combinaison linéaire et homogène de S_1, \dots, S_r :

$$(9) \quad x_1(n) = \sum_{g=1}^{g=r} \lambda_g X_{g_1}(n), \dots, \quad x_r(n) = \sum_{g=1}^{g=r} \lambda_g X_{g_r}(n).$$

Reste à connaître la forme des fonctions de n qui interviennent dans ces formules. Elle est entièrement analogue à celle — qu'on trouve dans tous les Traités d'Analyse — des solutions des équations différentielles linéaires et homogènes, du premier ordre et à coefficients constants.

On sait qu'on peut former un système de solutions linéairement indépendantes de (5) de la façon suivante. On appelle s_1, s_2, \dots, s_r , les racines, chacune répétée autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité, de l'équation « en s »

$$(10) \quad \Delta(s) = \begin{vmatrix} p_{11} - s & p_{21} & p_{31} & \dots & p_{r1} \\ p_{12} & p_{22} - s & p_{32} & \dots & p_{r2} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} - s & \dots & p_{r3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1r} & p_{2r} & p_{3r} & \dots & p_{rr} - s \end{vmatrix}.$$

Alors on sait (voir, par exemple, LUBLIN, VI) qu'on peut prendre pour les X_{gk} des solutions particulières de la forme

$$(11) \quad Z_{gk}(n) = (s_g)^{n-1} v_{gk}(n)$$

où $v_{gk}(y)$ est un certain polynome en y de degré inférieur à l'ordre de multiplicité de s_g , - en prenant $(s_g)^0 = 1$, même dans le cas où $s_g = 0$.

D'autre part, il est bien clair qu'on aura un système de r systèmes de solutions linéairement indépendantes $Y_{gj}(n)$ en prenant chaque $Y_{gj}(1)$ égal à 1 ou 0 suivant que $j=g$ ou $j \neq g$, car le déterminant de ces $Y_{gj}(1)$ sera égal à $1 \neq 0$.

Or en prenant $X_{gj}(1) = Y_{gj}(1)$, les équations (5') donneront successivement les $Y_{gj}(n)$ et on voit qu'on aura

$$Y_{ik}(2) = p_{ik}$$

et en général

$$(12) \quad Y_{ik}(n+1) = P_{ik}^{(n)}$$

pour tout entier positif n .

Maintenant les $Y_{ik}(n)$ sont, pour chaque valeur fixe de i , des combinaisons des $Z_{gk}(n)$, on aura donc d'après (9)

$$(12') \quad Y_{ik}(n+1) = \sum_g \mu_{gi} Z_{gk}(n+1),$$

c'est-à-dire

$$(13) \quad P_{ik}^{(n)} = \sum_g \mu_{gi} (s_g)^n v_{gk}(n+1),$$

soit

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_g (s_g)^n w_{ik}^{(g)}(n)$$

où $w_{ik}^{(g)}(y)$ est un polynome en y de degré inférieur à l'ordre de multiplicité de la racine s_g de $\Delta(s)=0$.

Nous avons ainsi obtenu la forme explicite en fonction de n , des probabilités itérées $P_{ik}^{(n)}$. Si toutes les racines s_g sont simples, les $P_{ik}^{(n)}$ seront de la forme

$$(14) \quad P_{ik}^{(n)} = \sum_g (s_g)^n \mu_{gi} v_{gk}$$

où les μ_{gi} , v_{gk} seront certaines constantes.

Dans le cas contraire, il n'y a que $q < r$ racines distinctes $\sigma_1, \dots, \sigma_q$, parmi les r racines s_1, \dots, s_r et on pourra écrire

$$(15) \quad P_{ik}^{(n)} = \sum_{g=1}^{g=q} (\sigma_g)^n w_{ik}^{(g)}(n)$$

où $w_{ik}^{(g)}(y)$ est un polynome de degré inférieur à l'ordre de multiplicité de la racine σ_g de $\Delta(s)=0$.

Jusqu'ici notre raisonnement s'appliquait sans supposer que les coefficients p_{jk} des équations (5) fussent des probabilités.

Nous allons voir qu'en tenant compte des conditions (P) et (T), on peut établir ou retrouver certaines propriétés des racines s_g et des polynomes $w_{ik}^{(g)}(n)$ et en déduire des détails plus précis sur le comportement des $P_{ik}^{(n)}$ quand n croît. En complétant ainsi les résultats obtenus plus haut (p. 137, 138), on aura, de surcroît, retrouvé ces même résultats par d'autres méthodes.

Étude de l'équation « en s ».

Puisque les Y_{ik} sont des solutions indépendantes, on peut aussi écrire :

$$Z_{gk}(n+1) = \sum_i \lambda_{ik} Y_{ik}(n+1)$$

ou

$$(16) \quad (s_g)^n v_{gk}(n+1) = \sum_i \lambda_{ik} P_{ik}^{(n)}.$$

Les probabilités $P_{ik}^{(n)}$ restent entre 0 et 1, le second membre reste borné quand n croît. Donc $(s_g)^n v_{gk}(n+1)$ est aussi borné.

On en conclut que: toutes les racines de l'équation « en s » sont de modules ≤ 1 . Il peut y en avoir de module égal à l'unité: pour celles-là, le polynôme $v_{gk}(n+1)$ devant rester borné, doit se réduire à une constante. Enfin si l'une des racines s_g est nulle, l'expression $(s_g)^{n-1}v_{gk}(n)$ est nulle pour $n > 1$, il n'y a, par suite, aucun inconvénient à supposer que les polynômes $v_{gk}(y)$ se réduisent à des constantes pour $s_g = 0$. En résumé, on peut supposer *indépendants de n les coefficients $v_{gk}(n)$, $u_{hk}^{(g)}(n)$, $w_{ik}^{(g)}(n)$ qui correspondent à des racines s_g de modules égaux à un ou à zéro.*

Enfin, il est clair que l'équation « en s » a toujours l'unité comme racine, comme on le voit en additionnant les termes de $\Delta(s)$ par colonnes.

Il en résulte qu'on peut toujours écrire $P_{hk}^{(n)}$ sous la forme

$$(17) \quad P_{hk}^{(n)} = II_{hk} + \sum_{g=1}^{g=r'} u_{hk}^{(g)} e^{in\varphi_g} + \sum_{g=1}^{g=r''} (q_g)^n R_{hk}^{(g)}(n)$$

où les II_{hk} , $u_{hk}^{(g)}$, φ_g , q_g sont certaines constantes, où les $R_{hk}^{(g)}(y)$ sont des polynômes en y , et où $|q_g| < 1$ et φ_g est réel.

Cas semi-régulier.

Si l'unité est la seule racine de $\Delta(s)$ dont le module est égal à 1, alors les termes en $u_{hk}^{(g)}$ disparaissent, les $(q_g)^n R_{hk}^{(g)}(n)$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$: les $P_{hk}^{(n)}$ tendent dans ce cas vers des limites déterminées. Ceci nous conduit à appeler *cas semi-régulier* le cas où les $P_{hk}^{(n)}$ ont, quand n croît, des limites déterminées P_{hk} (qui peuvent dépendre ou non de l'état initial E_h).

Dans ce cas, en vertu de (16), $(s_g)^n v_{gk}(n+1)$ doit tendre pour chaque racine s_g vers une limite déterminée. Si $|s_g| = 1$, $v_{gk}(n+1)$ se réduit à une constante v_{gk} , et v_{1k} , v_{2k} , ..., v_{rk} ne sont pas tous nuls. Par suite $(s_g)^n$ doit avoir une limite déterminée avec $|s_g| = 1$, ce qui ne peut avoir lieu que si $s_g = 1$. Ainsi: *la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas semi-régulier est que la seule racine de l'équation « en s » qui a pour module un soit l'unité.*

Racines de module un.

Dans l'expression (17) les nombres réels φ_g ne peuvent être choisis arbitrairement.

En effet, soit s une racine de $\Delta(s)$. Alors les équations

$$(18) \quad sw_h = \sum_j p_{hj} w_j$$

ont au moins un système de solutions non toutes nulles W_1, \dots, W_r . Si R est le plus grand des modules $|W_1|, \dots, |W_r|$, on aura

$$|s| |W_h| \leq \sum_j p_{hj} |W_j| \leq R.$$

En prenant h tel que $|W_h| = R$, on voit donc d'abord que $|s| \leq 1$, ce qui fournit une troisième démonstration d'une proposition, due à FROBENIUS et déjà, ici, établie de deux façons différentes (p. 135 et p. 148). Mais supposons maintenant que s soit de module 1 (il y a au moins la racine $s=1$), h toujours choisi de sorte que $|W_h| = R$. Or aura d'après (18)

$$R = |c|$$

avec

$$c = \frac{\sum_j p_{hj} W_j}{\sum_j p_{hj}}$$

c est donc le centre de gravité de poids p_{hj} placés aux points W_j du plan complexe. Ces points sont situés à l'intérieur de la circonférence Γ représentant la relation $|z| = R$, ou sur son contour; et le point c est sur le contour Γ . En appliquant le théorème des moments à la tangente à Γ au point c , on voit qu'on aura $\sum p_{hj} \delta_j = 0$, en appelant δ_j le nombre ≥ 0 qui représente la distance de W_j à la tangente en c . Donc les poids p_{hj} des points W_j distincts de c doivent être nuls. Or en vertu de (P) et (T) l'un au moins des termes de $\sum_j p_{hj}$ est > 0 , par exemple $p_{hh} \neq 0$ et alors $W_{h'}$ est en c . D'ailleurs ou bien $c \neq W_h$ et on a $s \neq 1$, ou bien c est en W_h et alors comme $c = \sum_j p_{hj} W_j = s W_h$ et comme de plus $|c| = R \neq 0$, on aurait $s=1$. Si donc $s \neq 1$, on a nécessairement $W_{h'} = c \neq W_h$ et puisque $W_h \neq c$, on a $p_{hh} = 0$.

On a vu que parmi les W_1, W_2, \dots , il y a au moins deux nombres inégaux $W_h, W_{h'}$ qui sont de module R . Soient $W_h, W_{h'}, W_{h''}, \dots$, ceux des nombres W_1, W_2, \dots , qui sont égaux ou non mais d'indices distincts et qui sont de module R . En recommençant sur $W_{h'}$, puis sur $W_{h''}, \dots$, le raisonnement fait à partir de W_h , on verrait qu'on a

$$0 = p_{hh} = p_{h'h'} = p_{h''h''} = \dots$$

Comme $W_h \neq W_{h'}$, $h' \neq h$. Ainsi, nous voyons, en passant, qu'il ne peut y avoir de racine de $\Delta(s)$ qui soit $\neq 1$ et de module 1 que si la diagonale principale des p_{ik} contient au moins deux termes nuls. Par suite, si la diagonale principale des p_{ik} ne contient que zéro ou un terme nul, on est sûrement dans le cas semi-régulier.

Parmi les $W_h, W_{h'}, W_{h''}, \dots$, distinguons ceux qui sont inégaux: W_{h_1}, W_{h_2}, \dots ,

W_{h_m} . (Il y en a au moins deux $W_h, W_{h'}$). Comme ils sont de module R , on peut, comme pour W_h , faire correspondre à chacun d'eux une égalité telle que $sW_{h_1} = W_{h_1'}$. Les $W_{h_1'}, W_{h_2'}, \dots$, étant de module R sont pris nécessairement parmi W_{h_1}, \dots, W_{h_m} ; de plus ils sont différents, car si, par exemple, $W_{h_1'} = W_{h_2'}$ on aurait $sW_{h_1} = sW_{h_2}$ alors que $s \neq 0$ et $W_{h_1} \neq W_{h_2}$. Donc les $W_{h_1'}, W_{h_2'}, \dots$, ne sont que les W_{h_1}, W_{h_2}, \dots , pris dans un ordre convenable. Or on a

$$W_{h_1'} \dots W_{h_m'} = s^m W_{h_1} \dots W_{h_m}$$

avec $|W_{h_1}| \dots |W_{h_m}| = R^m \neq 0$. Donc $s^m = 1$, m étant un nombre entier positif et $\leq r$.

En résumé, toute racine de l'équation « en s » de module un est aussi racine d'une équation binôme $s^m - 1 = 0$ de degré positif et au plus égal à r . Inversement, de telles racines peuvent effectivement se présenter en dehors de la racine $s_1 = 1$, comme le montre le cas où le déterminant D des p_{ik} serait

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dans ce cas $\Delta(s) \equiv 1 - s^3$ a pour racines les trois racines cubiques de l'unité.

Soient m_1, m_2, \dots , les degrés des équations binômes auxquelles satisfont les racines $\neq 1$ mais de module 1 de $\Delta(s)$, et soit N un multiple commun de m_1, m_2, \dots . Alors ces racines seront de la forme $e^{i\varphi_g}$ avec

$$\varphi_g = \frac{2\pi m_g'}{N}$$

où m_g' est un entier > 0 et $< N$.

Décomposition de $P_{hk}^{(n)}$.

L'expression (17) de $P_{hk}^{(n)}$ peut alors s'écrire sous la forme

$$P_{hk}^{(n)} = \Pi_{hk} + \varepsilon_{hk}(n) + \tilde{\omega}_{hk}(n)$$

avec

$$(19) \quad \begin{aligned} \tilde{\omega}_{hk}(n) &= \sum_g u_{hk}^{(g)} e^{\frac{2\pi i n m_g'}{N}} \\ \varepsilon_{hk}(n) &= \sum_g (q_g)^n R_{hk}^{(g)}(n) \end{aligned}$$

avec $|q_g| < 1$. On voit que $\varepsilon_{hk}(n)$ tend vers zéro quand n croît et que

$$\tilde{\omega}_{hk}(n+N) = \tilde{\omega}_{hk}(n).$$

Donc : chaque probabilité itérée $P_{hk}^{(n)}$ est la somme de deux termes, l'un $[\Pi_{hk} + \varepsilon_{hk}(n)]$ qui tend vers une limite déterminée Π_{hk} quand n croît, l'autre $\tilde{\omega}_{hk}(n)$ qui se reproduit périodiquement (de N en N épreuves).

Comportement des moyennes arithmétiques des $P_{hk}^{(n)}$.

On peut même éliminer les termes périodiques en considérant l'expression déjà envisagée (p. 137),

$$(20) \quad \Pi_{hk}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{t=n} P_{hk}^{(t)} = \Pi_{hk} + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{t=n} \varepsilon_{hk}(t) + \theta_{hk}(n)$$

avec

$$\begin{aligned} n\theta_{hk}(n) &= \sum_{t=1}^{t=n} \tilde{\omega}_{hk}(t) = \sum_g w_{hk}^{(g)} \left\{ \sum_{t=1}^{t=n} \left(e^{\frac{2i\pi m'_g}{N}} \right)^t \right\} \\ &= \sum_g w_{hk}^{(g)} \frac{e^{\frac{2i\pi m'_g}{N}}}{1 - e^{\frac{2i\pi m'_g}{N}}} \left\{ 1 - \left(e^{\frac{2i\pi m'_g}{N}} \right)^n \right\}. \end{aligned}$$

On voit que la dernière accolade ne change pas quand on augmente n de N . Par suite $n\theta_{hk}(n)$ ne peut prendre, quand n croît, que N valeurs distinctes $A_{hk}^{(1)}, \dots, A_{hk}^{(N)}$. Soit G le plus grand des modules des $r^2 N$ quantités finies $A_{hk}^{(a)}$. On aura

$$|n\theta_{hk}(n)| < G.$$

Donc $\theta_{hk}(n)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Il en est de même de $\varepsilon_{hk}(n)$ et par suite de

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^{t=n} \varepsilon_{hk}(t).$$

Enfinement : la moyenne arithmétique $\Pi_{hk}^{(n)}$ des n premières probabilités itérées $P_{hk}^{(t)}$ a toujours une limite déterminée Π_{hk} quand n croît. Cette proposition évidente dans le cas semi-régulier (p. 137) se trouve donc étendue aussi bien au cas singulier où les $P_{hk}^{(n)}$ n'ont pas de limites déterminées, qu'au cas semi-régulier où leurs limites existent mais dépendent de l'état initial. (Il serait intéressant de la démontrer directement sans l'intervention de la théorie des équations aux différences finies).

Nous pouvons d'ailleurs étendre aussi la proposition complémentaire de la p. 144. En effet puisque les $\Pi_{hk}^{(n)} - \Pi_{hk}$ sont infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, voyons ce qu'on peut dire de leurs ordres. Considérons à cet effet

$$n(\Pi_{hk}^{(n)} - \Pi_{hk}) = \sum_{t=1}^{t=n} \varepsilon_{hk}(t) + n\theta_{hk}(n).$$

On a déjà vu que le dernier terme est borné et même se reproduit périodiquement de N en N épreuves. D'autre part, d'après (19),

$$\sum_{t=1}^{t=n} \varepsilon_{hk}(t) = \sum_t \sum_g (q_g)^t \sum_\alpha R_{hk\alpha}^{(g)} t^\alpha = \sum_g \sum_\alpha R_{hk\alpha}^{(g)} \sum_{t=1}^{t=n} t^\alpha (q_g)^t$$

en posant

$$R_{hk}^{(g)}(t) = \sum_{\alpha} R_{hk\alpha}^{(g)} t^{\alpha} \quad \text{avec } \alpha \leq r.$$

Or la série

$$U_{g\alpha} = \sum_{t=1}^{t=+\infty} t^{\alpha} (q_g)^t$$

où $|q_g| < 1$ est absolument convergente. La série

$$\sum_{t=1}^{t=+\infty} \varepsilon_{hk}(t) = \sum_{g=1}^{g=r''} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=r'''} R_{hk\alpha}^{(g)} U_{g\alpha}$$

est convergente. Par suite, le produit $|n(\Pi_{hk}^{(n)} - \Pi_{hk})|$ est borné quand n croît, de sorte que $\Pi_{hk}^{(n)} - \Pi_{hk}$ est non seulement infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, mais toujours au moins du premier ordre en $\frac{1}{n}$, même dans le cas singulier.

Dans le cas semi-régulier, comme il n'y a pas (p. 137) de racines de l'équation « en s » de module 1 autre que 1, la série

$$s_{hk} = \sum_{t=1}^{t=\infty} [P_{hk}^{(t)} - P_{hk}]$$

se réduit à

$$\sum_{t=1}^{t=\infty} \varepsilon_{hk}^{(t)}.$$

On voit que, comme dans le cas régulier (p. 133), la série s_{hk} est, dans le cas semi-régulier, absolument convergente. Cette série est majorée par une progression géométrique (dont on peut prendre pour raison tout nombre supérieur au plus grand module des racines s_g autres que l'unité).

De plus, $\theta_{hk}(n)$ reste nul et le produit $n(\Pi_{hk}^{(n)} - P_{hk})$ non seulement est borné, mais a une limite.

En résumé, dans le cas semi-régulier, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\Pi_{hk}^{(n)} - P_{hk}) = s_{hk}.$$

comme on l'a déjà établi, p. 144, pour le cas régulier.

On a vu, p. 138, que si les $\Pi_{jk}^{(n)}$ convergent vers des limites Π_k indépendantes de j , alors l'unité ne peut être que racine simple de $\Delta(s)$.

Réciproquement, rappelons que dans l'expression (17) de $P_{jk}^{(n)}$, Π_{jk} est la somme des termes $\mu_{gj} v_{gk}(n)$ de (13) correspondant à $s_g = 1$ avec des coefficients $v_{gk}(n)$ qui sont, pour cette racine, indépendants de n . Si l'unité est racine simple, on a donc, en prenant $s_1 = 1$:

$$\Pi_{jk} = \mu_{1j} v_{1k}$$

et comme

$$\sum_k \Pi_{jk} = 1, \quad 1 = \mu_{1j} \sum_k v_{1k}.$$

La dernière relation montre que

$$\sum_k v_{1k} \neq 0$$

et par suite

$$II_{jk} = \frac{v_{1k}}{\sum_k v_{1k}}$$

quantité indépendante de j .

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour que les limites II_{jk} , au sens de Cesaro, des $P_{jk}^{(n)}$ soient indépendantes de l'état initial E_j est que l'unité soit racine simple de l'équation « en s » $\Delta(s)=0$. Il en est ainsi dans le cas régulier; dans le cas général, l'unité peut être racine multiple comme le montre l'exemple où

$$p_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=j, \\ 0 & \text{si } k \neq j. \end{cases}$$

Mais il y a des cas ni réguliers, ni semi-réguliers, où l'unité est racine simple, comme dans l'exemple de la p. 142.

Combinons ce résultat avec celui de la p. 141. Alors, la condition nécessaire et suffisante pour que les limites II_{jk} , au sens de Cesaro, des probabilités itérées $P_{jk}^{(n)}$, soient indépendantes des deux indices j, k , est que la condition (T_1') soit réalisée et que l'unité ne soit que racine simple de l'équation « en s ».

Critères pour le cas régulier.

Dans le cas régulier et même semi-régulier, les limites P_{jk} des $P_{jk}^{(n)}$ sont identiques aux limites II_{jk} des $II_{jk}^{(n)}$. On a vu à quelles conditions nécessaires et suffisantes (p. 153) les II_{jk} sont indépendants de j , et à quelles conditions nécessaires et suffisantes (p. 148), on est dans le cas semi-régulier. Dès lors, la condition nécessaire (voir aussi KONEČNÝ, III, I^{ter}) et suffisante (voir aussi KAUCKÝ, IV, I^{ter}) pour qu'on soit dans le cas régulier est que l'équation « en s » n'ait pas d'autres racines de module un que l'unité et que l'unité ne soit que racine simple de l'équation « en s », $\Delta(s)=0$. Observons que c'est l'introduction de la limite au sens de CESARO qui nous a permis de dissocier les deux parties de cette condition et d'en comprendre les rôles respectifs.

Enfin en combinant cette proposition et celle de la p. 153, on voit que: la condition nécessaire et suffisante pour que les $P_{jk}^{(n)}$ convergent vers une même limite (indépendante des deux indices h et k) est que: l'équation « en s » n'ait pas de racine de module un autre que l'unité, que l'unité n'en soit que racine simple et que la condition

$$(T_1') \quad \sum_j p_{jk} = 1$$

soit vérifiée.

CHAPITRE TROISIÈME

Valeurs moyennes. Fréquences moyennes.

Valeurs moyennes.

Soit $Y(E)$ une fonction de l'état E . Celui-ci étant déterminé par le hasard à chaque épreuve, on voit que $Y(E)$ est une variable aléatoire qui peut prendre les r valeurs $x_k = Y(E_k)$.

Désignons par $X_j^{(n)}$ la valeur prise par $Y(E)$ après n épreuves en partant de l'état E_j du système. Il est clair que la valeur moyenne de $X_j^{(n)}$ sera

$$\mathfrak{O} X_j^{(n)} = \sum_k x_k P_{jk}^{(n)}.$$

Il est utile de former aussi la moyenne arithmétique

$$A_j^{(n)} = \frac{1}{n} (X_j^{(1)} + X_j^{(2)} + \dots + X_j^{(n)}).$$

Sa valeur moyenne sera

$$M_j^{(n)} = \mathfrak{O} A_j^{(n)} = \sum_k x_k \Pi_{jk}^{(n)}.$$

Done *la valeur moyenne de $X_j^{(n)}$ converge toujours au sens de Cesaro*; c'est-à-dire que $M_j^{(n)}$ converge toujours au sens ordinaire. Et on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_j^{(n)} = M_j = \sum_k x_k \Pi_{jk}.$$

En particulier, *cette limite, M_j , a une valeur M indépendante de l'état initial E_j , non seulement dans le cas régulier, mais même dans le cas plus général où l'unité n'est que racine simple de l'équation « en s ».* Dans ce cas, la valeur $M = \sum_k x_k \Pi_k$ où les Π_k sont ≥ 0 et où $\sum_k \Pi_k = 1$ est une moyenne pondérée des valeurs possibles de $Y(E)$.

Cette condition suffisante (p. 153) doit d'ailleurs être nécessairement remplie si l'on veut que M_j soit indépendant de j quelle que soit la fonction $Y(E)$.

Si, en outre, la condition (T_1') :

$$\sum_j p_{jk} = 1, \quad (k=1, \dots, r),$$

est vérifiée alors $\Pi_k = \frac{1}{r}$ $M = \frac{1}{r} (x_1 + \dots + x_r)$

et M est la moyenne arithmétique des valeurs possibles de $Y(E)$.

La différence $M_j^{(n)} - M_j$, infiniment petite avec $\frac{1}{n}$, est toujours d'ordre au moins égal à celui de $\frac{1}{n}$, car il en est ainsi (p. 152) des différences $(\Pi_{jk}^{(n)} - \Pi_{jk})$ qui figurent dans

$$M_j^{(n)} - M_j = \sum_k x_k (\Pi_{jk}^{(n)} - \Pi_{jk}).$$

Et même, on peut préciser : dans le cas semi-régulier, le produit $n(M_j^{(n)} - M_j)$, non seulement est borné, mais encore a une limite (p. 152)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(M_j^{(n)} - M_j) = \sum_k x_k s_{jk}.$$

Dans ce même cas semi-régulier, la valeur moyenne de $X_j^{(n)}$ converge elle-même, au sens ordinaire et vers la même limite que $M_j^{(n)}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{O} X_j^{(n)} = \sum_k x_k P_{jk} = M_j.$$

Dans le cas régulier, elle converge au sens ordinaire vers une limite

$$M = \sum_k x_k P_k$$

indépendante de l'état initial E_j .

Fréquences moyennes

Soit $R_{jk}^{(n)}$ le nombre total d'apparitions de l'état E_k au cours de n épreuves à partir de l'état E_j et posons $f_{jk}^{(n)} = \frac{1}{n} R_{jk}^{(n)}$. Si l'on désigne par $U_{jk}^{(t)}$ une variable aléatoire égale à 1 ou 0 suivant qu'en partant de l'état E_j , l'état E_k s'est ou non présenté à la $t^{\text{ième}}$ épreuve, on a

$$f_{jk}^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{t=n} U_{jk}^{(t)}.$$

De sorte qu'en prenant dans ce qui précède pour $X_j^{(t)}$, $U_{jk}^{(t)}$, alors $A_j^{(n)}$ est remplacé par $f_{jk}^{(n)}$. Or il est clair que $R_{jk}^{(n)}$ et $f_{jk}^{(n)}$ sont respectivement la « répétition » et la « fréquence » de l'état E_k au cours de n épreuves à partir de l'état E_j . On en déduit immédiatement quelques résultats obtenus par certains auteurs au moyen de calculs assez laborieux, en même temps qu'on étend ces résultats à des cas plus généraux et qu'on les complète. Par exemple :

La valeur moyenne de la fréquence $f_{jk}^{(n)}$ converge toujours vers une limite Π_{jk} quand n croît. Cette valeur moyenne n'est autre en effet que $\Pi_{jk}^{(n)}$. On peut aussi répéter exactement pour la valeur moyenne de la fréquence $f_{jk}^{(n)}$ les propositions que nous avons énoncées relativement à $\Pi_{jk}^{(n)}$.

Dispersion. Dispersion de $X_j^{(n)}$.

L'écart quadratique moyen $\mu_j^{(n)}$ de $X_j^{(n)}$ avec sa valeur moyenne est donné par

$$[\mu_j^{(n)}]^2 = \sum_k [x_k - \mathfrak{N}X_j^{(n)}]^2 P_{jk}^{(n)}.$$

Dans le cas semi-régulier $\mathfrak{N}X_j^{(n)} = \sum_k x_k P_{jk}^{(n)}$ tend vers

$$(21) \quad M_j = \sum_k x_k P_{jk}$$

et $[\mu_j^{(n)}]^2$ tend vers

$$(\mu_j)^2 = \sum_k (x_k - M_j)^2 P_{jk}.$$

Dans le cas régulier, les $(\mu_j)^2$ sont égaux à une même quantité indépendante de l'état initial E_j :

$$\mu^2 = \sum_k (x_k - M)^2 P_k.$$

On peut aussi considérer l'écart quadratique moyen $\lambda_j^{(n)}$ de $X_j^{(n)}$ avec M_j . On a

$$[\lambda_j^{(n)}]^2 = [\mu_j^{(n)}]^2 + [M_j - \mathfrak{N}X_j^{(n)}]^2.$$

Dans le cas semi-régulier, on sait que $M_j - \mathfrak{N}X_j^{(n)}$ tend vers zéro et par suite que $\lambda_j^{(n)}$ tend aussi vers μ_j .

On peut aussi se demander ce qu'il advient de la dispersion, dans le cas général, quand n croît.

On a :

$$[\lambda_j^{(n)}]^2 = \sum_k (x_k - M_j)^2 P_{jk}^{(n)}.$$

Puisque dans le cas singulier les $P_{jk}^{(n)}$ n'ont pas de limites, $[\lambda_j^{(n)}]^2$ n'a pas nécessairement une limite au sens ordinaire. Par contre il est clair que $P_{jk}^{(n)}$ tendant au sens de CESARO vers une limite Π_{jk} , alors $[\lambda_j^{(n)}]^2$ *tendra au sens de Cesaro* vers la quantité

$$(22) \quad (\lambda_j)^2 = \sum_k (x_k - M_j)^2 \Pi_{jk}.$$

Extension d'un théorème de Markoff.

Nous avons vu que dans le cas le plus général $M_j^{(n)} = \mathfrak{N}A_j^{(n)}$ tend vers

$$M_j = \sum_k x_k \Pi_{jk},$$

en appelant $A_j^{(n)}$ la moyenne arithmétique des valeurs successives $X_j^{(1)}, \dots, X_j^{(n)}$.

MARKOFF a étudié l'écart quadratique moyen $\rho_j^{(n)}$ de $A_j^{(n)}$ avec sa moyenne $M_j^{(n)}$ et il a montré que dans le cas positivement régulier cet écart moyen est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. On peut étendre considérablement son champ de recherche et

étudier l'écart $\varrho_j^{(n)}$ dans les cas régulier et semi-régulier et même obtenir certains résultats dans le cas général.

Pour cela, il nous sera plus commode, d'étudier d'abord l'écart quadratique moyen $\delta_j^{(n)}$ de $A_j^{(n)}$ avec la limite $M_j = \sum_k x_k \Pi_{jk}$ de sa moyenne $M_j^{(n)}$.

On a

$$\begin{aligned} [\delta_j^{(n)}]^2 &= \mathfrak{D}\mathfrak{C}[A_j^{(n)} - M_j]^2 = \frac{1}{n^2} \mathfrak{D}\mathfrak{C} \left[\sum_{t=1}^{t=n} (X_j^{(t)} - M_j) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^{t=n} \mathfrak{D}\mathfrak{C}(X_j^{(t)} - M_j)^2 + \frac{2}{n^2} \sum_{\substack{v \neq w}} \mathfrak{D}\mathfrak{C} \{ (X_j^{(v)} - M_j)(X_j^{(w)} - M_j) \} = I_n + L_n. \end{aligned}$$

On a

$$nI_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{t=n} [\lambda_j^{(t)}]^2.$$

Puisque dans le cas général $[\lambda_j^{(t)}]^2$ converge au sens de CESARO vers une limite finie $(\lambda_j)^2$, on voit qu'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = (\lambda_j)^2 = \sum_k (x_k - M_j)^2 \Pi_{jk}.$$

Passons à L_n . Il y figure un couple v, w qui ne doit être pris qu'une fois. On peut donc, puisque $v \neq w$, supposer que v est le plus petit. Le produit

$$(X_j^{(v)} - M_j)(X_j^{(w)} - M_j)$$

prend la valeur

$$(x_k - M_j)(x_i - M_j)$$

si à partir de l'état E_j , l'état E_k se présente à la $v^{\text{ième}}$ épreuve, puis l'état E_i à la $w^{\text{ième}}$. La probabilité pour qu'il en soit ainsi est évidemment $P_{jk}^{(v)} P_{ki}^{(w-v)}$. De sorte que

$$L_n = \sum_{i, k} (x_k - M_j)(x_i - M_j) K_{jki}^{(n)}$$

où i, k sont distincts ou non et varient de 1 à r et où

$$K_{jki}^{(n)} = \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq v < w \leq n} P_{jk}^{(v)} P_{ki}^{(w-v)}.$$

Pour l'étude de la convergence, il sera utile d'écrire

$$K_{jki}^{(n)} = \frac{2}{n^2} \sum_{v < w} P_{jk}^{(v)} [P_{ki}^{(w-v)} - \Pi_{ki}] + \frac{2}{n^2} \sum_{v < w} P_{jk}^{(v)} \Pi_{ki} = D_n + Q_n.$$

On a en laissant d'abord dans Q_n , w fixe et faisant croître v de 1 à $w-1$

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{2\Pi_{ki}}{n^2} \sum_{1 < w \leq n} (w-1) \Pi_{jk}^{(w-1)} = \frac{2\Pi_{ki}}{n^2} \sum_{t \leq n-1} t (\Pi_{jk}^{(t)} - \Pi_{jk}) + \Pi_{ki} \Pi_{jk} \frac{n-1}{n} \\ &= \Pi_{ki} \Pi_{jk} + \frac{B_n}{n} \end{aligned}$$

avec

$$B_n = 2\Pi_{ki} \frac{(n-1)}{n} \left[\frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{t=n-1} t(\Pi_{jk}^{(t)} - \Pi_{jk}) \right] - \Pi_{ki}\Pi_{jk}.$$

Dans le cas général, on a vu, p. 152, que $n(\Pi_{jk}^{(n)} - \Pi_{jk})$ est borné. On peut appeler H un nombre qui lui soit supérieur en valeur absolue quels que soient n , j , k , et on aura :

$$|B_n| \leq 2\Pi_{ki} \frac{n-1}{n} H + \Pi_{jk}\Pi_{ki} < 2\Pi_{ki}H + \Pi_{ki}\Pi_{jk}.$$

Donc

$$(23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \Pi_{ki}\Pi_{jk},$$

et $n[Q_n - \Pi_{ki}\Pi_{jk}]$ reste borné quand n croît.

En outre, dans le cas semi-régulier, la quantité $n(\Pi_{jk}^{(n)} - \Pi_{jk})$ a une limite s_{jk} quand n croît, donc le crochet qui figure dans B_n tend aussi vers s_{jk} et l'on a

$$(24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n[Q_n - P_{ki}P_{jk}] = 2P_{ki}s_{jk} - P_{ki}P_{jk}.$$

Passons à D_n . On a en y laissant v fixe et faisant croître w

$$D_n = \frac{2}{n^2} \sum_{v < n} P_{jk}^{(v)}(n-v)[\Pi_{ki}^{(n-v)} - \Pi_{ki}].$$

D'où, puisque $P_{jk}^{(v)} \leq 1$ et $|(n-v)(\Pi_{ki}^{(n-v)} - \Pi_{ki})| < H$,

$$|D_n| \leq \frac{2}{n^2} (n-1)H$$

et par suite

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 0$$

et nD_n est borné quand n croît.

Dans le cas semi-régulier, $\frac{nD_n}{2}$ est de la forme

$$\frac{nD_n}{2} = \frac{n-1}{n} \left[\frac{1}{n-1} (a_1\beta_{n-1} + a_2\beta_{n-2} + \dots + a_{n-1}\beta_1) \right]$$

où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = P_{jk}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta = s_{ki}.$$

Dans ces conditions, on sait que le crochet tend vers $a\beta$, on a donc

$$(26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} nD_n = 2P_{jk}s_{ki}.$$

Ainsi on a dans le cas général

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_{jki}^{(n)} = \Pi_{ki}\Pi_{jk},$$

et $n[K_{jki}^{(n)} - \Pi_{ki}\Pi_{jk}]$ est borné.

Et dans le cas semi-régulier

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n[K_{jki}^{(n)} - P_{jk}P_{ki}] &= \lim_{n \rightarrow \infty} n[Q_n - P_{jk}P_{ki}] + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} nD_n = 2P_{ki}S_{jk} - P_{jk}P_{ki} + 2P_{jk}S_{ki}. \end{aligned}$$

En résumé, on a d'abord le résultat suivant : *l'écart quadratique avec M_j soit $\delta_j^{(n)}$, de la moyenne arithmétique $A_j^{(n)} = \frac{X_j^{(1)} + \dots + X_j^{(n)}}{n}$ des valeurs d'une variable aléatoire dans n épreuves successives relatives à des événements « en chaîne » a toujours une limite quand le nombre des épreuves croît indéfiniment. Cette limite est une quantité W_j qui n'est pas nécessairement nulle, comme nous en verrons des exemples, p. 162. On a*

$$[W_j]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} [L_n + L_n] \equiv \sum_{i, k} (x_k - M_j)(x_i - M_j) [\lim_{n \rightarrow \infty} K_{jki}^{(n)}].$$

D'où :

$$\begin{aligned} (27) \quad [W_j]^2 &\equiv \sum_{i, k} (x_k - M_j)(x_i - M_j) \Pi_{jk} \Pi_{ki} \\ &= \sum_k (x_k - M_j)^2 \Pi_{jk} \Pi_{kk} + \sum_{i \neq k} (x_k - M_j)(x_i - M_j) (\Pi_{jk} \Pi_{ki} + \Pi_{ji} \Pi_{ik}). \end{aligned}$$

On peut aussi écrire :

$$[W_j]^2 \equiv \sum_k (x_k - M_j) \Pi_{jk} \left[\sum_i x_i \Pi_{ki} - M_j \sum_i \Pi_{ki} \right],$$

d'où

$$(28) \quad [W_j]^2 = \sum_k (x_k - M_j) \Pi_{jk} (M_k - M_j)$$

ou, puisque $\sum_k (x_k - M_j) \Pi_{jk} M_j = M_j \left[\sum_k x_k \Pi_{jk} - M_j \sum_k \Pi_{jk} \right] = 0$,

$$(29) \quad [W_j]^2 \equiv \sum_k M_k \Pi_{jk} (x_k - M_j).$$

Sous la seconde forme (28), on voit que W_j est nul, en particulier, quand les M_k sont tous égaux à M_j . C'est ce qui a lieu dans le cas régulier. Mais W_j peut aussi être nul dans certains cas singuliers par exemple lorsque les Π_{lk} sont indépendants de l (c'est-à-dire lorsque l'équation « en s » n'a l'unité que pour racine simple). Même en dehors de ce cas W_j peut être nul lorsque les r nombres x_k sont choisis convenablement, par exemple choisis de sorte que les M_k soient égaux, ce qui aura lieu par exemple si les x_k sont égaux.

Ainsi la limite W_j de $\delta_j^{(n)}$ peut être nulle, non seulement dans le cas régulier, où elle est nécessairement nulle, mais dans bien d'autres cas. Si elle est nulle, $\delta_j^{(n)}$ est infiniment petit avec n ; mais

$$(30) \quad n[\delta_j^{(n)}]^2 = nI_n + \left[\sum_{i, k} (x_k - M_j)(x_i - M_j) n(K_{jki}^{(n)} - \Pi_{jk} \Pi_{ki}) \right] + n[W_j]^2.$$

D'après ce qui précède, si $W_j=0$, le second membre reste borné quand n croît. Donc : ou bien $\delta_j^{(n)}$ a une limite positive ou bien $\delta_j^{(n)}$ est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$ et d'un ordre au moins égal à celui de $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

Dans le cas semi-régulier, si $W_j=0$, on a d'après (30),

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n[\delta_j^{(n)}]^2 &= (\lambda_j')^2 = (\lambda_j)^2 + U_j \\ \text{avec} \\ (31) \quad (\lambda_j)^2 &= \sum_k (x_k - M_j)^2 P_{jk} \\ U_j &= \sum_{k, i} (x_k - M_j)(x_i - M_j)[2P_{ki} s_{jk} + 2P_{jk} s_{ki} - P_{jk} P_{ki}]. \end{aligned}$$

D'ailleurs puisqu'on suppose nul W_j , on voit qu'on supprimer le dernier terme du crochet de U_j et écrire

$$\begin{aligned} U_j &= 2 \sum_{k, i} (x_k - M_j)(x_i - M_j)(P_{ki} s_{jk} + P_{jk} s_{ki}) \\ &= 2 \left\{ \sum_k (x_k - M_j)^2 (P_{kk} s_{jk} + P_{jk} s_{kk}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \neq i} (x_k - M_j)(x_i - M_j)[s_{jk} P_{ki} + s_{ji} P_{ik} + P_{jk} s_{ki} + P_{ji} s_{ik}] \right\}. \end{aligned}$$

Ainsi dans le cas semi-régulier, non seulement, si $W_j=0$, $n[\delta_j^{(n)}]^2$ reste borné quand n croît, mais encore ce produit tend vers une limite :

$$(32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n[\delta_j^{(n)}]^2 = (\lambda_j')^2$$

avec

$$(33) \quad (\lambda_j')^2 = \sum_k (x_k - M_j)^2 P_{jk} + 2 \sum_{k, i} (x_k - M_j)(x_i - M_j)(P_{ki} s_{jk} + P_{jk} s_{ki}).$$

Dans le cas semi-régulier, nous verrons (p. 162) des exemples où $W_j \neq 0$, où par suite $\delta_j^{(n)}$ a une limite $\neq 0$. Par contre, dans le cas régulier, W_j est nécessairement nul, $\delta_j^{(n)}$ tend toujours vers zéro. De plus, λ_j' prend une valeur λ' indépendante de j , avec

$$(\lambda')^2 = \sum_k (x_k - M)^2 P_k + 2 \sum_{k, i} (x_k - M)(x_i - M)(P_{ki} s_{jk} + P_k s_{ki}).$$

En outre il se produit une simplification, car

$$\sum_{k, i} (x_k - M)(x_i - M) P_i s_{jk} = \sum_k \left\{ (x_k - M) s_{jk} \sum_i (x_i - M) P_i \right\}$$

quantité qui est nulle puisque

$$\sum_i (x_i - M) P_i = \sum_i P_i x_i - M = 0.$$

Ainsi, sans avoir à distinguer deux hypothèses concernant W_j , on peut dire que :

dans le cas régulier, $\delta_j^{(n)}$ est toujours un infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, d'ordre au moins égal à celui de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, et $\sqrt{n} \delta_j^{(n)}$ tend vers une limite λ' indépendante de j et donnée par

$$(34) \quad (\lambda')^2 = \sum_k (x_k - M)^2 P_k + 2 \sum_{k,i} (x_k - M)(x_i - M) P_k s_{ki}.$$

Alors que les résultats précédents généralisaient celui de MARKOFF, ce dernier énoncé est identique à celui de MARKOFF, à l'exception près de l'expression de $(\lambda')^2$, obtenue aussi indépendamment par M. J. POTOČEK (V, I^{ter}) et dont le calcul se trouve maintenant ramené à celui des P_k et des s_{ki} , lequel peut se faire comme on l'a vu, p. 144, au moyen de la résolution successive de deux systèmes d'équations du premier degré sans itération préalable.

Nous pouvons maintenant passer à l'écart quadratique moyen tout court $\varrho_j^{(n)}$ de $A_j^{(n)}$; c'est-à-dire que

$$[\delta_j^{(n)}]^2 = \mathfrak{N} \mathfrak{C} [A_j^{(n)} - \mathfrak{N} \mathfrak{C} A_j^{(n)}]^2 = [\varrho_j^{(n)}]^2 + [M_j^{(n)} - M_j]^2.$$

On a vu, p. 154, que $M_j^{(n)}$ tend toujours vers M_j quand n croît et que $M_j^{(n)} - M_j$ est toujours d'ordre au moins égal à $\frac{1}{n}$. Donc $n[M_j^{(n)} - M_j]^2$ tend toujours vers zéro. Par suite, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varrho_j^{(n)}]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} [\delta_j^{(n)}]^2 = [W_j]^2$$

et même, lorsque $W_j = 0$, les quantités $n[\varrho_j^{(n)}]^2$ et $n[\delta_j^{(n)}]^2$ sont en même temps bornées; et quand la seconde a une limite, la première aussi et c'est la même.

Il en résulte que les énoncés précédents concernant $\delta_j^{(n)}$, subsistent tous quand on y substitue $\varrho_j^{(n)}$ à $\delta_j^{(n)}$.

Dispersion de la fréquence moyenne.

Appelons $\mathfrak{G}_{jh}^{(n)}$ et $\mathfrak{G}_{jh}^{(n)}$ les écarts quadratiques moyens de la fréquence $f_{jh}^{(n)}$ avec sa valeur moyenne $\Pi_{jh}^{(n)}$ et avec la limite Π_{jh} de celle-ci. On déduira les valeurs de ces deux écarts de celles de $\varrho_j^{(n)}$ et $\delta_j^{(n)}$, en prenant dans ce qui précède pour $X_j^{(n)}$, $U_{jh}^{(n)}$ c'est-à-dire en prenant $x_i = 1$ si $i = h$ et $= 0$ si $i \neq h$.

Alors $M_i = \sum_k x_k \Pi_{ik}$ devient ici Π_{ih} et

$$[W_j]^2 = \sum_k M_k \Pi_{jk} x_k - M_j \sum_k M_k \Pi_{jk}$$

devient ici

$$[w_{jh}]^2 = \Pi_{hh} \Pi_{jh} - \Pi_{jh} \sum_k \Pi_{kh} \Pi_{jk}.$$

Cette formule peut se simplifier, en établissant une relation simple entre les Π_{hk} . Partons de l'égalité

$$P_{jh}^{(t+u)} = \sum_k P_{jk}^{(t)} P_{kh}^{(u)}.$$

Additionnons les égalités obtenues pour $u=1, \dots, n$, on a

$$(t+n)\Pi_{jh}^{(t+n)} - t\Pi_{jh}^{(t)} = n \sum_k P_{jk}^{(t)} \Pi_{kh}^{(n)}.$$

En divisant par n et faisant croître n

$$\Pi_{jh} = \sum_k P_{jk}^{(t)} \Pi_{kh}.$$

En opérant sur cette dernière formule avec t comme on a fait avec u , on obtient

$$\Pi_{jh} = \sum_k \Pi_{jk} \Pi_{kh}.$$

Ainsi

$$(35) \quad [w_{jh}]^2 = \Pi_{jh}(\Pi_{hh} - \Pi_{jh}).$$

Donc l'écart quadratique moyen $\mathcal{E}_{jh}^{(n)}$ de la fréquence $f_{jh}^{(n)}$ a toujours une limite w_{jh} quand n croît et cette limite est donnée par la formule (35) ci-dessus.

Cette limite est évidemment nulle dans le cas régulier. Dans le cas non régulier on peut citer des exemples où w_{jh} est $\neq 0$ et des exemples où $w_{jh} = 0$.

Prenons pour déterminant des p_{hk} l'une des deux formes distinctes

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Dans l'une ou l'autre hypothèse, on voit facilement que $P_{jk}^{(n)} = p_{jk}$ quelque soit n . C'est un cas semi-régulier; mais ce n'est pas un cas régulier puisque pour les deux déterminants on a par exemple $P_{11} \neq P_{21}$. On voit alors que pour le premier déterminant toutes les quantités w_{jh} sont nulles, tandis que pour le second, on a, par exemple $[w_{j2}]^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} \neq 0$.

(Il en résulte qu'en revenant au calcul de $[\delta_j^{(n)}]^2$, la quantité W_j peut bien, comme nous l'avons annoncé, être — en dehors du cas régulier —, soit nulle, soit positive).

Comme pour $q_j^{(n)}$ on peut dire aussi que: si $w_{jh} = 0$ — c'est-à-dire, si Π_{jh} est égal à Π_{hh} ou à zéro — alors l'écart quadratique moyen $\mathcal{E}_{jh}^{(n)}$ de la fréquence $f_{jh}^{(n)}$ est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, et d'un ordre au moins égal à celui de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

En particulier, dans le cas semi-régulier si $w_{jh} = 0$, non seulement $n[\mathcal{E}_{jh}^{(n)}]^2$ est borné quand n varie, mais ce produit tend vers une limite, qu'on peut appeler $(a_{jh})^2$. Cette limite est ce que devient dans le cas actuel la quantité $(\lambda_j')^2$.

On peut toujours écrire celle-ci, d'après (33),

$$\begin{aligned} (\lambda_j')^2 &= \sum_k x_k^2 P_{jk} - (M_j)^2 + 2 \sum_{k,i} x_k x_i (P_{ki} s_{jk} + P_{ik} s_{hi}) \\ &\quad - 2M_j \sum_{k,i} x_k (P_{ki} s_{jk} + P_{jk} s_{ki}) \\ &\quad - 2M_j \sum_{k,i} x_i (P_{ki} s_{jk} + P_{jk} s_{ki}) \end{aligned}$$

en tenant compte de ce que

$$2(M_j)^2 \sum_{k,i} (P_{ki} s_{jk} + P_{jk} s_{ki}) = 2(M_j)^2 \left[\sum_k \left\{ s_{jk} \left(\sum_i P_{ki} \right) \right\} + \sum_k \left\{ P_{ik} \left(\sum_i s_{ki} \right) \right\} \right] = 0$$

en vertu de $\sum_k s_{jk} = \sum_k s_{ki} = 0$ (p. 144).

On a donc ici

$$\begin{aligned} (a_{jh})^2 &= P_{ih} - (P_{jh})^2 + 2(P_{hh} s_{jh} + P_{jh} s_{hh}) \\ &\quad - 2P_{jh} \sum (P_{hi} s_{jh} + P_{jh} s_{hi}) \\ &\quad - 2P_{jh} \sum_k (P_{kh} s_{jk} + P_{jk} s_{kh}) \\ &= P_{jh} \left\{ 1 - P_{jh} + 2(s_{hh} - s_{jh}) - 2 \sum_k (P_{kh} s_{jk} + P_{jk} s_{kh}) \right\} + 2P_{hh} s_{jh}. \end{aligned}$$

Mais on peut simplifier. Partons en effet de la relation

$$P_{jh}^{(n+m)} = \sum_i P_{ji}^{(n)} P_{ih}^{(m)}.$$

En faisant tendre n ou m séparément vers l'infini :

$$P_{jh} = \sum_i P_{ji} P_{ih}^{(m)} = \sum_i P_{ji}^{(n)} P_{ih}.$$

Alors :

$$\sum_{t=1}^{t=n} (P_{jh}^{(t+m)} - P_{jh}) = \sum_i P_{ji}^{(m)} \sum_{t=1}^{t=n} [P_{ih}^{(t)} - P_{ih}] = \sum_i \left\{ \sum_{t=1}^{t=n} [P_{ji}^{(t)} - P_{ji}] \right\} P_{ih}^{(m)}.$$

Et si $n \rightarrow \infty$

$$s_{jh} - \sum_{u=1}^{u=m} (P_{jh}^{(u)} - P_{jh}) = \sum_i P_{ji}^{(m)} s_{ih} = \sum_i s_{ji} P_{ih}^{(m)}$$

d'où, quand $m \rightarrow \infty$,

$$0 = \sum_i P_{ji} s_{ih} = \sum_i s_{ji} P_{ih}.$$

Donc :

$$(36) \quad (a_{jh})^2 = P_{jh} \left\{ 1 - P_{jh} + 2s_{hh} \right\} + 2s_{jh} (P_{hh} - P_{jh}).$$

Mais le calcul est fait dans l'hypothèse où

$$0 = [w_{jh}]^2 = P_{jh} (P_{hh} - P_{jh}).$$

Donc: ou bien $P_{jh} = P_{hh}$ et alors la limite de $n[\mathcal{G}_{jh}^{(n)}]^2$ est

$$(37) \quad (a_{jh})^2 = P_{hh} \{1 - P_{hh} + 2s_{hh}\}$$

ou bien $P_{jh} = 0$ et alors

$$(38) \quad (a_{jh})^2 = 2s_{jh}P_{hh}.$$

Enfin, dans le cas régulier, on n'a plus à envisager plusieurs hypothèses, on a nécessairement $w_{jh} = 0$ et $P_{jh} = P_{hh}$. Donc: dans le cas régulier $n(\mathcal{G}_{jh})^2$ tend vers une limite $(a_n)^2$ indépendante de l'état initial E_j et donnée par

$$(39) \quad (a_n)^2 = P_h[1 - P_h + 2s_{hh}].$$

LISTE DE RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- I. B. HOSTINSKY: *Méthodes générales du Calcul des Probabilités*, 66 pages, Gauthier-Villars, 1931.
- I.bis B. HOSTINSKY: Conférences publiés dans les *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1932.
- I.ter B. HOSTINSKY: *Note du rédacteur*, Publ. Fac. Sc. Univ. Masaryk, 1932, fasc. 154, p. 28.
- II. V. ROMANOVSKY: *Sur les chaînes de Markoff*, C. R. Acad. Sc. U. R. S. S., 1929, p. 203.
- III. M. KONEČNÝ: *Sur la théorie des chaînes de Markoff*, Publ. Fac. Sc. Un. Masaryk, 1931, fasc. 147, p. 17.
- IV. J. KAUCKÝ: *Quelques remarques sur les chaînes de Markoff*, Publ. Fac. Sc. Un. Masaryk, 1930, fasc. 131, p. 21.
- V. J. POTOČEK: *Sur la dispersion dans la théorie des chaînes de Markoff*, Publ. Fac. Sc. Un. Masaryk, 1932, fasc. 154, p. 24.
- VI. M. LUBLIN: *Sur les systèmes d'équations linéaires aux différences finies du premier ordre à coefficients constants*, Revue de Mathem. Spéciales, 1932-33.