ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

HARALD BOHR
BÖRGE JESSEN

Über fastperiodische Bewegungen auf einem Kreis

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 4 (1932), p. 385-398
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_4_385_0>

ÜBER FASTPERIODISCHE BEWEGUNGEN AUF EINEM KREIS

Von Harald Bohr und Börge Jessen (Kopenhagen).

1. - In der Theorie der fastperiodischen Funktionen (1) wird eine bestimmte Klasse von komplexen Funktionen $f(x)$ einer reellen Variablen x, $-\infty < x < +\infty$, auf verschiedene Weisen charakterisiert. In der vorliegenden Arbeit wird im wesentlichen nur von den ersten Tatsachen dieser Theorie, die sich direkt an die Definition der fastperiodischen Funktionen durch ihre Verschiebungseigenschaften anschliessen, Gebrauch gemacht. Bevor wir dazu übergehen, die Fragestellung näher zu erörtern, sei zunächst in aller Kürze von diesen ersten Tatsachen der Theorie erinnert.

Von einer auf der Zahlenachse $-\infty < x < +\infty$ liegenden Punktmenge soll gesagt werden, dass sie daselbst relativ dicht liegt, falls sie in jedem Intervall einer gewissen Länge L mit mindestens einem Punkt vertreten ist. Eine für $-\infty < x < +\infty$ stetige Funktion $f(x) = u(x) + iv(x)$ heisst *fastperiodisch*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine relativ dicht liegende Menge von Verschiebungszahlen $\tau = \tau(\varepsilon)$ gibt, d. h. Zahlen τ, welche für alle x die Ungleichung

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leqq \varepsilon$$

befriedigen. Die wenigen Eigenschaften dieser Funktionen, die wir im folgenden benutzen, sind nun leicht aufzuzählen.

Jede fastperiodische Funktion $f(x)$ ist beschränkt und in dem ganzen unendlichen Intervall $-\infty < x < +\infty$ gleichmässig stetig (d. h. es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass $|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \varepsilon$, sobald $|x_2 - x_1| \leqq \delta$ ist). Ferner sind gleichzeitig mit $f(x) = u(x) + iv(x)$ auch die reellen Funktionen $u(x)$, $v(x)$ und $|f(x)|$ fastperiodisch. Dagegen sind $\frac{1}{f(x)}$ und $\frac{1}{|f(x)|}$ nur dann fastperiodisch, wenn $f(x)$ nicht nur von Null verschieden ist, sondern sogar in sicherer Entfernung von Null bleibt, d. h. falls $|f(x)| > k > 0$ ist. Allgemeiner gilt: Ist $\alpha(z)$ eine Funktion der komplexen Variablen $z = u + iv$, welche für jeden Wert von x in dem

(1) H. Bohr: *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*, I, II, III. Acta mathematica, 45 (1924), 46 (1925), 47 (1926). Die dritte Arbeit beschäftigt sich mit analytischen fastperiodischen Funktionen einer komplexen Variablen und kommt hier nicht in Frage.

Punkte $z=f(x)=u(x)+iv(x)$ definiert ist, und die ferner in der von diesen Punkten z gebildeten Menge gleichmässig stetig ist, so ist gleichzeitig mit $f(x)$ auch die Funktion $a(f(x))$ fastperiodisch. Diese Sätze sind alle unmittelbar der obigen Definition zu entnehmen. Nicht trivial ist dagegen der folgende Satz: Gleichzeitig mit $f(x)$ und $g(x)$ sind auch die beiden Funktionen $f(x)+g(x)$ und $f(x)g(x)$ fastperiodisch. Der Schlüssel zu dem Beweis dieses Satzes bildet der Satz: Sind $f(x)$ und $g(x)$ fastperiodisch, so gibt es stets zu jedem $\varepsilon>0$ eine relativ dicht liegende Menge von gemeinsamen Verschiebungszahlen $\tau=\tau(\varepsilon)$ der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Schliesslich sei noch der folgende Satz erwähnt: Die Grenzfunktion einer in dem ganzen unendlichen Intervall $-\infty<x<+\infty$ gleichmässig konvergenten Folge von fastperiodischen Funktionen ist wieder eine fastperiodische Funktion.

Hiermit sind alle Sätze erwähnt, die wir im folgenden direkt benutzen werden. Insbesondere wird also der Hauptsatz der ganzen Theorie nicht herangezogen. Dieser besagt, dass dieselbe Funktionenklasse, die in der obigen Definition durch Verschiebungseigenschaften charakterisiert wurde, auch in einer ganz anderen Weise, nämlich durch Schwingungseigenschaften, charakterisiert werden kann. Jeder fastperiodischen Funktion $f(x)$ ist eindeutig eine gewisse unendliche Reihe, ihre *Fourierreihe*

$$\sum A_n e^{i\Lambda_n x}$$

zugeordnet, die ihrerseits die Funktion eindeutig bestimmt. Hierbei sind die Exponenten Λ_n reelle Zahlen, während die Koeffizienten A_n komplexe Zahlen sind. Die Theorie dieser Reihen gibt nun den Schlüssel zu dem Beweis des Hauptsatzes der Theorie, des sogenannten Approximationssatzes: Bezeichnet man als Exponentialpolynom jede endliche Summe der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x}$$

mit reellen Exponenten λ_n und komplexen Koeffizienten a_n, so ist eine für $-\infty<x<+\infty$ gegebene Funktion $f(x)$ dann und nur dann fastperiodisch, wenn sie gleichmässig in $-\infty<x<+\infty$ durch Exponentialpolynome approximiert werden kann. Von einer Anwendung dieses Satzes ist im folgenden keine Rede; nur ganz beiläufig werden einige Bemerkungen über die Fourierexponenten der auftretenden Funktionen gemacht.

* * *

2. - Es sei $f(x)=u(x)+iv(x)$ eine fastperiodische Funktion. Trivial ist es dann, dass die beiden reellen Komponenten $u(x)$ und $v(x)$ je für sich fastperiodische Funktionen sind. Zu einer interessanteren Fragestellung wird man aber geführt, wenn man $f(x)$ mit Hilfe von Modul und Argument darstellt,

$$f(x)=|f(x)|\cdot e^{i\varphi(x)},$$

wobei wir annehmen wollen, dass $f(x)$ für alle x von Null verschieden ist, damit das Argument $\varphi(x)$ (wenn es etwa durch die Festsetzung $-\pi \leqq \varphi(0) < \pi$ normiert wird) als eindeutige, stetige Funktion von x festgelegt werden kann. Dass der Modul $|f(x)|$ wiederum fastperiodisch wird, ist trivial. Das Problem, die Natur der Argumentfunktion $\varphi(x)$ kennzuzeichnen, wurde von BOHR ([2]) behandelt, und zwar bewies er den folgenden, schon vorher von WINTNER als Vermutung hingestellten Satz: Falls die Funktion $\frac{f(x)}{|f(x)|} = e^{i\varphi(x)}$ überhaupt fastperiodisch ist — und dies ist vor allem immer dann der Fall, wenn $f(x)$ nicht nur überall von Null verschieden ist, sondern sogar in sicherer Entfernung von Null bleibt, d. h. falls $|f(x)| > k > 0$ ist — ist $\varphi(x)$ in der Gestalt

$$\varphi(x) = cx + \psi(x)$$

darstellbar, wo c eine Konstante ist und $\psi(x)$ eine fastperiodische Funktion bedeutet. Dass umgekehrt, wenn $\varphi(x)$ von dieser Form ist, die Funktion $e^{i\varphi(x)}$ fastperiodisch ist, ist trivial.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir allgemein Funktionen der Form

$$y = cx + \psi(x) \tag{1}$$

studieren, wo c eine reelle Konstante, und $\psi(x)$ eine reelle fastperiodische Funktion bezeichnet. Indem wir x als Argument eines variablen Punktes P_x auf einem Kreis X (mit Zentrum in Origo) und entsprechenderweise y als Argument eines variablen Punktes P_y auf einem Kreise Y deuten, wollen wir uns der, dem oben angeführten Sachverhalt angepassten, Ausdrucksweise bedienen, dass durch die Gleichung (1) eine fastperiodische Bewegung des Punktes P_y auf dem Kreise Y bestimmt wird; hierbei können wir uns etwa denken, dass der Punkt P_x sich mit konstanter Geschwindigkeit auf dem Kreise X bewegt.

3. - Es sei

$$y = c_1 x + \psi_1(x) \tag{2}$$

mit konstantem c_1 und fastperiodischem $\psi_1(x)$, und

$$z = c_2 y + \psi_2(y) \tag{3}$$

wiederum mit konstantem c_2 und fastperiodischem $\psi_2(y)$ gegeben. Wir wollen nunmehr die beiden Funktionen (2) und (3) zusammensetzen, d. h. z als Funktion von x betrachten. Hierüber wollen wir den folgenden Satz beweisen:

SATZ I. - *Die durch* (2) *und* (3) *zusammengesetzte Funktion* $z = z(x)$

([2]) H. BOHR: *Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*, I. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab Math.-fys. Meddelelser, X, 10 (1930).

stellt wiederum eine fastperiodische Bewegung dar, d. h. es lässt sich diese Funktion in der Form

$$z = c_3 x + \psi_3(x)$$

mit konstantem $c_3 (= c_1 c_2)$ *und fastperiodischem* $\psi_3(x)$ *schreiben.*

Beweis. - Durch Einsetzen von (2) in (3) erhalten wir

$$z = c_1 c_2 x + c_2 \psi_1(x) + \psi_2(c_1 x + \psi_1(x)).$$

Da $c_2 \psi_1(x)$ fastperiodisch ist, und die Summe zweier fastperiodischer Funktionen wieder fastperiodisch ist, kommt alles darauf an, zu beweisen, dass die Funktion

$$g(x) = \psi_2(c_1 x + \psi_1(x))$$

fastperiodisch ausfällt. Im Falle $c_1 = 0$ ist dies trivial, und folgt schon aus der gleichmässigen Stetigkeit von ψ_2, ohne dass die Fastperiodizität von ψ_2 benutzt wird; denn es ist hier $g(x)$ einfach gleich $\psi_2(\psi_1(x))$, und es ist wie oben erwähnt jede gleichmässig stetige Funktion einer fastperiodischen Funktion wieder fastperiodisch. Es darf daher beim Beweis $c_1 \neq 0$ angenommen werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir sogar $c_1 = 1$ annehmen (sonst wähle man $c_1 x$ als neue unabhängige Veränderliche).

Wir haben also die Fastperiodizität von

$$g(x) = \psi_2(x + \psi_1(x))$$

bei fastperiodischem ψ_1 und fastperiodischem ψ_2 nachzuweisen. Dieser Nachweis ist geführt, wenn wir folgendes zeigen können: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass jede Zahl τ, welche eine zu δ gehörige Verschiebungszahl sowohl der Funktion ψ_1 wie auch der Funktion ψ_2 ist, zugleich eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $g(x)$ darstellt; denn nach einem oben erwähnten Satz liegen die zu einem beliebigen δ gehörigen, gemeinsamen Verschiebungszahlen der beiden fastperiodischen Funktionen ψ_1 und ψ_2 sicher relativ dicht.

Um die Existenz eines solchen $\delta = \delta(\varepsilon)$ zu beweisen, betrachten wir, zunächst für ein beliebiges reelles τ, die Differenz

$$g(x+\tau) - g(x) = \psi_2(x + \tau + \psi_1(x+\tau)) - \psi_2(x + \psi_1(x)).$$

Die Differenz der beiden auf der rechten Seite auftretenden Argumente ist

$$(x + \tau + \psi_1(x+\tau)) - (x + \psi_1(x)) = \tau + \psi_1(x+\tau) - \psi_1(x),$$

und es ist somit jede Zahl τ, für welche die Grösse

$$\tau + \psi_1(x+\tau) - \psi_1(x) \tag{4}$$

bei jedem x eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion ψ_2 darstellt, offenbar eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $g(x)$. Es sei nun $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$

so bestimmt, dass falls τ eine beliebige zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl von ψ_2 ist, jede Zahl $\tau+\alpha$ mit $|\alpha|\leqq\eta$ gewiss eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von ψ_2 ist. Dann hat die Zahl

$$\delta=\mathrm{Min}\left(\eta,\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

die gewünschte Eigenschaft. Denn für eine beliebige zu diesem δ gehörige gemeinsame Verschiebungszahl der beiden Funktionen ψ_1 und ψ_2 besteht ja (wegen $\delta\leqq\eta$) bei jedem x die Ungleichung $|\psi_1(x+\tau)-\psi_1(x)|\leqq\eta$. Die Grösse (4) ist also bei jedem x von der Form $\tau+\alpha$, wobei $|\alpha|\leqq\eta$ ist, und wo τ $\left(\text{wegen } \delta\leqq\frac{\varepsilon}{2}\right)$ eine zu $\frac{\varepsilon}{2}$ gehörige Verschiebungszahl von ψ_2 ist; sie ist also eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion ψ_2, womit nach dem obigen gezeigt ist, dass τ tatsächlich eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $g(x)$ darstellt.

4. - Wir gehen nunmehr zum Studium der *inversen Funktion* $x=x(y)$ einer unserer Funktionen

$$y=cx+\psi(x) \tag{5}$$

über, und zwar interessiert uns nur der Fall, wo durch die Gleichung (5) das ganze Intervall $-\infty<x<+\infty$ eineindeutig auf das ganze Intervall $-\infty<y<+\infty$ abgebildet wird, so dass die inverse Funktion $x=x(y)$ für alle Werte von y eindeutig definiert ist. Da die Funktion $\psi(x)$ als fastperiodische Funktion beschränkt ist, ist offenbar hierzu notwendig (aber nicht hinreichend), dass $c\neq 0$ ist. Das Bild der Funktion (5) in der xy-Ebene ist eine Kurve, welche von der Geraden $y=cx$ eine beschränkte Entfernung hat. Schreiben wir also die inverse Funktion in der Form

$$x=\frac{1}{c}y+\chi(y), \tag{6}$$

so ist die Funktion $\chi(y)$ jedenfalls beschränkt. Es meldet sich die Frage, inwiefern $\chi(y)$ fastperiodisch ist, d. h. inwiefern die inverse Bewegung einer fastperiodischen Bewegung wiederum eine fastperiodische Bewegung ist. Wir wollen hierüber den folgenden Satz beweisen:

Satz II. - *Die inverse Funktion* (6) *der Funktion* (5) *stellt dann und nur dann eine fastperiodische Bewegung dar, wenn die durch die Gleichung* (5) *vermittelte Beziehung zwischen x und y ausser der Eineindeutigkeit noch die folgende Eigenschaft besitzt: Zu jedem $\varepsilon>0$ gehört ein $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, so dass für jedes Teilintervall $a<x<a+\varepsilon$ von $-\infty<x<+\infty$ der Länge ε, die Länge des bei der Abbildung entsprechenden Teilintervalls von $-\infty<y<+\infty$ wenigstens gleich δ ist.*

Beweis. - Bei dem Beweis dieses Satzes können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Konstante $c=1$ annehmen (sonst wähle man, wie oben, cx als neue unabhängige Veränderliche), so dass wir es mit der Gleichung

$$y=x+\psi(x) \tag{5a}$$

und deren inversen

(6a) $$x = y + \chi(y)$$

zu thun haben. Diese beiden Gleichungen stellen also dieselbe stetige und monotone Beziehung zwischen x und y dar. Das gemeinsame Bild der beiden Funktionen in der xy-Ebene ist (siehe die Figur) eine Kurve, welche von der Geraden $y = x$

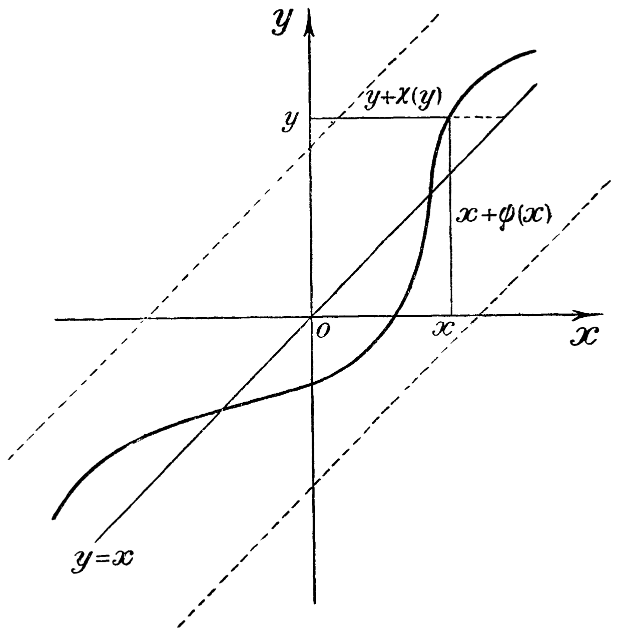

Fig. 1.

eine beschänkte Entfernung hat. Für zwei einander entsprechende Werte x und y gilt $\chi(y) = -\psi(x) (= x - y)$.

Wegen der Monotonie der Abbildung ist die in dem Satze ausgedrückte Bedingung offenbar mit folgender Eigenschaft dieser Abbildung gleichbedeutend: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so dass sobald für zwei Werte y_1 und y_2 von y die Ungleichung $|y_2 - y_1| \leqq \delta$ besteht, für die entsprechenden Werte $x_1 = y_1 + \chi(y_1)$ und $x_2 = y_2 + \chi(y_2)$ von x die Ungleichung $|x_2 - x_1| \leqq \varepsilon$ bestehen muss. Die Bedingung besagt also nichts weiteres als die gleichmässige Stetigkeit der Funktion (6a) in dem ganzen unendlichen Intervall $-\infty < y < +\infty$. Nun ist jedenfalls die Funktion $x = y$ in diesem ganzen Intervall gleichmässig stetig; *die Bedingung ist also lediglich nur ein Ausdruck für die gleichmässige Stetigkeit der Funktion $\chi(y)$ in dem unendlichen Intervall $-\infty < y < +\infty$.* Da jede fastperiodische Funktion eo ipso gleichmässig stetig ist, ist durch diese Bemerkung sofort der eine Teil des zu beweisenden Satzes erledigt, wonach die gestellte Bedingung für die Fastperiodizität von $\chi(y)$ notwendig ist. Alles kommt hiernach darauf an, zu zeigen, dass die Bedingung auch hinreichend ist, was also nach dem gesagten damit gleichbedeutend ist, zu zeigen, dass aus ihr die Fastperiodizität der Funktion $\chi(y)$ folgt.

Um dies zu beweisen geben wir zunächst eine einfache geometrische Deutung der gestellten Bedingung. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben; wir betrachten für das im Sinne des zu beweisenden Satzes zugehörige $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ den durch die Ungleichungen

$$x + \psi(x) - \delta \leqq y \leqq x + \psi(x) + \delta$$

bestimmten Bereich S in der xy-Ebene. Es ist dies ein Streifen der konstanten vertikalen Breite 2δ, der das gemeinsame Bild der Funktionen (5a) und (6a) enthält. Der Streifen wird von den Bildern der beiden Funktionen $y = x + \psi(x) - \delta$ und $y = x + \psi(x) + \delta$ begrenzt. Nun sind aber diese Kurven auch Bilder der beiden inversen Funktionen $x = y + \delta + \chi(y + \delta)$ und $x = y - \delta + \chi(y - \delta)$; der Streifen lässt sich also auch durch die Ungleichungen

$$y - \delta + \chi(y - \delta) \leqq x \leqq y + \delta + \chi(y + \delta)$$

definieren. Hieraus folgt aber, wegen der Bedeutung von δ, dass der Streifen S in dem durch die Ungleichungen

$$y + \chi(y) - \varepsilon \leqq x \leqq y + \chi(y) + \varepsilon$$

bestimmten Streifen T der konstanten horizontalen Breite 2ε enthalten sein muss.

Von dieser Bemerkung aus wird nun die Fastperiodizität von $\chi(y)$ folgendermassen bewiesen: Es genügt offenbar, wenn wir zeigen, dass, für eine beliebige Zahl $\varepsilon > 0$, jede zu der entsprechenden Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gehörige Verschiebungszahl τ der Funktion $\psi(x)$ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl von $\chi(y)$ darstellt. Denn nach der Fastperiodizität von $\psi(x)$ liegen ja diese Zahlen τ relativ dicht. Dass τ eine zu δ gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\psi(x)$ darstellt, besagt nun nichts weiteres, als dass bei jedem x die Ungleichung

$$\psi(x) - \delta \leqq \psi(x + \tau) \leqq \psi(x) + \delta$$

d. h.

$$x + \psi(x) - \delta \leqq x + \psi(x + \tau) \leqq x + \psi(x) + \delta$$

bestehen soll, und diese Ungleichung ist nur ein Ausdruck dafür, dass das längs der Geraden $y = x$ um $-\tau\sqrt{2}$ verschobene Bild der Kurve $y = x + \psi(x)$ dem Streifen S angehören soll; diese verschobene Kurve wird nämlich durch die Gleichung $y + \tau = x + \tau + \psi(x + \tau)$ d. h. eben $y = x + \psi(x + \tau)$ dargestellt. In genau derselben Weise ergibt sich als Ausdruck dafür, dass τ eine zu ε gehörige Verschiebungszahl der Funktion $\chi(y)$ darstellt, dass das längs $y = x$ um $-\tau\sqrt{2}$ verschobene Bild von $x = y + \chi(y)$ dem Streifen T angehören soll. Das ist aber beidemal dieselbe Kurve; der zu beweisende Satz ist also eine Folge davon, dass der Streifen T den Streifen S enthält.

* * *

5. - In dem folgenden betrachten wir nur solche fastperiodische Bewegungen

$$y = x + \psi(x), \tag{7}$$

für welche die Konstante $c = 1$ ist. Wir geben zunächst für diesen Fall eine etwas abweichende und erweiterte Fassung der schon bewiesenen Sätze.

SATZ I[a]. - *Die durch zwei fastperiodische Bewegungen* $y = x + \psi_1(x)$ *und* $z = y + \psi_2(y)$ *zusammengesetzte Bewegung* $z = z(x)$ *ist wiederum eine fastperiodische Bewegung der Form* $z = x + \psi_3(x)$; *dabei gehören die Fourierexponenten der Funktion* ψ_3 *alle dem kleinsten Zahlenmodul an, welcher die sämtlichen Fourierexponenten der beiden Funktionen* ψ_1 *und* ψ_2 *enthält.*

Der erste Teil dieses Satzes folgt speziell aus Satz I; der Zusatz über die Exponenten folgt aus dem Beweis dieses Satzes durch Heranziehung üblicher Sätze über den Zusammenhang zwischen Verschiebungszahlen und Fourierexponenten fastperiodischer Funktionen.

Schreiben wir symbolisch $\psi_3 = \psi_1 \psi_2$, so können wir sagen, dass durch Satz I[a] ein Kompositionsgesetz innerhalb der Menge aller reeller fastperiodischer Funktionen festgelegt wird; trivial ist es, dass für diese Komposition das assoziative Gesetz besteht. Einselement bei der Komposition ist die Funktion 0, für die bei beliebigem ψ sowohl $\psi = 0\psi$ als $\psi = \psi 0$ ist.

6. - Bei der Untersuchung der inversen Funktion $x = x(y)$ einer unserer Funktionen (7) haben wir zunächst eine Teilmenge der reellen fastperiodischen Funktionen $\psi(x)$ ausgesondert, indem wir nur solche Funktionen (7) betrachtet haben, durch die eine eineindeutige Beziehung zwischen x und y festgelegt wird. Damit dies der Fall ist, war notwendig und hinreichend, dass $y = x + \psi(x)$ eine monoton wachsende Funktion von x ist ([3]), dass also für jedes Punktepaar x_1, $x_2 > x_1$ die Ungleichung

$$x_2 + \psi(x_2) > x_1 + \psi(x_1)$$

d. h.

$$\frac{\psi(x_2) - \psi(x_1)}{x_2 - x_1} > -1 \tag{8}$$

besteht. Wir wollen sagen, dass die (fastperiodische) Funktion $\psi(x)$ zur Klasse A gehört, falls sie diese Bedingung (8) befriedigt, also falls ihr Differenzenquotient für jedes Punktepaar x_1, $x_2 > x_1$ grösser als -1 ist. Für eine solche Funktion $\psi(x)$

([3]) Die andere Möglichkeit, dass $y = x + \psi(x)$ monoton abnehmend sein konnte, kam wegen der Beschränktheit von $\psi(x)$ nicht in Frage.

bestimmen wir nun bei jedem gegebenen $\varepsilon > 0$ die Zahl

$$D(\varepsilon) = \underset{-\infty < x < +\infty}{\text{Untere Grenze}} \frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon},$$

die dann gewiss $\geqq -1$ ist.

Sind ψ_1 und ψ_2 Funktionen der Klasse A, so ist trivialerweise auch die durch das obige Kompositionsgesetz festgelegte Funktion $\psi_3 = \psi_1\psi_2$ eine Funktion dieser Klasse. Der Satz II gibt nun die Lösung des Problems aus der Klasse A diejenigen Funktionen ψ auszusondern, die innerhalb dieser Klasse im Sinne der festgelegten Komposition eine inverse Funktion χ besitzen, d. h. eine Funktion, für welche $\psi\chi = 0$ ist.

7. - Von einer Funktion der Klasse A wollen wir sagen, dass sie zur Klasse A^* gehört, wenn ihre zugehörige Funktion $D(\varepsilon)$ nicht nur $\geqq -1$ sondern für jedes $\varepsilon > 0$ sogar > -1 ausfällt. Dann gilt der folgende

SATZ II^a. - *Es sei $\psi(x)$ eine fastperiodische Funktion der Klasse A und $x = y + \chi(y)$ die zur Funktion $y = x + \psi(x)$ inverse Funktion. Damit $\chi(y)$ fastperiodisch wird, ist notwendig und hinreichend, dass $\psi(x)$ zur Klasse A^* gehört* (4).

Ferner gehören die Fourierexponenten der Funktion χ alle dem kleinsten Zahlenmodul an, der die sämtlichen Fourierexponenten der Funktion ψ enthält.

Aus diesem Satze folgt natürlich, dass gleichzeitig mit ψ auch χ zur Klasse A^* gehören muss. Die Funktionen der Klasse A^* bilden also nach dem obigen Kompositionsgesetz eine *Gruppe*.

Der erste Teil dieses Satzes folgt unmittelbar aus Satz II. Die in diesem Satz auftretende Bedingung für die Funktion $\psi(x)$ drückt ja eben aus, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gehören soll, so dass bei jedem x die Ungleichung

$$(x + \varepsilon + \psi(x+\varepsilon)) - (x + \psi(x)) > \delta$$

d. h.

$$\frac{\psi(x+\varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon} > -1 + \frac{\delta}{\varepsilon}$$

stattfindet. Sie ist also mit der Bedingung $D(\varepsilon) > -1$ gleichbedeutend. Der Zusatz über die Exponenten folgt aus dem Beweis des Satzes II durch Heranziehung des oben erwähnten Zusammenhangs zwischen Verschiebungszahlen und Fourierexponenten.

---

(4) Hiermit erscheint die Bedingung erst recht als eine *Bedingung für die Funktion $\psi(x)$ selbst*, während sie in der obigen Formulierung eher als eine Bedingung für die inverse Funktion $\chi(y)$ aufzufassen war (nämlich als einen Ausdruck für die gleichmässige Stetigkeit dieser Funktion).

8. - Zur Klasse A^* gehört zum Beispiel gewiss jede fastperiodische Funktion $\psi(x)$, die für alle x differentiierbar ist, und für welche durchweg $\psi'(x) > k > -1$, also insbesondere jede differentiierbare Funktion $\psi(x)$, die für alle x einer Ungleichung der Form $|\psi'(x)| < k < 1$ genügt. Für diese letzte Funktionenklasse wurde früher der Satz II^a von BOHR (5) bewiesen, und zwar indem er die Gleichung $y = x + \psi(x)$ mit Hilfe der Methode der sukzessiven Approximationen auflöste. Nachher hat JESSEN die obige geometrische Beweismethode gefunden, durch welche erst die Lösung des allgemeinen Problems ermöglicht wurde.

9. - Durch Konstruktion eines passenden Beispiels wollen wir noch zeigen, dass die Klasse A^* eine echte Untermenge der Klasse A ist, d. h. dass es eine fastperiodische Funktion $\psi(x)$ der Klasse A gibt, welche nicht der Klasse A^* angehört; es soll also für diese Funktion $\psi(x)$ für ein beliebiges Punktepaar x_1, $x_2 > x_1$

$$\frac{\psi(x_2) - \psi(x_1)}{x_2 - x_1} > -1$$

sein, und trotzdem soll es ein $\varepsilon_0 > 0$ geben, für welches

$$D(\varepsilon_0) = \underset{-\infty < x < +\infty}{\text{Untere Grenze}} \frac{\psi(x + \varepsilon_0) - \psi(x)}{\varepsilon_0} = -1$$

ist. Es ist klar, dass es keine reinperiodische Funktion $\psi(x)$ dieser Art geben kann, da für eine solche die Funktion $\frac{\psi(x + \varepsilon) - \psi(x)}{\varepsilon}$ bei jedem ε eine periodische Funktion von x ist, und also ihre untere Grenze $D(\varepsilon)$ sicher annimmt. Wir wollen aber eine grenzperiodische Funktion mit den geforderten Eigenschaften konstruieren, d. h. eine Funktion, welche als Grenzfunktion einer für alle x gleichmässig konvergenten Folge von reinperiodischen (stetigen) Funktionen $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (aber mit verschiedenen Perioden) darstellbar ist.

Zu diesem Zwecke gehen wir etwa von der im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ durch die Gleichung

$$g(x) = 1 - |x|$$

definierte Funktion aus, und definieren $P_0(x)$ als diejenige periodische Funktion mit der Periode $p_0 = 2$, die im Periodenintervall $-1 \leqq x \leqq 1$ gleich $\frac{1}{2} g(x)$ ist. Die nächste Funktion $P_1(x)$ soll die Periode $p_1 = 3p_0 = 3 \cdot 2 = 6$ haben, und im Periodenintervall $-3 \leqq x \leqq 3$ durch

$$P_1(x) = P_0(x) + Q_1(x)$$

(5) H. BOHR: *Kleinere Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*, IV. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab Math.-fys. Meddelelser, X, 12 (1930). Vgl. auch H. BOHR: *On the inverse function of an analytic almost periodic function.* Annals of Mathematics (2) 32 (1931).

festgelegt sein, wo

$$Q_1(x)=\begin{cases} 0 & \text{für} \quad -3\leqq x\leqq 1 \\ \frac{1}{4}g(x-2) & \text{für} \quad 1\leqq x\leqq 3. \end{cases}$$

Danach definieren wir $P_2(x)$ als diejenige periodische Funktion mit der Periode $p_2=3p_1=3^2\cdot 2=18$, welche im Periodenintervall $-9\leqq x\leqq 9$ durch

$$P_2(x)=P_1(x)+Q_2(x)$$

definiert ist, wo

$$Q_2(x)=\begin{cases} 0 & \text{für} \quad -9\leqq x\leqq 7 \\ \frac{1}{8}g(x-8) & \text{für} \quad 7\leqq x\leqq 9. \end{cases}$$

Allgemein soll $P_n(x)$ diejenige periodische Funktion mit der Periode $p_n=3^n\cdot 2$ sein, welche im Periodenintervall $-3^n\leqq x\leqq 3^n$ durch

$$P_n(x)=P_{n-1}(x)+Q_n(x)$$

festgelegt wird, wo

$$Q_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{für} \quad -3^n\leqq x\leqq 3^n-2 \\ \frac{1}{2^{n+1}}g(x-(3^n-1)) & \text{für} \quad 3^n-2\leqq x\leqq 3^n. \end{cases}$$

Wegen der für alle x gültigen Ungleichung $0\leqq Q_n(x)\leqq\frac{1}{2^{n+1}}$ ist die unendliche Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}Q_n(x)$ für alle x gleichmässig konvergent, d. h. es streben die Funktionen $P_n(x)=P_0(x)+\sum\limits_{\nu=1}^{n}Q_\nu(x)$ für $n\to\infty$ gleichmässig einer Grenzfunktion $G(x)$ zu, die also eine grenzperiodische Funktion ist. Von dieser Funktion $G(x)$ ist sofort einzusehen, dass sie von der gewünschten Art ist. Einerseits gehört sie nämlich der Klasse A an, d. h. es gilt für ein beliebig gewähltes Punktepaar x_1, $x_2>x_1$ die Ungleichung

$$\frac{G(x_2)-G(x_1)}{x_2-x_1}>-1.$$

Denn bei jedem festen N ist offenbar

$$\frac{P_N(x_2)-P_N(x_1)}{x_2-x_1}\geqq(-1)\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots.+\frac{1}{2^{N+1}}\right\}>-1,$$

und in jedem festen endlichen Intervall gilt $G(x)=P_N(x)$, sobald N hinreichend gross ist. Andererseits aber gehört $G(x)$ nicht der Klasse A^* an. In der Tat ist ja für $\varepsilon_0=1$

$$D(\varepsilon_0)=\underset{-\infty<x<+\infty}{\text{Untere Grenze}}\ \frac{G(x+\varepsilon_0)-G(x)}{\varepsilon_0}=-1,$$

weil bei jedem n

$$G(3^n)-G(3^n-1)=(-1)\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots.+\frac{1}{2^{n+1}}\right\}=-1+\frac{1}{2^{n+1}}$$

ist, wo die Grösse rechts für $n\to\infty$ gegen -1 konvergiert.

* * *

10. - Schliesslich wollen wir noch die Frage behandeln, was man von der inversen Bewegung $x=y+\chi(y)$ einer fastperiodischen Bewegung $y=x+\psi(x)$ sagen kann, wenn dieselbe nicht fastperiodisch ausfällt, d. h. wenn die Funktion $\psi(x)$ der Klasse A aber nicht der Klasse A^* angehört; es soll gezeigt werden, dass die Funktion $\chi(y)$ in diesem Fall jedenfalls in einem verallgemeinerten Sinne fastperiodisch wird. Es handelt sich von den von STEPANOFF ([6]) eingeführten, sogenannten S-fastperiodischen Funktionen, die ursprünglich eingeführt wurden, um unstetige Funktionen in den Kreis der Betrachtungen einziehen zu können; aus der unten folgenden Betrachtung geht hervor, dass man diese Verallgemeinerung auch mit Vorteil verwenden kann, selbst wenn man sich nur für stetige Funktionen interessiert.

Eine für $-\infty<x<+\infty$ stetige Funktion $f(x)=u(x)+iv(x)$ heisst *S-fastperiodisch*, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine relativ dicht liegende Menge von S-Verschiebungszahlen $\tau=\tau(\varepsilon)$ gibt, d. h. Zahlen τ, welche für alle x die Ungleichung

$$\int_x^{x+1}|f(\xi+\tau)-f(\xi)|\,d\xi\leqq\varepsilon$$

befriedigen. Nach dieser Definition ist offenbar jede im gewöhnlichen Sinne fastperiodische Funktion zugleich eine S-fastperiodische Funktion.

Eine S-fastperiodische Funktion ist S-beschränkt, d. h. es gibt eine Konstante k, so dass

$$\int_x^{x+1}|f(\xi)|\,d\xi\leqq k$$

für alle x; hieraus folgt speziell, dass es eine relativ dicht liegende Punktmenge geben muss, auf welcher die Funktion im gewöhnlichen Sinne beschränkt ist; zum Beispiel muss es ja in jedem Intervall der Länge 1 einen Punkt geben, worin $|f(x)|\leqq k$ ist. In analoger Weise lassen sich andere Eigenschaften der gewöhnlichen fastperiodischen Funktionen auf S-fastperiodische Funktionen übertragen.

Nunmehr können wir auch S-fastperiodische Bewegungen der Form

$$y=x+\psi(x) \tag{9}$$

betrachten, d. h. Funktionen der Form (9), wobei $\psi(x)$ eine reelle S-fastperio-

---

([6]) W. STEPANOFF: *Über einige Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen.* Mathematische Annalen, 95 (1926). Vgl. auch A. BESICOWITCH-H. BOHR: *Some remarks on generalisations of almost periodic functions.* Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab Math.-fys. Meddelelser, VIII, 5 (1927).

dische Funktion bedeutet. Wir wollen sagen, dass die (S-fastperiodische) Funktion $\psi(x)$ zur Klasse B gehört, wenn durch (9) eine eineindeutige Beziehung zwischen x und y festgelegt wird; hierzu ist notwendig und hinreichend, dass $y=x+\psi(x)$ monoton wachsend ist ([7]), d. h. dass für jedes Punktepaar x_1, $x_2>x_1$ die Ungleichung

$$\frac{\psi(x_2)-\psi(x_1)}{x_2-x_1}>-1 \tag{10}$$

besteht.

11. - Die Bedeutung der S-fastperiodischen Funktionen für unsere Fragestellung wird nun durch den folgenden Satz gegeben.

SATZ II^b. - *Es sei $\psi(x)$ eine beliebige fastperiodische Funktion der Klasse A und $x=y+\chi(y)$ die zur Funktion $y=x+\psi(x)$ inverse Funktion. Dann ist die Funktion $\chi(y)$ jedenfalls eine S-fastperiodische Funktion, und gehört offenbar zur Klasse B.*

Wir beweisen nicht direkt diesen Satz, sondern sogleich den wesentlich allgemeineren

SATZ II^c. - *Es sei $\psi(x)$ eine S-fastperiodische Funktion der Klasse B und $x=y+\chi(y)$ die zur Funktion $y=x+\psi(x)$ inverse Funktion. Dann ist die Funktion $\chi(y)$ wiederum eine S-fastperiodische Funktion der Klasse B.*

In einer gewissen Hinsicht liegen also die Verhältnisse einfacher für die S-fastperiodischen Funktionen als für die gewöhnlichen fastperiodischen Funktionen. Man braucht nicht zu einer weniger umfassenden Klasse B^* abzusteigen, um für die Klasse B dasselbe zu erreichen, was oben für die Klasse A durch Einführung der Klasse A^* erreicht wurde.

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe derselben geometrischen Überlegung, die bei einem obigen Beweis verwandt wurde. Zunächst bemerken wir, dass eine Funktion $\psi(x)$ der Klasse B im gewöhnlichen Sinne beschränkt (und nicht nur wie jede S-fastperiodische Funktion S-beschränkt) sein muss. Es sei nämlich für jeden Wert von x

$$\int_x^{x+1} |\psi(\xi)|\,d\xi \leqq k; \tag{11}$$

dann folgt aus der Bedingung (10), dass für jeden Wert von x

$$|\psi(x)| \leqq k+1.$$

Wäre nämlich für einen Wert von x dies nicht der Fall, so wäre entweder $\psi(x)>k+1$ oder $\psi(x)<-k-1$. Es wäre also entweder $\psi(\xi)>k$ in dem Intervall $x<\xi<x+1$ oder $\psi(\xi)<-k$ in dem Intervall $x-1<\xi<x$, also beidemal

([7]) Die andere Möglichkeit, dass $y=x+\psi(x)$ monoton abnehmend sein konnte, kommt wegen der Beschränktheit von $\psi(x)$ auf einer relativ dicht liegenden Punktmenge nicht in Frage.

$|\psi(\xi)|>k$ in einem Intervall der Länge 1, was (11) wiederspricht. Wir bezeichnen mit K eine ganze Zahl, welche grösser als $k+1$ ist. Dann gehört die durch die beiden gleichwertigen Gleichungen $y=x+\psi(x)$ und $x=y+\chi(y)$ dargestellte Kurve $\varkappa$ in der xy-Ebene dem Streifen $|y-x|<K$ an.

Um die S-Fastperiodizität der Funktion $\chi(y)$ zu beweisen betrachten wir, zunächst für beliebige Zahlen y und τ, die Grösse

$$\int_y^{y+1}|\chi(\eta+\tau)-\chi(\eta)|\,d\eta=\int_y^{y+1}|(\eta+\chi(\eta+\tau))-(\eta+\chi(\eta))|\,d\eta.$$

Durch $x=y+\chi(y)$ wird die Kurve $\varkappa$ dargestellt, durch $x=y+\chi(y+\tau)$ diejenige Kurve $\varkappa'$, welche aus $\varkappa$ hervorgeht, wenn man diese Kurve um $-\tau\sqrt{2}$ längs der Geraden $y=x$ verschiebt. Das obige Integral stellt somit das Areal dar, welches zwischen den Kurven $\varkappa$ und $\varkappa'$ liegt und von den beiden horizontalen Geraden mit Ordinaten y und $y+1$ abgegrenzt wird. Dieses Areal gehört nun dem Areal an, welches zwischen $\varkappa$ und $\varkappa'$ liegt und von den beiden vertikalen Geraden mit Abszissen $y-K=x$ und $y+1+K=x+1+2K$ abgegrenzt wird. Da die Kurven $\varkappa$ und $\varkappa'$ auch durch die Gleichungen $y=x+\psi(x)$ und $y=x+\psi(x+\tau)$ dargestellt werden, ist der Wert dieses Areals gleich

$$\int_x^{x+1+2K}|(\xi+\psi(\xi+\tau))-(\xi+\psi(\xi))|\,d\xi=\int_x^{x+1+2K}|\psi(\xi+\tau)-\psi(\xi)|\,d\xi.$$

Für jeden Wert von y besteht also die Ungleichung

$$\int_y^{y+1}|\chi(\eta+\tau)-\chi(\eta)|\,d\eta\leqq\int_x^{x+1+2K}|\psi(\xi+\tau)-\psi(\xi)|\,d\xi.$$

Hiermit ist aber die S-Fastperiodizität von $\chi(y)$ bewiesen. Denn für jedes $\varepsilon>0$ ist nach dieser Ungleichung jede zu $\frac{\varepsilon}{1+2K}$ gehörige S-Verschiebungszahl τ der Funktion $\psi(x)$ eine zu ε gehörige S-Verschiebungszahl der Funktion $\chi(y)$; und diese Zahlen liegen relativ dicht.