ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ÉDOUARD GOURSAT

Sur quelques équations de Monge intégrables explicitement

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 1-2 (1932), p. 35-59
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_35_0>

SUR QUELQUES ÉQUATIONS DE MONGE INTÉGRABLES EXPLICITEMENT

par ÉDOUARD GOURSAT (Paris).

Dans un travail récent [1] j'ai étudié certaines équations de Monge qui définissent les multiplicités singulières, relativement au problème de Cauchy, pour une équation aux dérivées partielles ou un système en involution d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation de Monge appartienne à cette classe ont été données aussi dans le même Mémoire, lorsque les multiplicités singulières ont au moins deux dimensions. Mais les conditions sont d'une nature toute différente lorsque ces multiplicités sont à *une* dimension. Je reprends cette question dans le travail ci-dessous. On peut alors pousser l'étude plus loin, et définir sans difficulté les multiplicités singulières d'ordre supérieur.

On remarquera l'analogie des résultats obtenus, avec des résultats déjà connus relatifs aux systèmes de n équations de Pfaff à $n+2$ variables [2].

I.

1. - Soit (Σ) un système en involution de $n-1$ équations aux dérivées partielles du premier ordre à n variables indépendantes, et à une seule fonction inconnue, que nous écrivons, en modifiant un peu les notations du premier Mémoire :

$$(1) \qquad q_1=F_1(x, x_1, \ldots, x_n;\, q), \quad q_2=F_2(\ldots), \ldots, \quad q_{n-1}=F_{n-1}(x, x_1, \ldots, x_n;\, q),$$

en posant

$$q=\frac{\partial x_n}{\partial x}, \qquad q_i=\frac{\partial x_n}{\partial x_i}, \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Ce système est en involution pourvu que les fonctions F_i vérifient les relations

$$(2) \qquad \frac{\partial F_i}{\partial q}\left(\frac{\partial F_k}{\partial x}+q\,\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right)-\frac{\partial F_k}{\partial q}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}+q\,\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)+\frac{\partial F_i}{\partial x_k}-\frac{\partial F_k}{\partial x_i}+F_k\,\frac{\partial F_i}{\partial x_n}-F_i\,\frac{\partial F_k}{\partial x_n}=0,$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, n-1).$$

---

[1] Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1930). Le travail actuel peut être lu séparément.

[2] CARTAN : Bulletin de la Société Mathématique, 1914, t. 42, p. 12.

Les multiplicités caractéristiques à $n-1$ dimensions de (Σ) sont déterminées par l'intégration du système complet [3]

$$\frac{\partial F_i}{\partial q}\frac{\partial \Phi}{\partial x}+\left(q\frac{\partial F_i}{\partial q}-F_i\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}-\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}+q\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q}-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}=0, \tag{3}$$
$$(i=1, 2,\ldots, n-1).$$

ou, ce qui revient au même, par l' intégration du système complétement intégrable d' équations aux différentielles totales

$$\left\{\begin{aligned} & dx+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial F_i}{\partial q}\,dx_i=0,\\ & dx_n+\sum_{i=1}^{n-1}\left(q\frac{\partial F_i}{\partial q}-F_i\right)dx_i=0,\\ & dq=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{\partial F_i}{\partial x}+q\frac{\partial F_i}{\partial x_n}\right)dx_i. \end{aligned}\right. \tag{3'}$$

Soient

$$\left\{\begin{aligned} & x=\psi_1(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}; C_1, C_2, C_3), \quad x_n=\psi_2(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}; C_1, C_2, C_3)\\ & q=\psi_3(x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}; C_1, C_2, C_3) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

les formules qui représentent l'intégrale générale de ce système, C_1, C_2, C_3 étant trois constantes arbitraires. Les deux premières de ces formules représentent une famille de variétés V_{n-1} à $n-1$ dimensions de l'espace E_{n+1}. En associant à chaque point de la variété V_{n-1} la valeur de q donnée par la dernière équation, et les valeurs de q_1, $q_2,\ldots$, q_{n-1} tirées des équations (1), on obtient ∞^3 multiplicités d'éléments de contact M_{n-1}, ayant pour support ponctuel les variétés V_{n-1}, ce sont les multiplicités caractéristiques proprement dites de (Σ).

Chacune de ces multiplicités est déterminée si l'on se donne les coordonnée $(x^0, x_1^0,\ldots x_n^0)$ d'un point de E_{n+1} et la valeur correspondante q_0 de q. Chaque point de E_{n+1} appartient en général à ∞^1 variétés ponctuelles caractéristiques V_{n-1}, pourvu que le système (1) ne soit pas linéaire.

Ces caractéristiques interviennent, comme l' on sait, dans la résolution du problème de Cauchy, qui consiste, dans le cas actuel, à déterminer une intégrale M_n contenant une multiplicité à une dimension M_1, représentée par les n équations

$$x_1=\varphi_1(x),\ x_2=\varphi_2(x),\ldots,\ x_n=\varphi_n(x). \tag{5}$$

Nous poserons dans la suite
$$p_i=\frac{d\varphi_i}{dx}, \qquad (i=1, 2,\ldots, n).$$

La relation générale

$$dx_n=q\,dx+q_1dx_1+\ldots+q_{n-1}dx_{n-1}$$

---

(3) Voir mes: *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, 2ème édition, p. 339.

qui s'applique à tout déplacement sur M_n, donne en particulier pour un déplacement sur M_1,

$$p_n = q + q_1 p_1 + \dots + q_{n-1} p_{n-1}.$$

En remplaçant $q_1, q_2, \dots, q_{n-1}$ par leurs expressions (1), on obtient l'équation

$$\mathcal{F}(q) = q + F_1 p_1 + \dots + F_{n-1} p_{n-1} - p_n = 0 \tag{6}$$

qui détermine la valeur de q en chaque point de M_1. Soit $q(x)$ une racine de cette équation. Les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$ de ce point associées à la valeur $q(x)$, déterminent une multiplicité caractéristique M_{n-1} qui engendre, quand on fait varier x, une multiplicité $\mathfrak{M}_n$ d'éléments de contact, ayant pour support ponctuel une multiplicité M_n qui est une intégrale de (Σ) renfermant la multiplicité M_1 (4), En reprenant les raisonnements classiques, on démontrerait aisément que, si $q(x)$ est une fonction holomorphe de x dans le voisinage d'un point de M_1, x_n sera aussi une fonction holomorphe de $x, x_1, \dots, x_{n-1}$, dans le voisinage du même point, du moins si les conditions ordinaires de régularité sont satisfaites.

2. - La conclusion est en défaut si en chaque point de M_1 l'équation (6) admet une racine multiple. Nous dirons que ces multiplicités M_1 sont des ***multiplicités singulières*** ou des ***variétés singulières*** de (Σ). Une racine multiple de (6) doit satisfaire aussi à l'équation

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial q} = 1 + \frac{\partial F_1}{\partial q} p_1 + \dots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial q} p_{n-1} = 0, \tag{7}$$

et l'élimination de q entre les deux équations (6) et (7) conduit en général à une seule relation (E), où figurent $x, x_1, \dots, x_n, p_1, p_2, \dots, p_n$,

$$\Phi(x, x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = 0. \tag{8}$$

C'est l'équation de Monge des variétés singulières du système en involution (1).

D'après la façon même dont on obtient l'équation (8), l'intégration de cette équation est équivalente à celle du système formé par les équations (6) et (7), où l'on regarde $x_1, x_2, \dots, x_n, q$ comme des fonctions inconnues de x. En multipliant par dx les premiers membres de ces deux équations, le problème revient encore à la recherche des ***intégrales à une dimension*** du système des deux équations de Pfaff

$$\Omega = q\,dx + F_1 dx_1 + \dots + F_{n-1} dx_{n-1} - dx_n = 0, \tag{9}$$

$$\Omega_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial q} = dx + \frac{\partial F_1}{\partial q} dx_1 + \dots + \frac{\partial F_{n-1}}{\partial q} dx_{n-1} = 0, \tag{10}$$

où figurent les $n+2$ variables $x, x_1, \dots, x_n, q$. L'équation $\Omega = 0$ est précisément l'équation de Pfaff à laquelle se ramène l'intégration du système (1). Ce système

---

(4) C'est la méthode même de Cauchy étendue par S. Lie pour former une intégrale au moyen des caractéristiques (*Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, 2ème édition, p. 340).

étant supposé en involution, l'équation $\Omega=0$ est de classe *trois* ([5]), et peut être ramenée à la forme

$$dZ-PdX=0, \tag{11}$$

X, Z, P, étant trois intégrales distinctes du système (3) qui détermine les caractéristiques. Pour effectuer cette réduction, il suffit de connaître une intégrale complète du système

$$V(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, a, b)=0.$$

Supposons cette réduction effectuée, l'équation $\Omega_1=\frac{\partial\Omega}{\partial q}=0$ est le *prolongement* de $\Omega=0$ ([6]); et par conséquent Ω_1 s'exprime au moyen de dX, dZ, dP seulement. Si les deux équations (9) et (10) ne forment pas un système complètement intégrable, en remplaçant dZ par PdX dans Ω_1, on voit que le système des équations (9) et (10) peut être remplacé par un système équivalent

$$dZ=PdX, \qquad dP=P_1dX, \tag{12}$$

les quatre fonctions X, Z, P, P_1, étant distinctes, sans quoi le système (11) serait complètement intégrable. L'intégrale générale de ce système s'obtient immédiatement en posant

$$Z=f(X), \qquad P=f'(X), \qquad P_1=f''(X),$$

$f(X)$ étant une fonction arbitraire. Il suffira de remplacer X, Z, P, P_1 par leurs expressions au moyen des variables $x, x_1, \ldots, x_n, q$, pour avoir l'intégrale générale du système des équations (9) et (10). On établit ainsi deux relations entre les $n+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_n$. Il suffira de leur ajouter $n-2$ relations arbitraires pour obtenir une multiplicité singulière M_1; ces multiplicités dépendant bien de $n-1$ fonctions arbitraires d'une variable, comme il était évident *à priori*.

3. - La conclusion est en défaut si les deux équations $\Omega=0$; $\Omega_1=0$ forment un système complètement intégrable. Pour qu'il en soit ainsi, il faut, d'après un théorème de Frobénius, que deux éléments linéaires intégraux quelconques $(dx_1, \ldots, dx_n, dq)$, $(\delta x, \delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta q)$ du système des équations (9) et (10) annulent les deux covariants bilinéaires Ω', Ω_1'. Or dans Ω_1' le coefficient de δq est

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^2}dx_1+\ldots\ldots+\frac{\partial^2 F_{n-1}}{\partial q^2}dx_{n-1};$$

comme $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n-1}$ peuvent être choisis arbitrairement pour un élément linéaire intégral, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q^2}=0, \ldots, \frac{\partial^2 F_{n-1}}{\partial q^2}=0$$

c'est-à-dire que $F_1, F_2, \ldots F_{n-1}$, soient des fonctions linéaires de q.

([5]) *Leçons sur le problème de Pfaff*, chap. II, p. 78.

([6]) Elle fait partie, en effet, des équations différentielles des caractéristiques de $\Omega=0$.

Le système en involution est alors un système linéaire,

$$(1') \qquad q_1 = A_1 q + B_1, \quad q_2 = A_2 q + B_2, \ldots, \quad q_{n-1} = A_{n-1} q + B_{n-1},$$

les coefficients A_i, B_i étant des fonctions de x, $x_1, \ldots, x_n$.

Les deux équations (6) et (7) deviennent ici

$$(1 + A_1 p_1 + \ldots + A_{n-1} p_{n-1}) q + B_1 p_1 + \ldots + B_{n-1} p_{n-1} - p_n = 0,$$
$$1 + A_1 p_1 + \ldots + A_{n-1} p_{n-1} = 0.$$

Il ne peut donc y avoir de racine multiple pour l'équation (6) mais il y aura indétermination si les fonctions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, satisfont aux deux équations de Monge

$$A_1 p_1 + \ldots + A_{n-1} p_{n-1} + 1 = 0,$$
$$B_1 p_1 + \ldots + B_{n-1} p_{n-1} - p_n = 0.$$

Les équations de Pfaff correspondantes

$$(13) \qquad \begin{aligned} \Omega_2 &= B_1 dx_1 + \ldots + B_{n-1} dx_{n-1} - dx_n = 0, \\ \Omega_3 &= A_1 dx_1 + \ldots + A_{n-1} dx_{n-1} + dx = 0. \end{aligned}$$

qui sont équivalentes aux deux équations $\Omega = 0$, $\Omega_1 = 0$, doivent former un système complètement intégrable. Il faut pour cela que les fonctions A_i, B_i, vérifient les relations

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_k} - \frac{\partial B_k}{\partial x_i} + A_i \frac{\partial B_k}{\partial x} - A_k \frac{\partial B_i}{\partial x} + B_k \frac{\partial B_i}{\partial x_n} - B_i \frac{\partial B_k}{\partial x_n} = 0,$$
$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_i} + A_i \frac{\partial A_k}{\partial x} - A_k \frac{\partial A_i}{\partial x} + B_k \frac{\partial A_i}{\partial x_n} - B_i \frac{\partial A_k}{\partial x_n} = 0,$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

qui expriment aussi que le système (1) est en involution.

Dans ce cas, le système admet des multiplicités caractéristiques ponctuelles à $n-1$ dimensions, qui s'obtiennent par l'intégration du système (13) et il est évident que le problème de Cauchy est indéterminé pour une multiplicité M_1 située sur une caractéristique, car toute intégrale est engendrée par les caractéristiques issues des différents points d'une multiplicité M_1 non située sur une caractéristique.

4. - On peut aussi trouver directement les équations générales des variétés singulières en partant d'une intégrale complète. Il suffit pour cela de remarquer la signification géométrique de l'équation $\mathfrak{F}(q) = 0$.

Le plan tangent à une surface intégrale (S) de (1) passant au point m de coordonnées $(x, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a pour équation

$$(P) \qquad X_n - x_n = q(X - x) + F_1(X_1 - x_1) + \ldots + F_{n-1}(X_{n-1} - x_{n-1})$$

et dépend d'un paramètre arbitraire q. On a donc ainsi une famille de ∞^1 plans (P)

passant au point m. Considérons d'autre part la droite (D) issue du même point représentée par les équations

$$(D) \qquad \frac{X-x}{1}=\frac{X_1-x_1}{p_1}=\dots=\frac{X_n-x_n}{p_n}.$$

Pour que cette droite (D) soit située dans le plan (P), il faut et il suffit que q soit racine de l'équation

$$\mathfrak{F}(q)=q+F_1p_1+\dots+F_{n-1}p_{n-1}-p_n=0$$

qui détermine ainsi les plans (P) passant par la droite (D).

L'équation de Monge d'une variété singulière s'obtient en écrivant que l'équation $\mathfrak{F}(q)=0$ a une racine double, ou que deux des plans (P) passant par la droite (D) sont confondus.

Soit

$$(14) \qquad V(x, x_1, \dots, x_n;\ a, b)=0$$

une intégrale complète du système (1). Tout plan tangent à une surface intégrale (S) passant au point m a aussi pour équation

$$\frac{\partial V}{\partial x}(X-x)+\frac{\partial V}{\partial x_1}(X_1-x_1)+\dots+\frac{\partial V}{\partial x_n}(X_n-x_n)=0,$$

a et b étant liés par la relation (14); ces plans ne dépendent que d'un paramètre. Les plans de cette famille qui passent par la droite (D) s'obtiennent en cherchant les valeurs de a et de b qui vérifient à la fois la relation (14) et la nouvelle équation

$$(15) \qquad \frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x_1}p_1+\dots+\frac{\partial V}{\partial x_n}p_n=0.$$

Pour plus de symétrie, considérons $x, x_1, \dots, x_n$, comme fonction d'un paramètre arbitraire, et désignons par $x', x_1', \dots, x_n'$ leurs dérivées. On a $p_i=\frac{x_i'}{x'}$ et l'on peut remplacer l'équation précédente par la suivante

$$\mathcal{G}(a, b)=\frac{\partial V}{\partial x}x'+\frac{\partial V}{\partial x_1}x_1'+\dots+\frac{\partial V}{\partial x_n}x_n'=0.$$

Soit $H(a)$ le résultat obtenu en remplaçant dans $\mathcal{G}(a, b)$, b par sa valeur tirée de $V=0$. Pour que deux de ces plans tangents soient confondus, il faut encore que l'équation $H(a)=0$ ait une racine double. L'élimination de a et b entre les trois équations

$$V=0, \qquad H(a)=0 \qquad H'(a)=0,$$

conduira à une équation de Monge équivalente à l'équation (8), et qui se réduira à l'équation (8) en remplaçant x_i' par p_ix'. L'intégration de cette équation revient encore à l'intégration du système des trois équations précédentes, où l'on regarde a comme la variable indépendante et $x, x_1, \dots, x_n$, b comme des fonctions inconnues de a. Si l'on prend pour b une fonction arbitraire de a, $b=f(a)$, on est conduit à intégrer le système

$$(16)\qquad V_1=0,\qquad \frac{\partial V_1}{\partial x}x'+\frac{\partial V_1}{\partial x_1}x_1'+\dots+\frac{\partial V_1}{\partial x_n}x_n'=0,\qquad \frac{\partial^2 V_1}{\partial a\partial x}x'+\dots+\frac{\partial^2 V_1}{\partial a\partial x_n}x_n'=0,$$

ou on a posé

$$V_1=V(x,x_1,\dots,x_n;\ a,f(a)).$$

En tenant compte de la première des équations (16), la seconde peut être remplacée par $\frac{\partial V_1}{\partial a}=0$ et, en tenant compte de celle-ci la dernière équation (16) est équivalente à $\frac{\partial^2 V_1}{\partial a^2}=0$. Les fonctions $x, x_1,\dots, x_n$ de la variable a doivent donc satisfaire aux trois relations

$$V_1=0,\qquad \frac{\partial V_1}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial^2 V_1}{\partial a^2}=0$$

que l'on peut écrire, sous forme plus explicite,

$$(17)\qquad \begin{aligned}&V(x,x_1,\dots,x_n;\ a,f(a))=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial b}f'(a)=0,\\ &\frac{\partial^2 V}{\partial a^2}+2\frac{\partial^2 V}{\partial a\partial b}f'(a)+\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}[f'(a)]^2+\frac{\partial V}{\partial b}f''(a)=0,\end{aligned}$$

b devant être remplacé par $f(a)$ dans les deux dernières relations. On peut encore choisir arbitrairement $n-2$ des fonctions $x, x_1,\dots, x_n$ ce qui donne bien en tout $n-1$ fonctions arbitraires.

Remarque. - Dans le cas particulier d'un système linéaire, toute intégrale complète est de la forme

$$V(X_1, X_2;\ a, b)$$

X_1 et X_2 étant deux fonctions distinctes de $x, x_1,\dots, x_n$ telles que les équations $X_1=C_1$, $X_2=C_2$ représentent les multiplicités caractéristiques ponctuelles. Les équations (17) ne sont pas en général compatibles en X_1, X_2; pour qu'elles le soient, il faut que la fonction $f(a)$ soit une intégrale de l'équation différentielle du second ordre que l'on obtient en éliminant X_1 et X_2 entre les équations (17). L'intégrale générale de cette équation est donnée par la relation $V(C_1, C_2, a, f(a))=0$. C_1 et C_2 étant deux constantes arbitraires, et l'on tire alors des équations (17) $X_1=C_1$, $X_2=C_2$, ce qui est bien d'accord avec les résultats du paragraphe précédent.

5. - *Exemple.* Prenons le système en involution

$$q_1=\frac{x_2x_3}{q},\qquad q_2=\frac{qx}{x_2},\qquad q_3=\frac{x_1x_2}{q};$$

l'équation (6) est dans ce cas

$$\frac{x_2+xp_2}{x_2}q^2-p_4q+x_2(x_3p_1+x_1p_3)=0,$$

et l'équation de Monge des multiplicités singulières du système est la suivante

$$p_4^2-4(x_2+xp_2)(x_3p_1+x_1p_3)=0.$$

Pour obtenir toutes les intégrales de cette équation, écrivons les équations de Pfaff (9) et (10) qui sont ici

$$\Omega = q\,dx - dx_4 + \frac{x_2 x_3}{q}\,dx_1 + \frac{x_1 x_2}{q}\,dx_3 + \frac{qx}{x_2}\,dx_2 = 0,$$
$$\Omega_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial q} = dx - \frac{x_1 x_3}{q^2}\,dx_1 - \frac{x_1 x_2}{q^2}\,dx_3 + \frac{x}{x_2}\,dx_2 = 0.$$

En se servant de l'intégrale complète du système

$$x_4 = \frac{x_1 x_3}{a} + a x x_2 + b$$

on reconnait facilement que l'équation $\Omega = 0$ prend la forme

$$dZ - P\,dX = 0, \tag{9'}$$

en posant

$$X = \frac{x_2}{q}, \qquad Z = \frac{x_1 x_2 x_3}{q} + qx - x_4, \qquad P = x_1 x_3 - q^2 \frac{x}{x_2}.$$

L'équation $\Omega_1 = 0$ devient de même

$$dP = 2\frac{q^3 x}{x_2^2}\,dX, \tag{10'}$$

On obtient la solution générale des équations (9′) et (10′) en posant

$$x_2 = qa, \qquad Z = f(a), \qquad P = f'(a), \qquad \frac{2q^3 x}{x_2^2} = f''(a)$$

a étant une variable auxiliaire, et $f(a)$ une fonction arbitraire de a. De ces relations on déduit les formules suivantes

$$x x_2 = \frac{a^3 f''(a)}{2}, \qquad x_1 x_3 = f'(a) + \frac{a f''(a)}{2}, \qquad x_4 = a^2 f''(a) + a f'(a) - f(a).$$

On peut encore choisir pour x et x_1, par exemple, deux autres fonctions arbitraires de a, $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$, et les cinq variables x, x_1, x_2, x_3, x_4 sont ainsi exprimées au moyen de a, $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, $\varphi(a)$, $\varphi_1(a)$.

On arrive encore plus vite aux formules précédentes en partant de l'intégrale complète

$$V = \frac{x_1 x_3}{a} + a x x_2 + b - x_4 = 0.$$

En remplaçant b par $f(a)$, les relations (17) deviennent

$$\frac{x_1 x_3}{a} + a x x_2 + f(a) - x_4 = 0 \qquad x x_2 + f'(a) - \frac{x_1 x_3}{a^2} = 0, \qquad f''(a) + \frac{2 x_1 x_3}{a^3} = 0;$$

les expressions obtenues pour $x x_2$, $x_1 x_3$, x_4 deviennent identiques aux précédentes si on remplace a par a et $f(a)$ par $-f(a)$.

6. - Proposons nous maintenant la question inverse. Étant donnée une équation de Monge

$$\Phi(x, x_1, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{8'}$$

comment peut-on reconnaitre si elle définit les multiplicités singulières d'un système en involution tel que le système (1) ? Il faut d'abord pour cela que cette relation provienne de l'élimination d'un paramètre q entre deux équations

$$\mathfrak{F}=q+F_1p_1+\ldots.+F_{n-1}p_{n-1}-p_n=0, \qquad \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q}=0,$$

les fonctions F_i contenant les variables $x, x_1, \ldots., x_n$ et le paramètre q, et l'une au moins de ces fonctions n'étant pas une fonction linéaire de q. Considérons pour un moment $x, x_1, \ldots., x_n$ comme ayant des valeurs déterminées, $p_1, p_2, \ldots., p_n$ comme les coordonnées d'un point variable dans un espace E_n à n dimensions. L'équation $\mathfrak{F}=0$ représente, avec ces conventions, une *variété linéaire* à $n-1$ dimensions de cet espace, dépendant d'un paramètre q, et l'équation $\Phi=0$, obtenue par l'élimination du paramètre q entre les deux relations $\mathfrak{F}=0$, $\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q}=0$, représente l'enveloppe de cette variété linéaire, c'est-à-dire une variété V_{n-1} à $n-1$ dimensions de l'espace E_n, telle que la variété linéaire à $n-1$ dimension, qui lui est tangente en chacun de ses points, ne dépende que d'un seul paramètre. Pour qu'il en soit ainsi, la fonction Φ doit satisfaire à un certain nombre de conditions où figurent les dérivées du premier et du second ordre de la fonction Φ par rapport aux variables p_i. L'équation (8) étant supposée résolue par rapport à p_n par exemple

$$p_n=F(x, x_1, \ldots., x_n;\ p_1, p_2, \ldots., p_{n-1}),$$

la variété linéaire à $n-1$ dimensions tangente à la première au point de coordonnées $p_1, p_2, \ldots., p_n$ a pour équation

$$P_n-F=\frac{\partial F}{\partial p_1}(P_1-p_1)+\ldots.+\frac{\partial F}{\partial p_{n-1}}(P_{n-1}-p_{n-1}),$$

$P_1, P_2, \ldots., P_n$ désignant les coordonnées courantes. Pour que cette variété ne dépende que d'un seul paramètre, il faudra que les n fonctions

$$\frac{\partial F}{\partial p_1}, \frac{\partial F}{\partial p_2}, \ldots., \frac{\partial F}{\partial p_{n-1}}, \qquad F-p_1\frac{\partial F}{\partial p_1}-\ldots.-p_{n-1}\frac{\partial F}{\partial p_{n-1}}$$

soient fonctions d'une seule d'entre elles, quand on regarde $x, x_1, \ldots., x_n$ comme des constantes, ce qui exige que tous les mineurs à deux lignes et deux colonnes déduits du hessien

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial p_1^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_2}, \ldots., & \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_{n-1}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial p_2^2}, \ldots., & \frac{\partial^2 F}{\partial p_2 \partial p_{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial p_1 \partial p_{n-1}}, & \frac{\partial^2 F}{\partial p_2 \partial p_{n-1}}, \ldots., & \frac{\partial^2 F}{\partial p_{n-1}^2} \end{vmatrix}$$

soient identiquement nuls. Si toutes ces conditions sont vérifiées, la variété à $n-1$ dimensions représentée par l'équation $\Phi=0$ peut être considérée comme l'enveloppe d'une variété linéaire à $n-1$ dimension dépendant d'un paramètre, dont nous pouvons écrire l'équation

$$f_1 p_1 + f_2 p_2 + \dots + f_n p_n + f_{n+1} = 0 \tag{18}$$

f_1, $f_2, \dots, f_{n+1}$ étant des fonctions de x, $x_1, \dots, x_n$ et du paramètre a. Si f_{n+1} n'est pas nul, l'un au moins des rapports $\frac{f_1}{f_{n+1}}, \dots, \frac{f_n}{f_{n+1}}$ dépend de a. Supposons par exemple que $\frac{f_n}{f_{n+1}}$ dépende de a, on peut alors poser $-\frac{f_{n+1}}{f_n} = q$, ce qui revient à un changement du paramètre, et écrire l'équation de la variété linéaire

$$q + F_1 p_1 + \dots + F_{n-1} p_{n-1} - p_n = \mathfrak{F}(q) = 0,$$

F_1, $F_2, \dots, F_{n-1}$ étant des fonctions de x, $x_1, \dots, x_n$ et du paramètre q.

L'équation $\Phi = 0$ provient alors de l'élimination de q entre les deux équations $\mathfrak{F} = 0$, $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} = 0$. Pour qu'elle définisse les multiplicités singulières d'un système en involution, il faut en outre que les équations

$$q_1 = F_1, \quad q_2 = F_2, \dots, \quad q_{n-1} = F_{n-1}$$

soient celles d'un système en involution, ou, ce qui revient au même, que l'équation de Pfaff

$$\Omega = q\,dx + F_1 dx_1 + \dots + F_{n-1} dx_{n-1} - dx_n = 0$$

soit de classe *trois*.

On peut remarquer que ces conditions sont très différentes de celles qui ont été obtenues lorsque n est supérieur à un (7).

Remarque. - Si $f_{n+1} = 0$, l'un au moins des rapports $\frac{f_i}{f_k}$ dépend de a. Supposons q'il en soit ainsi de $\frac{f_{n-1}}{f_n}$; en prenant x_{n-1} pour la variable indépendante, au lieu de x, l'équation (18) s'écrit

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} + \frac{f_{n-1}}{f_n} + \frac{f_1}{f_n} \frac{\partial x_1}{\partial x_{n-1}} + \dots + \frac{f_{n-2}}{f_n} \frac{\partial x_{n-2}}{\partial x_{n-1}} = 0$$

et on est ramené au cas examiné tout à l'heure. La seule différence avec le cas général, c'est qu'une des dérivées $\frac{\partial x}{\partial x_{n-1}}$ ne figure pas dans l'équation $\mathfrak{F} = 0$. On aura à chercher l'enveloppe d'une variété linéaire où l'une des coordonnées ne figure pas. Elle ne doit pas figurer non plus dans l'équation de l'enveloppe, quand on fait le changement de variable indiqué.

II.

7. - D'une façon plus générale, une multiplicité M_1 définie par les relations (5) est une multiplicité singulière *d'ordre r* du système en involution (1) si en chaque

---

(7) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1930.

point de M_1 l'équation (6) qui détermine la valeur de q a une racine multiple d'ordre $r+1$. Les multiplicités singulières dont il a été question dans les paragraphes précédents sont les multiplicités singulières du *premier ordre.*

Une racine multiple d'ordre $r+1$ de l'équation (6) satisfait aux $r+1$ équations

$$\mathfrak{F}=0,\ \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q}=0,\ldots,\ \frac{\partial^r\mathfrak{F}}{\partial q^r}=0, \tag{19}$$

l'élimination de q entre ces $r+1$ équations conduit en général à r relations distinctes

$$\Phi_i(x, x_1,\ldots, x_n\,;\, p_1, p_2,\ldots, p_n)=0, \qquad (i=1, 2,\ldots, r), \tag{20}$$

qui définissent les multiplicités singulières d'ordre r. Si le nombre r est inférieur à n, on peut choisir arbitrairement $n-r$ des fonctions inconnues x_i, et les équations (20) forment un système d'équations de Monge à n fonctions inconnues.

Lorsque $r=n$, les équations (20) se réduisent à n équations différentielles ordinaires; un systéme en involution tel que le système (1) admet donc, d'une façon normale, des multiplicités singulières d'ordre n, *dépendant de n constantes arbitraires.*

Mais ce système n'admet pas en général des multiplicités singulières d'ordre supérieur à n, car le nombre des conditions est supérieur à celui des inconnues.

Nous supposerons dans la suite $r\leqq n-1$. La détermination des multiplicités singulières d'ordre r revient à l'intégration du système

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{F}=q+F_1p_1+\ldots.+F_{n-1}p_{n-1}-p_n=0,\\[4pt]
\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q}=1+\dfrac{\partial F_1}{\partial q}p_1+\ldots.+\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial q}p_{n-1}=0,\\[4pt]
\dfrac{\partial^2\mathfrak{F}}{\partial q^2}=\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial q^2}p_1+\ldots.+\dfrac{\partial^2 F_{n-1}}{\partial q^2}p_{n-1}=0,\\[4pt]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[4pt]
\dfrac{\partial^r\mathfrak{F}}{\partial q^r}=\dfrac{\partial^r F_1}{\partial q^r}p_1+\ldots.+\dfrac{\partial^r F_{n-1}}{\partial q^r}p_{n-1}=0,
\end{array}\right. \tag{19'}$$

où l'on considère $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n,\ q$ comme des fonctions de $x\left(p_i=\dfrac{\partial x_i}{\partial x}\right)$. Ce problème se ramène lui-même à la détermination des intégrales à une dimension du système de Pfaff de $r+1$ équations

$$\left\{\begin{array}{l}
\Omega=q\,dx+F_1dx_1+\ldots.+F_{n-1}dx_{n-1}-dx_n=0,\\[4pt]
\Omega_1=\dfrac{\partial\Omega}{\partial q}=dx+\dfrac{\partial F_1}{\partial q}dx_1+\ldots.+\dfrac{\partial F_{n-1}}{\partial q}dx_{n-1}=0,\\[4pt]
\Omega_2=\dfrac{\partial^2\Omega}{\partial q^2}=\dfrac{\partial^2 F_1}{\partial q^2}dx_1+\ldots.+\dfrac{\partial^2 F_{n-1}}{\partial q^2}dx_{n-1}=0,\\[4pt]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\[4pt]
\Omega_r=\dfrac{\partial^r\Omega}{\partial q^r}=\dfrac{\partial^r F_1}{\partial q^r}dx_1+\ldots.+\dfrac{\partial^r F_{n-1}}{\partial q^r}dx_{n-1}=0.
\end{array}\right. \tag{21}$$

Remarquons en passant que les deux premières équations $\Omega=0$, $\Omega_1=0$ déterminent les multiplicités singulières du premier ordre, les trois premières $\Omega=0$, $\Omega_1=0$, $\Omega_2=0$ déterminent les multiplicités singulières du second ordre et ainsi de suite. D'une façon générale, les multiplicités singulières d'ordre r font partie des multiplicités singulières d'ordre $r-h$, $(h>0)$, ce qui était évident *à priori*, d'après la définition même de ces multiplicités.

8. - Examinons d'abord le cas général où les $r+1$ équations (21) sont distinctes et ne forment pas un système complètement intégrable. Le coefficient de δq dans le covariant bilinéaire Ω_s' est identique à Ω_{s+1}; il en résulte que l'équation $\Omega_{s+1}=0$ fait partie des équations différentielles des caractéristiques du système

$$\Omega=0,\ \Omega_1=0,\dots,\ \Omega_s=0 \tag{22}$$

et par suite que l'équation $\Omega_{s+1}=0$ est une combinaison linéaire des équations (22), si ces équations forment un système complètement intégrable. Par conséquent, si les équations (21) sont distinctes, les équations (22) où l'on a $s<r$, ne peuvent former un système complètement intégrable.

Cela posé, nous avons vu plus haut (n.° 2) que les deux équations $\Omega=0$, $\Omega_1=0$ peuvent être remplacées par un système équivalent de deux équations

$$dZ-PdX=0, \qquad dP=P_1dX,$$

les quatres fonctions X, Z, P, P_1, étant distinctes. L'équation $\Omega_2=0$ étant, comme on vient de le faire observer, une des équations différentielles des caractéristiques du système précédent Ω_2 s'exprime au moyen de dX, dZ, dP, dP_1, et les trois premières équations (21) peuvent être remplacées par un système équivalent

$$dZ=PdX, \qquad dP=P_1dX, \qquad dP_1=P_2dX,$$

les cinq fonctions X, Z, P, P_1, P_2 étant distinctes. Si r est supérieur à deux, on peut continuer le raisonnement. L'équation $\Omega_3=0$ fait partie des équations différentielles des caractéristiques de ce nouveau système et par conséquent Ω_2 est une combinaison linéaire de dX, dZ, dP_1, dP_2, et les quatre premières équations (22) peuvent être remplacées par un système de la forme

$$dZ=PdX, \qquad dP=P_1dX, \qquad dP_1=P_2dX, \qquad dP_2=P_3dX,$$

les six fonctions X, Z, P, P_1, P_2, P_3 des variables $(x, x_1,\dots, x_n, q)$ étant distinctes. En continuant ainsi, on démontrera de proche en proche que, *si les* $r+1$ *équations* (21) *sont linéairement distinctes et ne forment pas un système complètement intégrable, on peut les remplacer par un système équivalent de la forme*

$$dZ=PdX,\ dP=P_1dX,\dots,\ dP_{r-1}=P_rdX, \tag{23}$$

les $r+3$ fonctions X, Z, P, $P_1, \ldots, P_r$ des $n+2$ variables $(x, x_1, \ldots, x, q)$ étant distinctes, ce qui exige que l'on ait $r \leqslant n-1$, comme on l'a supposé.

L'intégration du système (23) est immédiate. L'intégrale générale est représentée par les formules

$$(24) \qquad Z=f(X), \ P=f'(X), \ P_1=f''(X), \ldots, \ P_r=f^{(r+1)}(X),$$

la fonction $f(X)$ étant arbitraire. Si $r \leqslant n-1$, il suffira d'ajouter $n-r-1$ relations arbitraires entre les variables $x, x_1, \ldots, x_n, q$ pour avoir un système de $n+1$ équations permettant d'exprimer $n+1$ de ces variables au moyen de la dernière. Le nombre total des fonctions arbitraires qui figurent dans les formules definitives est bien égal à $n-r$.

En particulier, lorsque r a sa valeur maximum $n-1$, on peut écrire les formules (23)

$$X=a, \ Z=f(a), \ P=f'(a), \ldots, \ P_{n-1}=f^{(n)}(a),$$

et de ces $n+2$ relations on tirera les expressions des variables $x, x_1, \ldots, x_n, q$ au moyen de a, $f(a)$, $f'(a), \ldots, f^{(n)}(a)$. C'est le cas que j'avais signalé dans un travail antérieur ([8]). La proposition inverse sera. examinée plus loin.

9. - Supposons en second lieu que les $r+1$ équations (21) soient linéairement distinctes et forment un système *complètement intégrable.* D'après une remarque du paragraphe précédent, le système (22) où $s<r$, ne peut être complètement intégrable, mais l'équation $\Omega_{r+1}=0$ doit être une combinaison linéaire des équations du système (21). Comme dx et dx_n ne figurent que dans les deux premières équations, on doit avoir une relation de la forme

$$\Omega_{r+1}=A_2\Omega_2+ \ldots + A_r\Omega_r$$

$A_2, A_3, \ldots, A_r$ pouvant être des fonctions quelconques des variables $(x, x_1, \ldots, x_{n1}, q)$; il faut pour cela que F_1, $F_2, \ldots, F_{n-1}$ soient des intégrales de l'équation linéaire

$$(25) \qquad \frac{\partial^{r+1}F}{\partial q^{r+1}}=A_r\frac{\partial^r F}{\partial q^r}+ \ldots + A_2\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}.$$

Soient

$$(26) \qquad 1, \ q, \ \varphi_2(q\,;\, x, x_1, \ldots, x_n), \ldots, \ \varphi_r(q\,;\, x, x_1, \ldots, x_n)$$

un système de $r+1$ intégrales linéairement distinctes de l'équation (25), on a des relations de la forme suivante

$$F_i=\lambda_{i0}+\lambda_{i1}q+\lambda_{i2}\varphi_2+ \ldots +\lambda_{ir}\varphi_r\,; \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1)$$

les coefficients λ_{ik} ne renferment pas la variable q, mais peuvent être des fonctions quelconques des variables $(x, x_1, \ldots, x_n)$.

([8]) Bulletin de la Société Mathématique de France, 33, 1905, pages 201-210.

Posons

$$(27)\qquad \begin{cases} \Pi_0=\lambda_{10}dx_1+\lambda_{20}dx_2+ \dots\dots +\lambda_{n-1,0}dx_{n-1}-dx_n, \\ \Pi_1=\lambda_{11}dx_1+\lambda_{21}dx_2+ \dots\dots +\lambda_{n-1,1}dx_{n-1}+dx, \\ \Pi_2=\lambda_{12}dx_1+\lambda_{22}dx_2+ \dots\dots +\lambda_{n-1,2}dx_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Pi_r=\lambda_{1r}dx_1+\lambda_{2r}dx_2+ \dots\dots +\lambda_{n-1,r}dx_{n-1}. \end{cases}$$

Les équations (21) s'écrivent

$$\Omega=\Pi_0+q\Pi_1+\varphi_2\Pi_2+ \dots\dots +\varphi_r\Pi_r=0,$$
$$\Omega_1=\Pi_1+\frac{\partial\varphi_2}{\partial q}\Pi_2+ \dots\dots +\frac{\partial\varphi_r}{\partial q}\Pi_r=0,$$
$$\Omega_2=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial q^2}\Pi_2+ \dots\dots +\frac{\partial^2\varphi_r}{\partial q^2}\Pi_r=0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Omega_r=\frac{\partial^r\varphi_2}{\partial q^r}\Pi_2+ \dots\dots +\frac{\partial^r\varphi_r}{\partial q^r}\Pi_r=0;$$

mais les $r+1$ fonctions (26) étant linéairement distinctes, le déterminant de Wronski de ces $r+1$ fonctions n'est pas nul, et par suite le système des équations (21) est équivalent au système des $r+1$ équations aux différentielles totales

$$(28)\qquad \Pi_0=0,\ \Pi_1=0, \dots\dots, \Pi_r=0$$

où ne figure pas la variable q. Le système (19) étant supposé complètement intégrable, il en est donc de même du système (28). Dans ce cas, les équations de Monge qui définissent les multiplicités singulières d'ordre r sont linéaires en $p_1, p_2, \dots\dots, p_n$ et l'intégration se ramène à celle d'un système de Pfaff complètement intégrable. Le problème de Cauchy est encore indéterminé pour une multiplicité singulière d'ordre r. Soient

$$(29)\qquad X=C_0,\ X_1=C_1, \dots\dots, X_r=C_r$$

l'intégrale générale du système (28), $C_0, C_1, \dots\dots, C_r$ désignant des constantes arbitraires. Les formes linéaires $\Pi_0, \Pi_1, \dots\dots, \Pi_r$ sont des combinaisons linéaires de $dX_0, dX_1, \dots\dots, dX_r$. Cela étant si l'on remplace F_i par

$$\lambda_{i0}+\lambda_{i1}q+\lambda_{i2}\varphi_2+ \dots\dots +\lambda_{ir}\varphi_r$$

dans les équations différentielles (4) des caractéristiques, on voit de suite que les deux premières équations ne renferment que $dX, dX_1, \dots\dots, dX_r$. Si l'on fait un changement de variables de façon à prendre pour variables $X, X_1, \dots\dots, X_r$, et $n-r$ des variables primitives $x, x_1, \dots\dots, x_n$, les équations (4) s'écrivant

$$dX=a_2dX_2+ \dots\dots +a_rdX_r,$$
$$dX_1=b_2dX_2+ \dots\dots +b_rdX_r,$$
$$dq=c_2dX_2+ \dots\dots +c_rdX_r+ \dots\dots$$

les termes non écrits dans la dernière équation contenant les différentielles des variables x_i qui ont été conservées. Dans ces formules, les coefficients a_i, b_i ne renferment pas q.

Soient $x^0, x_1^0, \ldots., x_n^0$ les coordonnées d'un point quelconque de E_{n+1}, les équations

(30) $$X=X_0,\ X_1=X_1^0, \ldots., X_r=X_r^0,$$

où

$$X_i^0=X_i(x^0, x_1^0, \ldots., x_n^0)$$

représentent une variété V_{n-r} de E_{n+1}, *qui appartient à une infinité de caractéristiques.* Choisissons en effet une valeur arbitraire q_0 de q et soient

(31) $$\begin{cases} x=\psi_1^0(x_1, x_2, \ldots., x_{n-1}), \\ x_n=\psi_2^0(x_1, x_2, \ldots., x_{n-1}), \\ q=\psi_3^0(x_1, x_2, \ldots., x_{n-1}), \end{cases}$$

les formules qui représentent les intégrales du système (4) correspondant aux valeurs initiales $(x^0, x_1^0, \ldots., x_n^0, q^0)$. La variété V_{n-r} définie par les équations (30) est située tout entière sur cette multiplicité caractéristique. En effet, si l'on prend l'intersection de cette multiplicité caractéristique avec la variété définie par les équations

$$X_2=X_2^0, \ldots., X_r=X_r^0$$

on a, sur cette nouvelle variété $dX_2=0, \ldots., dX_r=0$, et par suite d'après les équations (4) $dX=0$, $dX_1=0$. On a donc aussi $X=X^0$, $X_1=X_1^0$, et cette intersection se confond avec la variété V_{n-r}. Comme toute multiplicité singulière d'ordre r est située sur une variété V_{n-r}, il s'en suit qu'elle appartient aussi à une infinité de multiplicités caractéristiques. Le problème de Cauchy est donc indéterminé pour ces multiplicités singulières (cf. n.° 3).

Exemple. - Reprenons le système en involution (13) du n.° 2. Les trois équations $\Omega=0$, $\frac{\partial\Omega}{\partial q}=0$, $\frac{\partial^2\Omega}{\partial q^2}=0$ forment un système complètement intégrable

$$x_1dx_3+x_3dx_1=0, \qquad xdx_2+x_2dx=0, \qquad dx_4=0.$$

Toutes les variétés à une dimension de l'espace E_5 pour lesquelles on a

$$x_1x_3=C_1, \qquad xx_2=C_2, \qquad x_4=C_3$$

sont des variétés singulières du second ordre.

On peut obtenir aisément tous les systèmes en involution (Σ) possédant la propriété précédente. Soit

$$x_n=f(x, x_1, \ldots., x_{n-1})$$

une intégrale quelconque de ce système, c'est-à-dire une fonction pour laquelle on a identiquement

$$\Omega=qdx+F_1dx_1+\ldots.+F_{n-1}dx_{n-1}-dx_n=0.$$

Dans l'hypothèse où l'on se place, Ω s'exprime linéairement au moyen des formes de Pfaff Π_0, $\Pi_1, \dots, \Pi_r$, et par suite au moyen des différentielles dX, $dX_1, \dots, dX_r$. On a donc entre ces différentielles une relation de la forme

$$\mu dX + \mu_1 dX_1 + \dots + \mu_r dX_r = 0$$

les μ_i n'étant pas tous nuls, et, par conséquent, quand on remplace x_n par f dans $X, X_1, \dots, X_r$, les résultats obtenues sont liés par une relation. Toute intégrale du système est donc représentée par une relation entre X, $X_1, \dots, X_r$, et l'on obtiendra un système (Σ) de cette espèce en partant d'une intégrale complète

$$V(X, X_1, \dots, X_r, a, b) = 0$$

la fonction V étant choisie arbitrairement. Il est clair d'ailleurs que le problème de Cauchy est indéterminé pour toutes les multiplicités à une dimension située sur la multiplicité

$$X = C, \ X_1 = C_1, \dots, \ X_r = C_r.$$

10. - Il nous reste encore à examiner l'hypothèse suivante. Les r premières équations (21) sont distinctes et ne forment pas un système complètement intégrable, tandis que la dernière équation (21) est une conséquence des précédentes. Les $n+1$ fonctions 1, q, F_1, $F_2, \dots, F_{n-1}$ satisfont à une équation différentielle linéaire d'ordre r, ne renferment pas de terme en F, ni en $\dfrac{\partial F}{\partial q}$, et les raisonnement du paragraphe précédent prouvent que les r équations $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0, \dots, \Omega_{r-1} = 0$ peuvent être remplacées par un système de r équation de Pfaff

$$\Pi_0 = 0, \ \Pi_1 = 0, \dots, \ \Pi_{r-1} = 0$$

où les formes Π_i ne renferment pas la variable q, ni sa différentielle. Par hypothèse, ce système peut être ramené à la forme canonique

$$dZ - PdX = 0, \ dP - P_1 dX = 0, \dots, \ dP_{r-2} = P_{r-1} dX; \tag{32}$$

le système formé par les $r-1$ premières équations est le premier système dérivé (9) le système des $r-2$ premières équations et le second système dérivé, etc. La première équation $dZ - PdX = 0$ forme le $(r-1)^{\text{ième}}$ système dérivé. Or il est évident que cette équation ne doit pas renfermer la variable q, ni sa différentielle comme le système (32) lui-même. Cette équation ne peut donc être identique à l'équation $\Omega = 0$, où se trouvent les termes $qdx - dx_n$. L'hypothèse examinée est donc à rejeter, et il ne peut se présenter que deux cas.

Premier cas. Les équations

$$\Omega = 0, \ \Omega_1 = 0, \dots, \ \Omega_{n-1} = 0 \tag{33}$$

---

(9) Voir: *Leçons sur le problème de Pfaff*, chap. 7, page 294.

sont distinctes et ne forment pas un système complètement intégrable. Ce système peut alors être ramené à la forme canonique

$$(34)\qquad dZ-PdX=0,\ dP-P_1dX=0,\ldots,\ dP_{n-2}=P_{n-1}dX,$$

$X, Z, P, P_1,\ldots, P_{n-1}$ désignant $n+2$ fonctions distinctes des variables $x, x_1,\ldots, x_n, q$, et cette réduction n'exige que la réduction d'une équation de classe *trois* à une forme canonique. L'intégration des deux premières équations (34) fait connaître les multiplicités singulières du premier ordre, l'intégration des trois premières équations détermine les multiplicités singulières du second ordre, et ainsi de suite, enfin l'intégration des n équations fournit les multiplicités singulières d'ordre $n-1$.

Si l'on adjoint au système (34) la nouvelle équation $\Omega_n=0$, les $n+1$ équations obtenues sont distinctes, d'après la remarque précédente. Elles forment donc un système de $n+1$ équations différentielles du premier ordre entre $n+2$ variables. On peut par exemple, considérer q comme la variable indépendante, et résoudre ces équations par rapport à $\frac{dx}{dq}, \frac{dx_1}{dq},\ldots, \frac{dx_n}{dq}$; on peut aussi utiliser le changement de variables qui permet de ramener le système (21) à la forme canonique (34). L'équation $\Omega_n=0$ étant un prolongement du système (34), Ω_n s'exprime linéairement au moyen différentielles

$$dX,\ dZ,\ dP,\ dP_1,\ldots,\ dP_{n-1},$$

et, en remplaçant $dZ, dP, dP_1,\ldots, dP_{n-2}$ par leurs expressions on peut remplacer $\Omega_n=0$ par une équation on ne figurent que dX et dP_{n-1}. Si cette équation ne renferme pas dP_{n-1}, l'intégration du système est immédiate, et l'intégrale générale est représentée par les relations

$$X=C,\ Z=C',\ P=C'',\ P_1=C_1,\ P_{n-2}=C_{n-2},$$

où figurent $n+1$ constantes arbitraires. Si dP_{n-1} figure dans la dernière équation $dP_{n-1}=F(X, Z, P, P_1,\ldots, P_{n-1})dX$, on tire des premières, en posant $X=a$,

$$Z=f(a),\ P=f'(a),\ P_1=f''(a),\ldots,\ P_{n-1}=f^{(n)}(a)$$

et, en substituant dans la première relation, on obtient une équation différentielle d'ordre $n+1$ pour déterminer $f(a)$. L'intégration de cette équation fera connaître les multiplicités singulières d'ordre n.

Deuxième cas. Les $r+1$ équations (21) sont distinctes ($r\leqslant n-1$), et l'équation $\Omega_{r+1}=0$ est une combinaison linéaire des précédentes. Toutes les équations suivantes sont aussi des combinaisons linéaires des premières, comme on le vérifie immédiatement. Le système (22) est alors complètement intégrable, et l'intégrale générale est représentée par un système de $r+1$ équations

$$X=C,\ X_1=C_1,\ldots,\ X_r=C_r,$$

$X, X_1, \dots, X_r$ étant $r-1$ fonctions distinctes de $x, x_1, \dots, x_n$ ne renfermant pas la variable q.

11. - On peut encore trouver aisément les équations qui définissent les multiplicités singulières d'ordre quelconque en partant d'une intégrale complète. En se reportant au n.° 4, on voit en effet que les équations différentielles des variétés singulières d'ordre r s'obtiennent en écrivant que l'équation

$$\mathcal{H}(a)=\frac{\partial V}{\partial x}x'+\frac{\partial V}{\partial x_1}x_1'+\dots+\frac{\partial V}{\partial x_n}x_n'$$

où on suppose que b a été remplacé par son expression tirée de l'équation $V=0$ dans $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n}$ a une racine multiple d'ordre $r+1$. Si l'on choisit encore pour b une fonction arbitraire $f(a)$ le problème revient encore à l'intégration du système,

$$(35)\qquad \begin{cases} V_1=0, \ \frac{\partial V_1}{\partial x}x'+\frac{\partial V_1}{\partial x_1}x_1'+\dots+\frac{\partial V_1}{\partial x_n}x_n'=0, \\ \frac{\partial^2 V_1}{\partial a\partial x}x'+\frac{\partial^2 V_1}{\partial a\partial x_1}x_1'+\dots+\frac{\partial^2 V_1}{\partial a\partial x_n}x_n'=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial^{r+1} V_1}{\partial a^r\partial x}x'+\frac{\partial^{r+1} V_1}{\partial a^r\partial x_1}x_1'+\dots+\frac{\partial^{r+1} V_1}{\partial a^r\partial x_n}x_n'=0, \end{cases}$$

où on a posé

$$V_1(x, x_1, \dots, x_n; a)=V(x, x_1, \dots, x_n; a, f(a)).$$

On démontre ensuite, de proche en proche, que le système (35) peut être remplacé par le système équivalent

$$(36)\qquad V_1=0, \ \frac{\partial V_1}{\partial a}=0, \dots, \ \frac{\partial^{r+1} V_1}{\partial a^{r+1}}=0,$$

où l'on peut encore choisir arbitrairement $n-r-1$ des fonctions $x, x_1, \dots, x_n$. Si $r=1$, on retrouve les équations qui définissent les variétés singulières du premier ordre. Pour $r=n-1$, les variétés singulières d'ordre $n-1$ sont représentées par les $n+1$ équations

$$V_1=0, \ \frac{\partial V_1}{\partial a}=0, \dots, \ \frac{\partial^n V_1}{\partial a^n}=0;$$

c'est le résultat que j'avais obtenu antérieurement dans le travail déjà cité (note 8).

Remarque. - Si le système (Σ) est linéaire, toute intégrale complète est de la forme $V(X_1, X_2, \dots, X_r, a, b)=0$. Les équations

$$V_1=0, \ \frac{\partial V_1}{\partial a}=0, \dots, \ \frac{\partial^r V_1}{\partial a^r}=0$$

ne sont compatibles que si la fonction $b=f(a)$ satisfait à l'équation différentielle obtenue en éliminant $X_1, \ldots, X_r$ entre ces équations. Lorsqu'il en est ainsi, on tire des relations précédentes

$$X_1 = C_1, \ldots, X_r = C_r,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_r$ désignant des constantes, ce qui est bien d'accord avec les résultats obtenus plus haut.

III.

12. - Il nous reste maintenant à examiner la question suivante. Étant donné un système de r équations de Monge distinctes $(r \leqslant n-1)$ à $n+1$ variables

$$\Phi_i(x, x_1, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{37}$$

où on a toujours $p_i = \frac{dx_i}{dx}$, comment peut on reconnaître si ces r équations déterminent les multiplicités singulières d'ordre r d'un système en involution (1). Nous laisserons de côté le cas où ces r équations formeraient un système linéaire complètement intégrable. Nous chercherons d'abord à quelles conditions doivent satisfaire les fonctions Φ_i pour que le système (37) provienne de l'élimination d'un paramètre variable q entre $r+1$ équations de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{F} = q + F_1 p_1 + \ldots + F_{n-1} p_{n-1} - p_n = 0, \\ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} = 0, \ \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial q^2} = 0, \ldots, \ \frac{\partial^r \mathfrak{F}}{\partial q^r} = 0 \end{array} \right. \tag{38}$$

$F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$, étant des fonctions quelconques de $x, x_1, \ldots, x_n, q$. Considérons encore $p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions E_n. Les équations (37) représentent une variété $\mathfrak{V}_{n-r}$ à $n-r$ dimensions dans cet espace. L'équation $\mathfrak{F} = 0$ représente une variété linéaire à $n-1$ dimensions dépendant d'un paramètre q, et l'ensemble des $r+1$ équations (38) représente aussi une variété linéaire à $n-r-1$ dimensions $\mathfrak{V}_{n-r-1}$ dépendant du paramètre q, qui engendre la variété $\mathfrak{V}_{n-r}$ lorsque le paramètre q varie. Si l'on supprime la dernière des équations (38) les r équations

$$\mathfrak{F} = 0, \ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} = 0, \ldots, \ \frac{\partial^{r-1} \mathfrak{F}}{\partial q^{r-1}} = 0 \tag{39}$$

représentent une variété linéaire a $n-r$ dimensions, qui est tangente à la variété $\mathfrak{V}_{n-r}$ en tous les points de la variété $\mathfrak{V}_{n-r-1}$. On peut énoncer ce résultat en étendant le langage de la géométrie de l'espace à trois dimensions; *la multiplicité $\mathfrak{V}_{n-r}$ est l'enveloppe d'une variété linéaire à $n-r$ dimensions dépendant d'un paramètre.*

On peut toujours reconnaître par des calculs de différentiation et d'élimination si ces conditions sont satisfaites. Imaginons en effet les équations (37) résolues par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_r$

$$p_i = \varphi_i(x, x_1, \ldots, x_n; p_{r+1}, \ldots, p_n), \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

La multiplicité linéaire d'ordre $n-r$ tangente à $\mathfrak{V}_{n-r}$ en un point $p_1, p_2, \ldots, p_n$ est représentée par les r équations linéaires, où $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont les coordonnées courantes

$$P_i-\varphi_i=\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{r+1}}(P_{r+1}-p_{r+1})+\ldots+\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_n}(P_n-p_n), \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

et les coefficients

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{r+1}}, \ldots, \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_n}, \qquad \varphi_i-p_{r+1}\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_{r+1}}-\ldots-p_n\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_n}$$

devront être des fonctions d'un seul d'entre eux et-des variables $x, x_1, \ldots, x_n$.

13. - Supposons ces conditions satisfaites. La variété $\mathfrak{V}_{n-r}$ est alors l'enveloppe d'une variété linéaire à $n-r$ dimensions Λ_{n-r} dépendant d'un seul paramètre. Il reste à examiner si les équations de cette multiplicité Λ_{n-r} peuvent être ramenées à la forme (39).

Soient, d'une façon générale,

$$\omega_1=0, \ \omega_2=0, \ldots, \ \omega_r=0, \tag{40}$$

les équations d'une variété linéaire à $n-r$ dimensions, où on a posé

$$\omega_i=a_{i1}p_1+a_{i2}p_2+\ldots+a_{in}p_n+a_{i,n+1}, \qquad (i=1,2,\ldots,r)$$

les coefficients a_{ik} étant des fonctions de $x, x_1, \ldots, x_n$ et d'un paramètre variable a. Pour que cette variété Λ_{n-r} ait une enveloppe à $n-r$ dimensions, il faut et il suffit que les $2r$ équations (40) et (41)

$$\omega_1'=0, \ \omega_2'=0, \ldots, \ \omega_r'=0 \tag{41}$$

où

$$\omega_i'=\frac{\partial a_{i1}}{\partial a}p_1+\ldots+\frac{\partial a_{in}}{\partial a}p_n+\frac{\partial a_{i,n+1}}{\partial a}$$

se réduisent à $r+1$ équations distinctes.

Laissant d'abord de côté le cas singulier où les équations (41) seraient des conséquences des équations (40), nous supposerons que l'une au moins des équations (41) ω_r' par exemple est distincte des équations (40), tandis que les $r-1$ équations $\omega_1'=0, \ldots, \omega'_{r-1}=0$ sont des combinaisons linéaires des $r+1$ équations

$$\omega_1=0, \ \omega_2=0, \ldots, \ \omega_r=0, \ \omega_r'=0.$$

On peut remplacer les $r-1$ équations $\omega_1=0, \ldots, \omega_{r-1}=0$ par un système équivalent de $r-1$ équations linéaires $\Omega_1=0, \Omega_2=0, \ldots, \Omega_{r-1}=0$ telles que $\Omega_1', \Omega_2', \ldots, \Omega'_{r-1}$ sont des combinaisons linéaires de $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{r-1}, \omega_r$. Posons en effet

$$\Omega_i=\omega_i+\lambda_i\omega_r \qquad (i=1,2,\ldots,r-1).$$

Par hypothèse

$$\omega_i'=a_{i1}\omega_1+\ldots+a_{ir}\omega_r+a_{i,r+1}\omega_r'$$

on a donc

$$\Omega_i'=a_{i1}\omega_1+\ldots+a_{ir}\omega_r+a_{i,r+1}\omega_r'+\lambda_i'\omega_r+\lambda_i\omega_r'$$

et si l'on prend pour λ_i la valeur $-a_{i,r+1}$, on voit que Ω_i' est bien une combinaison linéaire de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. Mais $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-1}$ sont aussi des combinaisons linéaires de $\Omega_1, \ldots, \Omega_{r-1}, \omega_r$, ce qui démontre bien la propriété énoncée.

Pour ne pas multiplier les notations, nous supposerons qu'on a fait d'abord cette transformation de telle sorte que $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega'_{r-1}$ sont des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ tandis que l'équation $\omega_r'=0$ est distincte des équations (40).

Supposons que l'une au moins des fonctions $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega'_{r-1}$ contient ω_r, par exemple ω'_{r-1}, de telle sorte que l'on ait

$$\omega'_{r-1}=\beta_1\omega_1+\ldots+\beta_{r-1}\omega_{r-1}+\gamma\omega_r, \qquad \gamma \neq 0.$$

En remplaçant $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-2}$ par $\omega_1+\lambda_1\omega_{r-1}, \omega_2+\lambda_2\omega_{r-1}, \ldots, \omega_{r-2}+\lambda_{r-2}\omega_{r-1}$, on voit de même que l'on peut choisir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{r-2}$ de façon que les dérivées des $r-2$ nouvelles expressions $\omega_i+\lambda_i\omega_{r-1}$ ne dépendent que de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-2}$. En modifient de nouveau les notations, on voit que l'on peut supposer que ω_1', $\omega_2', \ldots, \omega'_{r-2}$ ne dépendent que de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r-1}$ tandis que ω'_{r-1} dépend de ω_r.

Si l'une au moins des dérivées $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega'_{r-2}$ renferme ω_{r-1}, on peut continuer cette suite de transformations. On ne pourrait être arrêté que si l'on arrivait à un système de s fonctions linéaires distinctes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ telles que $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_s'$ soient des combinaisons linéaires de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$.

En dehors de ce cas singulier, que nous examinerons tout à l'heure, on voit que l'on peut remplacer le système des r équations (40) par un système équivalent de r équations

$$\Omega_1=0, \ \Omega_2=0, \ldots, \ \Omega_r=0, \tag{42}$$

$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$ étant des fonctions linéaires distinctes de $p_1, p_2, \ldots, p_r$ telles que Ω_1' s'exprime linéairement au moyen de Ω_1, Ω_2 et renferme Ω_2, Ω_2' s'exprime linéairement au moyen de $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, et renferme Ω_3, et ainsi de suite, enfin Ω'_{r-1} s'exprime linéairement au moyen de $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{r-1}$, Ω_r et renferme Ω_r, tandis que Ω_r' est une fonction distincte de $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_r$.

Il est clair que le système (42) est équivalent au système de r équations linéairement distinctes

$$\Omega_1=0, \ \frac{\partial \Omega_1}{\partial a}=0, \ \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial a^2}=0, \ldots, \ \frac{\partial^{r-1} \Omega_1}{\partial a^{r-1}}=0, \tag{43}$$

qui représentent une variété linéaire à $n-r$ dimensions dépendant d'un paramètre a. En adjoignant à ce système la nouvelle équation

$$\frac{\partial^r \Omega_1}{\partial a^r}=0 \tag{44}$$

on obtient un système de $r+1$ équations définissant une variété (42) $\mathfrak{V}_{n-r}$ à $n-r$ dimensions, enveloppe de la variété linéaire représentée par les relations (43).

Supposons maintenant que l'on puisse trouver s combinaisons linéaires distinctes de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ $(s \leqq r)$ dont les dérivées s'expriment linéairement au moyen de ces fonctions elles-mêmes.

Pour fixer les idées, supposons que l'on ait s relations de la forme

$$\omega_i' = a_{i1}\omega_1 + \ldots + a_{is}\omega_s, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{45}$$

les coefficients a_{ik} ne dépendant pas de $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

On peut considérer les équations (45) comme un système d'équation différentielles linéaires, où a est la variable indépendante et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ des fonctions de a. L'intégrale générale est représentée par les formules

$$\omega_i = C_1\Omega_{i1} + C_2\Omega_{i2} + \ldots + C_s\Omega_{is}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{46}$$

où les fonctions Ω_{ik} ne dépendent que de $a, x_1, x_2, \ldots, x_n$, tandis que $C_1, C_2, \ldots, C_s$ sont indépendantes de a et sont nécessairement linéaires en $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Les s^2 fonctions Ω_{ik} forment un système fondamental d'intégrales des équations (45), les relations $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \ldots, \omega_s = 0$ sont équivalentes aux relations

$$C_1 = 0, \ C_2 = 0, \ldots, \ C_s = 0$$

qui représentent une variété linéaire à $n-s$ dimensions, indépendante de a.

En résumé, *une variété à $n-r$ dimensions $\mathfrak{V}_{n-r}$, telle que la variété linéaire à $n-r$ dimensions Λ_{n-r} qui lui est tangente ne dépende que d'un paramètre, est représentée par un système d'équations tel que* (43) *et* (44) *pourvu que cette variété $\mathfrak{V}_{n-r}$ n'appartienne pas à une variété linéaire à $n-s$ dimensions $(s \leqq r)$.*

Si toutes les conditions précédentes sont remplies pour la variété $\mathfrak{V}_{n-r}$ représentée par les équations (37), on peut remplacer ces r équations par le système (43) et (44), où Ω_1 est une fonction linéaire de $p_1, p_2, \ldots, p_n$,

$$\Omega_1 = f_1 p_1 + \ldots + f_n p_n + f_{n+1},$$

$f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}$ étant des fonctions du paramètre a et des variables $x, x_1, \ldots, x_n$. Les raisonnements du n.° 6 s'appliquent sans modifications et, par un changement du paramètre variable, on reconnait que les équations qui définissent la variété $\mathfrak{V}_{n-r}$ peuvent s'écriré

$$\mathfrak{F} = 0, \ \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} = 0, \ldots, \ \frac{\partial^r \mathfrak{F}}{\partial^r q} = 0, \tag{47}$$

où on a posé

$$\mathfrak{F} = q + F_1 p_1 + \ldots + F_{n-1} p_{n-1} - p_n$$

$F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ étant des fonctions de $q, x, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Les conditions qui précédent ne sont pas suffisantes. En effet, les équations (47) ne définissent les variétés singulières d'un système en involution que si le système

$$q_1 = F_1, \ldots, \ q_{n-1} = F_{n-1}$$

est en involution. On obtient ainsi de nouvelles conditions où figurent les dérivées des fonctions Φ_i par rapport aux variables x, x_1, x_2,...., x_n, tandis que les premières conditions ne renfermaient que les dérivées partielles par rapport aux variables p_i. Si toutes ces conditions sont satisfaites, les équations (37) conviennent bien aux variétés singulières d'ordre r d'un système en involution, et par suite forment un système de Monge de la *première classe.*

14. - Lorsque $r=n-1$, les équations (37) représentent dans l'espace E_n une variété $\mathfrak{V}_1$ à une dimension, dont on peut encore écrire les équations

$$p_1=\varphi_1(x, x_1,...., x_n\,;\, p_n),...., \; p_{n-1}=\varphi_{n-1}(x, x_1,...., x_n\,;\, p_n). \tag{48}$$

La variété linéaire tangente est représentée par les équations

$$\frac{P_1-\varphi_1}{\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial p_n}}=....=\frac{P_{n-1}-\varphi_{n-1}}{\dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial p_n}}=P_n-p_n$$

et ne dépend que d'un paramètre variable p_n. Les premières conditions du n.° 12 sont donc satisfaites, et si la variété $\mathfrak{V}_1$ n'est pas contenue elle-même dans une variété linéaire, les équations (48) peuvent être remplacées par n équations

$$\mathfrak{F}=0,\; \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q}=0,....,\; \frac{\partial^{n-1}\mathfrak{F}}{\partial q^{n-1}}=0, \tag{49}$$

où $\mathfrak{F}$ est une fonction linéaire de p_1, p_2,...., p_n renfermant un paramètre q. Le calcul par lequel on passe des équations (49) aux équations (48) n'est que la généralisation du calcul qui permet de calculer les coordonnées d'un point d'une courbe, connaissant l'équation du plan osculateur, et il serait aise d'établir la réciproque.

Si les dernières conditions sont aussi vérifiées, les équations (48) sont les équations de Monge des variétés singulières d'ordre $n-1$ d'un système en involution de $n-1$ équations à n variables indépendantes. Si ce système admet l'intégrale complète

$$V(x, x_1,...., x_n\,;\, a, b)=0,$$

ces multiplicités sont représentées (n.° 11) par les équations

$$V_1=0,\; \frac{\partial V_1}{\partial a}=0,....,\; \frac{\partial^n V_1}{\partial a^n}=0$$

où l'on a posé

$$V_1=V(x, x_1,...., x_n\,;\, a, f(a)).$$

Dans le mémoire déjà cité ([10]), j'avais signalé l'existence de systèmes d'équations de Monge à une variable indépendante admettant une intégrale générale de cette forme; les paragraphes précédents permettent de reconnaître si un

([10]) Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 33, 1905, p. 201-210.

système donné d'équations de Monge appartient à cette catégorie. On remarque que ce résultat est bien d'accord avec la théorie générale de M. CARTAN ([11]) car le système d'équations de Pfaff (23) est un des types canoniques auxquels on peut ramener un système d'équations de Pfaff intégrable explicitement.

15. - Supposons maintenant que la variété $\mathfrak{V}_{n-r}$ de l'espace à n dimensions, qui est l'enveloppe d'une variété linéaire A_{n-r} à $n-r$ dimensions ne dépendant que d'un paramètre, soit contenue dans une variété linéaire à $n-s$ dimensions indépendante de a, et n'appartienne pas à une variété linéaire ayant moins de $n-s$ dimensions. La variété $\mathfrak{V}_{n-r}$ est représentée par les r équations

(50) $$\omega_1=0,\ \omega_2=0,\ldots,\ \omega_s=0,\ \omega_{s+1}=0,\ldots,\ \omega_r=0,$$

$\omega_1,\ \omega_2,\ldots,\ \omega_s$ étant s fonctions linéaires distinctes de $p_1,\ p_2,\ldots,\ p_n$, indépendantes de a. Par un changement de coordonnées effectué sur les p_i on peut remplacer ce système (50) par un système équivalent

(51) $$p_1=0,\ldots,\ p_s=0,\qquad \Pi_{s+1}=0,\ldots,\ \Pi_r=0,$$

$\Pi_{s+1},\ldots,\ \Pi_r$ désignant $r-s$ fonctions linéaires distinctes de $p_{s+1},\ldots,\ p_n$ dont les coefficients dépendent de a; les $r-s$ fonctions $\Pi'_{s+1},\ldots,\ \Pi_r'$ doivent s'exprimer linéairement au moyen de $\Pi_{s+1},\ldots,\ \Pi_r$ et de l'une des dérivées $\Pi'_{s+1},\ldots,\ \Pi_r'$ et on peut répeter sur ce système de $r-s$ équations

$$\Pi_{s+1}=0,\ldots,\ \Pi_r=0$$

les raisonnements faits plus haut (n.° 13). Le cas exceptionnel où le raisonnement est en défaut ne peut se présenter ici, puisque par hypothèse la variété $\mathfrak{V}_{n-r}$ n'appartient pas à une variété linéaire à moins de $n-s$ dimensions. Il s'ensuit que les équations de la multiplicités $\mathfrak{V}_{n-r}$ peuvent être mises sous la forme

(52) $$\omega_1=0,\ldots,\ \omega_s=0,\qquad \Omega=0,\ \frac{\partial\Omega}{\partial a}=0,\ldots,\ \frac{\partial^{r-s}\Omega}{\partial a^{r-s}}=0,$$

$\omega_1,\ \omega_2,\ldots\ \omega_s$ étant s fonctions linéaires distinctes des p_i, indépendantes du paramètre a, et Ω un autre fonction linéaire dont les coefficients dépendent de a, telle que les $r+1$ équations (52) soient distinctes.

En résumé, *toute variété $\mathfrak{V}_{n-r}$, telle que la variété linéaire à $n-r$ dimensions qui lui est tangente ne dépende que d'un paramètre, est représentée par un système d'équations de la forme* (47) *ou de la forme* (52).

Ce dernier cas, qui doit être considéré comme exceptionnel, se ne présente que si $\mathfrak{V}_{n-r}$ appartient à une multiplicité linéaire à $n-s$ dimensions ($s<r$).

Lorsque la multiplicité $\mathfrak{V}_{n-r}$ représentée par les équations de Monge (37)

([11]) Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 42, 1914, p. 12-48.

appartient à la catégorie précédente, l'intégration de ce système revient encore à l'intégration d'un système de Pfaff

$$\tilde{\omega}_1=0,\ \tilde{\omega}_2=0,\ldots.,\ \tilde{\omega}_s=0,$$
$$\Omega=q\,dx+F_1dx_1+\ldots.+F_{n-1}dx_{n-1}-dx_n=0,$$
$$\frac{\partial\Omega}{q}=0,\ldots.,\ \frac{\partial^{r-s}\Omega}{\partial q^{r-s}}=0$$

x, $x_1,\ldots.$, x_n, étant des fonctions inconnues d'un paramètre q, et $\tilde{\omega}_1,\ldots.$, $\tilde{\omega}_s$ des formes de Pfaff où q ne figure pas. Si les s équations $\tilde{\omega}_i=0$ forment un système complètement intégrable on peut, par un simple changement de variables, remplacer le système précédent par un système équivalent

$$dx_1=0,\ldots.,\ dx_s=0,$$
$$\Omega=q\,dx+G_{s+1}dx_{s+1}+\ldots.+G_{n-1}dx_{n-1}-dx_n=0,$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial q}=0,\ldots.,\ \frac{\partial^{r-s}\Omega}{\partial q^{r-s}}=0.$$

Ce système est intégrable explicitement pourvu que l'équation $\Omega=0$ soit de la troisième classe quand on y remplace x_1, $x_2,\ldots.$, x_s par des constantes quelconques.

Nous sommes encore conduits à un des systèmes étudiés par M. CARTAN dans le travail cité plus haut.