

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ÉLIE CARTAN

**Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de
l'espace de deux variables complexes II**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 1, n° 4
(1932), p. 333-354

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_4_333_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA GÉOMÉTRIE PSEUDO-CONFORME
DES HYPERSURFACES
DE L'ESPACE DE DEUX VARIABLES COMPLEXES
II.

par ÉLIE CARTAN (Le Chesnay).

Ce Mémoire fait suite à un Mémoire paru sous le même titre dans les *Annali di Matematica*, et dont il constitue la seconde Partie ⁽¹⁾. La première Partie était consacrée à l'étude des conditions analytiques d'équivalence pseudo-conforme de deux hypersurfaces non hyperplanoïdes. Il y avait du reste lieu de distinguer les hypersurfaces équivalentes à l'hypersphère et les autres. Une détermination, par une méthode directe, y était faite des hypersurfaces admettant un groupe pseudo-conforme à trois paramètres au moins.

La présent Mémoire s'occupe plus spécialement des propriétés *géométriques* pseudo-conformes de ces différentes hypersurfaces. Il contient deux Chapitres.

Le premier (Chapitre IV du Mémoire total) introduit, pour les hypersurfaces qui ne sont pas localement équivalentes à l'hypersphère, une métrique intrinsèque, les lignes principales et les lignes de courbure. Les lignes principales sont spécialement étudiées pour une catégorie étendue d'hypersurfaces admettant un groupe à trois paramètres.

Le Chapitre V pose les fondements de la géométrie différentielle pseudo-conforme de l'hypersphère, considérée comme un espace à trois dimensions, en se basant sur la méthode générale du repère mobile. Les équations différentielles des *chaînes* et des *cercles* sont formées. Les résultats analytiques obtenus dans le Chapitre III permettent alors de regarder toute hypersurface qui n'est pas un hyperplanoïde comme un *espace à connexion hypersphérique*, ce qui permet d'étendre à ces hypersurfaces les notions de *chaîne* et de *cercle* définies d'abord dans l'hypersphère. La connexion hypersphérique ainsi obtenue n'est pas la plus générale possible; elle est déterminée intrinsèquement par la donnée de l'hypersurface (ou de toute autre hypersurface équivalente): il y a là quelque chose d'analogue à ce qui se passe pour les *espaces à connexion conforme normale* ⁽²⁾,

⁽¹⁾ *Annali di Matematica*, Serie IV, t. XI, 1932, p. 18.

⁽²⁾ E. CARTAN: *Les espaces à connexion conforme* (Annales Soc. pol. Math., 2, 1923, p. 171-221).

associés intrinsèquement à une équation quadratique de MONGE, et pour les *espaces à connexion projective normale* ⁽³⁾, associés intrinsèquement à la famille des géodésiques d'un espace à connexion affine.

CHAPITRE IV.

**Propriétés géométriques pseudo-conformes
des hypersurfaces non localement équivalentes à l'hypersphère.**

I. - Lignes principales; surfaces caractéristiques principales.

84. - Nous avons, aux n.ºs 76 et suivants, attaché d'une manière intrinsèque à chaque point d'une hypersurface non localement équivalente à l'hypersphère trois formes de PFAFF Ω , Ω_1 , $\bar{\Omega}_1$, les deux dernières pouvant être simultanément changées de signe. Les lignes à une dimension définies par les équations différentielles

$$(1) \quad \Omega_1 = \bar{\Omega}_1 = 0$$

sont donc définies intrinsèquement; nous les appellerons *lignes principales*; il en passe une et une seule par chaque point ordinaire de l'hypersurface.

Si l'on pose

$$\Omega = Adu + Bdv + Cdw,$$

les lignes principales, qui sont les caractéristiques de la forme $\Omega' = i[\Omega_1, \bar{\Omega}_1]$, sont données par les équations différentielles

$$\frac{du}{C_v - B_w} = \frac{dv}{A_w - C_u} = \frac{dw}{B_u - A_v}.$$

Ces équations admettent l'*invariant intégral relatif* ⁽⁴⁾

$$\int \Omega = \int Adu + Bdv + Cdw.$$

Sur chaque ligne principale il existe un sens positif intrinsèque (n.º 13), à savoir celui qui rend la forme Ω positive: cette condition est en effet équivalente à l'inégalité

$$-iL(F)(F_x dx + F_y dy) > 0.$$

85. - Par chaque ligne principale il passe une surface caractéristique, que nous appellerons *surface caractéristique principale*. Soit (S) la surface caractéristique principale passant par un point M de l'hypersurface, \mathcal{C} la ligne principale

⁽³⁾ E. CARTAN: *Sur les variétés à connexion projective* (Bull. Soc. Math. France, 52, 1924, p. 205-241).

⁽⁴⁾ Voir E. CARTAN: *Leçons sur les invariants intégraux* (Paris, Hermann, 1922).

correspondante. La direction obtenue en faisant tourner sur (S) , de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct, la tangente positive à \mathcal{C} va vers l'intérieur de l'hypersurface; nous pourrions l'appeler *la direction normale intérieure à l'hypersurface*.

Sur toute ligne principale il existe une métrique intrinsèque définie par $ds = \Omega$; il en résulte immédiatement une métrique intrinsèque sur la surface caractéristique principale correspondante, *du moins au voisinage de la ligne principale*. Sur l'hypersurface elle-même on peut définir une infinité de métriques riemanniennes intrinsèques, données par

$$ds^2 = \Omega^2 + 2m\Omega_1\bar{\Omega}_1,$$

m étant une constante réelle et positive. *Les lignes principales sont des géodésiques de toutes ces métriques*, comme on le démontrerait facilement.

Toutes ces notions posent des problèmes intéressants, que nous n'aborderons pas.

86. - On pourrait encore définir deux autres familles intrinsèques de lignes, à savoir les lignes le long desquelles la forme Ω est nulle et la forme Ω_1 réelle, et les lignes le long desquelles la forme Ω est nulle et la forme Ω_1 purement imaginaire. Ces lignes sont en chacun de leurs points tangentes à l'élément plan caractéristique tangent; elles n'admettent pas de sens positif intrinsèque; néanmoins le sens positif étant choisi sur les lignes de la première famille, il en résulte d'une manière intrinsèque un sens positif sur celles de la seconde famille. On pourrait donner à ces lignes le nom de *lignes de courbure*.

II. - Cas des hypersurfaces admettant un groupe à trois paramètres.

87. - Les hypersurfaces qui admettent un groupe G à trois paramètres ont été déjà déterminées (Chapitre II) par une méthode directe, mais qui ne fournit pas les lignes principales, la métrique intrinsèque, etc.

Indiquons d'abord la signification, par rapport au groupe G , des formes Ω , Ω_1 , $\bar{\Omega}_1$.

Prenons dans l'hypersurface un point particulier M_0 (u_0, v_0, w_0), que nous désignerons comme *point origine*, et désignons par S_M la transformation de G qui amène M_0 en M . La transformation $S_M^{-1}S_{M'}$, où M' désigne un point infiniment voisin de M , est une transformation infinitésimale

$$\varepsilon_1 X_1 + \varepsilon_2 X_2 + \varepsilon_3 X_3,$$

dont les paramètres ε_i sont des expressions de PFAFF linéaires en du, dv, dw ⁽⁵⁾.

(5) Voir E. CARTAN: *La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs* (Mém. Sc. Math., XLII, 1930, p. 16). On suppose que dans le produit $S_M^{-1}S_{M'}$, on commence par la transformation $S_{M'}$.

Ces expressions sont invariantes par les transformations du groupe G , car si une transformation S du groupe amène M en M^* et M' en M'^* , on a

$$S_{M^*} = SS_M, \quad S_{M'^*} = SS_{M'},$$

et, par suite,

$$S_{M^*}^{-1} S_{M'^*} = S_M^{-1} S^{-1} S_{M'} = S_M^{-1} S_{M'}.$$

Les trois formes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont des combinaisons linéaires de $\Omega, \Omega_1, \bar{\Omega}_1$ et comme les unes et les autres sont invariantes par le groupe G , c'est que les coefficients de ces combinaisons linéaires sont des constantes absolues. Si l'on pose

$$\Omega = \tilde{\omega}, \quad \Omega_1 = \tilde{\omega}_1 + i\tilde{\omega}_2, \quad \bar{\Omega}_1 = \tilde{\omega}_1 - i\tilde{\omega}_2,$$

les formes $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1$ et $\tilde{\omega}_2$ étant réelles, on voit que, par un choix convenable de la base infinitésimale du groupe G , on peut supposer que la transformation infinitésimale $S_M^{-1} S_{M'}$ a pour symbole

$$\tilde{\omega}X + \tilde{\omega}_1 X_1 + \tilde{\omega}_2 X_2.$$

Supposons maintenant que nous donnions à u, v, w des valeurs *complexes* quelconques. Soient

$$\begin{aligned} x &= f_1(u, v, w) + if_2(u, v, w), \\ y &= g_1(u, v, w) + ig_2(u, v, w) \end{aligned}$$

les équations paramétriques de l'hypersurface. Si l'on donne à u, v, w des accroissements *imaginaires* infiniment petits tels que les fonctions x, y de u, v, w ne varient pas, la transformation infinitésimale $S_M^{-1} S_{M'}$ aura son symbole proportionnel à $X_1 + iX_2$: en effet Ω et Ω_1 , étant linéaires en dx et dy , s'annuleront, mais sans que $\bar{\Omega}_1$ s'annule. En particulier si on prend pour M le point origine M_0 , on voit que *la transformation infinitésimale complexe qui laisse fixe le point origine est $X_1 + iX_2$* . Celle qui laisse fixe le point M de l'hypersurface est celle qui fait passer de M à M' (avec $dx = dy = 0$); c'est donc

$$S_{M'} S_M^{-1} = S_M (S_M^{-1} S_{M'}) S_M^{-1}:$$

c'est, comme nous l'avions déjà remarqué (n.º 28), la transformation infinitésimale transformée de $X_1 + iX_2$ par S_M .

88. - La connaissance des formes $\Omega, \Omega_1, \bar{\Omega}_1$ ou $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$, permet d'obtenir les transformations infinitésimales du groupe par l'intégration d'un système d'équations linéaires. Considérons en effet une transformation infinitésimale

$$(2) \quad \delta u = \xi(u, v, w), \quad \delta v = \eta(u, v, w), \quad \delta w = \zeta(u, v, w),$$

et désignons par e, e_1, e_2 les quantités obtenues en remplaçant dans $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2$ les différentielles du, dv, dw par $\delta u, \delta v, \delta w$. On a évidemment, puisque $\tilde{\omega}, \tilde{\omega}_1$ et $\tilde{\omega}_2$ sont invariantes par G ,

$$(3) \quad \delta \tilde{\omega} = 0, \quad \delta \tilde{\omega}_1 = 0, \quad \delta \tilde{\omega}_2 = 0.$$

Or, les formules (47) du n.º 80 peuvent s'écrire sous la forme

$$(4) \quad \tilde{\omega}_s' = \sum_{(i,k)} c_{iks} [\tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_k] \quad (s=0, 1, 2),$$

les coefficients c_{iks} étant les *constantes de structure* du groupe. En introduisant deux symboles de différentiation d et δ échangeables entre eux, les équations (4) condensent les équations

$$(5) \quad d\tilde{\omega}_s(\delta) - \delta\tilde{\omega}_s(d) = \sum_{i,k} c_{iks} \tilde{\omega}_i(d) \tilde{\omega}_k(\delta).$$

Si donc nous prenons pour d un symbole de différentiation indéterminée et pour δ le symbole de la transformation infinitésimale (2), nous avons, d'après (3),

$$(6) \quad de_s = \sum_{i,k} c_{iks} \tilde{\omega}_i e_k.$$

Ici, d'après (47), nous obtenons

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} de = i\Omega_1(e_1 - ie_2) - i\bar{\Omega}_1(e_1 + ie_2), \\ d(e_1 + ie_2) = (\bar{\alpha}\Omega_1 - \theta\Omega)(e_1 - ie_2) - [\bar{\alpha}\bar{\Omega}_1 - i(\beta - \gamma)\Omega](e_1 + ie_2) - \\ \quad - [i(\beta - \gamma)\Omega_1 - \theta\bar{\Omega}_1]e. \end{array} \right.$$

89. - Nous pouvons tirer de ce qui précède une conséquence importante. Nous avons vu que la transformation infinitésimale imaginaire de G qui laisse fixe le point origine est $X_1 + iX_2$. Supposons qu'en se déplaçant à partir de ce point sur l'hypersurface, le groupe engendré par cette transformation infinitésimale ne change pas, autrement dit que les deux relations

$$e = e_1 + ie_2 = 0$$

soient conservées. Il en résultera, d'après (7),

$$\Omega_1 = 0, \quad \theta\Omega = 0,$$

et, comme on est sur l'hypersurface, $\bar{\Omega}_1 = 0$. Cela n'est possible que si l'invariant θ est nul. Or cela est impossible d'après les formules (48) du n.º 80 : en effet la quatrième de ces formules donnerait $\eta = 0$, et la sixième conduirait alors à une contradiction. Par suite *si une hypersurface non localement équivalente à une hypersphère admet un groupe à trois paramètres réels, le sous-groupe à un paramètre complexe qui laisse invariant un point de l'hypersurface ne laisse invariant aucun point infiniment voisin*. Ce théorème avait été vérifié directement (n.ºs 33-46).

90. - Une autre conséquence importante est la suivante. Déplaçons-nous sur une ligne principale de l'hypersurface, de manière à avoir $\Omega_1 = \bar{\Omega}_1 = 0$. La première équation (7) montre que e reste constant. Supposons alors que nous ayons

$$\Omega = A dx + B dy;$$

cela veut dire que, pour toute transformation infinitésimale X_i du groupe, la quantité $A\xi_i + B\eta_i$ prend une valeur constante réelle c_i sur la ligne principale:

$$A\xi_i + B\eta_i = c_i.$$

Soit alors $\sum u_i X_i$ la transformation infinitésimale imaginaire qui laisse invariant le point (x, y) de l'hypersurface. On a

$$\sum_i u_i \xi_i = 0, \quad \sum_i u_i \eta_i = 0,$$

et par suite

$$cu + c_1 u_1 + c_2 u_2 = 0.$$

Ce résultat nous conduit au théorème suivant:

THÉORÈME. - *Si l'on représente une hypersurface admettant un groupe à trois paramètres comme lieu, dans le plan projectif complexe, des points représentatifs des transformations infinitésimales imaginaires qui laissent invariants ses différents points, les surfaces caractéristiques principales sont les droites réelles du plan et les lignes principales sont les sections de l'hypersurface par ces droites.*

On peut ajouter la remarque suivante. Les équations

$$\tilde{\omega} = ds, \quad \tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = 0,$$

intégrées en prenant pour $s=0$ les valeurs de x, y qui correspondent au point origine, donnent la ligne principale issue du point origine, s désignant l'abscisse curviligne intrinsèque comptée à partir de ce point origine. Or ces équations expriment que, M et M' étant les deux points de la ligne principale d'abscisses s et $s + ds$, la transformation infinitésimale $S_M^{-1} S_{M'}$ a pour symbole dsX . Il en résulte que les transformations S_M forment le groupe à un paramètre engendré par la transformation infinitésimale X , s étant le paramètre canonique de ce groupe. Par suite la ligne principale passant par le point origine est une trajectoire de la transformation infinitésimale X , l'abscisse intrinsèque sur cette ligne étant le paramètre canonique du groupe engendré par X .

Nous avons constaté que plusieurs des hypersurfaces obtenues avaient, dans le plan projectif complexe, leurs équations de la forme $y_2 = f(x_2)$, les coordonnées x et y étant non homogènes ⁽⁶⁾. La section de cette hypersurface par la droite réelle

$$y = ax + b,$$

ou

$$y_1 + iy_2 = a(x_1 + ix_2) + b,$$

⁽⁶⁾ Pour les hypersurfaces $y_2 = f(x_2)$ qui n'admettent que le groupe à deux paramètres

$$x' = x + a, \quad y' = y + b$$

(a et b réels), les surfaces caractéristiques principales sont aussi des droites dont le coefficient angulaire est réel, mais dont l'ordonnée à l'origine peut être imaginaire.

donne

$$f(x_2) = ax_2, \quad \text{ou} \quad x_2 = \text{const.}$$

La direction normale à la ligne principale dans la surface caractéristique, c'est-à-dire la direction normale à l'hypersurface, est donc donnée par

$$dx_1 = 0, \quad dy_1 = 0, \quad d\frac{y_2}{x_2} = 0.$$

91. - Eclaircissons ce qui précède par l'étude des hypersurfaces pour lesquelles l'invariant α , et par suite aussi l'invariant η , est nul. Ces hypersurfaces sont caractérisées par la propriété d'admettre une transformation pseudo-conforme non identique laissant invariant un quelconque de leurs points (n.º 83). Elles admettent soit un groupe connexe, soit un groupe mixte formé de deux familles connexes.

Les formules (48) du n.º 80 donnent ici

$$\beta + 3\gamma = 0, \quad \theta = \frac{i}{2\beta},$$

et par suite les formules (47) deviennent

$$\begin{aligned} \Omega' &= i[\Omega_1 \bar{\Omega}_1], \\ \Omega_1' &= \frac{4}{3} i\beta[\Omega \Omega_1] - \frac{i}{2\beta}[\Omega \bar{\Omega}_1], \\ \Omega_1' &= \frac{i}{2\beta}[\Omega \Omega_1] - \frac{4}{3} i\beta[\Omega \bar{\Omega}_1], \end{aligned}$$

ou encore, en introduisant les formes réelles $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\omega}' &= 2[\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2], \\ \tilde{\omega}_1' &= -\frac{8\beta^2 + 3}{6\beta}[\tilde{\omega} \tilde{\omega}_2], \\ \tilde{\omega}_2' &= \frac{8\beta^2 - 3}{6\beta}[\tilde{\omega} \tilde{\omega}_1]. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients des seconds membres donnant les constantes de structure, on voit facilement que les transformations infinitésimales du groupe adjoint sont

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} X &\equiv -\frac{8\beta^2 - 3}{6\beta} u_1 \frac{\partial f}{\partial u_2} + \frac{8\beta^2 + 3}{6\beta} u_2 \frac{\partial f}{\partial u_1}, \\ X_1 &\equiv -2u_2 \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{8\beta^2 - 3}{6\beta} u \frac{\partial f}{\partial u_2}, \\ X_2 &\equiv 2u_1 \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{8\beta^2 + 3}{6\beta} u \frac{\partial f}{\partial u_1}. \end{aligned} \right.$$

Elles laissent invariante la forme quadratique

$$\frac{u^2}{12\beta} + \frac{u_1^2}{8\beta^2 + 3} + \frac{u_2^2}{8\beta^2 - 3},$$

en supposant toutefois $\beta^2 \neq \frac{3}{8}$. Nous laisserons de côté les deux cas $\beta = \pm \sqrt{\frac{3}{8}}$, qui s'étudieraient facilement.

92. - Le point origine, qui correspond à la transformation infinitésimale $X_1 + iX_2$, est ici ($u=0$, $u_1=1$, $u_2=i$). L'hypersurface, lieu des transformés de ce point, satisfait donc à l'équation

$$(10) \quad \frac{u\bar{u}}{12\beta} + \frac{u_1\bar{u}_1}{8\beta^2+3} + \frac{u_2\bar{u}_2}{8\beta^2-3} = \pm \frac{8}{3}\beta^2 \left| \frac{u^2}{12\beta} + \frac{u_1^2}{8\beta^2+3} + \frac{u_2^2}{8\beta^2-3} \right|,$$

où l'on doit prendre le signe + ou le signe - suivant que β^2 est supérieur ou inférieur à $\frac{3}{8}$. La surface caractéristique principale qui passe par le point origine est la droite $u=0$. Quant à la ligne principale correspondante, c'est la trajectoire de la transformation infinitésimale X .

Supposons, pour fixer les idées, $\beta > \sqrt{\frac{3}{8}}$, ce qui correspond aux hypersurfaces du type (L) (n.ºs 58-60), et posons

$$u = \sqrt{12\beta}x, \quad u_1 = \sqrt{8\beta^2+3}x_1, \quad u_2 = \sqrt{8\beta^2-3}x_2.$$

Le point origine, sur la droite $x=0$, a pour coordonnée non homogène $z = \frac{x_2}{x_1}$ la quantité

$$z = \sqrt{\frac{8\beta^2+3}{8\beta^2-3}} \frac{u_2}{u_1} = i \sqrt{\frac{8\beta^2+3}{8\beta^2-3}}.$$

En introduisant z , la transformation X devient

$$X \equiv - \frac{\sqrt{64\beta^4-9}}{6\beta} (1+z^2) \frac{\partial f}{\partial z},$$

et l'équation de la transformation finie du groupe qu'elle engendre est

$$z' = \frac{z + \operatorname{tg} \theta}{1 - z \operatorname{tg} \theta},$$

où θ est lié au paramètre canonique s par

$$\theta = - \frac{\sqrt{64\beta^4-9}}{6\beta} s.$$

93. - Considérons le plan de la variable complexe z et dans ce plan l'axe réel, qui n'est autre que le lieu des points réels de la surface caractéristique principale $u=0$. La transformation infinitésimale définit un déplacement non euclidien du demi-plan de POINCARÉ laissant fixes les points i et $-i$; c'est donc une rotation non euclidienne autour du point i ; comme $\theta=\pi$ redonne la transformation identique, c'est-à-dire une rotation de 2π , l'angle de rotation non euclidienne est 2θ . Le lieu des transformés du point origine $z=i\sqrt{\frac{8\beta^2+3}{8\beta^2-3}}$ est donc une circonférence non euclidienne de centre i , et la longueur intrinsèque d'un arc de cette circonférence est égale au produit de l'angle au centre par $\frac{3\beta}{\sqrt{64\beta^4-9}}$, le sens positif intrinsèque étant celui des θ décroissants. Le rayon non euclidien

de cette circonférence est d'ailleurs donné par

$$R = \log \sqrt{\frac{8\beta^2 + 3}{8\beta^2 - 3}}, \quad \text{d'où} \quad \beta^2 = \frac{3}{8} \operatorname{cth} R.$$

A un angle au centre égal à φ correspond donc une longueur intrinsèque

$$\sqrt{\frac{3}{8}} \operatorname{sh} R \operatorname{ch} R \cdot \varphi.$$

En partant du point origine et se déplaçant dans le sens positif, l'accroissement élémentaire de z est du signe de $-(1+z^2) = \frac{6}{8\beta^2 - 3}$. Par suite, en se déplaçant sur la normale intérieure à l'hypersurface, z prend un accroissement purement imaginaire positif, ce qui correspond à une diminution de β .

Imaginons dans le plan projectif complexe, doué de la conique fondamentale

$$x^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

les différentes hypersurfaces correspondant aux valeurs de β supérieures à $\sqrt{\frac{3}{8}}$. On voit que les trajectoires orthogonales de ces hypersurfaces sont des lignes tracées dans les différents droites réelles du plan et orthogonales aux lignes principales de ces droites. Pour la droite $u=0$, ce sont les circonférences (chaînes) passant par les points i et $-i$; pour une droite réelle quelconque, ce sont les chaînes passant par les deux points d'intersection de cette droite avec la conique fondamentale.

La distance intrinsèque de deux hypersurfaces infiniment voisines s'obtient en remarquant qu'en se déplaçant à partir du point origine d'une longueur ds sur la normale intérieure, on a

$$dz = -i \frac{\sqrt{64\beta^4 - 9}}{6\beta} (1+z^2) ds = \frac{i}{\beta} \sqrt{\frac{8\beta^2 + 3}{8\beta^2 - 3}} ds = \frac{z}{\beta} ds,$$

d'où

$$ds = \beta \frac{dz}{z} = \sqrt{\frac{3}{8}} \operatorname{cth} R dR.$$

Les différentes hypersurfaces s'enveloppent les unes les autres; à l'intérieur de toutes ces hypersurfaces se trouve le plan projectif réel, correspondant à la valeur limite $\beta = \sqrt{\frac{3}{8}}$. L'autre valeur limite $\beta = \infty$ correspond à la conique fondamentale.

94. - Si l'on passe des hypersurfaces (Σ_L) qui viennent d'être étudiées, aux hypersurfaces (Σ_L') , lieux des couples de points (ξ, η) de la sphère de RIEMANN situés à une distance constante l'un de l'autre, on arrive à des résultats géométriques également intéressants. Les surfaces caractéristiques principales ont pour équation générale

$$a\xi\eta + b(\xi + \eta) + \bar{a} = 0,$$

où b est réel, \bar{a} complexe conjugué de a ; elles sont formées des couples de points (ξ, η) symétriques l'un de l'autre par rapport à un diamètre fixe de la sphère. Les lignes principales sont formées des couples de points diamétralement opposés sur un petit cercle de la sphère. Enfin les trajectoires orthogonales des différentes hypersurfaces (Σ_L') sont formées des couples de points (ξ, η) situés sur un grand cercle fixe de la sphère et symétriques entre eux par rapport à un diamètre fixe de ce grand cercle.

Le rayon sphérique r d'une ligne principale correspond sur (Σ_L) , pour une même valeur de β , à un rayon non euclidien R par la relation

$$\cos r = e^{-R};$$

la distance intrinsèque de deux hypersurfaces (Σ_L') correspondant aux valeurs r et $r + dr$ est

$$ds = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{1 + \cos^2 r}{\cos^2 r}} dr;$$

la région intérieure à (Σ_L') est donc celle des r croissants. A la conique fondamentale du plan projectif complexe correspondent les couples de points confondus sur la sphère de RIEMANN; au plan projectif réel correspondent les couples de points diamétralement opposés sur la sphère de RIEMANN.

95. - On étudierait d'une manière analogue les autres cas où β serait compris entre 0 et $\sqrt{\frac{3}{8}}$, entre 0 et $-\sqrt{\frac{3}{8}}$, ou serait inférieur à $-\sqrt{\frac{3}{8}}$. On retrouverait ainsi les hypersurfaces du type (K) déjà obtenues au Chapitre II, *mais avec quelque chose de plus*, puisque nous savons maintenant que les hypersurfaces correspondant à deux valeurs distinctes de β ne peuvent être équivalentes. Le cas $\beta = \sqrt{\frac{3}{8}}$ correspond aux hypersurfaces du type (H) , avec $m = 0$, et le cas $\beta = -\sqrt{\frac{3}{8}}$ aux hypersurfaces du type (E) avec $m = -1$.

CHAPITRE V.

Géométrie pseudo-conforme de l'hypersphère.

Les espaces à connexion hypersphérique.

I. - Chaînes et cercles de l'hypersphère.

96. - Au point de vue topologique, l'hypersphère, qu'on peut toujours supposer définie par l'équation

$$\bar{x}\bar{x} + \bar{y}\bar{y} - 1 = 0,$$

est homéomorphe à l'espace sphérique à trois dimensions; chaque point est en

effet déterminé d'une manière biunivoque par quatre nombres réels x_1, x_2, y_1, y_2 assujettis à la relation

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1.$$

Dans la géométrie pseudo-conforme de l'hypersphère, il existe deux familles remarquables de lignes, que nous appellerons les *chaînes* et les *cercles* ⁽⁷⁾ et qui sont liées à la géométrie projective du plan complexe (x, y) , dans lequel l'hypersphère porte le nom d'*hyperconique*.

97. - La chaîne est l'intersection de l'hyperconique avec une droite sécante du plan projectif: si par exemple on coupe par $y=0$, on obtient le lieu des points pour lesquels x est de module 1. Le rapport anharmonique de quatre points d'une chaîne est toujours réel. Toutes les chaînes sont égales, en ce sens qu'il existe toujours une homographie laissant invariante l'hyperconique et transformant une droite sécante en une autre droite sécante. Elles dépendent de 4 paramètres réels, de sorte que chacune d'elles admet un sous-groupe à 4 paramètres du groupe fondamental. Par deux points de l'hyperconique il passe une chaîne et une seule. Par tout point M de l'hyperconique et tangentiellement à toute direction issue de M non située dans l'élément plan caractéristique, il passe également une chaîne et une seule: les données définissent en effet dans le plan projectif une droite non tangente à l'hyperconique.

98. - Les chaînes jouent un rôle analogue à celui des droites dans l'espace à trois dimensions; mais il n'y a pas dans l'hypersphère de surfaces analogues aux plans. Nous allons en effet montrer qu'étant données trois chaînes formant un triangle ABC , toute chaîne rencontrant ces trois chaînes passe par l'un des sommets du triangle.

Prenons en effet, dans le plan projectif complexe, les points non en ligne droite A, B, C comme sommets du triangle de référence. L'équation de l'hyperconique sera de la forme

$$(1) \quad a_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{a}_1 x_3 \bar{x}_2 + a_2 x_3 \bar{x}_1 + \bar{a}_2 x_1 \bar{x}_3 + a_3 x_1 \bar{x}_2 + \bar{a}_3 x_2 \bar{x}_1 = 0.$$

On peut encore disposer des facteurs arbitraires par lesquels on peut multiplier x_1, x_2, x_3 pour qu'une droite donnée (D) ne passant par aucun des points A, B, C ait pour équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

La chaîne BC est définie par

$$x_1 = 0, \quad a_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{a}_1 x_3 \bar{x}_2 = 0.$$

⁽⁷⁾ Voir, pour les notions géométriques introduites dans les n.° 96-100, E. CARTAN: *Leçons sur la géométrie projective complexe* (Paris, Gauthier-Villars, 1931).

Si la droite (D) coupe cette chaîne, on aura au point d'intersection $x_2 + x_3 = 0$, d'où $a_1 + \bar{a}_1 = 0$. Si elle coupe de même chacune des deux autres chaînes, on aura $a_2 + \bar{a}_2 = a_3 + \bar{a}_3 = 0$, mais le discriminant du premier membre de l'équation (1), qui est

$$\begin{vmatrix} 0 & a_3 & \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & \bar{a}_1 & 0 \end{vmatrix} = a_1 a_2 a_3 + \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3,$$

serait nul, ce qui est impossible, l'hyperconique n'étant pas dégénérée.

99. - On arrive à la notion de *cercle* en considérant le lieu des points réels de l'hyperconique

$$x\bar{x} + y\bar{y} - 1 = 0;$$

c'est une ligne à une dimension qui est précisément une circonférence dans le cas où x et y désignent des coordonnées rectangulaires. Plus généralement nous appellerons *cercle* de l'hyperconique toute ligne transformée de la précédente par une transformation du groupe des homographies de l'hyperconique. Comme le cercle initial admet un sous-groupe à trois paramètres du groupe total, à savoir le sous-groupe des homographies *réelles* de l'hyperconique, les cercles dépendent de $8 - 3 = 5$ paramètres. Chacun d'eux est le lieu des points de l'hyperconique invariants par une *antiinvolution*, transformée de l'antiinvolution

$$x' = \bar{x}, \quad y' = \bar{y}.$$

En coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 , une antiinvolution est définie par des relations

$$(2) \quad x_i' = \sum_k a_{ik} \bar{x}_k \quad (i = 1, 2, 3),$$

la matrice (A) des coefficients étant telle que le produit (A)(\bar{A}) est égal à 1. L'antiinvolution est dite *normale* si elle laisse invariante l'hyperconique; il en est ainsi des antiinvolutions associées aux cercles de l'hyperconique; pour qu'une antiinvolution soit normale, il faut et il suffit qu'elle laisse invariants, dans le plan projectif complexe, les sommets d'un triangle autopolaire par rapport à l'hyperconique.

Par trois points de l'hyperconique non en ligne droite, il ne passe en général pas de cercle. Prenons en effet ces points comme sommets d'un triangle de référence; l'équation de l'hyperconique sera de la forme (1). Toute antiinvolution laissant fixes les trois points sera de la forme

$$x_k' = e^{i\alpha_k} \bar{x}_k \quad (k = 1, 2, 3);$$

devant laisser invariant le premier membre de l'équation (1), on aura

$$a_1 e^{i(\alpha_2 - \alpha_3)} = \bar{a}_1, \quad a_2 e^{i(\alpha_3 - \alpha_1)} = \bar{a}_2, \quad a_3 e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)} = \bar{a}_3,$$

d'où

$$(3) \quad a_1 a_2 a_3 = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3;$$

telle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il passe un cercle par les trois points donnés.

L'hyperconique étant rapportée à un système de référence quelconque et définie par l'équation

$$F \equiv \sum_{ij} a_{ij} x_i \bar{x}_j = 0,$$

introduisons la notation (\bar{M}, M') pour désigner la quantité

$$\sum x'_i \frac{\partial F}{\partial x_i},$$

où x_1, x_2, x_3 désignent les coordonnées du point *analytique* M et x'_1, x'_2, x'_3 celles du point *analytique* M' . La relation (3) s'écrit alors, en désignant par A_1, A_2, A_3 , trois points analytiques associés aux trois points donnés,

$$(\bar{A}_2, A_3)(\bar{A}_3, A_1)(\bar{A}_1, A_2) = (\bar{A}_3, A_2)(\bar{A}_1, A_3)(\bar{A}_2, A_1);$$

cette relation ne change pas si on multiplie les points analytiques A_1, A_2, A_3 , par des facteurs complexes arbitraires; elle exprime donc une propriété géométrique intrinsèque des trois points géométriques donnés.

II. - Repère mobile.

100. - Nous pouvons attacher à chaque point M de l'hyperconique une infinité de systèmes de référence projectifs, chacun d'eux étant déterminé par trois points *analytiques* A, A_1, A_2 du plan projectif complexe, dont le premier coïncide géométriquement avec M , le troisième A_2 étant un point quelconque de l'hyperconique et le second A_1 le point d'intersection des tangentes en A et A_2 à l'hyperconique ⁽⁸⁾. Nous choisissons les facteurs de proportionnalité de ces points analytiques par la condition que $xA + x_1A_1 + x_2A_2$ étant un point quelconque du plan, l'équation de l'hyperconique soit

$$(4) \quad F \equiv -ix\bar{x}_2 + ix_2\bar{x} + x_1\bar{x}_1 = 0.$$

Les trois points analytiques ne sont ainsi définis qu'à un même facteur arbitraire près; nous supposons, bien que cela ne soit pas essentiel, que le déterminant des coordonnées des trois points rapportés à un repère fixe ait une valeur constante donnée; le passage d'un système de coordonnées relatives (x, x_1, x_2)

⁽⁸⁾ A l'intérieur de l'hypersphère, le symbole A_1 est associé à la chaîne qui joint les points A et A_2 .

à un autre (x', x'_1, x'_2) se fera alors par une substitution linéaire de déterminant 1 laissant invariante la forme F . Nous pourrons alors poser

$$(5) \quad (\bar{A}, A_2) = i, \quad (\bar{A}_2, A) = -i, \quad (\bar{A}_1, A_1) = 1,$$

les autres produits scalaires étant nuls.

Considérons une famille continue de repères satisfaisant aux conditions précédentes, que nous appellerons *repères normaux*. En passant de l'un d'entre eux au repère infiniment voisin, on aura des relations de la forme ⁽⁹⁾

$$(6) \quad \begin{cases} dA = \omega_{00}A + \omega_{01}A_1 + \omega_{02}A_2, \\ dA_1 = \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2, \\ dA_2 = \omega_{20}A + \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2, \end{cases}$$

avec

$$(7) \quad \omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0.$$

En exprimant que les différentielles des produits scalaires (\bar{A}_i, A_j) , à savoir

$$(d\bar{A}_i, A_j) + (\bar{A}_i, dA_j),$$

sont toutes nulles et tenant compte de (5) et (6), on trouve

$$\begin{aligned} \omega_{02} - \bar{\omega}_{02} = 0, & \quad \omega_{11} + \bar{\omega}_{11} = 0, & \quad \omega_{20} - \bar{\omega}_{20} = 0, \\ \omega_{12} - i\bar{\omega}_{01} = 0, & \quad \omega_{22} + \bar{\omega}_{00} = 0, & \quad \omega_{21} + i\bar{\omega}_{10} = 0. \end{aligned}$$

Nous poserons

$$(8) \quad \begin{cases} \omega_{02} = \omega, & \omega_{01} = \omega_1, & \omega_{12} = i\bar{\omega}_1, & \omega_{20} = -\omega_4, \\ \omega_{00} - \omega_{11} = \omega_2, & \omega_{11} - \omega_{22} = \bar{\omega}_2, & \omega_{21} = -\omega_3, & \omega_{10} = i\bar{\omega}_3, \end{cases}$$

ce qui entraîne, en tenant compte de (7),

$$\omega_{00} = \frac{2}{3}\omega_2 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_2, \quad \omega_{11} = -\frac{1}{3}\omega_2 + \frac{1}{3}\bar{\omega}_2, \quad \omega_{22} = -\frac{1}{3}\omega_2 - \frac{2}{3}\bar{\omega}_2.$$

Les formules (6) deviennent alors

$$(6') \quad \begin{cases} dA = \frac{2\omega_2 + \bar{\omega}_2}{3}A + \omega_1A_1 + \omega A_2, \\ dA_1 = i\bar{\omega}_3A - \frac{\omega_2 - \bar{\omega}_2}{3}A_1 + i\bar{\omega}_1A_2, \\ dA_2 = -\omega_4A - \omega_3A_1 - \frac{\omega_2 + 2\bar{\omega}_2}{3}A_2. \end{cases}$$

101. - Les formes introduites satisfont aux relations qui expriment les conditions de compatibilité des équations (6). Elles sont de la forme

$$\omega_{ij}' = \sum_{k=0}^{k=2} [\omega_{ik}\omega_{kj}].$$

⁽⁹⁾ Cfr. le mémoire cité ⁽³⁾.

En tenant compte de (8), elles s'écrivent

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega' = i[\omega_1 \bar{\omega}_1] - [\omega(\omega_2 + \bar{\omega}_2)], \\ \omega_1' = -[\omega_1 \omega_2] - [\omega \omega_3], \\ \bar{\omega}_1' = -[\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2] - [\omega \bar{\omega}_3], \\ \omega_2' = 2i[\omega_1 \bar{\omega}_3] + i[\bar{\omega}_1 \omega_3] - [\omega \omega_4], \\ \bar{\omega}_2' = -i[\omega_1 \bar{\omega}_3] - 2i[\bar{\omega}_1 \omega_3] - [\omega \omega_4], \\ \omega_3' = -[\omega_1 \omega_4] - [\bar{\omega}_2 \omega_3], \\ \bar{\omega}_3' = -[\bar{\omega}_1 \omega_4] - [\omega_2 \bar{\omega}_3], \\ \omega_4' = i[\omega_3 \bar{\omega}_3] + [\omega_4(\omega_2 + \bar{\omega}_2)]. \end{array} \right.$$

Ces sont les relations (34) et (38) du Chapitre III, dont nous voyons maintenant la signification géométrique.

Ces formules, équations de structure du groupe de l'hypersphère, sont à la base de la géométrie différentielle pseudo-conforme de l'hypersphère. La connaissance des formes ω_i , exprimées au moyen d'un système de coordonnées quelconques, pourvu que ces formes satisfassent aux équations de structure (9), permet de traiter tous les problèmes de géométrie différentielle qui peuvent se poser.

102. - Supposons qu'on ait attaché à chaque point de l'hypersphère, supposé défini analytiquement par trois coordonnées u, v, w , de nature d'ailleurs quelconque, un repère normal et qu'on connaisse les 8 composantes ω_i du déplacement infinitésimal de ce repère: ce sont des formes construites avec u, v, w et leurs différentielles, et qui satisfont nécessairement aux relations (9). Pour passer de ces formes aux formes les plus générales possible, que nous appellerons Ω_i , et qui dépendent de 8 variables et de leurs différentielles, nous remarquerons que le passage du repère normal qui a été attaché à un point au repère normal le plus général admettant ce point comme origine se fait par un changement de coordonnées relatives de la forme

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x - i\bar{\mu}x_1 + \left(\varrho - \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)x_2, \\ y_1 = \lambda x_1 + \lambda\mu x_2, \\ y_2 = \lambda\bar{\lambda}x_2, \end{array} \right.$$

dépendant de deux paramètres complexes λ et μ , et d'un paramètre réel ϱ : on a en effet

$$-iy\bar{y}_2 + iy_2\bar{y} + y_1\bar{y}_1 \equiv \lambda\bar{\lambda}(-ix\bar{x}_2 + ix_2\bar{x} + x_1\bar{x}_1).$$

En désignant par B, B_1, B_2 les points analytiques qui définissent le repère normal le plus général, on a, d'après (10),

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} B = \tau A, \\ B_1 = \frac{\tau}{\lambda}(A_1 + i\bar{\mu}A), \\ B_2 = \frac{\tau}{\lambda\bar{\lambda}} \left[A_2 - \mu A_1 - \left(\varrho + \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)A \right], \end{array} \right.$$

le facteur τ étant choisi de manière à réduire à l'unité le déterminant $\frac{\tau^3}{\lambda^2\bar{\lambda}}$.

Les formes Ω_i , définies par les relations, déduites de (6),

$$\begin{aligned}\Omega &= -i(\bar{B}, dB), & \Omega_1 &= (\bar{B}_1, dB), & \Omega_2 &= i(\bar{B}_2, dB) - (\bar{B}_1, dB_1), \\ \Omega_3 &= -(\bar{B}_1, dB_2), & \Omega_4 &= -i(\bar{B}_2, dB_2),\end{aligned}$$

se déduisent des formes ω_i par les formules

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= \lambda\bar{\lambda}\omega, \\ \Omega_1 &= \lambda(\omega_1 + \mu\omega), \\ \bar{\Omega}_1 &= \bar{\lambda}(\bar{\omega}_1 + \bar{\mu}\omega), \\ \Omega_2 &= \frac{d\lambda}{\lambda} + \omega_2 - 2i\bar{\mu}\omega_1 - i\mu\bar{\omega}_1 + \left(\varrho - \frac{3}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\omega, \\ \bar{\Omega}_2 &= \frac{d\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}} + \bar{\omega}_2 + i\bar{\mu}\omega_1 + 2i\mu\bar{\omega}_1 + \left(\varrho + \frac{3}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\omega, \\ \Omega_3 &= \frac{1}{\lambda} \left[d\mu + \omega_3 + \mu\bar{\omega}_2 + \left(\varrho + \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\omega_1 + i\mu^2\bar{\omega}_1 + \mu \left(\varrho + \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\omega \right], \\ \bar{\Omega}_3 &= \frac{1}{\bar{\lambda}} \left[d\bar{\mu} + \bar{\omega}_3 + \bar{\mu}\omega_2 - i\bar{\mu}^2\omega_1 + \left(\varrho - \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\bar{\omega}_1 + \bar{\mu} \left(\varrho - \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\omega \right], \\ \Omega_4 &= \frac{1}{\lambda\bar{\lambda}} \left[d\varrho + \frac{1}{2}i(\mu d\bar{\mu} - \bar{\mu}d\mu) + \omega_4 - i\bar{\mu}\omega_3 + i\mu\bar{\omega}_3 + \left(\varrho + \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\omega_2 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\varrho - \frac{i}{2}\mu\bar{\mu}\right)\bar{\omega}_2 - i\bar{\mu} \left(\varrho + \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\omega_1 + i\mu \left(\varrho - \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\bar{\omega}_1 + \left(\varrho^2 + \frac{1}{4}\mu^2\bar{\mu}^2\right)\omega \right]. \end{aligned} \right.$$

Ces formules sont identiques aux formules (36) du Chapitre III.

103. - Appliquons ces résultats à la recherche, dans un système de coordonnées quelconque, des chaînes de l'hypersurface. Toutes ces chaînes sont égales entre elles. Attachons à chaque point d'une de ces chaînes un repère normal, tel que A_2 soit situé sur la chaîne; le point géométrique A_1 , pôle de la droite AA_2 par rapport à l'hyperconique, restera fixe, et on aura par suite

$$\omega_{10} = \omega_{12} = 0,$$

ou, d'après (8),

$$\omega_1 = \omega_3 = \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_3 = 0.$$

Si donc on attache aux différents points de l'espace à trois dimensions que constitue l'hypersphère, le repère normal le plus général possible, les équations différentielles des chaînes seront données par

$$(13) \quad \Omega_1 = \Omega_3 = \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_3 = 0.$$

Mais si on attache à chaque point un seul repère normal suivant une loi déterminée et si ω_i sont les composantes du déplacement infinitésimal de ce repère, on aura, d'après (12), pour équations différentielles des chaînes,

$$\omega_1 + \mu\omega = 0, \quad \bar{\omega}_1 + \bar{\mu}\omega = 0,$$

$$\begin{aligned} d\mu + \omega_3 + \mu\bar{\omega}_2 + \left(\varrho + \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\omega_1 + i\mu^2\bar{\omega}_1 + \mu\left(\varrho + \frac{i}{2}\mu\bar{\mu}\right)\omega &= 0, \\ d\bar{\mu} + \bar{\omega}_3 + \bar{\mu}\omega_2 - i\bar{\mu}^2\omega_1 + \left(\varrho - \frac{1}{2}i\mu\bar{\mu}\right)\bar{\omega}_1 + \bar{\mu}\left(\varrho - \frac{i}{2}\mu\bar{\mu}\right)\omega &= 0, \end{aligned}$$

ou encore, en simplifiant,

$$(14) \quad \begin{cases} \omega_1 + \mu\omega = 0, & \bar{\omega}_1 + \bar{\mu}\omega = 0, \\ d\mu + \omega_3 + \mu\bar{\omega}_2 - i\mu^2\bar{\omega}_1 = 0, \\ d\bar{\mu} + \bar{\omega}_3 + \bar{\mu}\omega_2 + i\mu\bar{\mu}^2\omega = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations, trois des quantités μ, u, v, w sont considérées comme des fonctions inconnues de la quatrième.

104. - La formule

$$\Omega_2' - \bar{\Omega}_2' = 3i[\Omega_1\bar{\Omega}_3] + 3i[\bar{\Omega}_1\Omega_3]$$

montre que les équations différentielles (13) des chaînes admettent l'invariant intégral relatif $\int \frac{\Omega_2 - \bar{\Omega}_2}{i}$ (4). Par suite on a, avec un système de coordonnées quelconque u, v, w , pour le système d'équations différentielles (14), l'invariant intégral relatif

$$\int \left(\frac{\omega_2 - \bar{\omega}_2}{i} - 3\bar{\mu}\omega_1 - 3\mu\bar{\omega}_1 - 3\mu\bar{\mu}\omega \right).$$

L'existence de cet invariant rapproche les chaînes de l'hypersphère des droites de l'espace euclidien. On peut démontrer que si l'on a une congruence de chaînes telle que l'invariant intégral précédent, étendu à une suite continue fermée quelconque de chaînes de la congruence, soit nul, il existe, étant donnée une chaîne quelconque de la congruence, un cercle rencontré en deux points par cette chaîne et par les chaînes infiniment voisines.

105. - On peut arriver d'une manière analogue aux équations différentielles des cercles. Rapportée à un repère normal, l'équation de l'hyperconique est

$$-ix\bar{x}_2 + ix_2\bar{x} + x_1\bar{x}_1 = 0;$$

on aura un cercle particulier au moyen de l'antiinvolution

$$x' = i\bar{x}, \quad x_1' = \bar{x}_1, \quad x_2' = -i\bar{x}_2$$

qui laisse invariante l'hyperconique. Le cercle est le lieu des points de coordonnées

$$x = (1+i)u^2, \quad x_1 = 2uv, \quad x_2 = -(1-i)v^2,$$

où u et v sont deux paramètres homogènes réels. Nous aurons les équations

différentielles des cercles en exprimant qu'avec un choix arbitraire du repère normal, les points analytiques $(1+i)A$, A_1 , $(1-i)A_2$ restent réels. Cela donne

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega = 0, \quad \Omega_4 = 0, \quad (1+i)\Omega_1 = (1-i)\bar{\Omega}_1, \quad \Omega_2 = \bar{\Omega}_2, \\ (1-i)\Omega_3 = (1+i)\bar{\Omega}_3. \end{array} \right.$$

En remplaçant les Ω_i par leurs valeurs tirées de (12) au moyen des ω_i , on aura les équations différentielles des cercles lorsque l'hypersphère est rapportée à un système quelconque de coordonnées curvilignes u, v, w et qu'on a attaché à chaque point de l'hypersphère un repère normal de déplacement infinitésimal connu.

On pourrait, au moyen de la méthode du repère mobile, faire la théorie générale des courbes tracées dans l'hypersphère, trouver les formules de FRENET généralisées, etc. Nous laissons de côté ces questions.

III. - Les espaces à connexion hypersphérique.

106. - Considérons 8 expressions de PFAFF

$$\omega, \quad \omega_1, \quad \bar{\omega}_1, \quad \omega_2, \quad \bar{\omega}_2, \quad \omega_3, \quad \bar{\omega}_3, \quad \omega_4$$

construites avec trois variables réelles u, v, w et leurs différentielles, la première et la dernière étant réelles, les autres deux à deux complexes conjuguées, les trois premières $\omega, \omega_1, \bar{\omega}_1$ étant enfin linéairement indépendantes en du, dv, dw . Si ces huit expressions satisfont aux relations (9), elles peuvent être regardées comme les composantes relatives du déplacement infinitésimal d'un repère normal mobile dans une hypersphère rapportée aux coordonnées u, v, w . Si les relations (9) ne sont pas vérifiées, il n'en est plus de même, mais on peut regarder l'espace à trois dimensions des points (u, v, w) comme une hypersphère non holonome ou comme un *espace à connexion hypersphérique*, les formes ω_i définissant le déplacement infinitésimal (non holonome) d'un repère normal attaché à chaque point de l'espace. On aura les composantes relatives Ω_i du déplacement infinitésimal du repère normal le plus général de cet espace par les formules (12), le passage d'un repère normal d'origine donnée au repère normal le plus général de même origine se faisant par les formules (11). L'espace est donc considéré, au voisinage de chaque point, comme ayant les mêmes propriétés géométriques que l'hypersphère.

On pourra dans cet espace définir les *chaînes*, et cela précisément au moyen des mêmes équations différentielles (13) ou (14) que dans le cas de l'hypersphère; il en sera de même *des cercles*.

107. - La *courbure riemannienne* des espaces considérés sera définie par les formes quadratiques extérieures qu'il faut retrancher des seconds membres

des équations (9) pour qu'elles deviennent exactes ; elle peut se définir comme faisant correspondre à chaque cycle infinitésimal une homographie hermitienne infinitésimale dont les paramètres sont précisément les formes quadratiques considérées.

On voit ainsi que toute hypersurface de l'espace de deux variables complexes peut être envisagée, d'une manière liée intrinséquement aux propriétés pseudo-conformes de l'hypersurface, comme un espace à connexion hypersphérique particulière. Les formules (34) et (38) du Chapitre III fournissent la courbure riemannienne correspondante ⁽¹⁰⁾. En utilisant le repère normal le plus général, les formes supplémentaires qui s'introduisent dans les seconds membres des équations de structure se trouvent uniquement dans les formules qui donnent Ω_3' , $\bar{\Omega}_3'$ et Ω_4' . En considérant un petit parallélogramme construit sur les deux petits vecteurs

$$\begin{aligned} \Omega &= a, & \Omega_1 &= a_1, & \bar{\Omega}_1 &= \bar{a}_1, \\ \Omega &= b, & \Omega_1 &= b_1, & \bar{\Omega}_1 &= \bar{b}_1, \end{aligned}$$

le déplacement infinitésimal associé à ce parallélogramme se déduit des équations (6') en y faisant

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 = \omega_2 = 0, & \omega_3 &= R(\bar{a}\bar{b}_1 - \bar{b}\bar{a}_1), \\ \omega_4 &= S(ab_1 - ba_1) + \bar{S}(\bar{a}\bar{b}_1 - \bar{b}\bar{a}_1). \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \delta A &= 0, \\ \delta A_1 &= i\bar{R}(ab_1 - ba_1)A, \\ \delta A_2 &= -[S(ab_1 - ba_1) + \bar{S}(\bar{a}\bar{b}_1 - \bar{b}\bar{a}_1)]A - R(\bar{a}\bar{b}_1 - \bar{b}\bar{a}_1)A_1. \end{aligned}$$

Ce déplacement jouit des propriétés suivantes :

1°) *L'origine A du parallélogramme ne subit aucun déplacement ; autrement dit l'espace est sans torsion.*

2°) *Le déplacement associé à un parallélogramme situé dans l'élément plan caractéristique est identiquement nul ; en effet pour un tel parallélogramme $a=b=0$.*

3°) *Tout vecteur infiniment petit d'origine A subit une variation géométrique parallèle à l'élément plan caractéristique en A.* En effet le point $A' = A + \xi A_1 + \eta A_2$, où ξ et η sont deux quantités infiniment petites, dont la seconde est réelle, est transporté dans le point

$$A + [\xi - R(\bar{a}\bar{b}_1 - \bar{b}\bar{a}_1)\eta]A_1 + \eta A_2 ;$$

le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est donc augmenté du vecteur $-R(\bar{a}\bar{b}_1 - \bar{b}\bar{a}_1)\eta\overrightarrow{AA_1}$.

⁽¹⁰⁾ La forme de $\Omega_2' - \bar{\Omega}_2'$ montre que les équations différentielles des chaînes d'une hypersurface admettent encore un invariant intégral relatif, absolument comme les équations différentielles des géodésiques d'un espace riemannien.

4°) *Il y a entre la direction suivant laquelle l'élément plan du parallélogramme coupe l'élément plan caractéristique tangent et la direction de l'accroissement géométrique subi par un vecteur quelconque d'origine A une relation involutive.* En effet tout vecteur parallèle à l'élément plan caractéristique est de la forme $u\overrightarrow{AA_1}$; on a ici pour la première direction,

$$u = ab_1 - ba_1, \quad \bar{u} = a\bar{b}_1 - \bar{b}a_1,$$

et pour la seconde

$$u' = R(a\bar{b}_1 - \bar{b}a_1) = R\bar{u}, \quad \bar{u}' = \bar{R}(ab_1 - ba_1) = \bar{R}u;$$

la relation

$$\bar{R}uu' - R\bar{u}\bar{u}' = 0$$

est bien involutive.

5°) *Les directions doubles de l'involution précédente sont rectangulaires entre elles.* En effet elles sont données par l'équation

$$\bar{R}u^2 - R\bar{u}^2 = 0$$

et les deux directions ainsi obtenues sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux directions isotropes données par l'équation

$$u\bar{u} = 0.$$

108. - Réciproquement *tout espace à connexion hypersphérique satisfaisant aux cinq conditions précédentes satisfait à des relations de la forme (34) (n.° 73 du Chapitre III).*

En effet, si l'on désigne respectivement par $\Pi, \Pi_1, \bar{\Pi}_1, \Pi_2, \bar{\Pi}_2, \Pi_3, \bar{\Pi}_3$ les formes quadratiques extérieures qu'il faut retrancher des seconds membres des équations (34) pour qu'elles deviennent exactes, on aura, pour tout déplacement associé à un parallélogramme infinitésimal,

$$\begin{aligned} \delta A &= \frac{2\Pi_2 + \bar{\Pi}_2}{3} A + \Pi_1 A_1 + \Pi A_2, \\ \delta A_1 &= i\bar{\Pi}_3 A - \frac{\Pi_2 - \bar{\Pi}_2}{3} A_1 + i\bar{\Pi}_1 A_2, \\ \delta A_2 &= -\Pi_4 A - \Pi_3 A_1 - \frac{\Pi_2 + 2\bar{\Pi}_2}{3} A_2. \end{aligned}$$

La condition 1° donne

$$\Pi = \Pi_1 = \bar{\Pi}_1 = 0.$$

La condition 2° montre que les formes $\Pi_2, \bar{\Pi}_2, \Pi_3, \bar{\Pi}_3, \Pi_4$ ne contiennent pas de terme en $[\Omega_1 \bar{\Omega}_1]$.

Pour interpréter la condition 3°, remarquons que le point $A + \xi A_1 + \eta A_2$, où ξ et η sont très petits, est transformé dans le point

$$A + \xi A_1 + \eta A_2 - (\xi \Pi_2 + \eta \Pi_3) A_1 - \eta (\Pi_2 + \bar{\Pi}_2) A_2;$$

la condition 3° donne donc

$$II_2 + \overline{II}_2 = 0.$$

Ces résultats partiels étant obtenus, posons

$$\begin{aligned} II_2 &= \alpha[\Omega\Omega_1] - \bar{\alpha}[\Omega\overline{\Omega}_1], \\ \overline{II}_2 &= -\alpha[\Omega\Omega_1] + \bar{\alpha}[\Omega\overline{\Omega}_1], \\ II_3 &= \beta[\Omega\Omega_1] + \gamma[\Omega\overline{\Omega}_1], \\ \overline{II}_3 &= \bar{\gamma}[\Omega\Omega_1] + \bar{\beta}[\Omega\overline{\Omega}_1]. \end{aligned}$$

La dérivation extérieure de celles des équations (34) qui donnent $\Omega_1', \overline{\Omega}_1', \Omega_2' + \overline{\Omega}_2'$ conduit aux relations

$$\begin{aligned} [\Omega_1 II_2] + [\Omega II_3] &= 0, \\ [\overline{\Omega}_1 \overline{II}_2] + [\Omega \overline{II}_3] &= 0, \\ i[\Omega_1 \overline{II}_3] - i[\overline{\Omega}_1 II_3] - 2[\Omega II_4] &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\bar{\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta + \bar{\beta} = 0,$$

et par conséquent

$$II_2 = \overline{II}_2 = 0.$$

On voit alors que la variation géométrique d'un vecteur a pour paramètres directeurs

$$\begin{aligned} u' &= II_3 = \beta(ab_1 - ba_1) + \gamma(\bar{a}\bar{b}_1 - \bar{b}\bar{a}_1) = \beta u + \gamma \bar{u}, \\ \bar{u}' &= \overline{II}_3 = \bar{\gamma}(ab_1 - ba_1) + \bar{\beta}(\bar{a}\bar{b}_1 - \bar{b}\bar{a}_1) = \bar{\gamma} u + \bar{\beta} \bar{u}. \end{aligned}$$

La relation entre les deux directions énoncées dans la condition 4° est donc

$$\bar{\gamma} u u' - \beta \bar{u} \bar{u}' + \bar{\beta} \bar{u} u' - \gamma \bar{u} \bar{u}' = 0;$$

elle est d'elle-même involutive. La condition 4° est ainsi une conséquence des conditions 1°, 2°, 3°.

Enfin la condition 5° donne $\beta = 0$, d'où $\bar{\beta} = 0$; on retrouve ainsi les formules (34).

Nous dirons qu'une connexion hypersphérique satisfaisant aux conditions 1°-5° est normale. Nous arrivons ainsi au théorème fondamental suivant:

THÉORÈME. - À toute hypersurface de l'espace de deux variables complexes on peut associer d'une manière intrinsèque une connexion hypersphérique normale et une seule.

Remarque. - On pourrait encore énoncer d'une autre manière les conditions caractéristiques d'une connexion hypersphérique normale, en exigeant simplement, dans la condition 2°, que le déplacement associé à un parallélogramme infiniment petit situé dans l'élément plan caractéristique laisse fixes tous les vecteurs d'origine A . La condition 4° ne serait pas alors une conséquence des conditions 1°, 2°, 3°, la forme II_4 pouvant à priori contenir un terme en $[\Omega_1 \overline{\Omega}_1]$; la rela-

tion $\beta + \bar{\beta} = 0$ serait une conséquence de la condition 4°, au lieu d'être vérifiée d'elle-même.

109. - Si l'on choisit le repère comme cela a été fait aux n.°s 76 et 77 de manière à ramener l'invariant relatif R à la valeur 1 et à annuler $\Omega_2 + \bar{\Omega}_2$, les tangentes doubles de l'involution s'obtiennent en prenant ω_1 réel ou purement imaginaire: ce sont les *tangentes aux lignes de courbure*, qui ont ainsi une interprétation géométrique intrinsèque.

Cherchons pour terminer *dans quel cas les lignes principales d'une hypersurface sont des chaînes*. Désignons, pour nous conformer aux notations de ce Chapitre, par de petites lettres ω_i les formes désignées aux n.°s 78 et suivants par des lettres majuscules.

La condition pour que les lignes principales

$$\omega_1 = \bar{\omega}_1 = 0$$

soient des chaînes est que les équations différentielles (14) soient vérifiées par

$$\mu = \bar{\mu} = 0;$$

il faut donc qu'on ait

$$\omega_3 = \bar{\omega}_3 = 0.$$

Or, les formules (43) (n.° 78) donnent

$$\omega_3 = i\gamma\omega_1 + \theta\bar{\omega}_1 + \eta\omega;$$

la condition cherchée est donc $\eta = 0$. *Les hypersurfaces pour lesquelles les lignes principales sont des chaînes sont celles pour lesquelles l'invariant différentiel η est nul.*

Il en est ainsi en particulier pour les hypersurfaces dont chaque point est invariant par une transformation pseudo-conforme non identique laissant fixe l'hypersurface; ce sont les hypersurfaces des types (E) avec $m = -1$, (H) avec $m = 0$, (K) et (L) (Chapitre II).

Il est également facile de vérifier que les lignes de courbure de ces dernières hypersurfaces sont des cercles (généralisés).