

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

TULLIO LEVI-CIVITA

**Attrazione newtoniana dei tubi sottili e vortici filiformi**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 1, n° 3  
(1932), p. 229-250

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1932\\_2\\_1\\_3\\_229\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_3_229_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1932, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ATTRAZIONE NEWTONIANA DEI TUBI SOTTILI E VORTICI FILIFORMI (\*)

di TULLIO LEVI-CIVITA (Roma).

## CAPITOLO V.

### Ricorso alla teoria del triedro mobile. Equazioni intrinseche.

#### 1. - Triedro principale $T$ di una curva e sua rotazione lungo la curva stessa.

Le formule del FRENET [(11) del capitolo precedente] si rendono espressive considerando in un punto qualsiasi  $P$  il cosiddetto triedro principale, cioè il triedro  $T$  che ha il vertice in  $P$  e gli spigoli ordinatamente paralleli a  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ . Dacchè le formule suddette definiscono gli incrementi vettoriali

$$d\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} ds, \quad d\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} ds, \quad d\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} ds$$

di  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  al passare da un generico valore di  $s$  ad  $s + ds$ , cioè da  $P$  a un punto vicinissimo  $P'$ , si può dire che esse porgono la legge differenziale, la quale presiede alla variazione del triedro principale lungo la curva  $C$  di cui si tratta.

Ora il passaggio dal triedro principale  $T$  in  $P$  all'analogo  $T'$  in  $P'$  è uno spostamento rigido elementare che si scompone nella traslazione  $P' - P$  e in una rotazione attorno a  $P$  individuata da un certo vettore infinitesimo  $\boldsymbol{\omega} ds$ .

Le formule di FRENET conducono, come è ben noto, a caratterizzare  $\boldsymbol{\omega}$  sotto la forma

$$(1) \quad \boldsymbol{\omega} = c\mathbf{b} - \gamma\mathbf{t},$$

e si compendiano nell'unica relazione

$$(2) \quad \frac{d\mathbf{w}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{w},$$

che dà la derivata di un qualsivoglia vettore  $\mathbf{w}$  *solidale* con  $T$ : naturalmente  $\mathbf{w}$  può in particolare farsi coincidere con  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  o  $\mathbf{b}$ .

Note  $c$  e  $\gamma$  in funzione di  $s$ , risulta, in base alla (1), individuato il vettore  $\boldsymbol{\omega}$ , rispetto al triedro  $T$ , il quale però è mobile, cioè scorre lungo  $C$  al variare di  $s$  (parametro che funge da tempo in codesta mobilità).

---

(\*) Per la prima parte (Capitoli I-IV), veggasi pp. 1-33.

Per risalire da  $c(s)$ ,  $\gamma(s)$  alla determinazione della curva  $C$ , basta, esuberantemente, procurarsi la successione delle posizioni di  $T$  rispetto ad un triedro fisso. Il problema è comunque identico, come già si ricordò alla fine del precedente capitolo, alla determinazione di un moto rigido, nota (istante per istante) la velocità angolare  $\omega$  rispetto ad assi solidali.

Tutto ciò premesso, vediamo quali conseguenze si possono trarre dall'associare a queste generalità la legge di variazione della  $C$  col tempo, espressa dalla (8') del precedente capitolo

$$\frac{dP}{dt} = \sigma kcb.$$

Per brevità di scrittura giova sostituire a  $t$  la quantità proporzionale

$$(3) \quad s_1 = \sigma t,$$

il che equivale, se si vuole, a scegliere opportunamente l'unità di tempo. Con ciò scompare il fattore costante  $\sigma$ , e la formula suddetta diviene

$$(4) \quad \frac{dP}{ds_1} = kcb.$$

Va notato che l'argomento  $s_1$ , al pari di  $t$  indipendente da  $s$ , *non* ha le dimensioni di una lunghezza, bensì quelle di un quadrato di lunghezza (cioè di una superficie). Questo segue immediatamente dalle (5) e (4) del capitolo precedente, le quali, coi soliti simboli dimensionali, implicano

$$[\sigma] = [p] = l^2[\omega] = l^2 t^{-1},$$

da cui, per la (3),

$$[s_1] = l^2.$$

## 2. - Il detto triedro quale funzione di $s_1 = \sigma t$ .

La formula (4), derivando rispetto ad  $s$ , notando che

$$\frac{d}{ds} \frac{dP}{ds_1} = \frac{d}{ds_1} \frac{dP}{ds},$$

e designando per semplicità con un apice le derivazioni rispetto ad  $s$ , dà

$$(5) \quad \frac{dt}{ds_1} = (kcb)',$$

che definisce l'alterazione del vettore  $t$  (relativo ad un punto sostanziale  $P$  di  $C$ ), passando da  $s_1$  ad  $s_1 + ds_1$ , cioè da un istante  $t$  all'istante vicinissimo  $t + dt$ . Questo non basta ancora per caratterizzare la rotazione elementare  $\omega_1 ds_1$ , che subisce il triedro  $T$  quando  $s_1$  si incrementa di  $ds_1$ .

Si sa infatti dalla cinematica dei sistemi rigidi <sup>(10)</sup> che le componenti  $p_1$ ,  $q_1$ ,  $r_1$

<sup>(10)</sup> LEVI-CIVITA e AMALDI, loco ultimamente citato, p. 183.

di  $\omega_1$ , secondo gli spigoli del detto triedro  $T$ , si esprimono per mezzo dei rispettivi versori  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  sotto la forma

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{d\mathbf{n}}{ds_1} \times \mathbf{b} = -\frac{d\mathbf{b}}{ds_1} \times \mathbf{n}, \\ q_1 = \frac{d\mathbf{b}}{ds_1} \times \mathbf{t} = -\frac{d\mathbf{t}}{ds_1} \times \mathbf{b}, \\ r_1 = \frac{d\mathbf{t}}{ds_1} \times \mathbf{n} = -\frac{d\mathbf{n}}{ds_1} \times \mathbf{t}. \end{array} \right.$$

Di qui apparisce che le due componenti  $q_1$  ed  $r_1$  si possono senz'altro desumere da  $\frac{d\mathbf{t}}{ds_1}$  (e dai versori fondamentali), ottenendo

$$(7b) \quad \begin{aligned} q_1 &= -\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{t}}{ds_1} = -\mathbf{b} \times (kcb)' = -(kc)', \\ r_1 &= \frac{d\mathbf{t}}{ds_1} \times \mathbf{n} = (kcb)' \times \mathbf{n} = kc \frac{d\mathbf{b}}{ds} \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Quest'ultima, badando alla terza formula di FRENET [(11) del precedente capitolo], si riduce a

$$(7c) \quad r_1 = kc\gamma.$$

Resta da calcolare la componente  $p_1$ , la quale, in base alla prima delle (6), richiede la conoscenza di  $\frac{d\mathbf{n}}{ds_1}$  (ovvero di  $\frac{d\mathbf{b}}{ds_1}$ ). È facile procurarsi  $\frac{d\mathbf{n}}{ds_1}$ , derivando la (5) rispetto ad  $s$ , invertendo nel primo membro le derivazioni e sostituendo  $cn$  a  $\frac{d\mathbf{t}}{ds}$ , con che si ha

$$\frac{d}{ds_1} (cn) = (kcb)''.$$

Se ora si moltiplica scalarmente per  $\mathbf{b}$ , risulta

$$c \frac{d\mathbf{n}}{ds_1} \times \mathbf{b} = (kcb)'' \times \mathbf{b},$$

e quindi, per la prima delle (6),

$$(7a) \quad p_1 = \frac{1}{c} (kcb)'' \times \mathbf{b}.$$

Possiamo così complessivamente ritenere

$$(8) \quad \omega_1 = p_1 \mathbf{t} + q_1 \mathbf{n} + r_1 \mathbf{b}$$

con

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{c} (kcb)'' \times \mathbf{b}, \\ q_1 = -(kc)', \\ r_1 = kc\gamma, \end{array} \right.$$

gli apici designando derivazione rispetto ad  $s$ .

Mediante  $\omega_1$  si può esprimere la legge con cui varia, al variare di  $s_1$ , un qualsivoglia vettore  $\mathbf{w}$  solidale con  $T$ , sotto la forma

$$(9) \quad \frac{d\mathbf{w}}{ds_1} = \omega_1 \wedge \mathbf{w},$$

che fa perfetto riscontro alla (2), concernente il modo di variare con  $s$ .

### 3. - Dipendenza simultanea di $T$ da $s, s_1$ , e condizioni di integrabilità.

Un generico vettore  $w$ , solidale con  $T$ , va naturalmente considerato (al pari di  $T$  e d'ogni elemento ad esso subordinato) quale funzione  $w(s, s_1)$  dei due parametri *indipendenti*  $s$  ed  $s_1$ . Le (2) e (9) forniscono le derivate parziali di  $w$  rapporto ai due parametri, e quindi anche il differenziale totale in base all'identità

$$dw = \frac{dw}{ds} ds + \frac{dw}{ds_1} ds_1.$$

Comunque, l'eguaglianza delle derivate seconde miste, ricavate da (2) e da (9), porge le condizioni di illimitata integrabilità espresse dall'unica equazione vettoriale

$$(10) \quad \frac{d}{ds_1} (\omega \wedge w) = \frac{d}{ds} (\omega_1 \wedge w).$$

Eseguendo le derivazioni, sostituendo a  $\frac{dw}{ds}$  e  $\frac{dw}{ds_1}$  i loro valori (2) e (9), e portando tutto nel primo membro si ha

$$\left( \frac{d\omega}{ds_1} - \frac{d\omega_1}{ds} \right) \wedge w + \omega \wedge (\omega_1 \wedge w) - \omega_1 \wedge (\omega \wedge w) = 0.$$

Se ora si ricorda l'identità ciclica

$$\omega \wedge (\omega_1 \wedge w) + \omega_1 \wedge (w \wedge \omega) + w \wedge (\omega \wedge \omega_1) = 0,$$

valida per tre vettori qualsivogliono  $\omega, \omega_1, w$ , si vede che gli ultimi due addendi della condizione di integrabilità sono ordinatamente eguali ai primi due della identità ciclica, talchè possono essere sostituiti col terzo cambiato di segno, che è

$$-w \wedge (\omega \wedge \omega_1) = (\omega \wedge \omega_1) \wedge w.$$

La (10) diviene così

$$\left\{ \frac{d\omega}{ds_1} - \frac{d\omega_1}{ds} + \omega \wedge \omega_1 \right\} \wedge w = 0,$$

e, siccome deve sussistere per *qualsiasi* vettore solidale  $w$ , si riduce più semplicemente a

$$(11) \quad \frac{d\omega}{ds_1} - \frac{d\omega_1}{ds} + \omega \wedge \omega_1 = 0.$$

Tutte le derivate qui contemplate si intendono (come già la velocità di  $P$  da un lato e le  $\frac{dt}{ds}, \frac{dn}{ds}, \frac{db}{ds}$  delle formule di FRENET dall'altro) valutate con referenza ad uno stesso triedro (galileiano): tale è in particolare il caso delle  $\frac{d\omega}{ds_1}$  e  $\frac{d\omega}{ds}$  della formula (11).

Giova tuttavia, sia per semplificare lo svolgimento ulteriore del calcolo, sia per una applicazione cinematica che indicheremo al capitolo seguente (n.º 1 e 5), far apparire (totalmente o parzialmente) al posto delle  $\frac{d}{ds}, \frac{d}{ds_1}$ , che (in quanto valutate con referenza ad uno stesso triedro galileiano) possono dirsi *derivate*

assolute, le derivate  $\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s_1}$  prese rapporto al triedro mobile (cioè variabile con  $s$  e con  $s_1$ )  $T$ , che diremo naturalmente *relative*. In base al cosiddetto principio dei moti relativi, sussistono fra le une e le altre, per un vettore qualsivoglia  $\mathbf{V}$ , anche non solidale con  $T$ , le relazioni fondamentali

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{ds} &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{V}, \\ \frac{d\mathbf{V}}{ds_1} &= \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial s_1} + \boldsymbol{\omega}_1 \wedge \mathbf{V}. \end{aligned}$$

Nella (11) possiamo applicare la prima di queste relazioni al vettore  $\boldsymbol{\omega}_1$ , ovvero la seconda al vettore  $\boldsymbol{\omega}$ , ovvero le due ad un tempo, ottenendo rispettivamente

$$\begin{aligned} (11') \quad & \frac{d\boldsymbol{\omega}}{ds_1} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial s} = 0, \\ (11'') \quad & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial s_1} - \frac{d\boldsymbol{\omega}_1}{ds} = 0, \\ (11''') \quad & \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial s_1} - \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_1}{\partial s} - \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\omega}_1 = 0. \end{aligned}$$

#### 4. - Equazioni intrinseche.

Proiettiamo la (11''') nelle direzioni  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  degli spigoli del triedro  $T$ , sostituendo, per le componenti di  $\boldsymbol{\omega}$ , i loro valori  $-\gamma, 0, c$  dati dalla (1), e, per quelle di  $\boldsymbol{\omega}_1, p_1, q_1, r_1$ , senza attribuir loro per ora forma esplicita.

Si ottiene così, dopo aver isolato  $\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial s_1}$  nel primo membro e ripresa la designazione di  $\frac{d}{ds}$  (che, per una quantità scalare, non differisce da  $\frac{\partial}{\partial s}$ ) con un semplice apice:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{d\gamma}{ds_1} &= p_1' - cq_1, \\ 0 &= q_1' + (cp_1 + \gamma r_1), \\ \frac{dc}{ds_1} &= r_1' - \gamma q_1. \end{aligned} \right.$$

Soltanto ora conviene sostituire a  $p_1, q_1, r_1$  le loro espressioni (7) che, a calcoli fatti, dipendono esclusivamente da  $c, \gamma$  e loro derivate rapporto ad  $s$ . Siccome però la prima delle (7), o (7a), non fornisce ancora l'espressione esplicita di  $p_1$ , dobbiamo cominciare col procurarcela. Partiamo all'uopo da

$$(kcb)' = (kc)'b + kcb',$$

che, per la terza formula di FRENET, si scrive

$$(kcb)' = (kc)'b + kc\gamma n.$$

Derivando ulteriormente e sostituendo  $-\gamma b - ct$  a  $n'$ , risulta

$$(ckb)'' = \{ (kc)'' - kc\gamma^2 \} b + \dots,$$

dove i termini omissi sono ortogonali a  $\mathbf{b}$ , in quanto contengono a fattore  $t$  ovvero  $n$ . Con ciò la (7a) diviene

$$(7a') \quad p_1 = \frac{1}{c} (kc)'' - k\gamma^2.$$

Usufruendo di questo valore di  $p_1$  e delle (7b), (7c), cioè

$$q_1 = -(kc)', \quad r_1 = kc\gamma,$$

si riconosce immediatamente che la seconda delle equazioni (12) si riduce ad una identità, mentre la terza e la prima divengono rispettivamente

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dc}{ds_1} = (kc\gamma)' + (kc)'\gamma, \\ \frac{d\gamma}{ds_1} = \left\{ k\gamma^2 - \frac{1}{c} (kc)'' \right\}' - c(kc)'. \end{cases}$$

Ecco le *equazioni intrinseche* nelle sole funzioni incognite  $c(s, s_1)$ ,  $\gamma(s, s_1)$ : vi compare inoltre il parametro di configurazione  $k(s)$ , funzione nota di  $s$ , in base alla forma iniziale delle sezioni normali del filetto vorticoso  $\mathfrak{F}$ . Esse si presentano risolte rispetto alle derivate temporali (riferentisi cioè all'argomento  $s_1$ ), mentre nei secondi membri compariscono, oltre a  $k(s)$ , le funzioni incognite stesse e le loro derivate rapporto ad  $s$ , fino al terzo ordine.

Basta ormai applicare al sistema *normale* (I) il teorema generale già ricordato al n.º 6 del capitolo precedente per desumerne che, *assegnate inizialmente, diciamo per  $s_1=0$ ,  $c$  e  $\gamma$  quali funzioni di  $s$*  (il che è quanto dire la forma della direttrice  $C$ , a prescindere dalla sua posizione nello spazio) *rimangono univocamente individuate per  $s_1>0$ , cioè in tutti gli istanti successivi* (finchè si resta nell'ambito di regolarità) *le  $c(s, s_1)$ ,  $\gamma(s, s_1)$ , il che è quanto dire la forma di  $C$*  (sempre a prescindere dalla ubicazione).

Come già si ebbe occasione di ricordare alla fine del precedente capitolo, per fissare anche la posizione di  $C$  (e quindi del filetto) rispetto ad assi galileiani, si richiede ulteriormente l'integrazione di un sistema differenziale ordinario, integrazione che può farsi dipendere da un'unica equazione di RICCATI.

## CAPITOLO VI.

### Filetti vorticosi di forma invariabile. Piccole oscillazioni.

#### 1. - Filetti rigidi. Equazioni intrinseche. Risolvente del 3º ordine.

Le equazioni intrinseche (I) consentono in particolare di caratterizzare le possibili forme rigide delle direttrici  $C$ . Saranno tali tutte e solo quelle che corrispondono a soluzioni delle (I) indipendenti da  $s_1$ , e quindi da  $t$ ; ossia

tutte le curve per cui curvatura  $c(s)$  e torsione  $\gamma(s)$  annullano i secondi membri delle (I), vale a dire verificano le equazioni

$$(1) \quad \begin{cases} (kc\gamma)' + (kc)'\gamma = 0, \\ \left\{ k\gamma^2 - \frac{1}{c}(kc)'' \right\}' - c(kc)' = 0. \end{cases}$$

Come riprova che queste equazioni, ossia l'indipendenza da  $s_1$  delle soluzioni  $c$  e  $\gamma$  delle (I), sono non soltanto necessarie, ma anche sufficienti ad assicurare l'esistenza di direttrici  $C$  di forma invariabile, gioverà prendere in considerazione le rotazioni elementari  $\omega_1 ds_1$  che i vari triedri principali  $T$ , relativi a differenti punti  $P$  di una  $C$  subiscono durante un tempuscolo  $ds_1$ . Per la rigidità tutti questi vettori  $\omega_1$  dovranno coincidere rispetto ad un osservatore fisso, cioè dovrà aversi  $\frac{d\omega_1}{ds} = 0$ . Questo appunto risulta dalla (11'') del precedente capitolo, quando  $\omega$ , riferito a  $T$ , non dipende da  $s_1$ , cioè quando  $\frac{\partial \omega}{\partial s_1} = 0$ . Ciò avviene manifestamente nel caso attuale, in cui, essendo  $c$  e  $\gamma$  indipendenti da  $s_1$ , tale risulta anche il vettore  $\omega = c\mathbf{b} - \gamma\mathbf{t}$ .

La prima delle (1), moltiplicata per  $kc$ , può essere scritta

$$2kc(kc)'\gamma + k^2c^2\gamma' = 0,$$

dopo di che si integra a vista, porgendo

$$(2) \quad k^2c^2\gamma = B,$$

con  $B$  costante arbitraria.

Per essere  $k^2c^2 > 0$ , si può, dalla (2), ricavare  $\gamma$ , e sostituirne il valore  $\frac{B}{k^2c^2}$  nella prima delle (1), ottenendo

$$(3) \quad \left\{ \frac{B^2}{k^3c^4} - \frac{1}{c}(kc)'' \right\}' - c(kc)' = 0,$$

che è, come si vede, una equazione differenziale ordinaria del terz' ordine nella sola incognita  $c(s)$  (il parametro di configurazione  $k(s)$  dovendosi riguardare, come abbiamo più volte avvertito, quale funzione nota di  $s$ , fornita dai dati iniziali).

La (3) stessa può così riguardarsi come forma ridotta o *risolvente del problema dei filetti rigidi*.

La sua integrazione non sembra conseguibile con mezzi elementari, almeno in generale [cioè senza una qualche ipotesi complementare sulla funzione  $k(s)$  o sulla costante  $B$ ]. Comunque, il semplice fatto che l'integrazione della (3) introduce, accanto a  $B$ , altre tre costanti arbitrarie, dà luogo all'interpretazione seguente: Per una determinazione generica del parametro di configurazione  $k(s)$  esistono  $\infty^4$  possibili forme rigide di direttrici  $C$ ; per  $k$  costante, la variabile indipendente  $s$  compare nella (3) soltanto pel tramite di  $ds$ , talchè una delle costanti di integrazione corrisponde al cambiamento inessenziale di  $s$  in  $s + \text{cost}$ ; in tal caso le forme rigide distinte sono soltanto  $\infty^3$ .

2. - Filetti di spessore uniforme. Diretrici elicoidali e circolari. Integrale generale.

Un caso particolarmente interessante è quello dei filetti che, inizialmente, hanno dovunque la stessa sezione normale, per cui cioè, in qualsiasi punto  $P$  di  $C$ , la sezione normale  $\tau$  è sempre la stessa. In tal caso *il parametro di configurazione  $k$  non dipende da  $s$ , ossia è una costante.*

La (3), ove si divida per  $k$  e si ponga

$$h^2 = \frac{B^2}{k^4},$$

con che  $h$  è, al pari di  $B$ , una costante arbitraria, si scrive più semplicemente

$$(3') \quad \left\{ \frac{h^2}{c^4} - \frac{c''}{c} \right\}' - cc' = 0,$$

mentre l'espressione (2) della torsione  $\gamma$  diviene

$$(2') \quad \gamma = \frac{h}{c^2}.$$

Mostreremo tra un momento che l'integrazione della (3') può in ogni caso ricondursi alle quadrature, anzi che l'integrale generale si esprime per funzioni ellittiche. Ma vogliamo subito far notare che *una classe di integrali particolari è costituita dalle  $\infty^2$  eliche* (dei cilindri circolari), *in cui sono naturalmente incluse anche le  $\infty^1$  circonferenze.* La constatazione è immediata. Infatti la (3') rimane certo verificata se si attribuisce a  $c$  un valore costante qualsivoglia  $c_0$ . La (2') dà allora

$$\gamma = \frac{h}{c_0^2},$$

da cui apparisce che la torsione  $\gamma$  è anch'essa costante e a priori arbitraria, data la presenza del fattore  $h$ . Per  $h=0$  si hanno in particolare le circonferenze.

Occupiamoci ormai dell'integrale generale della (3'). Una prima integrazione è immediata e porge

$$\frac{h^2}{c^4} - \frac{c''}{c} - \frac{1}{2} c^2 = a_1.$$

con  $a_1$  costante arbitraria.

Isolando  $c''$ , se ne trae

$$(3'') \quad c'' = \chi(c),$$

dove

$$(4) \quad \chi(c) = \frac{h^2}{c^3} - a_1 c - \frac{1}{2} c^3.$$

Siccome

$$\int \chi(c) dc = -\frac{1}{2} \frac{h^2}{c^2} + a_2 - \frac{1}{2} a_1 c^2 - \frac{1}{8} c^4.$$

dove  $a_2$  designa la costante di integrazione, se si moltiplica la (3'') membro a membro per  $c'ds=dc$  e si integra, si ottiene

$$(5) \quad \frac{1}{2} c'^2 = \int \chi(c) dc = -\frac{1}{2} \frac{h^2}{c^2} + a_2 - \frac{1}{2} a_1 c^2 - \frac{1}{8} c^4,$$

od anche, moltiplicando per  $\frac{1}{2} c^2$ ,

$$\frac{1}{4} (cc')^2 = -\frac{1}{4} h^2 + \frac{1}{2} a_2 c^2 - \frac{1}{4} a_1 c^4 - \frac{1}{16} c^6.$$

Di qui, colla posizione

$$(6) \quad c^2 = -4\xi,$$

si ha, nella nuova incognita  $\xi$ , l'equazione

$$(7) \quad \xi'^2 = -\frac{1}{4} h^2 - 2a_2 \xi - 4a_1 \xi^2 + 4\xi^3,$$

ovviamente integrabile per funzioni ellittiche. Anzi, se si pone ulteriormente

$$(8) \quad \xi = \mathfrak{p} + \frac{a_1}{3},$$

ossia, risalendo alla curvatura,

$$(9) \quad c^2 = -4\mathfrak{p} - \frac{4}{3} a_1,$$

risulta, per  $\mathfrak{p}$ , addirittura l'equazione canonica di WEIERSTRASS

$$(10) \quad \mathfrak{p}'^2(s) = 4\mathfrak{p}^3 - g_2 \mathfrak{p} - g_3$$

cogli invarianti

$$(11) \quad \begin{cases} g_2 = -2a_2 - \frac{4}{3} a_1^2, \\ g_3 = -\frac{1}{4} h^2 - \frac{2}{3} a_1 a_2 - \frac{8}{27} a_1^3, \end{cases}$$

in cui — ricordiamolo —  $h$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  sono costanti arbitrarie introdotte dall'integrazione.

### 3. - Direttrici piane. Caratterizzazione intrinseca di un caso particolare.

Per avere in particolare curve piane basta naturalmente rendere nulla la torsione  $\gamma$ . Ciò equivale, in base alla (2'), a porre eguale a zero la costante  $h$ . La determinazione della curvatura  $c$  in termini di  $s$  è sempre retta dalle (6), (7), l'unica circostanza particolare essendo che, nella espressione (11) di  $g_3$ , si annulla  $h$ .

Un interessante caso di degenerazione, già segnalato dal DA RIOS, si ha supponendo ulteriormente  $a_2 = 0$ . In tale ipotesi, anche senza arrivare alla forma canonica, si può desumere dalla (5) l'espressione di  $c$  per trascendenti elementari.

La (5) si riduce infatti a

$$\frac{1}{2} c'^2 = -\frac{1}{2} a_1 c^2 - \frac{1}{8} c^4.$$

Escludendo, come abbiamo sempre fatto, il caso elementare di filetti rettilinei, cioè ritenendo  $c > 0$ ,  $a_1$  non può annullarsi, perchè tale eventualità implicherebbe  $\frac{1}{2} c'^2 + \frac{1}{8} c^4 = 0$ , e quindi  $c = 0$ . Si vede anzi che  $a_1$  deve essere negativo, e lo si può assumere eguale a  $-1$ , senza pregiudizio della generalità. Infatti,

ove si cambi l'unità di misura delle lunghezze, in modo che  $s$  divenga  $\lambda s$ ,  $c$  resta moltiplicata per  $\lambda^{-1}$  e  $c'$  per  $\lambda^{-2}$ .

L'equazione precedente diviene così (moltiplicandone ambo i membri per  $\lambda^4$ )

$$\frac{1}{2} c'^2 = -\frac{1}{2} a_1 \lambda^2 c^2 - \frac{1}{8} c^4,$$

e basta prendere  $\lambda^2$  eguale alla costante *positiva*  $-\frac{1}{a_1}$  per avere la forma ridotta

$$c'^2 = c^2 - \frac{1}{4} c^4.$$

Introducendo come incognita il raggio di curvatura

$$r = \frac{1}{c},$$

l'equazione diviene

$$(12) \quad r'^2 = r^2 - \frac{1}{4},$$

che si integra a vista per funzioni iperboliche [ $\mathcal{C}(s)$  coseno,  $\mathcal{S}(s)$  seno iperbolico dell'argomento  $s$ ], ricordando l'identità fondamentale

$$\mathcal{C}^2(s) - \mathcal{S}^2(s) = 1.$$

Posto infatti

$$(13) \quad r = \frac{1}{2} \mathcal{C}(s)$$

ne segue

$$r' = \frac{1}{2} \mathcal{S}(s),$$

e quindi la (12). L'integrale generale di tale equazione si desume dalla soluzione (13) col semplice cambiamento di  $s$  in  $s + \text{cost}$ , ossia con un inessenziale spostamento dell'origine degli archi. Basta quindi studiare la curva piana  $K$  intrinsecamente definita dall'equazione (13). Per caratterizzarla, immagineremo assunto un generico sistema cartesiano  $Oxy$ , supponendo che la curva  $K$  passi per  $O$  e sia ivi tangente all'asse delle  $x$ .

Si ha intanto dalla (13), designando con  $\varphi$  l'angolo che la tangente alla curva (nel verso delle  $s$  crescenti) forma colla direzione positiva dell'asse  $Ox$ ,

$$\frac{d\varphi}{ds} = c = \frac{1}{r} = \frac{2}{\mathcal{C}(s)} = \frac{4}{e^s + e^{-s}} = \frac{4e^s}{e^{2s} + 1},$$

da cui, integrando,

$$\frac{\varphi}{4} = \text{arctg } e^s + \text{cost}.$$

La costante (per l'adottata ubicazione degli assi rispetto alla curva) va determinata in modo che  $\varphi$  si annulli per  $s=0$ , sicchè

$$(14) \quad e^s = \text{tg } \frac{\varphi + \pi}{4}.$$

Ove si porti questo valore di  $e^s$  nella precedente espressione della curvatura

$$c = \frac{4e^s}{1 + e^{2s}},$$

si trae

$$(13') \quad c = \frac{4 \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi + \pi}{4}} = 4 \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi}{4} \cos^2 \frac{\varphi + \pi}{4} = 2 \sin \frac{\varphi + \pi}{2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Facendo crescere  $\varphi$ , a partire dal valore iniziale 0 fino a  $\pi$ , il secondo membro della (14), e con esso  $e^s$ , varia, sempre crescendo, da 1 ad  $\infty$ ; perciò  $s$  varia da 0 ad  $\infty$ , e con ciò si esaurisce un ramo  $K^+$  di curva  $K$ , uscente da  $O$  nel verso positivo (delle ascisse e di  $s$ ). L'intera curva consta manifestamente di  $K^+$  e dell'analogo ramo  $K^-$ , che si ottiene facendo decrescere  $\varphi$  da 0 a  $-\pi$ , con che il secondo membro della (14) decresce da 1 a 0, e quindi  $s$  da 0 a  $-\infty$ .

Passiamo adesso alla descrizione della curva così intrinsecamente definita.

#### 4. - Studio della forma. Valori numerici dei parametri.

La (14), differenziata logaritmicamente, dà

$$(14') \quad ds = \frac{d\varphi}{4 \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi}{4} \cos^2 \frac{\varphi + \pi}{4}} = \frac{d\varphi}{2 \sin \frac{\varphi + \pi}{2}} = \frac{d\varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

D'altra parte, essendo  $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$  i coseni direttori della tangente a  $K$  nel senso delle  $s$  crescenti, si ha, per definizione di  $\varphi$ ,

$$(15) \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi,$$

ossia, eliminando  $ds$  per mezzo della (14'),

$$(15') \quad dx = \frac{\cos \varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} d\varphi, \quad dy = \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi.$$

Di qui si traggono le equazioni parametriche di  $K$ , integrando a partire dal valore 0 di  $\varphi$  (cui devono corrispondere  $x=0, y=0$ ) fino ad un valore generico, con che

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \int_0^\varphi \frac{\cos \varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} d\varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} - \log \operatorname{tg} \frac{\varphi + \pi}{4}, \\ y = \int_0^\varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cdot d\varphi = 2 \left( 1 - \cos \frac{\varphi}{2} \right). \end{array} \right.$$

Appare dalla espressione di  $y$  che la nostra curva  $K$  sta tutta nella striscia compresa fra l'asse delle ascisse e la retta  $y=2$ .

D'altra parte le (15') mostrano che, delle due derivate  $\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}$ , la prima è funzione pari, la seconda funzione dispari di  $\varphi$ .

Perciò le funzioni  $x(\varphi)$ ,  $y(\varphi)$ , atteso il loro annullarsi per  $\varphi=0$ , risultano la prima dispari, la seconda pari dell'argomento  $\varphi$ , il che trova naturalmente conferma nelle formule esplicite (16). Ne consegue che i due rami  $K^+$  e  $K^-$  di  $K$  sono simmetrici rispetto all'asse delle  $y$ , sicchè basta riconoscere l'andamento di  $K^+$ , facendo variare  $\varphi$ , nelle (16), da zero a  $\pi$ : il ramo  $K^-$  si ottiene per riflessione di  $K^+$  rispetto all'asse delle ordinate.

Quanto a  $K^+$ , la prima delle (15') mostra che, per  $\varphi$  compreso fra 0 e  $\frac{\pi}{2}$ ,  $dx > 0$ , ossia  $x$  va crescendo, mentre, nel successivo intervallo  $\frac{\pi}{2} \rightarrow \pi$ ,  $dx < 0$  e quindi l'ascissa  $x$  decresce. Essa ha pertanto un massimo positivo  $a$  in corrispondenza a  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , ossia, come è nella natura delle cose, ad un punto  $M$  della curva in cui la tangente riesce parallela all'asse delle  $y$ .

Le (16), ponendovi  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , e tenendo presente che  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ , danno, per le coordinate  $a$ ,  $b$  del punto  $M$ , i valori

$$(17) \quad \begin{cases} a = \frac{2}{\sqrt{2}} - \log \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + \log \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 1,24, \\ b = 2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2 - \sqrt{2} = 0,58. \end{cases}$$

A partire da  $M$ , la  $x$  di  $K^+$  decresce sempre, come già si è detto. Siccome, per  $\varphi \rightarrow \pi$ ,  $\frac{dx}{d\varphi}$  tende a divenire infinita di primo ordine, così  $x \rightarrow -\infty$ , il che naturalmente è confermato dalla espressione integrale (16) di  $x$ . Associandovi

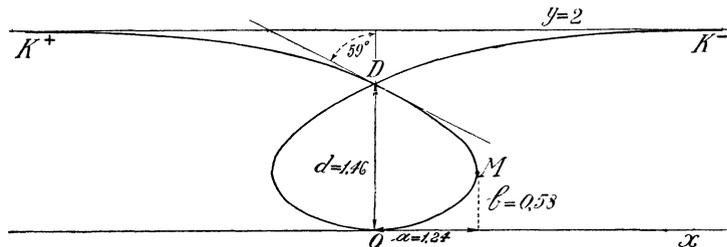


Fig. 4.

quella di  $y$  risulta che  $K^+$  ammette la retta  $y=2$  quale asintoto ed ha l'andamento qualitativo indicato nella fig. 4, dove si è segnato anche il ramo simmetrico  $K^-$ .

Seguendo  $K^+$  a partire da  $M$ , l'ascissa  $x$ , che è sempre decrescente, ripassa (una sola volta) per il valore zero. Si ha allora un punto  $D$  sull'asse delle  $y$ , il quale è simmetrico di sè stesso e quindi appartiene altresì al ramo  $K^-$ . La curva  $K$  possiede pertanto in  $D$  un punto doppio ed ha complessivamente forma di cappio, con prolungamenti asintotici alla retta  $y=2$ .

L'ordinata  $d$  di  $D$  si ottiene dalla seconda delle (16) in corrispondenza a

quel ben determinato valore  $\varphi_0$  di  $\varphi$ , compreso fra  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$ , che annulla  $x$ , ed è quindi, in base alla prima delle (16), definito dall'equazione

$$(18) \quad 2 \sin \frac{\varphi_0}{2} = \log \operatorname{tg} \frac{\varphi_0 + \pi}{4}.$$

Ove si introduca come nuova incognita, al posto di  $\varphi_0$ , un angolo  $\psi$  legato ad esso dalla posizione

$$(19) \quad \pi - \varphi_0 = 4\psi,$$

dovrà in primo luogo tale  $\psi$  essere compreso fra 0 e  $\frac{\pi}{8}$  e quindi la sua tangente fra 0 e  $\sqrt{2}-1$ . L'equazione che lo definisce sarà la trasformata in  $\psi$  della (18), cioè

$$2 \cos 2\psi = -\log \operatorname{tg} \psi,$$

ovvero, cambiando segno, passando dai logaritmi ai numeri e ponendo

$$(20) \quad \operatorname{tg} \psi = \zeta,$$

con che

$$\cos 2\psi = \cos^2 \psi - \sin^2 \psi = \cos^2 \psi (1 - \operatorname{tg}^2 \psi) = \frac{1 - \zeta^2}{1 + \zeta^2} = 1 - \frac{2\zeta^2}{1 + \zeta^2},$$

$$(21) \quad \zeta - e^{-2} \cdot e^{\frac{4\zeta^2}{1+\zeta^2}} = 0.$$

Il primo membro di questa equazione prende il valore negativo  $-e^{-2}$  per  $\zeta=0$ , e il valore  $\sqrt{2}-1-e^{-\sqrt{2}} > 0$  per  $\zeta=\sqrt{2}-1$ , che corrisponde a  $\psi=\frac{\pi}{8}$  e quindi a  $\cos 2\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}$ . L'equazione ammette dunque una radice nell'intervallo  $0 \leq \zeta \leq \sqrt{2}-1$ , come ben si doveva aspettarsi data la sua provenienza; e si può pure confermare che si tratta di un'unica radice, poichè il primo membro della (21) è, per  $0 \leq \zeta \leq \sqrt{2}-1$ , funzione crescente di  $\zeta$ . Forniamone infatti la derivata

$$1 - e^{-2} \frac{d}{d\zeta} e^{\frac{4}{1+\zeta^2}} = 1 - e^{-2} e^{\frac{4}{1+\zeta^2}} \frac{8}{\left(1 + \frac{1}{\zeta^2}\right)^2 \zeta^3} = 1 - e^{-2} e^{\frac{4}{1+\zeta^2}} \frac{8\zeta}{(1+\zeta^2)^2},$$

e notiamo che la funzione  $\frac{4}{1+\zeta^2}$  cresce con  $\zeta^2$ , sicchè, nell'intervallo in questione ammette  $2-\sqrt{2}$  come massimo valore, mentre

$$\frac{8\zeta}{(1+\zeta^2)^2} \leq 8\zeta \leq 8(\sqrt{2}-1).$$

Perciò la derivata che ci interessa rimane, per  $0 \leq \zeta \leq \sqrt{2}-1$ , superiore a

$$1 - e^{-\sqrt{2}} 8(\sqrt{2}-1) > 0, \quad \text{c. d. d.}$$

Per ricavare numericamente la radice  $\zeta$  della (21) compresa fra 0 e  $\sqrt{2}-1$ , poniamo

$$(22) \quad \mu = e^{-2}, \quad G(\zeta, \mu) = \zeta - \mu e^{\frac{4\zeta^2}{1+\zeta^2}}$$

e cerchiamo lo sviluppo di  $\zeta$  in serie di potenze di  $\mu$ , che rimane definito dalla equazione implicita

$$(23) \quad G(\zeta, \mu) = 0.$$

Un tale sviluppo esiste effettivamente e contiene  $\mu$  a fattore, in quanto la (23), a primo membro olomorfo rispetto ai due argomenti  $\zeta$  e  $\mu$ , è soddisfatta da  $\zeta = 0$  per  $\mu = 0$ , mentre per questi valori  $\frac{\partial G}{\partial \zeta}$  non si annulla, anzi si riduce all'unità.

D'altra parte si ha dalla seconda delle (22)

$$G(-\zeta, -\mu) = -G(\zeta, \mu),$$

sicchè la (23) rimane soddisfatta quando si cambia  $\mu$  in  $-\mu$  e contemporaneamente  $\zeta$  in  $-\zeta$ . Ciò val quanto dire [essendo unica nell'intorno considerato la radice definita dalla (23)] che  $\zeta$  è *funzione dispari* di  $\mu$ , ossia che lo sviluppo può contenere soltanto potenze *dispari*.

Essendo, per  $\mu = \zeta = 0$ ,

$$-\frac{\partial G}{\partial \mu} / \frac{\partial G}{\partial \zeta} = 1,$$

si avrà

$$(24) \quad \zeta = \mu(1 + a_1\mu^2 + a_2\mu^4 + \dots),$$

i coefficienti  $a_1, a_2, \dots$  potendosi determinare mediante materiale sostituzione della serie (24) nella equazione

$$\zeta = \mu e^{\frac{4\zeta^2}{1+\zeta^2}},$$

che deve ridursi ad una identità rispetto a  $\mu$ .

Si trova subito, arrestandosi a  $\mu^3$ ,

$$\mu(1 + a_1\mu^2) = \mu(1 + 4\mu^2),$$

da cui

$$a_1 = 4,$$

ecc.

Col valore (22) di  $\mu$  si ha

$$\mu < 0,14, \quad \mu^2 < 0,02, \quad \mu^4 < 0,0004,$$

sicchè, trascurando  $\mu^4$  di fronte all'unità, cioè assumendo

$$(24') \quad \zeta = e^{-2}(1 + 4e^{-4}),$$

si commette un errore dell'ordine di  $10^{-4}$ . Accontentandosi del primo termine

$$(24'') \quad \zeta = e^{-2},$$

l'errore è di pochi centesimi, approssimazione già bastevole per uso grafico. Colla stessa approssimazione si ricava dalla (20)

$$(20') \quad \psi = e^{-2},$$

e quindi dalla (19)

$$(19') \quad \varphi_0 = \pi - 4e^{-2}.$$

Ne viene che il minimo angolo formato dalla tangente coll'asse delle  $y$  è, in radianti,  $\varphi_0 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 4e^{-2} = \frac{\pi}{2} - 0,54$ , cioè circa  $59^\circ$ .

Il corrispondente valore di  $y$  è, come si disse, l'ordinata  $d$  del punto doppio  $D$ . Si ha quindi dalla seconda delle (16)

$$(25) \quad d = 2 \left( 1 - \cos \frac{\varphi_0}{2} \right) = 2(1 - \sin 2e^{-2}) = 2 - 4e^{-2} = 1,46.$$

**5. - Modalità con cui si spostano, in seno al liquido, i filetti vorticosi di forma invariabile.**

Naturalmente si tratta di spostamenti rigidi; e già abbiamo avvertito al n.º 1 che la rotazione istantanea  $\omega_1$ , le cui componenti, rispetto al triedro principale  $T$  in un punto generico  $P$  della direttrice  $C$ , sono definite dalle (7a'), (7b), (7c) del capitolo precedente, cioè complessivamente da

$$(26) \quad \begin{cases} p_1 = \frac{1}{c} (kc)'' - k\gamma^2, \\ q_1 = -(kc)', \\ r_1 = kc\gamma, \end{cases}$$

risulta effettivamente (come vettore riferito alla terna galileiana) indipendente da  $P$ .

Il moto istantaneo di  $C$ , necessariamente rototraslatorio, rimane pertanto caratterizzato da tale vettore  $\omega_1$  cui si associ una velocità traslatoria che dipende dalla scelta del centro di riduzione. Scelto un  $P$  a piacimento, ove si ricordi (capitolo precedente, n.º 1) che la variabile indipendente che funge da tempo è

$$s_1 = \sigma t,$$

si dovrà assumere quale *velocità di traslazione*  $\frac{dP}{ds_1}$ , ossia [formula (8') del capitolo suddetto]

$$(27) \quad \frac{dP}{ds_1} = kcb.$$

Applichiamo queste generalità ai vari esempi di direttrici rigide dati precedentemente: circonferenze, eliche, cappio piano  $K$ , sempre, si intende, in corrispondenza a filetti di spessore uniforme, ossia con  $k$  costante.

Per le *circonferenze* ( $c = \text{cost}$ ,  $\gamma = 0$ ), le (26) danno  $\omega_1 = 0$ , ossia moto puramente traslatorio. Tale proprietà è del resto immediatamente desumibile dalla (27), in quanto, lungo una circonferenza, rimane costante, non solo  $c$ , ma anche il versore binormale  $\mathbf{b}$ ; sicchè un filetto vorticoso circolare si sposta di moto uniforme normalmente al proprio piano. È il caso già studiato da HELMHOLTZ, KELVIN e WEINGARTEN, anche senza supporre infinitesima la sezione normale del filetto.

Per le *eliche* ( $c = \text{cost}$ ,  $\gamma = \text{cost}$ ) le (26) danno

$$(26') \quad p_1 = -k\gamma^2, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = kc\gamma.$$

Sia d'altra parte  $R$  il raggio del cilindro circolare cui l'elica appartiene; e, supponendosi assegnato su questa un senso di percorrenza, e il corrispondente versore tangenziale  $\mathbf{t}$ , si indichi con  $\mathbf{k}$  il versore dell'asse del cilindro, orientato in modo che l'angolo  $\theta$  fra  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{t}$  riesca acuto.

Detto  $\mathbf{t}_1$  il versore definito dalla proiezione di  $\mathbf{t}$  sopra un piano normale a  $\mathbf{k}$  (sezione retta del cilindro), si ha manifestamente

$$(28) \quad \mathbf{t} = \mathbf{k} \cos \theta + \mathbf{t}_1 \sin \theta.$$

Per la proprietà geodetica dell'elica, il vettore  $\mathbf{n}$  della normale principale è normale al cilindro e quindi diretto radialmente, verso l'asse, in quanto  $\mathbf{n}$  è, per definizione, sempre rivolto dalla banda della concavità della curva. La terna principale  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ , secondo le convenzioni abituali, si assume *destra*. Anche  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{k}$  è una terna trirettangola, non però necessariamente destra, ma destra o sinistra, secondochè si tratta di elica destrorsa o sinistrorsa. Tenuto conto di ciò, trasformiamo il secondo membro di

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n},$$

usufruendo della (28). Siccome

$$\mathbf{t}_1 \wedge \mathbf{n} = \pm \mathbf{k},$$

valendo il segno superiore per le eliche destrorse e l'inferiore per le sinistrorse, risulta

$$(29) \quad \mathbf{b} = \cos \theta \mathbf{k} \wedge \mathbf{n} \pm \sin \theta \mathbf{k}.$$

D'altra parte la velocità di un punto generico  $P$  dell'elica è sempre data dalla formula (27)

$$\frac{dP}{ds_1} = kc\mathbf{b}.$$

Basta introdurre per  $\mathbf{b}$  il secondo membro della (29) perchè ne scenda automaticamente la decomposizione del moto in traslazione e rotazione. Infatti, tenendo presente che, detta  $Q$  la proiezione di  $P$  sull'asse del cilindro,

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{R}(P-Q),$$

si ha

$$\frac{dP}{ds_1} = \pm kc \sin \theta \mathbf{k} - \frac{kc \cos \theta}{R} \mathbf{k} \wedge (P-Q).$$

*Il primo addendo*, indipendente dal punto  $P$ , dà la velocità del componente traslatorio, che, come si vede, è assiale; il secondo ha carattere rotatorio attorno all'asse dell'elica, essendo

$$\boldsymbol{\omega}_1 = -\frac{kc \cos \theta}{R} \mathbf{k}$$

la velocità angolare, anch'essa assiale. Si tratta pertanto di moto elicoidale: il filetto procede lungo l'asse [orientato in modo da formare un angolo acuto con  $\mathbf{t}$ , cioè (capitolo IV, n.º 1) col vortice] con velocità costante  $\pm kc \sin \theta$ ,

valendo il segno + quando il filetto stesso è atteggiato a elica destrorsa, il segno - nel caso opposto, e nel contempo ruota uniformemente attorno al medesimo asse, in verso *negativo* con velocità angolare

$$\frac{kc \cos \theta}{R}.$$

Riferendosi al tempo  $t$  (e non ad  $s_1 = \sigma t$ ) e ricordando <sup>(41)</sup> che  $c = \frac{\sin^2 \theta}{R}$ , le due velocità traslatoria e angolare, o più precisamente le loro componenti secondo  $\mathbf{k}$ , risultano in definitiva espresse da

$$\pm \frac{k\sigma \sin^3 \theta}{R}, \quad - \frac{k\sigma \sin^2 \theta \cos \theta}{R},$$

dove, a norma delle (5) e (4) del capitolo IV,  $\sigma = \frac{p}{2\pi}$ , e  $p$  rappresenta l'intensità del filetto.

*Curva a cappio K.* Dal confronto della espressione parametrica (16) di  $y$  con la espressione (13') di  $c$  appare che la curvatura  $c$  può esprimersi mediante la sola ordinata  $y$  sotto la forma

$$c = 2 - y.$$

Ora  $2 - y$  non è che la distanza  $\delta$  del generico punto  $P$  di  $K$  che si considera dalla retta asintotica  $y = 2$ . Si ha dunque (colle unità scelte, che rendono tutte le formule adimensionali)

$$c = \delta.$$

Ciò premesso, osserviamo che, trattandosi di curva piana, il versore  $\mathbf{b}$  della binormale è costante e diretto dovunque normalmente al piano. La solita formula (27), in cui si scriva  $\delta$  per  $c$ , cioè

$$\frac{dP}{ds_1} = k\delta\mathbf{b},$$

sta così ad esprimere che la velocità dei vari punti  $P$  della curva piana  $K$  è proporzionale alla distanza di  $P$  dalla retta asintotica, e ovunque normale al piano di  $K$ .

Tale atto di moto è manifestamente rotatorio attorno alla retta asintotica. Il filetto vorticoso va dunque rotando uniformemente attorno al suo asintoto.

**6. - Piccole oscillazioni intorno alle forme rigide. Caso particolare delle circonferenze. Periodi di vibrazione. Possibili perturbazioni ondose e corrispondenti velocità di propagazione.**

Riprendiamo le equazioni (I) del precedente capitolo nella solita ipotesi che si tratti di filetti di spessore uniforme ( $k = \text{cost}$ ).

<sup>(41)</sup> Veggansi ad es. le *Lezioni*, già citate (p. 33) di LEVI-CIVITA e AMALDI, Vol. I, Cap. I, p. 69 (della seconda ed.).

Sostituendo (per semplificare la notazione quanto è possibile), al tempo  $t$ , una nuova variabile proporzionale

$$(30) \quad t_1 = ks_1 = k\sigma t,$$

e designando con un punto sovrapposto le derivate rapporto a  $t_1$ , si ha

$$(31) \quad \begin{cases} \dot{c} = (c\gamma)' + c'\gamma, \\ \dot{\gamma} = \left\{ \gamma^2 - \frac{c''}{c} \right\}' - cc'. \end{cases}$$

Se  $c_0(s)$ ,  $\gamma_0(s)$  sono le espressioni intrinseche di una delle possibili forme rigide, cioè di una  $C$  atta a spostarsi senza alterazione di forma, i secondi membri delle (31) si annullano per

$$c = c_0(s), \quad \gamma = \gamma_0(s).$$

Poniamo

$$\begin{cases} c(s, t_1) = c_0(s) + \varepsilon(s, t_1), \\ \gamma(s, t_1) = \gamma_0(s) + \eta(s, t_1), \end{cases}$$

e cerchiamo di soddisfare alle (31) trattando  $\varepsilon$  ed  $\eta$  come infinitesime.

All'uopo, fissiamo intanto l'attenzione sui secondi membri delle (31), designandoli rispettivamente con  $f$  e  $g$ , e immaginiamo di introdurvi per  $c$  e  $\gamma$  i valori  $c_0 + \varepsilon$ ,  $\gamma_0 + \eta$ , trascurando tutti i termini d'ordine superiore al primo. Avremo (in quanto le parti finite si annullano)

$$(32) \quad \begin{cases} f = (c_0\eta + \gamma_0\varepsilon)' + c_0'\eta + \gamma_0\varepsilon', \\ g = \left\{ 2\gamma_0\eta - \frac{\varepsilon''}{c_0} + \frac{c_0''}{c_0^2}\varepsilon \right\}' - (c_0\varepsilon)', \end{cases}$$

e quindi le cercate equazioni alle variazioni delle (31) sotto la forma

$$(33) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon} = f, \\ \dot{\eta} = g, \end{cases}$$

$f$  e  $g$  avendo le espressioni (32), lineari in  $\varepsilon$ ,  $\eta$  e loro derivate rapporto ad  $s$ .

Limitiamoci a considerare le piccole oscillazioni in prossimità ad una forma circolare, per la quale  $c_0 = \text{cost}$ ,  $\gamma_0 = 0$ . Per semplificare la scrittura assumeremo quale unità di lunghezza il raggio della circonferenza non perturbata, con che  $c_0 = 1$ . La  $f$  si riduce così a  $\eta'$ , e la  $g$  a

$$-\varepsilon''' - \varepsilon',$$

sicchè le (33) assumono la forma esplicita

$$(33') \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon} = \eta', \\ \dot{\eta} = -\varepsilon''' - \varepsilon'. \end{cases}$$

Una questione essenziale per la teoria dei filetti vorticosi è manifestamente quella della stabilità delle varie forme rigide, in particolare della forma circo-

lare. Con referenza a quest'ultima, si tratterà di riconoscere che cosa accade a partire da una perturbazione iniziale arbitraria, cioè a partire da (piccole) alterazioni di curvatura e di torsione, rappresentate da determinazioni iniziali  $\varepsilon_0(s)$ ,  $\eta_0(s)$  comunque assegnate. Va per altro notato a tale proposito che, per il loro significato geometrico,  $\varepsilon_0$  ed  $\eta_0$  devono essere funzioni *uniformi* dei punti della direttrice (nella sua configurazione originaria). Per una circonferenza di raggio 1,  $\varepsilon_0(s)$ ,  $\eta_0(s)$  sono necessariamente periodiche di periodo  $2\pi$ . Vedremo tra un momento che, affinché riesca chiusa la curva variata da esse definita, si richiedono due ulteriori condizioni globali. Comunque il problema analitico che dobbiamo affrontare è la determinazione dell'integrale generale delle (33').

Si può ridursi ad una equazione unica in  $\varepsilon$  derivando la prima delle (33') rapporto a  $t_1$ , la seconda rispetto ad  $s$  ed eliminando  $\dot{\eta}'$ , il che dà

$$(34) \quad \dot{\varepsilon} + \varepsilon^{IV} + \varepsilon'' = 0.$$

La  $\eta$  si desume poi dalla prima delle (33') stesse, cioè da

$$(35) \quad \eta' = \dot{\varepsilon}.$$

Concentrando l'attenzione sulla (34), va osservato che sono da considerarsi come dati iniziali le determinazioni  $\varepsilon_0(s)$ ,  $(\dot{\varepsilon})_0$  di  $\varepsilon(s, t_1)$ ,  $\dot{\varepsilon}(s, t_1)$  relative all'istante  $t_1=0$ : la prima, direttamente; la seconda, in quanto alla conoscenza di  $\eta_0(s)$  segue quella di  $\eta_0'(s)$ , che, in virtù della (35), è appunto  $(\dot{\varepsilon})_0$ .

Dobbiamo dunque renderci conto del modo di variare con  $t_1$  di una generica soluzione della (34), definita da determinazioni iniziali  $\varepsilon_0(s)$ ,  $\eta_0'(s)$  entrambe funzioni periodiche di  $s$ , di periodo  $2\pi$ . Attesa la linearità della (34), e il teorema di FOURIER, si può addirittura limitarsi a dati iniziali *sinusoidali*, cioè (passando attraverso l'immaginario) del tipo

$$ae^{ins}, \quad \beta e^{ins},$$

con  $a$ ,  $\beta$  costanti arbitrarie e  $n$  intero (positivo o negativo) pure arbitrario. Importa tuttavia osservare che vanno esclusi senz'altro i valori  $n = \pm 1$ ; e ciò, come ora verificheremo, quale necessaria conseguenza della circostanza geometrica che anche la curva variata, da cui si parte, è chiusa.

Vediamo come si traduce analiticamente questa premessa nei riguardi della espressione  $1 + \varepsilon_0(s)$  della curvatura (della curva variata iniziale). Notiamo all'uopo che, per una qualsivoglia curva  $C_0$  poco diversa da una curva piana ( $\gamma$  infinitesimo), ove si designi con  $\mathbf{k}$  il versore della normale al piano  $\chi$ , in prossimità del quale giace  $C_0$ , si può trattare come infinitesima la differenza fra il versore binormale  $\mathbf{b}$  di  $C_0$  e il versore fisso  $\mathbf{k}$ . Perciò dalle prime due formule di FRENET [(11) del capitolo IV] si ha, a meno di infinitesimi d'ordine superiore,

$$(36) \quad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = c\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\gamma\mathbf{k} - ct.$$

Introduciamo la proiezione  $C^*$  di  $C_0$  sopra il piano  $\chi$  (perpendicolare a  $\mathbf{k}$ ) e siano  $\mathbf{t}^*$ ,  $\mathbf{n}^*$  i componenti di  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  secondo tale piano,  $ds^*$  l'arco elementare di  $C^*$ , proiezione di un generico  $ds$ . A meno di infinitesimi di ordine superiore,  $ds^* = ds$ , mentre, colla stessa approssimazione,  $\mathbf{t}^*$  ed  $\mathbf{n}^*$  risultano unitari, sicchè costituiscono rispettivamente il versore tangenziale e il versore normale della curva piana  $C^*$ .

Si ha così dalle (36), per proiezione su  $\chi$ ,

$$\frac{d\mathbf{t}^*}{ds} = c\mathbf{n}^*, \quad \frac{d\mathbf{n}^*}{ds} = -c\mathbf{t}^*,$$

le quali ci mostrano (potendosi riguardare  $ds$  come elemento d'arco anche per la  $C^*$ ) che — sempre a meno di infinitesimi d'ordine superiore —  $C^*$  ha per curvatura la stessa  $c$  della  $C_0$ .

Dal fatto che  $C_0$  è chiusa segue la stessa proprietà per la sua proiezione  $C^*$ . Con referenza ad assi generici  $Oxy$  nel piano  $\chi$  di questa curva e col solito significato di  $\varphi$  (angolo che la tangente a  $C^*$  nel verso delle  $s$  crescenti forma con  $Ox$ ), si hanno le formole

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi, \quad \frac{d\varphi}{ds} = c(s),$$

le prime due delle quali, introducendo l'affissa

$$z = x + iy \quad (i = \sqrt{-1}),$$

si compendiano in

$$\frac{dz}{ds} = e^{i\varphi}.$$

Veniamo al caso particolare in cui  $c(s) = 1 + \varepsilon_0(s)$  con  $\varepsilon_0$  infinitesimo. Si ha, a meno di infinitesimi, colla specificazione inessenziale che  $\varphi$  si annulli assieme ad  $s$ ,  $\varphi = s$ ; quindi, a meno di infinitesimi d'ordine superiore,  $\varepsilon(s) = \varepsilon(\varphi)$ , e per conseguenza

$$dz = e^{i\varphi} ds = e^{i\varphi} \frac{d\varphi}{c(s)} = e^{i\varphi} \frac{d\varphi}{1 + \varepsilon_0(\varphi)} = e^{i\varphi} \{1 - \varepsilon_0(\varphi)\} d\varphi.$$

Per la chiusura della curva è necessario (e basta) che risulti

$$\int_0^{2\pi} \frac{dz}{d\varphi} d\varphi = 0,$$

quindi

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon_0(\varphi) e^{i\varphi} d\varphi = 0,$$

assieme all'analogha equazione che proviene dallo scambio di  $i$  in  $-i$ .

Possiamo così concludere, riprendendo l'argomento  $s$  in luogo di  $\varphi$ , che il *divario di curvatura*  $\varepsilon_0(s)$  è necessariamente vincolato dalla *duplicata condizione integrale*

$$(37) \quad \int_0^{2\pi} \varepsilon_0(s) e^{-is} ds = 0,$$

la quale esprime, se si vuole, che, nello sviluppo di Fourier della funzione periodica  $\varepsilon_0(s)$ , mancano i termini in  $e^{\pm is}$  ossia in seno e coseno dell'arco  $s$ , i quali corrispondono al periodo fondamentale: si possono avere soltanto armoniche superiori.

Tutto ciò premesso, cerchiamo di costruire quell'integrale  $\varepsilon(s, t_1)$  della (34) che soddisfa alle condizioni iniziali

$$(38) \quad \varepsilon(s, 0) = ae^{ins}, \quad \dot{\varepsilon}(s, 0) = \beta e^{ins}.$$

Vi si perviene ovviamente supponendo  $\varepsilon(s, t_1)$  della forma

$$(39) \quad \varepsilon(s, t_1) = e^{ins} q(t_1),$$

con  $q$  funzione della sola  $t_1$ . La (34) si riduce in conformità a

$$(34') \quad \ddot{q} + (n^4 - n^2)q = 0,$$

cioè ad un'ordinaria equazione differenziale del 2° ordine a coefficienti costanti, e le condizioni iniziali (38) assumono la forma tipica

$$(38') \quad q = a, \quad \dot{q} = \beta \quad \text{per } t_1 = 0,$$

con  $a, \beta$  costanti, a priori arbitrarie.

Qualunque siano i loro valori, il corrispondente integrale della (34') rimane *limitato*, anzi è addirittura periodico rispetto a  $t_1$ , ogni qualvolta  $n^4 - n^2 > 0$ . Ciò accade sempre per  $|n| > 1$ . I valori  $n = \pm 1$  non possono intervenire nel caso nostro, per quanto si è testè osservato. Il caso  $n = 0$  corrisponde a perturbazioni iniziali costanti:

$$\varepsilon_0 = a, \quad (\dot{\varepsilon})_0 = \eta_0'(s) = \beta.$$

Ma si vede subito che  $\beta$  non può che essere zero, per l'uniformità della torsione (della curva variata  $C_0$ ). Infatti, se  $\beta$  fosse una costante diversa da zero, la configurazione iniziale avrebbe per torsione  $\eta_0(s) = \beta s + \text{cost}$ , che non è funzione periodica di  $s$ .

L'integrale della (34') per  $n = 0$ , cioè di  $\ddot{q} = 0$ , che soddisfa alle condizioni iniziali

$$q = a, \quad \dot{q} = 0,$$

è manifestamente la stessa costante  $a$ , sicchè non ne deriva alcuna amplificazione della perturbazione iniziale.

Si è così condotti alla conclusione notevole che (almeno asintoticamente) *i filetti vorticosi di forma circolare sono completamente stabili*.

Dalla (34') risulta ulteriormente che, rispetto all'argomento  $t_1 = ks_1 = kot$ , i possibili periodi di vibrazione sono

$$\frac{2\pi}{n^2 \sqrt{1 - 1/n^2}} \quad (n = 2, \dots) \textcircled{3}$$

Va ricordato d'altra parte che il nostro calcolo è stato eseguito assumendo per unità di lunghezza il raggio della circonferenza non perturbata. Per ripassare al tempo  $t$  e ad un'unità generica di lunghezza, rispetto a cui sia  $R$  il raggio della circonferenza, si terrà presente che  $k$  è un puro numero, mentre (capitolo IV, n.º 1)  $\sigma = \frac{p}{2\pi}$ , essendo  $p$  l'intensità del filetto di dimensioni  $l^2 t^{-1}$ .

Dalla precedente espressione dei possibili periodi in  $t_1$ , si passa pertanto ai veri periodi  $T_n$ , concernenti l'argomento  $t$  dividendo per  $\frac{k\sigma}{R^2} = \frac{kp}{2\pi R^2}$ . Si ha pertanto

$$(40) \quad T_n = \frac{R^2}{kp} \frac{4\pi^2}{n^2} \frac{1}{\sqrt{1 - 1/n^2}} \quad (n=2, 3, \dots).$$

Il periodo fondamentale corrisponde ad  $n=2$ , ed è

$$T_2 = \frac{R^2}{kp} \frac{2\pi^2}{\sqrt{3}},$$

risultato questo che mi sembra suscettibile di verifica sperimentale.

Per i grandi valori di  $n$ , i periodi variano come  $\frac{1}{n^2}$ , e quindi le possibili frequenze sono proporzionali ad  $n^2$ .

Le soluzioni elementari (39), riferite ad unità generiche, si esplicitano sotto la forma

$$e^{i\left(\frac{ns}{R} \pm \frac{2\pi t}{T_n}\right)} = e^{\frac{in}{R}\left(s \pm \frac{2\pi R}{nT_n} t\right)},$$

da cui apparisce che l'integrale generale può anche risguardarsi come sovrapposizione di onde semplici, progressive e regressive, viaggianti nei due sensi lungo le direttrici (pressochè circolari), con velocità

$$(41) \quad c_n = \frac{2\pi R}{nT_n} = \frac{kp}{2\pi R} n \sqrt{1 - 1/n^2}, \quad (n=2, 3, \dots),$$

mentre le rispettive lunghezze (periodo relativo all'argomento  $s$ ) sono

$$(42) \quad \lambda_n = \frac{2\pi R}{n} \quad (n=2, 3, \dots),$$

cioè, a partire dalla semicirconferenza, tutte le parti aliquote della circonferenza intera.