ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BEPPO LEVI

Determinazione della natura delle radici della soluzione polinomia dell'equazione differenziale $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 3 (1932), p. 255-261

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_3_255_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DETERMINAZIONE DELLA NATURA DELLE RADICI DELLA SOLUZIONE POLINOMIA DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$

di BEPPO LEVI (Bologna).

Nel fasc. I di questo stesso volume degli « Annali » (pp. 165-172) il BURGATTI si occupa della realità delle radici del polinomio di grado n, soluzione dell'equazione

$$(1) \qquad (a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$$

ove si suppone $n>1$, $b_1 \neq 0$. Egli enuncia che *posto*

$$(2) \qquad \delta=a_1b_0-a_0b_1$$

il polinomio $y(x)$, *soluzione della* (1), *ha radici tutte reali se* $\delta>-a_1^2$; *ha invece radici complesse* (*almeno in parte*) *se* $\delta<-a_1^2$. Egli dimostra la proposizione per quanto riguarda le ipotesi $\delta>0$ e $\delta<-a_1^2$: per il caso in cui $0>\delta>-a_1^2$ egli si limita a verificare la proposizione pei valori di $n=2, 3, 4$.

La proposizione è esatta (salva una piccola eccezione che risulterà dall'enunciato seguente) e può anzi essere completata come segue:

Se il coefficiente a_1 *è* $\neq 0$, *la successione dei numeri*

$$+\infty, \quad -a_1^2, \quad -3a_1^2, \quad -5a_1^2,\ldots, \quad -\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)a_1^2, \quad -\infty \ (^1)$$

divide la retta reale in $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ *intervalli tali che quando* δ *si trova interno rispettivamente a ciascuno di essi e fuori dei multipli negativi o* $=0$ *di* a_1^2, $\geqslant -(n-1)a_1^2$, *il polinomio* $y(x)$ *ha rispettivamente nessuna,* 2, 4,...., $2\left[\frac{n}{2}\right]$ *radici complesse.*

Pei nominati valori eccezionali di δ, $\delta=-\nu a_1^2$ $(0 \leqslant \nu \leqslant n-1)$, $\nu+1$ *delle dette radici coincidono nel punto* $x=-\frac{a_0}{a_1}$: *le rimanenti radici sono allora tutte reali e rendono negativo il prodotto* $(a_1x+a_0)b_1$.

Se δ *non ha uno di questi valori eccezionali, le radici reali sono ancora tali da rendere tutte o tutte meno una negativo il detto prodotto* $(a_1x+a_0)b_1$:

---

(1) Rappresento con $[a]$ il massimo numero intero o nullo $\leqslant a$.

precisamente vi sarà una radice che renderà positivo questo prodotto sempre e solo quando δ sia interno ad uno degli intervalli

$$(0,\ -a_1^2),\quad (2a_1^2,\ -3a_1^2),\quad (-4a_1^2,\ -5a_1^2),\ldots$$

[L'ultimo di questi intervalli sarà

$$(-(n-2)a_1^2,\ -(n-1)a_1^2) \quad \text{ovvero} \quad \left(-2\left[\frac{n}{2}\right]a_1^2,\ -\infty\right)$$

secondochè n è pari o dispari].

Se $a_1=0$ i punti $-\nu a_1^2$ coincidono tutti nel punto 0: allora la proposizione si muta in quest'altra che solo in parte si può considerare come caso limite della precedente:

Il polinomio $y(x)$ ha sempre una radice $=-\frac{b_0}{b_1}$ *se n è dispari: tutte le altre radici sono complesse con parte reale* $-\frac{b_0}{b_1}$ *se* $\delta=-a_0b_1<0$, *sono invece reali e simmetriche rispetto a* $-\frac{b_0}{b_1}$ *se* $\delta=-a_0b_1>0$; *infine coincidono tutte in* $-\frac{b_0}{b_1}$ *se* $\delta=0$ (e cioè se $a_0=0$).

Entrambe le proposizioni sono vere anche per $n=1$: è invece essenziale l'ipotesi $b_1 \neq 0$, senza la quale l'equazione (1) degenera e non ha più soluzione polinomia che per valori particolari dei coefficienti; in ogni caso non dipendente dall'intero n che scompare dall'equazione.

1. - Quantunque evidentemente non strettamente necessario, sarà comodo un cambiamento della variabile indipendente il quale porta immediatamente a separare i due casi $a_1 \neq 0$, $a_1=0$: nel primo caso porremo

$$a_1x+a_0=t;$$

supporremo inoltre, com'è evidentemente sempre possibile, al più mediante il cambiamento di segno di tutti i coefficienti di (1), che sia

$$b_1>0.$$

In tal modo al valore $x=-\frac{a_0}{a_1}$ di cui si parla nella prima parte dell'enunciato corrisponde il valore $t=0$, e alla positività o negatività di $(a_1x+a_0)b_1$ corrisponderà la positività o — rispettivamente — la negatività del valore medesimo di t.

Nel secondo caso porremo

$$b_1x+b_0=t$$

ottenendo con ciò che al valore $x=-\frac{b_0}{b_1}$ corrisponde ancora $t=0$ e la seconda parte dell'enunciato si tradurrà in questo, che *le radici complesse sono immaginarie pure e le radici reali sono a coppie uguali in valore assoluto ed opposte.*

2. - La posizione

$$a_1x+a_0=t, \qquad (a_1\neq 0)$$

ha per conseguenza

$$b_1x+b_0=\frac{b_1t+\delta}{a_1}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}a_1, \qquad y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{d^2y}{dt^2}a_1^2;$$

mediante il cambiamento di scrittura consistente nello scrivere ora y' e y'' per $\frac{dy}{dt}$ e $\frac{d^2y}{dt^2}$, l'equazione (1) prende quindi la forma

$$a_1^2ty''+(b_1t+\delta)y'-nb_1y=0. \tag{3}$$

Derivando ν volte rispetto a t se ne deduce

$$a_1^2ty^{(\nu+2)}+(b_1t+\delta+\nu a_1^2)y^{(\nu+1)}-(n-\nu)b_1y^{(\nu)}=0 \tag{4}$$

nella quale la (3) rientra come caso particolare per $\nu=0$. Poichè $y(t)$ è un polinomio di grado n, questa (4) diviene illusoria (perchè identica) per $\nu\geqq n$; supporremo dunque sempre $\nu<n$: allora l'ultimo coefficiente di (4) è sempre negativo: ponendo $t=0$ si ricava quindi che *$y^{(\nu)}(0)$ e $y^{(\nu+1)}(0)$ sono di segno contrario per tutti i valori di ν per cui* $\delta+\nu a_1^2<0$ e cioè per $\nu<-\frac{\delta}{a_1^2}$; *sono invece dello stesso segno per $\nu>-\frac{\delta}{a_1^2}$.*

Analogamente, se in (4) si fa $y^{(\nu+1)}=0$, si ottiene che, per $t<0$, $y^{(\nu)}$ e $y^{(\nu+2)}$ hanno segni opposti a meno che siano entrambe nulle; per $t>0$ hanno invece lo stesso segno — sempre supposto che non si annullino entrambe.

3. - L'eventualità dell'annullamento simultaneo (per uno stesso valore di t) di due o più derivate successive (di ordine di derivazione $\geqq 0$ e $\leqq n$) di y si esclude subito mediante l'osservazione seguente:

Se per uno stesso valore di $t=t_0$, $y^{(\nu)}$ e $y^{(\nu+1)}$ si annullano, t_0 è radice multipla di $y^{(\nu)}$: sia precisamente s^{pla} $(s>1)$: allora $y^{(\nu)}$, $y^{(\nu+1)}$, $y^{(\nu+2)}$ sono divisibili rispettivamente per $(t-t_0)^s$, $(t-t_0)^{s-1}$, $(t-t_0)^{s-2}$ e non per potenze superiori. La (4) risulta allora impossibile a meno che si supponga $t_0=0$. Dunque *le funzioni $y^{(\nu)}$ non possono avere radici multiple altre che $t=0$.*

Possiamo precisare ulteriormente: sia per ipotesi

$$y^{(\nu)}=t^{r-\nu}z$$

(z polinomio in t di grado $n-r$, non divisibile per t).

Sostituendo in (4) e dividendo per $t^{r-\nu-1}$, si ottiene

$$a_1^2t^2z''+(b_1t+[\delta+(2r-\nu)a_1^2])tz'+$$
$$+((r-\nu)(r-1)a_1^2+(r-\nu)\delta-(n-r)b_1t)z=0.$$

Poichè z, per ipotesi, non è divisibile per t, questa uguaglianza impone che

$$(r-1)a_1^2+\delta=0.$$

Allora l'equazione si riduce a

$$a_1^2tz''+(b_1t+(r+1-\nu)a_1^2)z'-(n-r)b_1z=0 \tag{5}$$

che è dello stesso tipo della (3). Il ragionamento si inverte: se z è una soluzione polinomia di (5), $y^{(\nu)}=t^{r-\nu}z$ $(r-\nu>0)$ è soluzione di (4) con $\delta=-(r-1)a_1^2$; e (4) non può avere altra soluzione polinomia che questa (a meno di un fattor costante), poichè nella contraria ipotesi dovrebbe essere soddisfatta anche da un polinomio di grado $\neq n-\nu$ (combinazione lineare delle due soluzioni supposte), il che si vede subito impossibile. Segue di qua che, se $y^{(\nu)}$ ha il fattore $t^{r-\nu}$, e quindi $\delta=-(r-1)a_1^2$, necessariamente $y(t)$, soluzione di (3), dovrà avere il fattore t^r, e se, cambiando il significato di z, si pone

$$y(t)=t^rz$$

(z polinomio di grado $n-r$ di t, non divisibile per t), risulterà z soluzione dell'equazione (che si ottiene da (5) ponendovi $\nu=0$)

$$a_1^2tz''+(b_1t+(r+1)a_1^2)z'-(n-r)b_1z=0. \tag{6}$$

Questa equazione è della forma (3) in cui la costante δ ha il valore

$$\delta^*=(r+1)a_1^2.$$

Riassumendo *la funzione* $y(t)$, *soluzione di* (3) *ha una radice* r^{pla}, *precisamente in* $t=0$, *sempre e solo quando* $\delta=-(r-1)a_1^2$ $(r\leqq n)$: *essa non può avere altre radici multiple e nessuna delle sue derivate ha radici multiple all'infuori di quella in* $t=0$ *imposta dalla multiplicità per* $y(t)$.

In particolare, *quando* δ *non ha uno dei suddetti valori, due derivate successive della* $y(t)$ (*d'ordine* $\geqq 0$ *e* $\leqq n$) *non si annullano mai insieme.*

4. - Associando le osservazioni dei n.[i] 3 e 2 si ottiene che quando δ non è della forma $-(r-1)a_1^2$ $(2\leqq r\leqq n)$ *rispetto ad ogni intervallo contenuto nella semiretta delle t negative, la funzione* $y(t)$ *e le sue derivate successive costituiscono una successione di Sturm; si ottiene invece una successione di Sturm per ogni intervallo contenuto nella semiretta delle t positive considerando la*

$$y,\quad y',\quad -y'',\quad -y''',\quad y^{(4)},\quad y^{(5)},\quad -y^{(6)},\ldots.$$

Sia

$$\begin{array}{lll} \nu=-1 & \text{per} & \delta>0 \\ \nu=\left[-\dfrac{\delta}{a_1^2}\right] & \text{per} & 0<-\dfrac{\delta}{a_1^2}<n-1 \\ \nu=n-1 & \text{per} & -\dfrac{\delta}{a_1^2}>n-1. \end{array}$$

Dal n.° 2 risulta che la successione dei valori

$$y(0),\quad y'(0),\quad y''(0),\ldots,\quad y^{(n-1)}(0),\quad y^{(n)}(0)$$

presenta $\nu+1$ variazioni di segno perchè i primi $\nu+2$ termini della successione hanno segni alterni, mentre i termini seguenti hanno tutti lo stesso segno dell'ultimo di questi.

È noto invece che per $t=-\infty$ la successione formata da y e dalle sue derivate presenta n variazioni di segno. Ne segue che *il polinomio* $y(t)$ *avrà precisamente* $n-\nu-1$ *radici negative.*

Rileviamo subito i casi di $\nu=-1$ e $\nu=0$.

Se $\delta>0$ *il polinomio* $y(t)$ *ha tutte le sue radici reali negative.*

Se $0>\delta>-a_1^2$ *il polinomio* $y(t)$ *ha* $n-1$ *radici reali negative*: conseguentemente *la rimanente radice sarà necessariamente reale e positiva.*

Una conseguenza notevole si ha per il caso in cui δ è della forma $-(r-1)a_1^2$ $(2\leq r\leq n)$ e quindi $y(t)$ ha $t=0$ come radice multipla. Si è osservato che le rimanenti radici sono le radici della soluzione di (6) nella quale $\delta^*>0$. Si conclude che *nel caso in cui* $y(t)$ *ha la radice* $t=0$ *multipla, le restanti radici sono tutte reali negative.*

Si sa che per $t=\infty$ la successione dei segni di $y(t)$ e delle successive derivate dà tutte permanenze: se si cambia il segno alle funzioni dei posti 3° e 4°, 7° e 8°, 11° e 12°, ecc. si cambiano in variazioni tutte quelle di queste permanenze che hanno posto pari. Quindi, dopo questo cambiamento, la successione presenterà $\left[\frac{n}{2}\right]$ variazioni. Facciamo lo stesso cambiamento nella successione dei valori

$$y(0),\quad y'(0),\quad y''(0),\ldots$$

in cui sappiamo che i primi $\nu+2$ termini formano $\nu+1$ variazioni: le $\left[\frac{\nu+1}{2}\right]$ di posto pari si cambieranno in permanenze: resteranno $\nu+1-\left[\frac{\nu+1}{2}\right]$ variazioni. I termini seguenti il $(\nu+2)$° formavano, prima del cambiamento di segno, tutte permanenze: il cambiamento di segno muta in variazioni $\left[\frac{n-\nu-1}{2}\right]$ ovvero $\left[\frac{n-\nu}{2}\right]$ di queste permanenze a seconda che ν è dispari ovvero pari e cioè in ogni caso $\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{\nu+1}{2}\right]$. In ogni caso la successione presenta dunque, per $t=0$,

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\nu+1-2\left[\frac{\nu+1}{2}\right]$$

variazioni e il numero delle radici positive sarà

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\nu+1-2\left[\frac{\nu+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]=\nu+1-2\left[\frac{\nu+1}{2}\right]=\begin{cases}0 \text{ per } \nu \text{ dispari}\\ 1 \text{ per } \nu \text{ pari.}\end{cases}$$

Con questo la proposizione enunciata è completamente dimostrata per il caso $a_1\neq 0$.

5. - Si può evitare il conteggio, un po' meno semplice delle variazioni della successione

$$y(0),\quad y'(0),\quad -y''(0),\quad -y'''(0),\ldots$$

osservando che, avendo constatato che, per $i=0$, è vera la proposizione che afferma che *la funzione* $y(t)$ *ha una o nessuna radice positiva secondochè* δ *è contenuto in un intervallo della forma* $(-2ia_1^2, -(2i+1)a_1^2)$ *ovvero della forma* $(-(2i-1)a_1^2, -2ia_1^2)$ (corrispondendo le due ipotesi, per $i=0$, alle precedenti $\nu=0$ e $\nu=-1$ rispettivamente), la proposizione può essere estesa ad ogni valore di i per induzione matematica.

Supponiamo cioè che la proposizione sia verificata per ogni valore positivo (o nullo) di $i\leqslant\mu-1$ $(\mu\geqslant 1)$.

Sia anzitutto

$$-(2\mu-1)a_1^2>\delta>-2\mu a_1^2.$$

Indichiamo con δ_1, δ_2 i valori che spettano a δ nell'equazione (equaz. (4)) che definisce y', y'' (considerata come della forma (3))

$$\delta_1=\delta+a_1^2,\qquad \delta_2=\delta+2a_1^2.$$

Risulta

$$-2(\mu-1)a_1^2>\delta_1>-(2\mu-1)a_1^2$$
$$-(2(\mu-1)-1)a_1^2>\delta_2>-2(\mu-1)a_1^2:$$

quindi, per la proposizione ammessa, $y'(t)$ avrà una radice reale positiva e $y''(t)$ non avrà radici positive. Per la proposizione dimostrata al n.° 4, per le radici negative, $y(t)$ ha $n-(2\mu-1)-1=n-2\mu$ radici negative: ne ha quindi 2μ fra reali positive e complesse; il numero di quelle positive è dunque pari (o nullo). Per essere una sola la radice positiva di $y'(t)$, esse saranno 2 o nessuna: nel primo caso è compresa fra esse la detta radice di y'. Ma ricordiamo (n.° 2) che se $y'(t)$ ha una radice positiva, in essa $y(t)$ e $y''(t)$ hanno lo stesso segno: se fra essa e $t=0$ esistesse una radice di $y(t)$, mentre nessuna ne esiste di $y''(t)$, $y(0)$ e $y''(0)$ dovrebbero avere segni opposti e questo contraddice a quanto si è visto ai n.i 2, 4 tenendo presente che $\nu+1=2\mu\geqslant 2$. Dunque $y(t)$ non ha radici positive.

Supponiamo ora

$$-2\mu a_1^2>\delta>-(2\mu+1)a_1^2;$$

$y(t)$ ha (n.° 4) $n-2\mu-1$ radici negative; quindi $2\mu+1$ radici fra complesse e positive ed una almeno positiva. Ma più di una non ne può avere perchè essendo

$$-(2\mu-1)a_1^2>\delta_1>-2\mu a_1^2,$$

$y'(t)$ non ha radici positive, secondo quanto ora si è visto. È così provata la proposizione.

6. - Consideriamo ora il caso $a_1=0$. Ponendo, come si disse,

$$b_1x+b_0=t$$

e scrivendo anche ora y' e y'' per $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, l'equazione (1) prende la forma

$$a_0b_1y''+ty'-ny=0. \tag{7}$$

Se in questa equazione si muta il segno alla variabile t, si riproduce invariata: ne segue che il cambiamento di segno alla t deve produrre in $y(t)$ al più la moltiplicazione per una costante.

Quindi

$$y(t)=t^kz(t^2)$$

dove z è un polinomio in t^2 di grado $\frac{n-k}{2}$ ($n-k$ pari) non divisibile per t^2.

Segue

$$y'(t)=2t^{k+1}z'(t^2)+kt^{k-1}z(t^2)$$
$$y''(t)=4t^{k+2}z''(t^2)+2(2k+1)t^kz'(t^2)+k(k-1)t^{k-2}z(t^2)$$

e, sostituendo in (7) e dividendo per t^{k-2}, scrivendo inoltre per brevità $a_0b_1=-\delta$,

$$-4\delta t^4z''(t^2)+2t^2(t^2-(2k+1)\delta)z'(t^2)+[k(k-1)\delta-(n-k)t^2]z=0.$$

Questa equazione non può avere soluzione polinomia se non è

$$\delta=0 \quad \text{oppure} \quad k=0 \quad \text{o} \quad =1.$$

Nella prima ipotesi essa diviene

$$2t^2z'(t^2)-(n-k)z=0,$$

la quale è ancora possibile solo per

$$k=n, \qquad z=\text{cost}.$$

Nella seconda ipotesi, si osservi che k è determinato dalla condizione che $n-k$ sia pari: l'equazione, ove si ponga

$$t^2=\tau,$$

diviene

$$-2\delta\tau z''+(\tau-(2k+1)\delta)z'-\frac{n-k}{2}z=0$$

la quale è ancora del tipo (1): indicando con la sopralineatura i valori delle costanti a, b, δ di (1) in questa equazione,

$$\bar{a}_1=-2\delta\neq 0, \qquad \bar{b}_1=1>0, \qquad \bar{\delta}=2(2k+1)\delta^2>0.$$

Quindi z ha, rispetto a τ, tutte le sue radici reali e tali da rendere negativo il monomio $-2\delta\tau$, e cioè dello stesso segno di δ. Ne segue evidentemente la proposizione enunciata.