ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
*Classe di Scienze*

PAUL LÉVY

**Sur un problème de calcul des probabilités lié à celui du refroidissement d'une barre homogène**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série*, tome 1, nº 3 (1932), p. 283-296
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_3_283_0>

# SUR UN PROBLÈME DE CALCUL DES PROBABILITÉS LIÉ À CELUI DU REFROIDISSEMENT D'UNE BARRE HOMOGÈNE

par PAUL LÉVY (Paris).

## § 1. - Introduction.

L'objet de ce travail est d'attirer l'attention sur la relation qui existe entre les deux problèmes suivants, qui se rattachent, l'un au calcul des probabilités, l'autre à la théorie de la chaleur:

*Premier problème.* - Étant donnée une variable aléatoire $X_0$, et une autre variable $\xi$, indépendante de $X_0$, et dépendant de la loi de Gauss, étudier la loi de probabilité dont dépend la somme $X=X_0+a\xi$.

*Deuxième problème.* - Étant donnée une barre homogène indéfinie, sur laquelle une quantité de chaleur finie est répartie à l'instant initial $t_0$, étudier la répartition de la chaleur à l'instant $t=t_0+\tau$.

En supposant les unités choisies de manière que les échanges de chaleur soient régis par l'équation

$$(E) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

et établissant entre les paramètres $a$ et $\tau$ la relation $a^2=2\tau$, on trouve que les deux problèmes sont formellement identiques. Cette remarque n'est d'ailleurs pas nouvelle. On peut trouver déjà des indications sur ce sujet dans le *Calcul des Probabilités* de BACHELIER (1910), et dans des mémoires antérieurs du même auteur; malheureusement, à côté d'idées intéressantes, ces mémoires contiennent une erreur, à laquelle l'auteur a été fidèle d'un bout à l'autre, et qui rendent ses principaux énoncés inexacts; cette erreur est d'ailleurs aisée à corriger. Cette théorie a été reprise et exposée d'une manière correcte par NORBERT WIENER (1). Récemment, A. KOLMOGOROFF, dans un travail de la plus grande importance (2), a traité un problème général comprenant comme cas particulier

---

(1) NORBERT WIENER: *Differential-Space*, Publications of the Massachusetts Institute of Technology, S. II, n.° 60 (1923). — V. aussi PAUL LÉVY: *Analyse fonctionnelle*, Memorial des Sciences Mathématiques, fasc. V, n.° 23.

(2) A. KOLMOGOROFF: *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichskeitsrechnung*, Mathematische Annalen, t. 104 (1931), pp. 415-458.

celui qui nous occupe, et, à propos de ce cas, indiqué que notre premier problème ci-dessus conduit à l'équation $(E)$.

Il nous semble qu'il y a quand même intérêt à exposer d'une manière systématique les relations qui existent entre ces deux problèmes, et à développer les remarques que suggère ce rapprochement. Tel est l'objet du présent travail. Les § 2 et 3 contiennent l'exposé des formules fondamentales (3). Les § 4 et 5 ont pour objet d'établir un certain nombre d'inégalités importantes, et d'en déduire des conséquences relatives à la possibilité d'étudier la fonction $u(x, t)$ à des instants antérieurs à l'instant $t_0$. Ce problème du prolongement dans le passé peut d'ailleurs être compris de plusieurs manières différentes; pour l'application au calcul des probabilités, il faut que $u$ soit positif; naturellement, le prolongement pourra être poussé plus ou moins loin suivant la nature des restrictions que l'on impose à la fonction $u$. On est ainsi conduit à distinguer un certain nombre de valeurs $T_0$, $T_0'$, $T_1$, $T_1'$, $T$ de $t$ limitant les différents prolongements possibles; nous établissons un certain nombre de formules limitant ces nombres inférieurement ou supérieurement; en ce qui concerne le nombre $T$, qui est lié à l'application de l'équation $(E)$ au calcul des probabilités, nous n'avons pas pu en déterminer la valeur exacte, ni même, ce qui serait déjà assez intéressant, trouver une borne supérieure meilleure que la valeur initiale $t_0$. Le § 6, qui termine ce travail, contient quelques remarques sur des solutions particulières de l'équation $(E)$.

## § 2. - Formules fondamentales.

Nous définirons la loi de probabilité dont dépend $X_0$, soit par sa fonction des probabilités totales $G(x)$, probabilité de l'inégalité $X_0 < x$, soit, si elle est absolument continue, par sa fonction des probabilités élémentaires $g(x)$, dérivée de la précédente. Les lois dont dépendent $X$ et $a\xi$ étant absolument continues, il suffira d'introduire leurs fonctions des probabilités élémentaires $f(x)$ et

$$(1) \qquad h(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-x^2}{2a^2} \text{ (4)}.$$

On sait que la loi de probabilité dont dépend $X$ se déduit de celles dont dé-

(3) Les principales formules relatives à l'étude de l'équation $(E)$ se trouvent par exemple dans le t. III du cours d'analyse mathématique de M. GOURSAT, mais sans aucune indication relative à leur application au calcul des probabilités. Il convient aussi de citer un important mémoire de P. APPELL, publié en 1892 dans le Journal de Mathématiques.

(4) Lorsque cela sera nécessaire pour éviter les exposants superposés, nous écrirons $\exp u$ au lieu de $e^u$ et $\operatorname{cis} u$ au lieu de $e^{iu} = \cos u + i \sin u$.

pendent $X_0$ et $a\xi$, suivant que l'on se donne $g(x)$ ou $G(x)$, par l'une des formules

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)h(x-y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y)h(y)dy, \tag{2}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} h(x-y)dG(y), \tag{2'}$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'expression (1) de $h(x)$,

$$f(x)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\frac{-(x-y)^2}{2a^2}\, g(y)dy, \tag{3}$$

$$f(x)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\frac{-(x-y)^2}{2a^2}\, dG(y). \tag{3'}$$

Nous désignerons d'autre part par $t$ un paramètre défini, à une constante près, par les formules

$$t-t_0=\tau=\frac{a^2}{2},$$

$t_0$ et $t$ désignant les valeurs qui correspondent respectivement aux variables $X_0$ et $X$ ([5]). D'après les propriétés bien connues de la loi de Gauss, l'addition successive de deux variables indépendantes $a\xi$ et $a'\xi'$ ($\xi'$ dépendant de la même loi que $\xi$) équivaut à l'addition de la variable unique $\sqrt{a^2+a'^2}\xi$, et par suite équivaut à l'addition à $t_0$ de la somme $\tau+\tau'=\dfrac{a^2+a'^2}{2}$; en d'autres termes l'addition de $a\xi$ à l'une quelconque des variables $X$ équivaut à l'addition au paramètre de la quantité $\tau=\dfrac{a^2}{2}$, indépendante de la valeur initiale $t$. Cette remarque impose le choix du paramètre $t$ (ou d'une fonction linéaire de $t$), pour l'étude du groupe d'opérations dont nous nous occupons. Nous poserons alors $f(x)=u(x, t)$, et nous nous proposerons d'étudier la fonction $u(x, t)$, évidemment holomorphe pour $t$ réel supérieur à $t_0$ et $x$ quelconque (réel ou non); si d'ailleurs $t_0$ n'est pas la plus petite valeur possible pour le paramètre $t$, en d'autres termes si $X_0$ est lui-même de la forme $X_0'+a_0\xi$, $g(x)$ est une fonction entière et $f(x)$ peut être défini par la formule (3), sans qu'il soit nécessaire d'introduire $G(x)$.

Montrons maintenant que $u(x, t)$ est solution de l'équation $(E)$. Une première démonstration résulte immédiatement du fait que

$$\frac{1}{a}\exp\frac{-(x-y)^2}{2a^2}, \qquad [a=\sqrt{2(t-t_0)}],$$

([5]) Si la valeur probable de $\dfrac{X_0^2}{2}$ est finie, on peut supposer $t_0$ égal à cette valeur; alors $t$ sera celle de $\dfrac{X^2}{2}$.

est solution de cette équation. L'expression (3) de $f(x)$, que l'on peut sans difficulté dériver aussi bien par rapport à $x$ que par rapport à $t$, montre alors qu'il en est de même de cette fonction (la dérivation est légitime, non seulement dans le cas du calcul des probabilités, mais même en n'imposant à $g(x)$ que des conditions beaucoup moins restrictives; il suffit par exemple que l'intégrale de $|g(x)|$, de $-\infty$ à $+\infty$, soit convergente).

On peut aussi, en remplaçant $t_0$ et $t$ par $t$ et $t+\tau=t+\frac{a^2}{2}$, et posant $y=x-a\eta$, écrire la formule (2) sous la forme

$$u(x, t+\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{-\eta^2}{2}f(x-a\eta)d\eta. \tag{4}$$

La fonction $f(x-a\eta)$ n'intervient d'ailleurs que par sa partie paire en $\eta$

$$\frac{1}{2}[f(x-a\eta)+f(x+a\eta)]=f(x)+\tau\eta^2f''(x)+....,$$

dont la dérivée par rapport à $\tau$, pour $\tau=0$, est $\eta^2f''(x)$. On en déduit

$$[u_\tau'(x, t+\tau)]_{\tau=0}=\frac{f''(x)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\eta^2\exp\frac{-\eta^2}{2}d\eta=f''(x),$$

ce qui établit l'équation $(E)$ pour tout $t$ supérieur à $t_0$; naturellement, pour $t=t_0$, il peut arriver que $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=g''(x)$ n'ait pas de sens.

La formule (4) donne alors la solution du problème de Cauchy relatif à l'avenir, c'est-à-dire que, connaissant $u(x, t)$ pour une valeur de $t$ supérieure à $t_0$, elle donne $u(x, t+\tau)$ pour tout $\tau$ positif. Si $t=t_0$, le résultat subsiste bien entendu si $t_0$ n'est pas la plus petite valeur possible; dans le cas général on peut seulement affirmer que

$$\lim_{t\to t_0}\int_{-\infty}^{x}u(x, t)dx=G(x)$$

en tout point où la fonction $G(x)$ est continue. Cette formule exprime en effet que $X_0$ et $X$ dépendent de lois infiniment peu différentes, ce qui est bien évident, car, si $t-t_0$ est assez petit, $a|\xi|$ est inférieur à $\varepsilon$, sauf dans des cas de probabilité inférieure à $\varepsilon'$, $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ étant arbitrairement petits.

Pour l'application à la théorie de la chaleur, la condition $g(x)\geqslant 0$ n'est plus nécessaire. Il suffit que $G(x)$ soit une fonction à variation bornée, ce qui revient à dire qu'on répartit initialement sur l'axe des $x$ des calories positives ou négatives en nombre fini. On pourrait même faire des hypothèses beaucoup moins restrictives sans que les formules (3) et (4) cessent d'être applicables; ces formules montrent qu'au bout d'un temps $\tau$ si petit soit-il, une calorie initialement concentrée en un point se répartit sur tout l'axe des $x$, symétriquement de part et d'autre de ce point, suivant la loi de Gauss, formée avec la valeur $\sqrt{2\tau}$ du paramètre $a$. L'intégrale

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t)dx,$$

qui représente la quantité de chaleur totale, est alors indépendante de $t$, tandis que l'intégrale

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)|\, dx$$

décroît quand $t$ augmente, tant qu'elle est supérieure à $I$, par suite de la compensation entre les calories positives et les calories négatives qui se détruisent réciproquement; [$\frac{dJ}{dt}$ ne peut être nul que si, pour la valeur considérée de $t$, les racines de $u$ sont toutes racines de $u_x'$; mais cette circonstance ne peut se produire que pour des valeurs isolées de $t$; on le déduit aisément de la formule (3)].

On sait le rôle que joue en physique le principe d'Huyghens, d'après lequel les formules qui permettent de passer de l'état d'un système au temps $t_0$ à son état au temps $t_1$, puis de $t_1$ à $t_2$, permettent aussi de passer directement de $t_0$ à $t_2$. D'après ce qui précède, l'application de ce principe à l'équation $(E)$ est liée au fait que, si $\xi$ et $\xi'$ sont des variables indépendantes obéissant toutes les deux à la loi de Gauss, il en est de même de $a\xi+a'\xi'$; on exprime généralement cette propriété en disant que la loi de Gauss est stable.

La même remarque s'applique à la relation entre l'équation de la chaleur dans l'espace à $n$ dimensions et la loi de Gauss à $n$ variables. En revenant au cas de la seule variable d'espace $x$, on pourrait se demander si une théorie analogue à celle qui précède ne peut pas s'appliquer par exemple à l'étude des équations à coefficients constants de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Au+B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \tag{5}$$

S'il en était ainsi, la loi de Gauss devrait être dans cette théorie remplacée par une loi symétrique et stable, c'est-à-dire que $h(x)$ devrait être remplacé par

$$h_\alpha(x)=\frac{1}{a}\int_0^\infty \cos\frac{\lambda x}{a}\exp(-\lambda^\alpha)d\lambda, \qquad (0<\alpha<2,\ a^\alpha=t),$$

seule forme de fonction correspondant à une telle loi. Or une équation linéaire vérifiée par une telle fonction devrait être invariante si l'on change simultanément $x$ en $kx$ et $t$ en $k^\alpha t$, ce qui exige $A=C=0$, et $\alpha=2$. En dehors du cas de la loi de Gauss et de l'équation de la chaleur, il n'existe donc pas d'équation de la forme (5) dont la solution soit représentable par une formule intégrale du type (3). Encore faut-il remarquer que dans le cas de l'équation $(E)$ cette formule ne donne que l'avenir; le passé ne peut être étudié qu'à l'aide d'autres formules que nous allons maintenant indiquer.

## § 3. - Autres formules.

Il résulte immédiatement de l'équation ($E$) que

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n}=\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}}=f^{(2n)}(x),$$

de sorte que la formule de Taylor s'écrit

$$u(x,\, t+\tau)=f(x)+\tau f''(x)+\ldots.+\frac{\tau^n}{n!}f^{(2n)}(x)+\ldots.; \tag{6}$$

on peut observer que cette formule se déduit aussi aisément de la formule (4); il suffit de remplacer $f(x-a\eta)$ par son développement en série entière en $a\eta$ et d'intégrer terme à terme, en tenant compte de la formule connue

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\eta^{2n}\exp\frac{-\eta^2}{2}d\eta=1\times3\times5\times\ldots.\times(2n-1).$$

La série (6) converge sûrement pour $|\tau|<t-t_0$, mais peut avoir un rayon de convergence supérieur à $t_0$, et permettre en conséquence de définir $u(x,\, t)$ pour des valeurs de $t$ inférieures à $t_0$.

Une autre formule importante est basée sur la remarque que la fonction

$$\exp\,(\lambda i x-\lambda^2\tau), \qquad (\tau=t-t_0), \tag{7}$$

est solution de l'équation ($E$); il en est donc de même de la fonction plus générale

$$u(x,\, t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(-\lambda)\exp\,(\lambda i x-\lambda^2\tau)d\lambda. \tag{8}$$

Or, d'après la formule de Fourier

$$\varphi(\lambda)=\varphi_0(\lambda)\exp\,(-\lambda^2\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,\, t)e^{i\lambda x}dx \tag{9}$$

est la valeur probable de $e^{i\lambda X}$; c'est ce qu'on appelle en calcul des probabilités la fonction caractéristique de la variable aléatoire $X$; on sait qu'elle est le produit des fonctions $\varphi_0(\lambda)$ et $\exp\,(-\lambda^2\tau)$ relatives aux variables indépendantes $X_0$ et $a\xi$ dont $X$ est la somme; c'est bien ce qu'exprime la formule (9).

## § 4. - Le principe d'augmentation de la dispersion.

On sait que la conductibilité des corps tend à uniformiser la température. La chaleur (ou la probabilité) initialement concentrée sur un certain intervalle tend à se disperser sur des intervalles de plus en plus étendus. Il n'est sans doute pas inutile de compléter les indications que nous avons données ailleurs ([6]) sur les diverses formes que peut prendre ce principe; les résultats, s'exprimant par des inégalités qui permettent de limiter supérieurement $a$ quand on connaît la loi dont dépend la somme $X = X_0 + a\xi$, sont susceptibles d'être appliqués au problème qui nous occupe.

Partons de la formule

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x-y)\,dG(y) \tag{10}$$

qui doit remplacer les formules (2) et (2′) lorsqu'on ajoute deux variables indépendantes dépendant de lois absolument quelconques. Désignons par $\Psi\{\ldots\}$ une opération fonctionnelle linéaire, et posons

$$\Psi\{F(x-c)\} = \psi(c), \qquad \Psi\{H(x-c)\} = \psi_1(c).$$

Il vient

$$\psi(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(y+c)\,dG(y), \tag{11}$$

de sorte que $\psi(c)$ apparaît comme une moyenne entre les différentes valeurs de $\psi_1(c)$. Les valeurs extrêmes de $\psi(c)$ ne peuvent donc pas dépasser celles de $\psi_1(c)$, et notamment le module maximum de $\psi(c)$ ne peut pas dépasser celui de $\psi_1(c)$. Cette dernière conclusion (à l'inverse de la précédente) ne suppose pas d'ailleurs que l'on soit dans le cas du calcul des probabilités où $G(y)$ est une fonction monotone variant de 0 à 1, mais suppose seulement que l'intégrale

$$J_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\,dG(y)\,|$$

soit égale à l'unité.

En particularisant la fonctionnelle $\Psi$, et introduisant éventuellement des paramètres arbitraires dans sa définition, on obtient ainsi un grand nombre d'expressions qui ne peuvent que décroître quand on passe d'une loi composante à la loi résultante. Citons notamment: le maximum de la probabilité concentrée en un point; ou en $n$ points; ou en $n$ points constituant une figure donnée; ou en $n$ points situés dans un intervalle de longueur donnée; le maximum de la probabilité concentrée dans un intervalle de longueur $l$; ou dans $n$ intervalles de longueur totale $l$; ou dans un ensemble de mesure $l$. On peut de même faire intervenir les dérivées successives $f(x)$, $f'(x)$,....; les valeurs extrêmes de chacune de ces dérivées ne peuvent que se rapprocher l'une de l'autre quand on passe d'une loi composante à la loi résultante.

---

([6]) Paul Lévy: *Calcul des Probabilités*, pp. 188-189.

Au point de vue de l'étude de la variable $X$, en la comparant à la variable $a\xi$, on obtient ainsi un grand nombre d'inégalités nécessaires pour que $X$ soit de la forme $X_0 + a\xi$. Citons simplement l'inégalité

$$\text{Max} f(x) \leqslant \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}, \tag{12}$$

et, dans un tout autre ordre d'idées, l'inégalité, évidente d'après (9),

$$|\varphi(\lambda)| \leqslant \exp\left(-\frac{a^2}{2}\lambda^2\right) = \exp(-\tau\lambda^2). \tag{13}$$

Pour $\lambda$ très petit, cette formule se réduit à ce résultat aussi évident et bien connu que la valeur probable de $X^2$ est au moins égale à $a^2$. Comme nous l'avons annoncé, toutes ces formules limitent supérieurement $a$.

## § 5. - L'étude du passé.

Les formules (3) et (3′), que nous avons prises pour point de départ, permettent d'étudier l'avenir, quand on connaît l'état actuel. Nous nous proposons maintenant d'étudier le passé, et avant tout de chercher à reconnaître, d'après l'état actuel, si le prolongement dans le passé est possible. Dans ce but, les formules (3) et (3′) ne peuvent que donner des conditions nécessaires, dont certaines viennent d'être indiquées au § 4, tandis que les formules du § 3 peuvent servir à une résolution effective du problème posé.

Le prolongement dans le passé pouvant d'ailleurs être poussé plus ou moins loin suivant la nature des restrictions imposées à la fonction $u(x, t)$, nous distinguerons :

le plus petit nombre $T_0$ tel que $u(x, t)$ soit holomorphe pour $t > T_0$ et pour tout $x$ réel;

le plus petit nombre $T_0'$ tel que $u(x, t)$ soit holomorphe pour $t > T_0'$ et pour tout $x$ réel ou imaginaire;

le plus petit nombre $T_1$ tel que l'intégrale $I$ soit convergente pour $t > T_1$;

le plus petit nombre $T_1'$ tel que l'intégrale $J$ soit convergente pour $t > T_1'$;

le plus petit nombre $T$ tel que l'intégrale $J$ étant convergente, la fonction $u(x, t)$ soit positive pour $t > T$.

Ces conditions étant de plus en plus restrictives, les nombres $T_0$, $T_0'$, $T_1$, $T_1'$, $T$ sont rangés par ordre de grandeurs croissantes. C'est naturellement $T$ qui est à considérer au point de vue du calcul des probabilités; en posant $t - T = \frac{A^2}{2}$, $A$ est la limite supérieure des nombres $a$ tels que $X$ puisse être mis sous la forme $Y + a\xi$; les remarques et formules du § 4 donnent des bornes supérieures pour $A$, donc des bornes inférieures pour $T$. Nous nous proposons maintenant de compléter les résultats obtenus dans cet ordre d'idées.

Étudions d'abord les conséquences de l'hypothèse que l'intégrale $J$ ait pour $t=t_0$ une valeur finie $J_0$, ce qui est le cas pour tout $t_0$ supérieur à $T_1'$ (et peut-être pour $t_0=T_1'$). En remplaçant $x$ par $x+ix'$ dans la formule (3), il vient

$$f(x+ix')=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\exp\frac{x'^2}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\frac{-(x-y)^2}{2a^2}\operatorname{cis}\frac{y(y-x)}{a^2}\,g(y)dy,$$

d'où l'on déduit

(14) $$|f(x+ix')|\leqslant\frac{J_0}{a\sqrt{2\pi}}\exp\frac{x'^2}{2a^2},$$

et, moyennant l'hypothèse plus restrictive $t_0>T_1$

(15) $$|f(x+ix')|\leqslant f(x)\exp\frac{x'^2}{2a^2}.$$

Définissons alors $A_1$ par la condition que pour tout $a<A_1$ le produit

$$|f(x+ix')|\exp\left(-\frac{x'^2}{2a^2}\right)$$

soit borné, mais ne le soit pas pour $a>A_1$ ; en d'autres termes, posons

(16) $$2A_1^2=\liminf_{x'\to\infty}\ \operatorname*{Min}_{-\infty<x<+\infty}\frac{x'^2}{\log|f(x+ix')|}.$$

La formule (14) implique $a\leqslant A_1$, et comme elle s'applique toutes les fois que

$$\frac{a^2}{2}<t-T_1',$$

il vient

(17) $$t-T_1'\leqslant\frac{A_1^2}{2}.$$

On peut dans cette formule remplacer $T_1'$ par $T_1$ ; pour le voir, transformons d'abord la formule (3) par une intégration par parties. $G(y)$ étant sûrement borné si l'intégrale $I$ a pour $t=t_0$ une valeur finie $I_0$, il vient

$$f(x)=\frac{-1}{a^3\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-y)\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{2a^2}\right]G(y)dy,$$

ce qui, $x$ étant remplacé par $(x+ix')$ et $y$ par $x-y$, conduit à l'inégalité

$$|f(x+ix')|<\frac{2K}{a^3\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}(y+|x'|)\exp\frac{x'^2-y^2}{2a^2}dy,$$

$K$ désignant le module maximum de $G(y)$, ou encore

(18) $$|f(x+ix')|<\frac{K_0a+K|x'|}{a^2}\exp\frac{x'^2}{2a^2},\qquad\left(K_0=K\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right).$$

Cette inégalité impliquant $a \leqslant A_1$, et le calcul précédent étant valable si

$$t_0 = t - \frac{a^2}{2} > T_1,$$

on a bien

(19) $$t - T_1 \leqslant \frac{A_1^2}{2},$$

résultat un peu plus précis que celui exprimé par la formule (17).

Pour obtenir un résultat en quelque sorte réciproque du précédent, supposons $A_1$ connu et cherchons pour quelles valeurs de $\tau$ on peut affirmer la convergence de la série (6). Par hypothèse, pour tout $a$ inférieur à $A_1$, on peut déterminer un nombre $k$ tel que, pour tout $x$ réel, on ait

$$|f(x+ix')| < k \exp \frac{x'^2}{2a^2},$$

et par suite, d'après l'inégalité de Cauchy relative à la dérivée d'ordre $2n$ d'une fonction holomorphe, appliquée au cercle de centre $x$ et de rayon $R$,

$$|f^{(2n)}(x)| < k \frac{(2n)!}{R^{2n}} \exp \frac{R^2}{2a^2},$$

d'où, pour $R = a\sqrt{2n}$

(20) $$\frac{1}{n!} |f^{(2n)}(x)| < k \frac{(2n)!}{n!} \frac{e^n}{(2a^2 n)^n} \backsim k\sqrt{2}\left(\frac{2}{a^2}\right)^n.$$

Il résulte de cette formule que la série (6) converge pour $|\tau| < \frac{a^2}{2}$, et par suite pour $|\tau| < \frac{A_1^2}{2}$. La fonction $u(x, t_0)$ est donc holomorphe pour tout $x$ réel et $t_0 > t - \frac{A_1^2}{2}$; on a donc

(21) $$t - T_0 \geqslant \frac{A_1^2}{2}.$$

Ce résultat ne constitue pas tout à fait la réciproque du précédent; il faudrait établir l'existence de l'intégrale $I$ pour la valeur $t_0$, et il n'est pas sûr qu'on puisse $y$ arriver sans hypothèse plus restrictive que la donnée de $A_1$ et l'existence de $I$ pour la valeur initiale $t$. Mais comme il arrive souvent que $T_0 = T_1$, les formules (19) et (21) donneront exactement dans ces cas la valeur commune de ces deux nombres ([7]).

Examinons maintenant les conséquences de l'hypothèse $t_0 > T$; dans cette hypothèse les intégrales $I$ et $J$ sont égales, leur valeur commune étant indépendante de $t$; nous la supposerons égale à l'unité, de manière à nous placer exactement dans les conditions du calcul des probabilités. Les résultats du § 4,

---

([7]) Il en est ainsi toutes les fois que $u(x, t_0)$ est une fonction de $x$ ayant au moins un point singulier pour une valeur réelle de $x$ et telle que l'intégrale $I$ ait un sens. Alors $t_0 = T_0 = T_1$, et si l'on connait $u(x, t)$ pour une valeur de $t$ supérieure à $T_0$, la formule $t - T_0 = \frac{A_1^2}{2}$ permet de déterminer $T_0$.

ainsi que la formule (15), permettent de borner supérieurement $\frac{A^2}{2}=t-T$, connaissant $f(x)=u(x, t)$. Une autre borne supérieure peut aisément être obtenne en cherchant une borne inférieure de $f(x)$. Quelque petit que soit $\varepsilon$, on peut déterminer un nombre $X$ tel que

$$\int_{-X}^{+X} g(x)dx > 1-\varepsilon.$$

Il résulte alors de la formule (3) que, pour $|x|>X$,

$$f(x) > \frac{1-\varepsilon}{a\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-(|x|-X)^2}{2a^2},$$

de sorte que $a$ ne peut pas dépasser le nombre $A'$ défini par

$$2A'^2 = \liminf_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2}{\log f(x)}.$$

Tout nombre $a<A$ étant $\leqslant A'$, on a

$$t-T=\frac{A^2}{2}\leqslant\frac{A'^2}{2}. \tag{22}$$

Pour obtenir une borne inférieure positive pour $A$, il faudrait montrer que, pour $\tau$ négatif assez petit en valeur absolue, et $x$ réel quelconque, la somme de la série (6) est positive. La formule (20), ainsi que la condition $f(x)>0$ pour tout $x$ réel, sont évidemment des conditions nécessaires que nous supposerons vérifiées; or, d'après (20), la somme des modules des termes de la série (6) autres que le premier a une borne supérieure de la forme

$$k' \frac{2\tau}{a^2-2\tau},$$

$k'$ désignant une constante convenable. Donc, dans tout intervalle fini, pour $|\tau|$ assez petit, $u(x, t+\tau)$ est positif. Mais, $f(x)$ n'ayant aucune borne inférieure positive valable de $-\infty$ à $+\infty$, les valeurs de $|\tau|$ pour lesquelles le résultat précédent s'applique devront être d'autant plus petites que l'on fait varier $x$ dans un intervalle plus grand, et l'on n'arrive pas de cette manière à trouver une valeur négative de $\tau$ pour laquelle $u(x, t+\tau)$ soit sûrement positif pour tout $x$ réel.

Sans doute pourrait on arriver à ce résultat en faisant sur $f(x)$ des hypothèses suffisamment restrictives; mais de telles hypothèses diminueraient singulièrement l'intérêt du résultat obtenu. Il faudrait n'introduire que des hypothèses que l'on sait nécessaires pour que la différence $t-T$ soit positive, montrer qu'elles sont suffisantes, et trouver une borne inférieure positive de cette différence. Mais aucune des méthodes que nous avons essayé d'appliquer à ce problème ne nous a conduit au résultat cherché.

Les formules (8) et (9), sûrement applicables tant que l'intégrale $J$ a un sens, conduisent pour $T_1$ et $T_1'$ à des inégalités qu'il peut être utile d'indiquer.

Désignons par $\bar{\tau}=\frac{\bar{A}_1^2}{2}$ la limite supérieure des valeur de $\tau$ pour lesquelles le produit

$$\varphi_0(\lambda)=\varphi(\lambda)\exp\lambda^2\tau$$

est borné pour $|\lambda|$ infini; en d'autres termes posons

$$\bar{\tau}=\frac{\bar{A}_1^2}{2}=\liminf_{\lambda\to\pm\infty}\frac{-\log|\varphi(\lambda)|}{\lambda^2}.$$

Si $\tau<\bar{\tau}$, le produit $\varphi_0(\lambda)$ tend vers zéro au moins comme $\exp(-\lambda^2\varepsilon)$ ($\varepsilon$ étant compris entre 0 et $\bar{\tau}-\tau$); alors à $\varphi_0(\lambda)$ correspond une détermination de $u(x, t_0)$ bien définie et pour laquelle l'intégrale $I_0$ est convergente. Au contraire, pour $\tau>\bar{\tau}$, $\varphi_0(\lambda)$ n'est pas borné, ce qui exclut l'existence d'une fonction $u(x, t_0)$ bien définie et pour laquelle l'intégrale $J_0$ soit convergente. Il en résulte que

$$T_1\leqslant t-\bar{\tau}\leqslant T_1'. \tag{23}$$

Il semble même probable que l'on a, au moins dans des cas très étendus,

$$T_1=t-\bar{\tau},$$

mais nous n'avons pas pu le démontrer d'une manière rigoureuse.

## § 6. - Exemples particuliers et remarques.

Nous avons considéré dans ce qui précède des solutions de l'équation $(E)$ définies quand $t$ varie depuis une certaine valeur $T_0$ jusqu'à $+\infty$; mais il existe des solutions pour lesquelles les valeurs de $t$ sont bornées supérieurement. Il suffit pour le voir d'observer que la fonction

$$\frac{1}{\sqrt{|t|}}\exp\frac{-x^2}{4t}, \tag{24}$$

qui, d'après le § 2, apparaît comme la solution fondamentale de l'équation $(E)$, représente en réalité deux fonctions distinctes, définies l'une pour $t<0$, l'autre pour $t>0$, et ne se raccordant pas. Pour $t$ négatif, la température moyenne étant infinie, une température infinie tend à se réaliser et arrive à l'être pour $t=0$; on peut remarquer que cela n'empêche pas la formule (3) de s'appliquer si $t_0$ et $t$ sont tous deux négatifs; mais pour $t_0$ négatif et $t\geqslant 0$, elle donnerait pour $f(x)$ une valeur infinie, s'accordant avec la signification physique du problème, mais non avec l'expression (24) de $f(x)$.

Il est bien évident, physiquement, que, toutes les fois que $g(x)$ tend vers $+\infty$ avec $|x|$, une température infinie tend à s'établir quand $t$ croît. On déduit de la formule (3) que cela se produit dans des conditions bien différentes suivant l'allure de la fonction $g(x)$; supposons pour simplifier que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\log g(x)}{x^2}=\frac{1}{4\tau'}$$

ait une valeur, finie ou infinie, mais bien déterminée. La formule (3) montre que, si cette limite est infinie, la température infinie s'établit instantanément; au bout d'un fini, si petit soit-il, une quantité de chaleur infinie est arrivée en chaque point. Si cette limite est finie et positive, cette circonstance se produit soit au bout du temps $\tau'$, soit immédiatement après ce temps; si au contraire la limite considérée est nulle, elle met un temps infini à se réaliser.

Supposons maintenant au contraire que la valeur moyenne de $g(x)$,

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X} g(x)dx \tag{25}$$

ait une valeur finie bien déterminée; désignons par $\mu(X)$ la moyenne de $g(x)$ de $-X$ à $+X$. La formule (3) donne, pour $x=0$,

$$f(0)=\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \exp\frac{-y^2}{2a^2}[g(y)+g(-y)]dy,$$

ou, par une intégration par parties

$$f(0)=\frac{2}{a^3\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty y^2 \exp\frac{-y^2}{2a^2}\mu(y)dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \eta^2 \exp\frac{-\eta^2}{2}\mu(a\eta)d\eta.$$

Il en résulte que, si la moyenne considérée, limite de $\mu(X)$ pour $X$ infini, existe, la température à l'origine tend vers cette moyenne. Par suite, si $g(x_0+x)$ a une moyenne indépendante de $x_0$ [et il suffit pour cela que $g(x)$ ait la même moyenne de zéro à $+\infty$ et de $-\infty$ à zéro], la température tend en tout point vers cette moyenne quand $t$ augmente indéfiniment. Cela suggère qu'on peut donner une définition nouvelle de la moyenne généralisée de $g(x)$: ce sera la température uniforme qui tend à s'établir si à l'instant initial $u(x, t_0)=g(x)$. Cette définition s'applique toutes les fois que les moyennes

$$\frac{1}{X}\int_0^X g(x)dx, \qquad \frac{1}{X}\int_{-X}^0 g(x)dx$$

ont une même limite pour $X$ infini; mais elle peut s'appliquer aussi dans d'autres cas.

Une solution particulièrement intéressante de l'équation $(E)$ est la fonction

$$\sqrt{\frac{i}{4t+i}}\exp\frac{-x^2}{4t+i}=\sqrt{\frac{i}{4t+i}}\exp\frac{-4tx^2}{16t^2+1}\operatorname{cis}\frac{x^2}{4t^2+1}, \tag{26}$$

que l'on déduit de la solution fondamentale (24) par le changement de $t$ en $t+\frac{i}{4}$ ($|t|$ ayant été au préalable remplacé par $t$). Sa partie réelle et sa partie imaginaire sont les solutions de l'équation $(E)$ se réduisant respectivement à $\cos x^2$ et $\sin x^2$ pour $t=0$. On remarque alors que, pour $t=0$, l'intégrale $I$ est convergente, tandis que l'intégrale $J$ est divergente. Mais il résulte de la présence du facteur exponentiel dans la fonction (26) que ces intégrales convergent toutes les deux pour $t$ positif, et divergent toutes les deux pour $t$ négatif. Les nombres $T_1$ et $T_1'$ ont alors la même valeur zéro.

Il n'en est pas de même si l'on prend pour $t=0$ une valeur initiale telle que

$$u(x, 0)=\sin \omega(x),$$

$\omega$ étant la primitive d'une fonction $\omega'(x)$ lentement croissante; nous prendrons pour fixer les idées

$$\omega'(x)=\sqrt{\log (1+x^2)}.$$

Pour abréger l'exposé, nous nous contenterons d'un raisonnement non rigoureux, reposant sur l'assimilation de $\sin \omega(x)$, dans le voisinage d'une valeur $x_0$ de $x$, avec $\sin (\lambda x+\mu)$, $\lambda$ et $\mu$ étant définis par

$$\lambda=\omega'(x_0), \qquad \lambda x_0+\mu=\omega(x_0).$$

Cela conduit à assimiler $u(x, t)$, pour $t$ et $x-x_0$ très petits, avec la solution

$$\sin (\lambda x+\mu) \exp (-\lambda^2 t)=\frac{\sin (\lambda x+\mu)}{(1+x_0^2)^t},$$

et par suite, pour $t$ très petit et $x$ quelconque, avec la fonction

$$\frac{\sin \omega(x)}{(1+x^2)^t}.$$

Une étude plus complète montre que, pour $t$ suffisamment petit, cette expression donne en effet l'ordre de grandeur de l'amplitude des oscillations de $u(x, t)$ quand $x$ varie. On en déduit que pour $t$ positif et très petit, l'intégrale $I$ étant convergente, l'intégrale $J$ reste divergente; donc dans ce cas $T_1=0$, et $T_1'$ est positif. Il n'était sans doute pas inutile de montrer par cet exemple que ces nombres $T_1$ et $T_1'$ peuvent être effectivement différents l'un de l'autre.