ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LUIGI BRUSOTTI

Sul genere dei modelli algebrici di un sistema spaziale di k circuiti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 1-2 (1932), p. 61-77

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_61_0>

SUL GENERE DEI MODELLI ALGEBRICI DI UN SISTEMA SPAZIALE DI k CIRCUITI

di LUIGI BRUSOTTI (Pisa).

Data una curva gobba algebrica reale (priva di molteplicità a rami reali), la sua parte reale (all'infuori di eventuali punti isolati) è un sistema Σ di k circuiti (privi di singolarità e a due a due non secantisi) generalmente dotati di punti improprî. Perciò tale sistema può studiarsi nell'ambito della topologia spaziale projettiva, p. e. in relazione a questioni di allacciamento (*Verkettung*) (1).

Reciprocamente, come ho dimostrato in precedenti lavori (2), individuato (nel senso della topologia projettiva) un sistema Σ di k circuiti (privi di singolarità e a due a due non secantisi), esso ammette *modelli algebrici*, cioè costituiti dai circuiti di una curva gobba algebrica reale (se si vuole, irriducibile).

Sotto un certo aspetto un risultato così generale sembra esaurire l'indagine; ma ciò non è, perchè rimangono tutte le questioni d'esistenza che sorgono dall'imporre alla curva algebrica determinati caratteri o projettivi soltanto o, per di più, birazionalmente invarianti. In esse può anche supporsi che, nel senso della topologia projettiva, Σ non sia individuato ma solo sottoposto a date condizioni.

Riguardo ai caratteri *projettivi* si posseggono soltanto risultati parziali riflettenti l'ordine della curva algebrica, eventualmente associato al genere (3), oppure

---

(1) Cfr. L. BRUSOTTI: *a) Sulle curve gobbe algebriche reali a circuiti concatenati* [Annali di Matematica, (3), 25, (1916), pag. 99-128]; *b) Sulle coppie di circuiti allacciati e sui loro modelli algebrici* [Memorie R. Acc. Naz. dei Lincei, classe di Scienze fis. mat. e nat., (6), 3, (1928), pag. 18-76].

(2) L. BRUSOTTI: *a) Le curve gobbe algebriche reali come modelli nella topologia projettiva dell'allacciamento* [Atti del Congresso internazionale dei matematici (Bologna, 1928), 4, 139-145]; *b) Un teorema generale sull'esistenza di modelli algebrici per un sistema spaziale di* k *circuiti* [Rend. R. Ist. Lombardo, (3), 61, (1928), pag. 767-783]. Cfr. pure *c) Sull'esistenza di modelli algebrici per ogni sistema spaziale di* k *circuiti al finito* [Ibid. (3), 61, (1928), pag. 177-186).

(3) Cfr. W. FR. MEYER: *Anwendungen der Topologie auf die Gestalten der algebraischen Curven, speciell der rationalen Curven 4-ter und 5-ter Ordnung*, Diss. München, 1878; *Ueber algebraische Knoten* [Edinburgh Proc. 13 (1886), pag. 931-946]; A. BRILL: *Ueber algebraische Raumkurven, welche die Gestalt einer Schlinge haben* [Mathematische Annalen, 18, (1881), pag. 95-98]; J. DE SZ. NAGY: *Ueber die algebraische Darstellung der verknoteten und ver-*

implicanti l'ordine di una superficie algebrica su cui giaccia la curva ([4]). A questi certo se ne potrebbero aggiungere altri; ma per ora non si delinea la possibilità di istituire un piano generale di ricerca.

Riguardo ai caratteri *birazionalmente invarianti*, quando la curva algebrica sia irriducibile, si presenta in primo luogo il *genere*, da sostituirsi coi generi delle singole componenti irriducibili quando la curva sia riducibile.

In questo campo condizioni *necessarie* d'esistenza sono imposte dal classico teorema di HARNACK, per cui una curva algebrica (reale) irriducibile di genere p possiede al più $p+1$ circuiti. Ora, nel presente lavoro, dimostro che tali condizioni sono anche *sufficienti*; e ciò conservando al problema la sua più generale posizione.

Precisamente dimostro che, *individuato, nel senso della topologia projettiva, un sistema Σ di k circuiti (privi di singolarità e a due a due non secantisi)*:

A) Comunque si assegni l'intero

$$p \geqslant k-1,$$

sempre per Σ esistono modelli algebrici irriducibili di genere p.

B) Comunque spezzato Σ in sistemi parziali $\Sigma_1\ \Sigma_2 \ldots\ \Sigma_s$ composti rispettivamente di $k_1\ k_2 \ldots\ k_s$ circuiti, e comunque assunti gli interi

$$p_i \geqslant k_i - 1, \qquad (i=1, 2, \ldots, s)$$

sempre per Σ esistono modelli (algebrici, riducibili) in cui ciascun sistema parziale Σ_i è rappresentato da un modello (algebrico, irriducibile) di genere p_i.

L'accurata ripartizione in paragrafi già orienta il lettore negli sviluppi della dimostrazione quale si presenta nel suo definitivo assetto, onde sembra qui più utile far cenno del processo euristico che l'ha suggerita.

Punto di partenza fu il convincimento che il risultato generale fosse virtualmente raggiunto quando per Σ si dimostrasse l'esistenza di un modello formato coi circuiti di k curve razionali. Perchè il passaggio al modello algebrico irriducibile di genere minimo $(p=k-1)$ si sarebbe facilmente compiuto coll'uso di *curve algebriche connesse* ([5]) composte colle dette curve razionali e con opportune coppie di rette immaginario-conjugate ed un ulteriore impiego della teoria delle

---

ketteten algebraischen Raumkurven [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 25 (1916-17), pag. 285-293]; L. BRUSOTTI ([1]) *a*) *b*). Notizie in K. ROHN † e L. BERZOLARI: *Algebraische Raumkurven und abwickelbare Flächen* [Encyclopädie der math. Wiss. III, 2, (1926), pag. 1346-1347].

([4]) M. PIAZZOLLA BELOCH: *Sulle superficie del 3° ordine possedenti curve con circuiti concatenati* [Rendiconti Circ. mat. di Palermo, 54, (1930), pag. 83-88].

([5]) Notizie sulle curve algebriche connesse leggonsi in F. ENRIQUES-O. CHISINI: *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, 3 (Bologna, 1924) pag. 395-414.

curve connesse (coll' intervento di coniche bisecanti reali ma prive di punti reali) avrebbe condotto senz' altro al teorema generale.

Posto così il problema del modello formato coi circuiti di k curve razionali, esso potevasi da una parte ricondurre allo studio di una generica projezione piana e dall' altra esplicare in un procedimento induttivo che permettesse di sostituire, uno per volta, i singoli circuiti (spaziali) con circuiti topologicamente equivalenti ma appartenenti ad altrettante curve razionali.

Si presentava qui l' opportunità sotto un certo aspetto di identificare il circuito (piano) con un poligono inscritto e, sotto un altro, di dedurre la curva (piana) razionale con un procedimento di «piccola variazione» applicato ad un *multilatero connesso* di genere (virtuale) zero. Ma sembrava a prima vista che i due processi fossero inconciliabili, perchè nel secondo ciascuna delle rette interviene per intiero mentre nel primo interviene di questa solo uno dei due segmenti projettivi in cui essa è divisa dalla coppia di vertici consecutivi del poligono inscritto.

Tuttavia l' ingombro che nella projezione piana proviene dal poligono complementare a quello iscritto si rivelò eliminabile nel passaggio alla figura obbiettiva, ove i rami di un nodo della projezione sono da interpretarsi opportunamente come projezioni di un ramo obbiettivo superiore e di uno inferiore. E ciò può farsi in modo che la parte ingombrante s' interpreti invece come projezione di un *segmento* obbiettivo topologicamente trascurabile, o, come si dirà, di un *segmento retrattile.*

In un modello al finito gioverebbe perciò supporre che (rispetto al quadro) la quota dei punti di tale *segmento* superi quella di ogni altro punto del sistema; detto criterio non può però seguirsi quando, come qui, intervengano anche punti improprî. A tale difficoltà si è posto rimedio coll' introduzione di quella che si dirà *quota iperboloidica* di un punto proprio od improprio.

Così è chiarito l' ufficio dei preliminari topologici (§ 1) ed algebrici (§ 2) in relazione all' ulteriore svolgimento della dimostrazione. La quale, del tutto indipendente da' miei precedenti lavori [cfr. ([2])], offre quindi anche una nuova via per stabilire la semplice esistenza del *modello algebrico.*

§ 1. - **Preliminari topologici.**

1\. - Sia Σ un sistema spaziale di k circuiti, privi di singolarità e a due a due non secantisi.

Assunti sopra un circuito γ di Σ due punti A, B, essi dividono γ in due *segmenti* (τ e θ) e la retta AB pure in due segmenti, di cui uno, σ, forma con τ circuito pari (mentre l' altro forma con τ circuito dispari).

Se un *segmento* variabile ξ, fermi gli estremi A, B, può con deformazione continua ridursi da τ a σ, senza attraversare nè se stesso, nè θ, nè i circuiti di Σ diversi da γ, allora τ si dirà *segmento retrattile.*

2. - Sia Σ' la projezione (ortogonale) di Σ su di un piano (proprio) π. Si potrà sempre scegliere π in modo che:

I. Nessun circuito di Σ passi per il punto improprio delle normali a π, onde circuiti pari (dispari) si projettino in circuiti pari (dispari).

II. Il sistema Σ' non possegga punti multipli impropri ed i suoi punti multipli (proprî) siano punti doppî ordinarî.

Sulle rette proprie normali a π si può fissare un verso positivo concorde. Dati su una normale due punti (proprî), percorrendola in verso positivo a partire dal punto improprio per ritornarvi, uno dei due punti si incontrerà prima dell'altro e si dirà *sopra* di questo (il secondo *sotto* il primo).

Un punto doppio di Σ' si interpreterà come punto doppio apparente di Σ e dei due rami uno sarà projezione del *superiore* in Σ (l'altro dell'*inferiore*). Fissato su ciascun circuito di Σ (quindi di Σ') il verso positivo, l'ufficio dei due rami in Σ' sarà determinato quando sia noto il *segno* del punto doppio apparente ([6]). In questo senso è lecito parlare di una *segnatura* nei nodi di Σ'.

Reciprocamente, *dato Σ' e stabilitane la segnatura, Σ è individuato sotto l'aspetto della Topologia projettiva.*

3. - Sia ora, in π, un sistema Σ' soddisfacente alla condizione II di n.° 2 e sopra un circuito γ' di esso abbiansi due punti (semplici) A', B', che divideranno il circuito in due *segmenti* τ' e θ'. Dicasi allora σ' il segmento rettilineo $A'B'$ che forma con τ' circuito pari. Nessun ulteriore circuito di Σ' passi per A', nè per B'.

Per semplicità si aggiungano le clausole, non essenziali, che A', B' siano proprî e che σ' sia il segmento (rettilineo) al finito.

Indi si pensi di voler interpretare Σ' come projezione di un sistema Σ spaziale nel senso di n.° 2, rispettando quindi anche la condizione I]; in particolare, γ', A', B', τ', θ' come projezioni di γ, A, B, τ, θ.

Si proceda perciò intanto alla *segnatura* di Σ' ne' suoi nodi *non giacenti su τ'* e ciò facciasi *in modo arbitrario.*

Si dimostrerà allora *che è possibile procedere alla segnatura di Σ' nei nodi giacenti su τ', in tale maniera, che τ' risulti projezione di un segmento τ retrattile* (nel senso di n.° 1 e relativamente al sistema Σ di cui Σ' si pensa projezione in conformità alla segnatura introdotta fuori di τ' e su τ').

([6]) Ad un punto doppio apparente si attribuisce il segno $+$ (rispettivamente il segno $-$) se un osservatore collocato lungo un ramo (obbiettivo) col verso positivo dai piedi al capo e col viso rivolto all'altro ramo, lo vede percorso in verso positivo da destra a sinistra (rispettivamente da sinistra a destra). Lo scambio dei due rami non altera il criterio, sostanzialmente legato alle due indicatrici spaziali. Cfr. p. es. M. DEHN e P. HEEGAARD: *Analysis situs* (Encyclopädie der Math. Wiss. III, 1) pag. 212.

4. - Per la dimostrazione del lemma enunciato al n.° 3 conviene fissare il concetto di *quota iperboloidica* di un punto dello spazio.

Si assumano coordinate cartesiane ortogonali con $\pi \equiv xy$ e l'asse z rivolto *verso l'alto* (in relazione al linguaggio introdotto al n.° 2).

Il fascio di quadriche:

$$z^2 = h(x^2 + y^2 + 1)$$

non contiene altre quadriche a punti reali all'infuori di iperboloidi a due falde (h finito e >0) e delle due quadriche specializzate la cui parte reale consta o del piano π contato due volte ($h=0$) o di un punto isolato ($h=\infty$), coincidente col punto improrio Q_∞ delle normali a π.

Per un punto M (reale) dello spazio passa una ed una sola quadrica del fascio, alla quale corrisponde un valore di h, con

$$0 \leqslant h \leqslant \infty.$$

Tale valore di h si dirà la *quota iperboloidica* di M.

Su di una normale a π ha quota iperboloidica nulla (rispettivamente infinita) soltanto la traccia (rispettivamente il punto improprio Q_∞); ma ad ogni $h>0$ e finito corrispondono due punti di quota iperboloidica h (l'*inferiore* ed il *superiore*).

Dato in π un circuito, esso venga pensato come projezione di un circuito spaziale, che, per semplicità, supporremo non tocchi nè π nè il piano improprio. Le intersezioni del circuito spaziale con π e col piano improprio saranno complessivamente in numero pari e lo divideranno in altrettanti segmenti alternatamente *superiori* ed *inferiori*. Il circuito spaziale sarà perciò determinato quando la quota iperboloidica h del punto obbiettivo sia assegnata come funzione [limitata continua e generalmente derivabile] del punto corrente sul circuito in π (7), la quale (positiva altrove) si annulli in un numero pari o dispari di punti secondo che il circuito sia pari o dispari; e quando in un solo punto (proprio, con $h \neq 0$) sia fissata la scelta fra punto obbiettivo superiore od inferiore (8).

5. - Si riprendano ora le notazioni di n.° 3 per la dimostrazione del lemma ivi enunciato. Si dica inoltre Σ_0' il sistema ricavato da Σ' togliendone γ' (e Σ_0 il sistema di cui Σ_0' possa pensarsi projezione su π).

In relazione alla segnatura di Σ' fuori di τ' (già arbitrariamente prefissata)

---

(7) Le condizioni fra [ ] saranno nel seguito, in casi analoghi, sempre sottintese; gli attributi *continua, derivabile* possono precisarsi con una rappresentazione parametrica del circuito piano, sostituendo al punto il parametro; *generalmente derivabile* intendasi derivabile ovunque fuorchè, al più, in un numero finito di punti, in ciascuno dei quali però esistano separatamente la derivata a sinistra e quella a destra.

(8) Le modificazioni da introdursi nel caso escluso di contatti con π o col piano improprio sono del tutto ovvie. Così per circuiti incidenti la retta impropria di π.

si realizzi nello spazio un modello provvisorio $\Sigma_0+\theta$, non passante per Q_∞ (n.° 2 cond. I); onde per i suoi punti si avrà quota iperboloidica massima finita.

Sia essa h_0; ed assumasi $h_1>h_0$.

Indi in π si circondino A' e B' con cerchi di raggio abbastanza piccolo perchè nel loro interno non si trovino punti di Σ_0' (il che è lecito non passando alcun circuito di Σ_0' nè per A', nè per B') e perchè inoltre nell'interno del primo (rispettivamente del secondo) θ' possegga un solo tratto, privo di nodi, $A'U'$ (rispettivamente $B'V'$), con U' (rispettivamente V') al contorno (cfr. fig. 1).

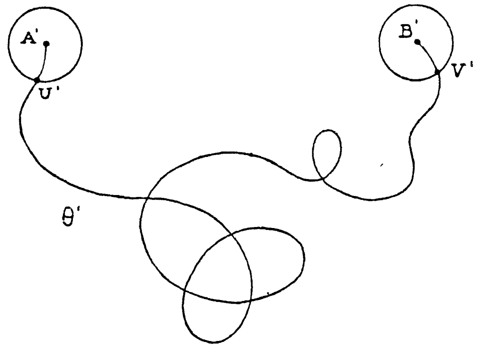

Fig. 1.

Nel modello provvisorio U', V' siano projezioni di U, V rispettivamente di quote iperboloidiche u, v. Sarà:

$$u<h_1, \qquad v<h_1.$$

Ciò posto, senza alterare topologicamente il modello, sarà possibile attribuire ad A, B quota iperboloidica comune h_1 e supporre per esempio A, B entrambi superiori. Invero, con riferimento ad A, se U è superiore basterà supporre che la quota iperboloidica del punto obbiettivo sia sul tratto $A'U'$ funzione monotona del punto che lo percorre da A' verso U' con valore iniziale h_1 e valore finale u; se U è inferiore, spezzare il tratto in due tratti $A'W'$ e $W'U'$, indi supporre la quota funzione monotona in ciascuno dei tratti parziali e con valori h_1, 0, u rispettivamente in A', W', U' (sempre qui, ed altrove, tenuto conto di quanto fu detto in fine di n.° 4). Similmente per B e V.

Così modificato il modello provvisorio in prossimità di A e di B, ma lasciatolo inalterato nella rimanente parte, si avrà ormai un modello $\Sigma_0+\theta$ con quota iperboloidica massima $(=h_1)$ in A e B, ed ivi soltanto.

Si tracci allora il cerchio Ω di centro A' e di raggio abbastanza piccolo perchè τ' internamente ad esso abbia solo il tratto $A'T'$ (con T' al contorno); sia poi $A'S'$ il tratto di σ' interno ad Ω (vedasi fig. 2).

Il segmento σ' è projezione del segmento rettilineo σ cogli estremi A, B superiori e di quota iperboloidica h_1 (perciò tutto di punti proprî, superiori, aventi quota iperboloidica $\geqslant h_1$, $=h_1$ solo negli estremi); ma σ' può considerarsi anche come projezione di un *segmento* σ^* (non rettilineo) pure con estremi A, B e punti tutti (proprî e) superiori, essendo la quota iperboloidica del punto corrente su di esso (ma pensata come funzione del punto projezione) funzione monotona in ciascuno dei tratti $A'S'$, $S'B'$, con valore h_1 in A', B' ed $h_2>h_1$ in S'.

Anche τ' dovrà pensarsi come projezione di un *segmento* spaziale τ di estremi A, B, il che è lecito pur supponendo, come si farà, che τ non incontri π.

Ed invero, escluso per semplicità [cfr. ([8])] che τ' tocchi la retta impropria, esso la taglierà in un numero pari di punti, dovendo (cfr. n.° 3) formare circuito pari con σ' che giace al finito, e da tali punti impropri sarà diviso in *segmenti* da interpretarsi (n.° 4) come projezioni di *segmenti* alternatamente superiori ed inferiori; supposto superiore il primo (come A), lo sarà l'ultimo (come B). Per determinare τ basterà ormai assegnare la quota iperboloidica come funzione del punto projezione, e ciò si farà supponendola monotona in ciascuno dei tratti $A'T'$, $T'B'$, con valore h_1 in A', B' (come si deve) ed h_2 in T'. Si dimostrerà che τ è retrattile.

Perciò si introdurrà intanto in π un'opportuna deformazione continua di un *segmento* ξ', di estremi $A'B'$, coincidente all'inizio con τ' ed al termine con σ'.

Un punto M' percorra τ' da A' a B' ed il segmento rettilineo $A'M'$ (inteso in senso projettivo) lo segua con continuità, partendo dal segmento nullo. Tale segmento $A'M'$ sarà al finito o conterrà il punto improprio, secondo che M' debba interpretarsi come projezione di un punto M superiore od inferiore (intermedio il caso di M', quindi M, improprio); coinciderà dunque al termine con σ'.

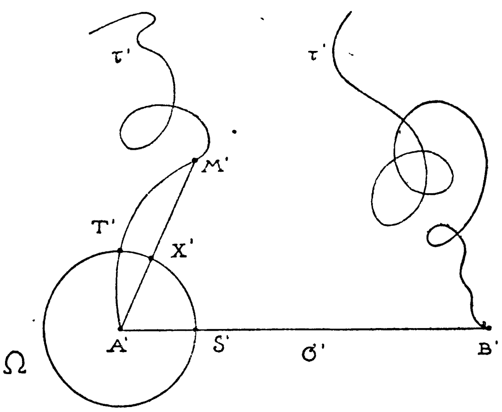

Fig. 2.

Se a tale segmento rettilineo $A'M'$ si aggrega la parte di τ' non ancora percorsa, si ottiene un *segmento* ξ' variabile con continuità insieme ad M', coincidente all'inizio con τ', al termine con σ'; e ξ' (vedi fig. 2) può anche altrimenti spezzarsi nella parte $A'X'$ interna ad Ω e nella parte $X'B'$ esterna a questo (per M' interno ad Ω è $X' \equiv T'$; per M' esterno, è $A'X'$ un raggio di Ω).

S'intende che ξ', il quale all'inizio in generale possiede nodi e punti impropri perde gradatamente questi ultimi (precisamente ne perde una coppia ogni volta che il segmento rettilineo $A'M'$ ritorna al finito) e perde od acquista nodi fino a rimanerne privo.

Si pensi ora ξ' come projezione di un *segmento* spaziale ξ, di estremi A, B, e, com'è lecito, non incontrante π, anzi, al pari di τ, diviso dai punti impropri in *segmenti* superiori ed inferiori, salvo gli adattamenti nel caso di M improprio. Onde, ancora, a determinare ξ basterà assegnare la quota iperboloidica come funzione del punto projezione e si assegnerà monotona in ciascuno dei tratti $A'X'$, $X'B'$ con valore h_1 in A', B' (come occorre) ed h_2 in X'. Ma di più tale funzione pensata come funzionale di ξ', sia un funzionale continuo di questo e per $\xi' \equiv \tau'$, $\xi' \equiv \sigma'$ coincida colle funzioni già introdotte allo scopo di determinare rispettivamente τ e σ^*. Onde ξ varierà con continuità insieme a ξ' (o se si vuole insieme ad M'), partendo da τ e coincidendo al termine con σ^*.

Ma è soprattutto notevole che ξ, nella sua deformazione, per le posizioni fatte, non attraversa nè se stesso, nè θ, nè Σ_0.

Non attraversa se stesso. Ed invero, detto X, su ξ, il punto di projezione X', i tratti AX, XB di ξ non si attraversano mutuamente perchè variano internamente, rispettivamente esternamente, al cilindro retto di base Ω e ciascuno poi non attraversa se stesso perchè su ciascun tratto la quota iperboloidica è funzione monotona.

Ma ξ non attraversa nè θ nè Σ_0, perchè, prescindendo dagli estremi A, B comuni a ξ e θ (e di quota iperboloidica h_1), ogni punto di ξ ha quota iperboloidica $>h_1$, ogni punto di $\Sigma_0+\theta$ ha quota iperboloidica $<h_1$.

Per dimostrare che τ è *segmento* retrattile basta ormai provare (cfr. n.° 1) come un *segmento*, che dirò ancora ξ, di estremi A, B, possa con deformazione continua ridursi da σ^* a σ, senza attraversare nè se stesso, nè θ, nè Σ_0. Ed invero i punti così di σ^* come di σ sono tutti superiori e (salvo gli estremi comuni A, B) di quota iperboloidica $>h_1$. Onde il passaggio da σ^* a σ può effettuarsi nel piano projettante, lasciando fissi gli estremi (di quota iperboloidica h_1) e muovendo ogni altro punto lungo la parte superiore della rispettiva retta projettante, senza mai incontrare iperboloidi aventi quota $<h_1$, quindi senza mai attraversare nè θ nè Σ_0 (ed è poi evidente che ξ non attraversa se stesso).

Il lemma di n.° 3 è così dimostrato, perchè la segnatura offerta dai nodi giacenti su τ' in rapporto alla realizzazione ora effettuata è sufficiente, *indipendentemente da quest' ultima* (cfr. n.° 2), a garantire per τ il carattere di *segmento* retrattile, sempre in relazione alla segnatura prestabilita fuori di τ'.

OSSERVAZIONE 1. - Le considerazioni svolte valgono in particolare nel caso in cui Σ si riduca a γ (Σ' a γ'); manchi cioè Σ_0 (rispettivamente Σ_0').

OSSERVAZIONE 2. - Il risultato conseguito si può anche enunciare affermando che, dal punto di vista della Topologia projettiva, il sistema Σ si identifica con quello che se ne deduce sostituendo $\bar{\gamma}=\theta+\sigma$ a $\gamma=\theta+\tau$.

§ 2. - Preliminari algebrici.

6. - Nel seguito della trattazione occorrerà far uso di due lemmi, pertinenti entrambi alla teoria delle curve (gobbe) algebriche connesse, intesa in senso puramente algebrico, indipendentemente cioè da questioni di realità.

Essi sono i seguenti:

I. *Siano* $p+1$ *curve razionali* $C_0^{n_i}$ *rispettivamente di ordine* n_i ($i=1, 2,...., p+1$), *prive di singolarità e di mutue incidenze; ed introducansi i punti* P_j, $\overline{P}_j$ *su* $C_0^{n_j}$ *e* Q_j, $\overline{Q}_j$ *su* $C_0^{n_{j+1}}$ ($j=1, 2,...., p$), *tutti fra loro distinti, indi le rette*

$$r_j=P_jQ_j, \qquad \bar{r}_j=\overline{P}_j\overline{Q}_j;$$

nè vi siano incidenze di rette fra loro, nè (all'infuori di quelle già imposte) di rette con curve. Allora la curva connessa costituita dalle $C_0^{n_i}$, r_j, $\bar{r}_j$ è posizione limite di curve C_p^N (irriducibili e prive di singolarità), d'ordine

$$N = n_1 + \dots + n_{p+1} + 2p$$

e di genere p (9).

II. *La curva connessa costituita da una C_p^n (irriducibile e priva di singolarità), d'ordine n e di genere p $(n-p \geqslant 3)$, e da una conica C_0^2 bisecante la C_p^n, è posizione limite di curve C_{p+1}^{n+2} (irriducibili e prive di singolarità), d'ordine $n+2$ e di genere $p+1$.*

7. - I due lemmi, di n.° 6, possono ricondursi a casi già noti.

Per il primo si sostituiscano intanto le $C_0^{n_i}$ con altrettanti multilateri connessi $L_0^{n_i}$ di genere zero, onde la curva totale connessa con un multilatero connesso L_p^N di genere p.

Essendo:

$$N - p \geqslant 3,$$

esso è *non speciale*, e perciò (10) appartenente ad una ed una sola famiglia F di curve C_p^N, di cui la generica è irriducibile e priva di singolarità. La qual curva generica, in certo modo, potrà dirsi dedotta da L_p^N realizzando le connessioni solo convenzionalmente imposte nei singoli vertici. Ma se si pensa di procedere a tale realizzazione in due tempi, prima operando nei vertici dei singoli multilateri $L_0^{n_i}$, poi nei punti di appoggio delle $r_j \bar{r}_j$, si avrà in F, come forma intermedia, una curva connessa del tipo studiato. E notisi che la varietà avente per elementi le curve connesse di tale tipo è varietà irriducibile, onde la validità del risultato è generale e subito ne consegue il lemma.

Similmente, per il secondo, si sostituisca C_p^n con un multilatero connesso L_p^n di genere p; e C_0^2 con una coppia di rette incidenti, una delle quali bisechi L_p^n (in P_1, P_2), onde la curva totale connessa con un multilatero L_{p+1}^{n+2}, *non speciale*.

Sia F la famiglia di cui L_{p+1}^{n+2} fa parte, e di cui la curva generica C_{p+1}^{n+2} è irriducibile e priva di singolarità. Questa, riprendendo il linguaggio introdotto, potrà dirsi ottenuta da L_{p+1}^{n+2} realizzando le connessioni in tutti i vertici. Tale realizzazione può invece effettuarsi dapprima ovunque fuorchè in P_1, P_2, poi anche in essi. Ed allora in F, come forma intermedia, trovasi una delle curve connesse del tipo considerato nel secondo lemma. Ma queste sono elementi di una varietà irriducibile, onde anche qui la validità è generale e ne consegue il lemma.

---

(9) Per $p = 1$ cfr. L. BRUSOTTI, (1), *b*), pag. 70.

(10) F. SEVERI-E. LÖFFLER: *Vorlesungen über algebraische Geometrie* (Teubner, Leipzig-Berlin, 1921), *Anhang G.*, pag. 372.

§ 3. - Modello razionale di un circuito.

8. - Sia il circuito a, nello spazio; e sia a' la sua projezione su π colla relativa *segnatura*, sempre nel senso e nelle condizioni di n.º 2.

Si inscriva in a' un circuito poligonale β' (a lati rettilinei) topologicamente identificabile con a'. Si può supporre per β' che tutti i vertici siano al finito e che al finito siano tutti i lati salvo j lati contenenti un punto improprio, se j

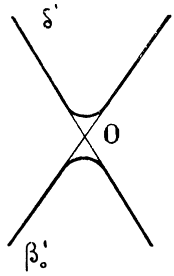

Fig. 3.

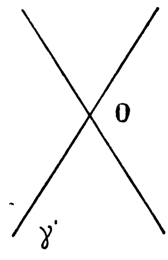

Fig. 4.

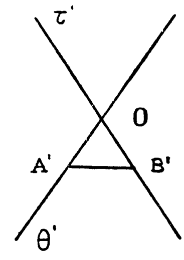

Fig. 5.

è il numero dei punti impropri di a'. Si può anche supporre che il numero n dei lati ($\geqslant j$ ed aumentabile a piacere) soddisfi alla

$$n \equiv j, \text{ mod } 2.$$

Si consideri la curva spezzata nelle n rette dei lati. Di essa può immaginarsi una « piccola variazione » topologica ([11]) in modo che la trasformata consti di due circuiti, uno aderente a β' (e sia β_0'), l'altro aderente al poligono complementare (e sia δ'); si potrà supporre che β_0' e δ' abbiano rispettivamente j ed $n-j$ punti impropri.

Il procedimento di « piccola variazione » opera nei vertici di β', ma conserva tutti gli altri nodi della curva spezzata.

In *uno* dei vertici (e sia O) si rinunzî invece ad applicare il procedimento, così da sostituire nella trasformata (fig. 3 e 4) ai due circuiti β_0' e δ' un solo circuito γ' con nodo in O.

Indi sui due rami di γ' in prossimità di O si assumano rispettivamente due punti A', B', i quali divideranno γ' in due *segmenti* θ' e τ'; ma ciò (fig. 5) facciasi in modo che, detto σ' il segmento rettilineo $A'B'$ al finito, il circuito $\sigma' + \theta'$ risulti prossimo all'antico circuito β_0', di cui avrà la parità concorde con quella di j, mentre il circuito $\sigma' + \tau'$ (con nodo in O) risulterà pari, perchè è pari $n-j$.

([11]) Per il concetto di « piccola variazione » topologica cfr. L. BRUSOTTI: *a*) *Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazione » di una curva spezzata* [Annali di Matematica (3), 22, (1914), pag. 117-169]; *b*) *Sulla « piccola variazione » di una curva piana algebrica reale* [Rend. R. Accademia dei Lincei (5), 30, (1921), pag. 375-379].

I nodi di γ' o sono formati da θ' con se stesso (e provengono da altrettanti, prossimi, di β_0', cioè di β', cioè di α'), oppure sono formati da τ' o con se stesso o con θ' (ed è tra i primi certamente O).

È lecito ormai interpretare γ' σ' τ' θ' nel senso di n.º 3 (cfr. n.º 5; oss. 1), anzi fissare la segnatura dei nodi formati da θ' con se stesso in armonia a quella già nota dei nodi di α', indi attribuire ai nodi rimanenti (tutti giacenti su τ') una segnatura tale che τ' debba intepretarsi come projezione di un *segmento* retrattile.

Allora γ', con tali segnature, sarà pensato (n.º 5: oss. 2) come projezione di un circuito γ identificabile con a sotto l'aspetto della Topologia projettiva.

9. - Si voglia ora determinare γ in modo che esso risulti *il circuito di una curva gobba* (*algebrica, reale*) *razionale*, o, come si dirà, offra un *modello razionale* di a.

Si introduca perciò in π il multilatero connesso L_0^n (di genere virtuale zero) costituito dalle n rette dei lati di β', rette da pensarsi connesse nei vertici di β', escluso O; e, se occorre, lo si completi mediante coppie di rette immaginario-conjugate, connettendo le rette di ciascuna coppia ad L_0^n nei loro punti d'intersezione con *una* delle rette di L_0^n. Si otterrà così un multilatero $L_0^{n_1}$ (di genere virtuale zero), il cui ordine n_1 sia soddisfacente alle:

$$(1) \qquad n_1 \equiv n, \ \mathrm{mod}\, 2\,; \qquad n_1 \geqslant n,$$

e del resto, per ora, qualunque.

Sarà lecito ([12]) considerare curve (piane) razionali $\Gamma_0^{n_1}$, reali, prossime ad $L_0^{n_1}$, per ciascuna delle quali i punti doppi reali siano $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ nodi a rami reali prossimi ai nodi di L_0^n ed $\frac{1}{2}(n_1-n)$ punti isolati, prossimi alle intersezioni delle singole coppie di rette immaginario-conjugate. Il circuito di $\Gamma_0^{n_1}$ si dedurrà mediante una « piccola variazione » topologica della parte reale di L_0^n, anzi ([13]) sarà ancor lecito in ciascuno dei punti di connessione scegliere ad arbitrio nell'alternativa fra i due procedimenti complementari e ciò qui si farà sempre in modo che il procedimento si identifichi topologicamente con quello che ha condotto alla costruzione di γ' (cfr. n.º 8). È dunque possibile *far coincidere* γ' *col circuito di una curva razionale* $\Gamma_0^{n_1}$; il che si supporrà fatto.

Se si riprende il riferimento cartesiano di n.º 4, ciò si può esprimere affermando che γ' ammette una rappresentazione parametrica

$$(2) \qquad x=\frac{\varphi(t)}{\omega(t)}, \qquad y=\frac{\psi(t)}{\omega(t)},$$

([12]) F. SEVERI: *Nuovi contributi alla teoria dei sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica.* [Rend. R. Accademia dei Lincei, (5), 25, (1916), pag. 459-471, 551-562]; cfr. pag. 556.

([13]) L. BRUSOTTI ([11]) *b*).

essendo t un parametro reale e $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ polinomî di grado n_1 in t, a coefficienti reali. In armonia al fatto che γ' possiede precisamente n punti impropri, delle n_1 radici di

$$\omega(t)=0$$

precisamente n saranno reali.

Per dimostrare che γ si può far coincidere col circuito di una curva razionale $C_0^{n_1}$, basterà ormai dimostrare come, precisata opportunamente la scelta di n_1, sia possibile determinare un polinomio (di grado n_1 ed a coefficienti reali) $\chi(t)$ in tale maniera che le

(3) $$x=\frac{\varphi(t)}{\omega(t)}, \qquad y=\frac{\psi(t)}{\omega(t)}, \qquad z=\frac{\chi(t)}{\omega(t)}$$

siano accettabili per la rappresentazione parametrica di γ, nel senso che $\chi(t)$ rispetti le esigenze della segnatura già prefissata per γ'.

Per semplicità si convenga che in un nodo di γ', dei due rami, quello che, secondo la segnatura è projezione del ramo superiore (rispettivamente inferiore) sia senz'altro projezione di un ramo i cui punti abbiano ordinata z positiva (rispettivamente negativa).

Ed allora, poichè su γ si distingueranno alternatamente (per tali rami) gruppi di rami consecutivi o tutti superiori o tutti inferiori, si potrà ancor più semplicemente supporre γ diviso in altrettanti *segmenti* alternatamente superiori ed inferiori rispetto a π, ciascuno contenente *uno* di detti gruppi. Tali segmenti, in numero pari, saranno determinati su γ dalla presenza degli n punti impropri e di n_0 intersezioni con π, essendo:

(4) $$n_0 \equiv n, \bmod 2$$

ed inoltre:

$$n+n_0 \leqslant (n-1)(n-2),$$

(ove il secondo membro dà il numero totale dei rami nodali di γ').

Ciò posto, alle (1), nelle quali, per (4), è implicita anche la

(5) $$n_1 \equiv n_0, \bmod 2,$$

aggiungasi com'è lecito (ed ormai necessario) la

(6) $$n_1 \geqslant n_0.$$

Indi (nei singoli intervalli implicitamente assegnati) si precisino gli n_0 valori λ, μ,...., ϱ del parametro t a cui corrispondano gli n_0 punti di γ aventi ordinata z nulla; e pongasi

(7) $$\chi(t)=(t-\lambda)(t-\mu)\,....\,(t-\varrho)f(t),$$

essendo $f(t)$ un polinomio *definito*, di grado $n_1 - n_0$ [cfr. le (5) (6)], avente segno uguale o contrario al coefficiente del termine di grado massimo in $\omega(t)$, secondo che, in relazione alle convenzioni fatte, a $t = \infty$ debba corrispondere un punto di γ avente ordinata z positiva o negativa.

Colla posizione (7), le (3), che rappresentano il circuito di $C_0^{n_1}$, rappresentano anche un circuito γ accettabile quale modello di a, onde, come volevasi, *a ammette modelli razionali* ([14]).

§ 4. - Esistenza per un sistema Σ (di k circuiti) di modelli formati coi circuiti di k curve razionali.

10. - Il risultato del precedente paragrafo si può estendere dimostrando che, *dato un sistema Σ di k circuiti, per esso esistono modelli costituiti dai circuiti di altrettante curve razionali.*

Poichè (n.° 9) la proprietà vale per $k=1$, basterà provare che, supposta valida per un sistema di $k-1$ circuiti, essa vale anche per uno di k.

Da Σ si stacchi un circuito a e sia Σ_0 il sistema residuo; di Σ_0, com'è lecito, assumasi un modello formato coi circuiti di $k-1$ curve razionali e, completatolo con un opportuno circuito, se ne tragga un modello di Σ (il che pure ê lecito). Per il modello così costruito si manterranno le denominazioni Σ, Σ_0, a e si useranno le analoghe Σ', Σ_0', a' per la projezione su π.

I circuiti di Σ_0' apparterranno rispettivamente a curve razionali di ordini ν_i $(i=2, 3, \ldots, k)$, ma queste potranno sempre sostituirsi con curve razionali $\Gamma_0^{n_i}$ di ordini n_i sottoposti alle:

$$n_i \equiv \nu_i, \bmod 2 ; \qquad n_i \geqslant \nu_i \qquad (i=2, 3, \ldots, k) \tag{8}$$

e del resto, per ora, qualisivogliano. Ed invero, l'ordine di una delle curve si può sempre aumentare di due unità, introducendo la curva connessa (di genere virtuale zero) che se ne deduce coll'aggiunta di due rette immaginario-conjugate, connesse alla curva data in due punti immaginario-conjugati di questa (ma non

---

([14]) Le (2) e le (3), attribuita a t variabilità complessa, rappresentano rispettivamente $\Gamma_0^{n_1}$ $C_0^{n_1}$. Ciascuno dei punti isolati di $\Gamma_0^{n_1}$ risponde ad una coppia di valori immaginario-conjugati per t. La $C_0^{n_1}$, per le posizioni fatte, non ha punti doppî a rami reali; ma per l'arbitrarietà di $f(t)$, si può supporre senz'altro che non abbia punti doppî (nemmeno isolati od immaginarî), onde i punti isolati di $\Gamma_0^{n_1}$ siano solo tracce di corde *ideali* projettanti. Che $C_0^{n_1}$ non abbia un punto isolato nel punto improprio delle normali a π, già risulta dall'avere $C_0^{n_1}$ e $\Gamma_0^{n_1}$ (curva obbiettiva e projezione) lo stesso ordine n_1.

Il risultato di § 3, nel quale si inquadrano quelli particolari di W. Fr. Meyer e di A. Brill [cfr. ([3])], potrebbe essere il punto di partenza per una classificazione dei circuiti intrecciati in sè (dotati di *Verknotung*) secondo l'*ordine minimo dei loro modelli razionali.*

tra loro nè, altrove, alla curva); indi ([15]) sostituendo la curva connessa con una irriducibile prossima. Però, anche occorrendo siffatte modificazioni, si conserverà la denominazione Σ_0'.

Dopo ciò, come al n.° 8, si inscriva in α' il circuito poligonale β', da esso e dal complementare si ricavino β_0' e δ', indi si fondano in γ', diviso nei due *segmenti* θ' e τ'. La segnatura nei nodi di $\Sigma_0'+\theta'$ concordi con quella nei nodi corrispondenti di $\Sigma_0'+\alpha'$; la segnatura su τ' sia compatibile coll'interpretazione di τ' come projezione di un *segmento* retrattile τ (tenuto presente Σ_0', e non solo θ', cioè nel senso generale di n.° 3).

Se ν_1 è il numero dei lati di β' (numero necessariamente di parità concorde con quella di γ') si può anche qui (cfr. n.° 9) realizzare γ' col circuito di una curva razionale $\Gamma_0^{n_1}$, d'ordine n_1, sottoposto alle

$$n_1 \equiv \nu_1, \bmod 2; \qquad n_1 \geqslant \nu_1 \tag{9}$$

[analoghe alle (1) di n.° 9] e del resto, per ora, arbitrario.

Si ha quindi ormai in π un sistema di k circuiti appartenenti ad altrettante curve razionali $\Gamma_0^{n_i}$ $(i=1,2,\dots,k)$ e quindi suscettibili di rappresentazioni

$$x=\frac{\varphi_i(t)}{\omega_i(t)}, \qquad y=\frac{\psi_i(t)}{\omega_i(t)}, \qquad (i=1,\dots,k) \tag{10}$$

analoghe alla (2) di n.° 9; in particolare in esse $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $\omega_i(t)$ sono polinomî di grado n_i in t.

A tale sistema è annessa la già descritta segnatura, che, per la retrattilità di τ, permette di considerarlo come projezione di un modello del dato sistema Σ. Ma si vuole che tale modello si componga con circuiti appartenenti ad altrettante curve razionali $C_0^{n_i}$ $(i=1,2,\dots,k)$ d'ordini n_i e quindi suscettibili di rappresentazioni

$$x=\frac{\varphi_i(t)}{\omega_i(t)}, \qquad y=\frac{\psi_i(t)}{\omega_i(t)}, \qquad z=\frac{\chi_i(t)}{\omega_i(t)} \qquad (i=1,2,\dots,k) \tag{11}$$

analoghe alle (3) di n.° 9; ove deve adattarsi allo scopo la scelta degli ordini n_i e la determinazione dei polinomî $\chi_i(t)$ d'ordini n_i.

Ed allora anche qui si convenga che (per ogni punto doppio apparente a rami reali) rami superiori (rispettivamente inferiori) si pensino senz'altro superiori (rispettivamente inferiori) a π; e che anzi, per ogni $C_0^{n_i}$, il circuito s'immagini diviso (col criterio di n.° 9) in segmenti alternatamente superiori ed inferiori rispetto a π, per opera dei punti impropri e delle n_{0i} intersezioni con π, essendo:

$$n_{0i} \equiv n_i, \bmod 2 \qquad (i=1,2,\dots,k) \tag{12}$$

([15]) Cfr. F. SEVERI ([12]).

Dopo ciò, alle (8) (9) si aggiungano le

$$n_i \geqslant n_{0i} \qquad (i=1, 2, \ldots, k) \tag{13}$$

e, precisati per ciascuna delle $C_0^{n_i}$ gli n_{0i} valori λ_i, $\mu_i, \ldots, \varrho_i$ di t spettanti ai punti d'ordinata nulla, pongasi:

$$\chi_i(t) = (t-\lambda_i)(t-\mu_i) \ldots (t-\varrho_i) f_i(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, k) \tag{14}$$

ove [cfr. (12), (13)] ogni volta sia $f_i(t)$ un polinomio definito di ordine $n_i - n_{0i}$, il cui segno si fissi col criterio di n.° 9 [cfr. la (7)].

Colla posizione (14), le (11) rappresentano i circuiti di un modello di Σ, rispondente alla proposizione enunciata all'inizio del presente paragrafo ([16]).

§ 5. - Modelli algebrici irriducibili di Σ di genere minimo $p=k-1$.

11. - Sia Σ composto di k circuiti; se un suo modello è fornito dai k circuiti di una curva algebrica irriducibile di genere p, tale modello si dirà brevemente di genere p.

Per un classico teorema di A. HARNACK dev'essere ([17]):

$$k \leqslant p+1$$

ossia:

$$p \geqslant k-1$$

Qui si vuol dimostrare che il limite inferiore $k-1$ è effettivamente il valor minimo per il genere p di un modello algebrico irriducibile di Σ.

Si riprenda intanto perciò il modello di Σ composto coi circuiti di k curve razionali (reali)

$$C_0^{n_1},\ C_0^{n_2}, \ldots,\ C_0^{n_k} \tag{15}$$

(cfr. n.° 10). Indi su $C_0^{n_j}$ introducasi la coppia di punti immaginario-conjugati $P_j \overline{P}_j$ e su $C_0^{n_{j+1}}$ la coppia di punti immaginario-conjugati $Q_j \overline{Q}_j$, ove sia $j=1, 2, \ldots, k-1$.

Per l'arbitrarietà dei polinomî $f_i(t)$ di n.° 10 e per quella delle coppie di punti ora introdotte, si potranno sempre supporre soddisfatte per le curve (15) e per le rette

$$r_j = P_j Q_j, \qquad \overline{r}_j = \overline{P}_j \overline{Q}_j \qquad (j=1, 2, \ldots, k-1) \tag{16}$$

le condizioni esposte nel primo lemma di n.° 6.

([16]) Per ciascuna delle $\Gamma_0^{n_i}$, $C_0^{n_i}$, in relazione alle (10) (11) ove a t si attribuisca variabilità complessa, valgono le osservazioni esposte nella prima parte della nota ([14]).

([17]) A. HARNACK: *Ueber der Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven* (Mathematische Annalen, 10 (1876), pag. 189-198].

Ed allora, per il lemma stesso, alla curva connessa costituita dalle (15) (16) saranno prossime curve irriducibili di genere $k-1$. Poichè la curva connessa è reale e la sua parte reale [composta coi circuiti delle (15)] fornisce un modello di Σ, fra le curve irriducibili prossime ve ne saranno delle reali e la parte reale di ciascuna di esse fornirà del pari un modello di Σ.

È così dimostrata per Σ l'effettiva esistenza di modelli algebrici irriducibili di genere $k-1$ (genere minimo), come volevasi.

§ 6. - Modelli algebrici di Σ, irriducibili e riducibili, comunque compatibili col teorema di Harnack.

12. - In primo luogo, fissato l'intero

$$p \geqslant k-1,$$

e del resto qualunque, vogliasi dimostrare per Σ l'esistenza di modelli algebrici irriducibili di genere p.

Poichè (n.° 11) ciò vale per $p=k-1$, basterà provare che, dato di Σ un modello irriducibile di genere p, se ne può dedurre un altro pure irriducibile ma di genere $p+1$.

Sia C_p^n la curva che coi suoi circuiti fornisca il modello irriducibile di genere p e sia C_0^2 una conica, reale, ma priva di punti reali, che si appoggi a C_p^n in due punti immaginario-conjugati e solo in essi. Alla curva connessa formata con C_p^n e C_0^2, per il secondo lemma di n.° 6, sono prossime curve irriducibili C_{p+1}^{n+2} di genere $p+1$; anzi, poichè la curva connessa è reale e la sua parte reale (coincidente con quella di C_p^n) fornisce un modello di Σ, così fra le C_{p+1}^{n+2} se ne hanno di reali e la parte reale di una qualunque di queste fornisce un modello di Σ (precisamente quello richiesto perchè irriducibile e di genere $p+1$).

Dunque per i modelli irriducibili il problema del genere è esaurito, e si può passare allo studio di quelli riducibili.

Perciò, dato il sistema Σ, se ne distribuiscano *comunque* i k circuiti in s sistemi parziali

$$\Sigma_1,\ \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s \qquad (1 \leqslant s \leqslant k)$$

costituiti rispettivamente da

$$k_1,\ k_2, \ldots, k_s \qquad (k_1+k_2+\ldots k_s=k, \quad k_i>0)$$

circuiti. Indi *comunque* prefissati gli interi:

$$p_1,\ p_2, \ldots, p_s,$$

purchè soddisfacenti alle:

$$p_i \geqslant k_i-1, \qquad (i=1, 2, \ldots, s) \tag{17}$$

si voglia dimostrare che Σ possiede modelli algebrici nei quali ciascuno dei sistemi parziali, Σ_i, è costituito dalla parte reale di una curva algebrica (reale) irriducibile, di genere p_i ([18]).

Ed invero si parta dal modello di Σ formato (§ 4) coi circuiti di k curve razionali; ciascuno dei sistemi Σ_i vi comparirà con un modello subordinato composto coi circuiti di k_i curve razionali. A tale modello subordinato si applichi il procedimento di n.º 11 e, se occorre ($p_i > k_i - 1$), anche quello descritto all'inizio del presente numero, ripetendolo fin che basti. Si otterrà così un modello di Σ del tipo richiesto.

Poichè, per il teorema di Harnack, le (17) sono condizioni necessarie, la questione è ormai esaurita anche per i modelli riducibili. E si può concludere:

Dato un sistema spaziale Σ di k circuiti (privi di singolarità e a due a due non secantisi), nello studio dei modelli algebrici di Σ, i problemi concernenti il genere ammettono tutte le soluzioni compatibili col teorema di Harnack (e necessariamente non altre).

([18]) Per $s = 1$ il modello di Σ è irriducibile e si ricade in un risultato precedente. Per $s > 1$ il modello è riducibile; se poi si assume $s = k$ (onde $k_i = 1$) si cade in un risultato che comprende quello di § 4.