PIA NALLI

Spazî di Riemann di seconda classe

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 1-2 (1932), p. 139-154

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_139_0>

SPAZÎ DI RIEMANN DI SECONDA CLASSE

di PIA NALLI (Catania).

1. - In una Nota (¹) ho fatto cenno ad una classificazione degli spazî di RIEMANN.
La *prima* classe è costituita dagli spazî euclidei.

La *seconda* classe è costituita dagli spazî per i quali esiste un vettore unitario $\mathbf{v}$, funzione dei punti della varietà, tale che il trasporto rigido lungo una linea L di estremi A e B definito dalla equazione vettoriale

$$\dot{\mathbf{u}} = -(\mathbf{u}\times\dot{\mathbf{v}})\mathbf{v} + (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\dot{\mathbf{v}} \tag{1}$$

(dove $\dot{\mathbf{u}}$ e $\dot{\mathbf{v}}$ denotano i derivati di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ lungo la linea) quando si fissa A ed in esso il valore iniziale di $\mathbf{u}$, è nel punto B indipendente dalla linea L.

Tale classe contiene gli spazî euclidei e le superficie.

Ci proponiamo di dare la forma canonica per il ds^2 di alcuni spazî V_n di seconda classe.

Riferita una qualunque varietà ad un sistema di coordinate x_i, si fissi in ogni punto un vettore unitario $\mathbf{v}$. Denotiamo con $\boldsymbol{\tau}$ il vettore $\dot{\mathbf{v}}$, derivato di $\mathbf{v}$ lungo una linea L. Le componenti di $\boldsymbol{\tau}$ hanno i seguenti valori

$$\tau^i = \sum_1^n {}_k v^i_{|k} \frac{dx_k}{dt}, \qquad \tau_i = \sum_1^n {}_k v_{i|k} \frac{dx_k}{dt},$$

dove t è il parametro al quale la L è riferita.

Il trasporto rigido rappresentato lungo L dall'unica equazione vettoriale (1), viene rappresentato dal seguente sistema di equazioni differenziali nelle componenti controvarianti u^i del vettore $\mathbf{u}$:

$$\frac{du^i}{dt} + \sum_1^n {}_{hk} \left\{ {h\ k \atop i} \right\} u^h \frac{dx_k}{dt} = -(\mathbf{u}\times\dot{\mathbf{v}})v^i + (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\tau^i. \tag{2}$$

Ma

$$\mathbf{u}\times\dot{\mathbf{v}} = \sum_1^n {}_h u^h \tau_h = \sum_1^n {}_{hk} v_{h|k} u^h \frac{dx_k}{dt}, \qquad \mathbf{u}\times\mathbf{v} = \sum_1^n {}_h u^h v_h,$$

(¹) *Derivazioni generalizzate e classificazione degli spazi di Riemann.* Rend. Accad. Lincei, serie 6ª, vol. X, 1929, pp. 265-268.

quindi il sistema (2) si scrive

$$\frac{du^i}{dt}+\sum_{hk}^{n}{}_1\, \Gamma^i_{hk} u^h \frac{dx_k}{dt}=0 \tag{3}$$

dove

$$\Gamma^i_{hk}=\left\{\begin{matrix} h\ k \\ i \end{matrix}\right\}+v^i v_{h|k}-v_h v^i_{|k}. \tag{4}$$

Ciò vale in generale.

Ora si faccia l'ipotesi che la V_n sia di seconda classe. In tal caso, fissati in un punto della varietà $n-1$ vettori unitarî a due a due ortogonali e tutti ortogonali al vettore v nel medesimo punto, li possiamo trasportare secondo la (1) in ogni punto della varietà in modo ben determinato.

Prendendo allora come linee $x_2, x_3, \ldots, x_n$ quelle tangenti ai detti vettori e come linee x_1 quelle tangenti a v, ammesso che ciò sia possibile (diremo allora che la V_n è *normale di seconda classe*) il ds^2 della varietà prende la forma

$$ds^2=\sum_i^{n}{}_1\, a_{ii} dx_i^2. \tag{5}$$

Ma siccome la V_n è di seconda classe, il sistema (3) si riduce al sistema illimitatamente integrabile di equazioni ai differenziali totali

$$du^i+\sum_{hk}^{n}{}_1\, \Gamma^i_{hk} u^h dx_k=0, \tag{3'}$$

cioè al sistema di equazioni alle derivate parziali

$$\frac{\partial u^i}{\partial x_k}+\sum_h^{n}{}_1\, \Gamma^i_{hk} u^h=0. \tag{6}$$

Ora, per la particolare scelta del sistema di linee coordinate, le (6) dovranno essere soddisfatte per ogni $j>1$ facendo

$$u^i=0 \quad (i \neq j), \qquad u^j=\frac{1}{\sqrt{a_{jj}}}$$

il che porta, per $j>1$,

$$\Gamma^i_{jk}=0 \quad (i\neq j), \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{\sqrt{a_{jj}}}+\frac{1}{\sqrt{a_{jj}}}\Gamma^j_{jk}=0, \tag{7}$$

e queste sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè la V_n caratterizzata dalla (5) sia normale di seconda classe.

Ora consideriamo Γ^i_{jk} per $j>1$ ed $i\neq j$. Si ha, secondo la (4)

$$\Gamma^i_{jk}=\left\{\begin{matrix} j\ k \\ i \end{matrix}\right\}+v^i v_{j|k}-v_j v^i_{|k}.$$

Se $i\neq 1$ è $v^i=0$, ed essendo $v_j=0$, perchè $j>1$, dovremo avere

$$\left\{\begin{matrix} j\ k \\ i \end{matrix}\right\}=0$$

e cioè

$$\begin{bmatrix} j\ k \\ i \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{per } j > 1, \quad i > 1, \quad i \neq j.$$

Questa è soddisfatta se $k \neq i$ e $k \neq j$, sono quindi da prendere in considerazione soltanto queste due

$$\begin{bmatrix} j\ j \\ i \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{bmatrix} j\ i \\ i \end{bmatrix} = 0$$

che ci danno

$$\frac{\partial a_{jj}}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_j} = 0$$

e si riducono ad una sola condizione, e cioè che a_{ii}, per $i > 1$, è funzione solo di x_1 ed x_i.

Questa condizione si è ottenuta considerando solo il primo gruppo delle (7) per $i > 1$. Ora dimostreremo che, quando è soddisfatta, sono anche soddisfatte le (7) del secondo gruppo e la rimanente del primo, cioè:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sqrt{a_{jj}}} + \frac{1}{\sqrt{a_{jj}}} \Gamma^j_{jk} = 0, \qquad \Gamma^1_{jk} = 0 \quad (j > 1). \tag{8}$$

La seconda, per la (4), diventa

$$\begin{Bmatrix} j\ k \\ 1 \end{Bmatrix} + v^1 v_{j\,|\,k} = 0; \tag{9}$$

ma

$$v_{j\,|\,k} = -\sum_1^n{}_r \begin{Bmatrix} j\ k \\ r \end{Bmatrix} v_r = -\begin{Bmatrix} j\ k \\ 1 \end{Bmatrix} v_1,$$

quindi

$$v^1 v_{j\,|\,k} = -v^1 v_1 \begin{Bmatrix} j\ k \\ 1 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} j\ k \\ 1 \end{Bmatrix}$$

e la (9) è soddisfatta.

Finalmente dimostriamo che è soddisfatta la prima delle (8). Essendo

$$\Gamma^j_{jk} = \begin{Bmatrix} j\ k \\ j \end{Bmatrix} = a^{jj} \begin{bmatrix} j\ k \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{a_{jj}} \begin{bmatrix} j\ k \\ j \end{bmatrix}$$

per $k \neq 1$ e $k \neq j$ è $\Gamma^j_{jk} = 0$ ed anche

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sqrt{a_{jj}}} = 0$$

e la (8) è soddisfatta.

Per $k = 1$

$$\Gamma^j_{j1} = \frac{1}{a_{jj}} \begin{bmatrix} j\ 1 \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{2a_{jj}} \frac{\partial a_{jj}}{\partial x_1}$$

e quindi $\frac{1}{\sqrt{a_{jj}}} \Gamma^j_{j1}$ coincide con $-\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\sqrt{a_{jj}}}$ e la (8) è soddisfatta.

Analogamente per $k = j$, perchè

$$\Gamma^j_{jj} = \frac{1}{2a_{jj}} \frac{\partial a_{jj}}{\partial x_j}.$$

Concludiamo così che *la forma canonica per il ds^2 di una V_n normale di seconda classe è la* (5) *dove per $i > 1$ a_{ii} è funzione delle sole x_1 ed x_i.*

2. - Dimostrato così che esistono V_n di seconda classe, daremo in coordinate generiche le condizioni di illimitata integrabilità del sistema (3').

Esse sono le seguenti:

$$[hi, kr]=0$$

dove

$$[hi, kr]=\frac{\partial \Gamma^i_{hk}}{\partial x_r}-\frac{\partial \Gamma^i_{hr}}{\partial x_k}-\sum_1^n{}_p(\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{hr}-\Gamma^i_{pr}\Gamma^p_{hk}).$$

Teniamo conto della (4) che dà l'espressione di Γ^i_{hk} ed osserviamo che se scegliamo le coordinate x_i in modo da risultare geodetiche in un punto P della varietà, nel medesimo punto sarà

$$[hi, kr]=\frac{\partial}{\partial x_r}\left\{ {h\ k \atop i} \right\}-\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{ {h\ r \atop i} \right\}+\frac{\partial}{\partial x_r}(v^i v_{h|k}-v_h v^i_{|k})-\frac{\partial}{\partial x_k}(v^i v_{h|r}-v_h v^i_{|r})-$$
$$-\sum_1^n{}_p[(v^i v_{p|k}-v_p v^i_{|k})(v^p v_{h|r}-v_h v^p_{|r})-(v^i v_{p|r}-v_p v^i_{|r})(v^p v_{h|k}-v_h v^p_{|k})].$$

La parte che figura al secondo membro prima del segno sommatorio, per il particolare sistema di coordinate scelto, coincide in P con

$$\{hi, kr\}+(v^i v_{h|k}-v_h v^i_{|k})_{|r}-(v^i v_{h|r}-v_h v^i_{|r})_{|k}.$$

Ora le $[hi, kr]$ sono tali che se si annullano in un sistema di coordinate si annullano in qualunque altro, perchè il loro annullarsi dà la condizione necessaria e sufficiente per l'illimitata integrabilità del sistema (3'). Ciò fa pensare che le $[hi, kr]$ siano le componenti di un tensore. Orbene: ciò può verificarsi facilmente, cosicchè in qualunque sistema di coordinate si avrà

$$[hi, kr]=\{hi, kr\}+(v^i v_{h|k}-v_h v^i_{|k})_{|r}-(v^i v_{h|r}-v_h v^i_{|r})_{|k}-$$
$$-\sum_1^n{}_p[(v^i v_{p|k}-v_p v^i_{|k})(v^p v_{h|r}-v_h v^p_{|r})-(v^i v_{p|r}-v_p v^i_{|r})(v^p v_{h|k}-v_h v^p_{|k})].$$

Trasformiamo il secondo membro. Da

$$(v^i v_{h|k}-v_h v^i_{|k})_{|r}=v^i_{|r}v_{h|k}+v^i v_{h|kr}-v_{h|r}v^i_{|k}-v_h v^i_{|kr}$$

e

$$(v^i v_{h|r}-v_h v^i_{|r})_{|k}=v^i_{|k}v_{h|r}+v^i v_{h|rk}-v_{h|k}v^i_{|r}-v_h v^i_{|rk}$$

sottraendo ricaviamo:

$$(v^i v_{h|k}-v_h v^i_{|k})_{|r}-(v^i v_{h|r}-v_h v^i_{|r})_{|k}=v^i(v_{h|kr}-v_{h|rk})-v_h(v^i_{|kr}-v^i_{|rk})+$$
$$+v^i_{|r}v_{h|k}-v_{h|r}v^i_{|k}-v^i_{|k}v_{h|r}+v_{h|k}v^i_{|r}.$$

Ma per la nota formola della inversione delle derivazioni covarianti è

$$v_{h|kr}-v_{h|rk}=-\sum_1^n{}_p\{hp, kr\}v_p,$$

$$v^i_{|kr}-v^i_{|rk}=\sum_1^n{}_p\{pi, kr\}v^p$$

cosicchè la differenza precedente si scrive

$$-v^i \sum_1^n {}_p \{hp, kr\} v_p - v_h \sum_1^n {}_p \{pi, kr\} v^p +$$
$$+ v^i_{|r} v_{h|k} - v^i_{|k} v_{h|r} - v_{h|r} v^i_{|k} + v_{h|k} v^i_{|r}.$$

Prendendo ora in considerazione la somma che figura nella espressione di $[hi, kr]$, avremo

$$\sum_1^n {}_p (v^i v_{p|k} - v_p v^i_{|k})(v^p v_{h|r} - v_h v^p_{|r}) = v^i v_{h|r} \sum_1^n {}_p v^p v_{p|k} -$$
$$- v_{h|r} v^i_{|k} \sum_1^n {}_p v_p v^p - v^i v_h \sum_1^n {}_p v_{p|k} v^p_{|r} + v^i_{|k} v_h \sum_1^n {}_p v_p v^p_{|r}.$$

Ma essendo

(10) $$\sum_1^n {}_p v_p v^p = 1$$

la prima e l'ultima somma sono nulle, rimane quindi

(11) $$- v_{h|r} v^i_{|k} - v^i v_h \sum_1^n {}_p v_{p|k} v^p_{|r}.$$

Ora derivando covariantemente la (10) ricaviamo

$$\sum_1^n {}_p v_{p|k} v^p = 0$$

e con un'altra derivazione

$$\sum_1^n {}_p v_{p|k} v^p_{|r} + \sum_1^n {}_p v_{p|kr} v^p = 0$$

cosicchè la (11) si può scrivere:

$$- v_{h|r} v^i_{|k} + v^i v_h \sum_1^n {}_p v_{p|kr} v^p.$$

Cambiando il segno di questa espressione e sottraendo dal risultato ciò che da esso si ottiene scambiando k con r, avremo la somma preceduta dal segno — che figura nella espressione di $[hi, kr]$, cioè

$$v_{h|r} v^i_{|k} - v_{h|k} v^i_{|r} - v^i v_h \sum_1^n {}_p (v_{p|kr} - v_{p|rk}) v^p.$$

Ma quest'ultima somma è nulla perchè, sempre per la formola d'inversione delle derivazioni covarianti, è

$$- \sum_1^n {}_p (v_{p|kr} - v_{p|rk}) v^p = \sum_1^n {}_{pj} \{pj, kr\} v_j v^p$$

e questa coincide evidentemente con

$$\sum_{1}^{n}{}_{pj}(pj,\, kr)v^p v^j,$$

che è nulla, per la nota proprietà di emisimmetria

$$(pj,\, hr) = -(jp,\, kr).$$

Si conclude così che

$$[hi,\, kr] = \{hi,\, kr\} - v^i \sum_{1}^{n}{}_p \{hp,\, kr\}\, v_p - v_h \sum_{1}^{n}{}_p \{pi,\, kr\}\, v^p + v_{h\,|\,k} v^i_{\,|\,r} - v_{h\,|\,r} v^i_{\,|\,k}.$$

Troviamo così che *condizione necessaria e sufficiente perchè una V_n appartenga alla seconda classe è che esista un vettore unitario* v *funzione dei punti di V_n che soddisfi al sistema di equazioni alle derivate parziali*

$$(12)\qquad \{hi,\, kr\} - v^i \sum_{1}^{n}{}_p \{hp,\, kr\}\, v_p - v_h \sum_{1}^{n}{}_p \{pi,\, kr\}\, v^p + v_{h\,|\,k} v^i_{\,|\,r} - v_{h\,|\,r} v^i_{\,|\,k} = 0$$

o, ciò che è lo stesso, *al sistema*

$$(12')\qquad (hi,\, kr) - v_i \sum_{1}^{n}{}_p (hp,\, kr) v^p - v_h \sum_{1}^{n}{}_p (pi,\, kr) v^p + v_{h\,|\,k} v_{i\,|\,r} - v_{h\,|\,r} v_{i\,|\,k} = 0.$$

Questo è soddisfatto qualunque sia il vettore unitario v quando $n = 2$, come si poteva facilmente prevedere, e cioè *le superficie appartengono alla seconda classe.*

3. - Sia una V_n normale di seconda classe ed il ds^2 sia ridotto alla forma (5) con a_{ii} funzione delle sole x_1 ed x_i per $i > 1$.

Daremo le espressioni dei simboli di RIEMANN di prima specie.

I calcoli relativi sono facili, ma piuttosto lunghi: per tali ragioni ci dispensiamo dal riportarli e diamo senz'altro i risultati.

Nel simbolo $(ir,\, hk)$ supporremo $r > i$, $k > h$.

Si trova che i simboli $(ir,\, hk)$ sono nulli ad eccezione dei seguenti:

1°) $(1r,\, 1k) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial x_r \partial x_k} + \frac{1}{4} a^{11} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_r}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_k}$; $(r \neq k)$;

2°) $(1r,\, rk) = -\frac{1}{4} a^{11} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_k}\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1}$;

3°) $(1r,\, hr) = \frac{1}{4} a^{11} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_h}\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1}$; $(h > 1)$;

4°) $(ir,\, ir) = -\frac{1}{4} a^{11} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_1}\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1}$; $(i > 1)$;

5°) $$(1r,\, 1r) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{rr}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial x_r^2} + \frac{1}{4} a^{11}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1} + \\ + \frac{1}{4} a^{rr}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_r}\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_r} + \frac{1}{4} a^{11}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_r}\right)^2 + \frac{1}{4} a^{rr}\left(\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1}\right)^2;$$

dove $a^{ii} = \frac{1}{a_{ii}}$.

4. - È noto che il ds^2 di una V_n a curvatura costante negativa K si può mettere sotto la forma

$$ds^2 = -\frac{1}{Kx_1^2}\sum_1^n{}_i\, dx_i^2, \tag{13}$$

quindi una tale V_n è normale di seconda classe.

Ora noi ritroveremo tale risultato e dimostreremo anche che solo per $n \leqslant 3$ una V_n a curvatura costante positiva è normale di seconda classe.

Sia una V_n a curvatura costante $K \neq 0$. Essendo

$$(ir, hk) = K(a_{ih}a_{rk} - a_{ik}a_{rh})$$

se la V_n è normale di seconda classe ed il ds^2 ridotto alla forma caratteristica (5), con a_{ii} funzioni delle sole x_1 ed x_i per $i > 1$, il confronto della precedente con i valori degli (ir, hk) avanti riportati, porta le seguenti condizioni per le a_{ii}:

$$-\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial x_r \partial x_k} + \frac{1}{2}a^{11}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_r}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_k} = 0 \qquad (r > 1,\ k > 1,\ r \neq k), \tag{14}$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_k}\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1} = 0 \qquad (r > 1,\ k > r), \tag{15}$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_h}\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1} = 0 \qquad (h > 1,\ r > 1,\ h \neq r), \tag{16}$$

$$-\frac{1}{4}a^{11}\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_1}\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1} = Ka_{ii}a_{rr} \qquad (i > 1,\ r > 1), \tag{17}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{rr}}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial x_r^2} + \frac{1}{4}a^{11}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1}\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1} + \frac{1}{4}a^{rr}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_r}\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_r} +{}&\\ + \frac{1}{4}a^{11}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_r}\right)^2 + \frac{1}{4}a^{rr}\left(\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1}\right)^2 = Ka_{11}a_{rr} \qquad (r > 1).\end{aligned} \tag{18}$$

Avendo supposto $K \neq 0$ non può, per la (17), essere $\frac{\partial a_{rr}}{\partial x_1} = 0$ per $r > 1$, quindi dalla (16) si trae, per $h > 1$, $\frac{\partial a_{11}}{\partial x_h} = 0$, cioè a_{11} è funzione della sola x_1 e le a_{rr} per $r > 1$ dipendono effettivamente dalla x_1.

Essendo a_{11} funzione della sola x_1, cambiando questa coordinata in una conveniente funzione della medesima, possiamo supporre $a_{11} = 1$.

Teniamo conto della (18). Troviamo che le funzioni a_{rr} come funzioni di x_1 debbono soddisfare all'equazione differenziale

$$Ky = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{4}\frac{y'^2}{y}. \tag{19}$$

Se $K > 0$ l'integrale generale sotto forma reale è $\beta\cos^2(\sqrt{K}x + \alpha)$, α e β costanti. Sarà dunque

$$a_{rr} = \beta_r \cos^2(\sqrt{K}x_1 + \alpha_r),$$

con α_r e β_r funzioni di x_r; β_r la possiamo supporre $= 1$.

Poniamo dunque

$$a_{rr} = \cos^2(\sqrt{K}x_1 + \alpha_r).$$

Intanto deve essere soddisfatta la (17) che si riduce a

$$\operatorname{tang}(\sqrt{K}x_1 + \alpha_i)\operatorname{tang}(\sqrt{K}x_1 + \alpha_r) = -1,$$

cioè

$$a_i = a_r + \frac{\pi}{2} + h\pi$$

con h intero. Questa dimostra che le a_i sono costanti e dovendo essere soddisfatta qualunque sieno i ed r maggiori di 1, porta che n non può superare 3. Per $n=3$ si ha il ds^2 dello spazio a curvatura costante $K>0$ sotto la forma

$$ds^2 = dx_1^2 + \cos^2(\sqrt{K}x_1)dx_2^2 + \operatorname{sen}^2(\sqrt{K}x_1)dx_3^2.$$

Supponiamo ora $K<0$.

L'integrale generale dell'equazione (19) è allora

$$(\alpha e^{-\sqrt{-K}x} + \beta e^{\sqrt{-K}x})^2$$

con α e β costanti.

Sarà dunque:

$$a_{rr} = (\alpha_r e^{-\sqrt{-K}x_1} + \beta_r e^{\sqrt{-K}x_1})^2.$$

Ma per la (17) si deve avere:

$$(-\alpha_r e^{-\sqrt{-K}x_1} + \beta_r e^{\sqrt{-K}x_1})(-\alpha_i e^{-\sqrt{-K}x_1} + \beta_i e^{\sqrt{-K}x_1}) =$$
$$= (\alpha_r e^{-\sqrt{-K}x_1} + \beta_r e^{\sqrt{-K}x_1})(\alpha_i e^{-\sqrt{-K}x_1} + \beta_i e^{\sqrt{-K}x_1}).$$

Questa porta come conseguenza

$$\alpha_r\beta_i + \beta_r\alpha_i = 0$$

qualunque siano r ed i maggiori di 1. Perchè ciò accada se è $n>3$ è necessario che siano nulle tutte le α_r o tutte le β_r, e si può supporre che lo siano le β_r cambiando se occorre x_1 in $-x_1$. Ed allora si può supporre senz'altro $\alpha_r = 1$ e quindi

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{-2\sqrt{-K}x_1}(dx_2^2 + dx_3^2 + \dots + dx_n^2).$$

Per $n=3$ si ha la forma più generale

$$ds^2 = dx_1^2 + (\alpha e^{-\sqrt{-K}x_1} + \beta e^{\sqrt{-K}x_1})^2 dx_2^2 + (\alpha e^{-\sqrt{-K}x_1} - \beta e^{\sqrt{-K}x_1})^2 dx_3^2,$$

che per $\alpha=0$ o $\beta=0$ rientra nella precedente. Diversamente possiamo supporre $\alpha=\beta=1$ cambiando opportunamente x_1 in $x_1 + \text{cost.}$, e x_2 ed x_3 nelle medesime moltiplicate per opportune costanti.

Nel caso generale, prendendo come nuova coordinata x_1 la quantità

$$\frac{1}{\sqrt{-K}} \log \sqrt{-K}x_1$$

si trova la nota forma (13).

Per $n=3$ si ha la forma più generale

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + (\alpha x_1^2 + \beta)^2 dx_2^2 + (\alpha x_1^2 - \beta)^2 dx_3^2}{-Kx_1^2},$$

dove α e β sono costanti arbitrarie non tutte e due nulle.

5. - Occupiamoci ora di una varietà euclidea: cerchiamo quando un ds^2 della forma (5), con a_{ii} funzione delle sole x_1 ed x_i per $i>1$, appartiene ad una varietà euclidea.

Le a_{ii} devono soddisfare alle (14), (15), (16), (17), (18) con $K=0$.

Per la (16), se c'è una a_{rr} $(r>1)$ che dipende dalla x_1, la a_{11} è funzione solo di x_1 e di x_r. Per tale ragione, e come risulta anche dalla (17), non possono due delle a_{rr} con $r>1$ dipendere da x_1.

Avremo quindi la forma

$$ds^2 = a_{11}dx_1^2 + a_{22}dx_2^2 + \sum_3^n {}_i dx_i^2, \tag{20}$$

a meno di trasformazioni di coordinate che mantengono inalterate le linee x_i per $i>2$, e dove a_{11} ed a_{22} sono funzioni solo di x_1 ed x_2 tali che $a_{11}dx_1^2 + a_{22}dx_2^2$ è il quadrato dell'elemento lineare di un piano.

Supponiamo ora che nessuna delle a_{rr} con $r>1$ dipenda da x_1. A meno di trasformazioni di coordinate che mantengono le linee coordinate potremo supporre $a_{rr}=1$ per $r>1$. Ed allora si possono dare due casi: o a_{11} è funzione della sola x_1, e possiamo supporre $a_{11}=1$, ritrovando le coordinate cartesiane ed il trasporto per parallelismo (il che si presenta anche come caso particolare della forma (20)) ovvero la a_{11} dipende da qualche x_r con $r>1$. Supponiamo che questa sia la x_2. Per la (18)

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial x_r^2} + \frac{1}{4a_{11}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x_r}\right)^2 = 0 \qquad (r>1).$$

Facendo $r=2$ troviamo

$$a_{11} = (hx_2 + g)^2$$

dove h e g non dipendono da x_2. Se la a_{11}, oltre a dipendere da x_2, dipende anche da x_3, per la (14), facendo $r=2$ e $k=3$, troviamo $\frac{\partial h}{\partial x_3}=0$. Ne viene che h è funzione della sola x_1, cioè

$$a_{11} = [h_2(x_1)x_2 + g(x_1, x_3, \ldots, x_n)]^2.$$

Ragionando in modo analogo sulle altre x_r, con $r>2$, da cui dipende la a_{11}, concludiamo

$$a_{11} = \left[h_1(x_1) + \sum_2^n {}_i h_i(x_1)x_i\right]^2$$

e si ha la forma

$$ds^2 = \left[h_1(x_1) + \sum_2^n {}_i h_i(x_1)x_i\right]^2 dx_1^2 + \sum_2^n {}_i dx_i^2. \tag{21}$$

Questa rientra nella (20) quando le $h_i(x_1)$ $(i>1)$ si ottengono da una di esse moltiplicandola per delle costanti, facendo un opportuno cambiamento di coordinate che mantiene le linee x_1.

Sono quindi la (20) e la (21), a meno di ovvie trasformazioni di coordinate, le sole forme possibili per il ds^2 di una varietà euclidea che rientrano nel tipo (5) con le note condizioni per le a_{ii} con $i>1$. D'altra parte, se noi riferiamo la varietà euclidea a coordinate cartesiane, il sistema (3') risulta illimitatamente integrabile quando sono soddisfatte le seguenti:

$$\frac{\partial v_h}{\partial x_k}\frac{\partial v_i}{\partial x_r}-\frac{\partial v_h}{\partial x_r}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=0, \tag{22}$$

essendo nel medesimo tempo

$$\sum_1^n{}_i\, v_i^2=1.$$

Ne viene che o le v_i sono costanti, ed il trasporto (1) è il parallelismo, ovvero $n-1$ tra di esse sono funzioni della rimanente: $v_i=\varphi_i(v_1)$ $(i=2, 3,...., n)$ dove

$$v_i^2+\sum_2^n{}_i\,\varphi_i^2(v_1)=1,$$

e le φ_i, purchè soddisfino a questa condizione, si possono scegliere ad arbitrio per far rientrare la varietà euclidea tra quelle di seconda classe. Resterebbe a vedere in quali casi si ha la forma normale.

La forma (20) si presenta quando tra le componenti v_i due al più sono linearmente indipendenti. Per esempio: per $n=3$ si presenta la forma (20) quando il campo dei vettori $\mathbf{v}$ si ottiene da un campo di vettori unitarî in un piano π portando ogni vettore del piano, parallelamente a se stesso, in tutti i punti della perpendicolare a π uscente dalla sua origine.

Lo spostamento di un vettore si riduce ad uno spostamento per parallelismo lungo una perpendicolare a π, ad uno spostamento in un piano parallelo a π della componente tangenziale a tale piano, e ad uno spostamento per parallelismo della componente ortogonale. Il secondo spostamento può avvenire secondo una legge arbitraria, ma che è la stessa per tutti i piani paralleli a π messi in corrispondenza in modo che due punti corrispondenti stiano sopra una perpendicolare a π.

Analogamente per $n>3$.

Escluso questo caso, la cui considerazione si presenta ovviamente quando si tenga presente il più generale trasporto rigido in un piano, si ha sempre il tipo (21) non riducibile al (20), Sarebbe forse interessante vedere come si realizza il trasporto corrispondente con particolari maggiori di quanti daremo nei numeri seguenti relativamente ad una V_n normale di seconda classe.

È da notare poi che si presenta la forma (20) quando $\mathbf{v}$ è un gradiente, il che accade in una V_n normale di seconda classe quando le linee x_1 sono geodetiche, come si vedrà meglio in seguito. Allora a_{11} è funzione della sola x_1 e si può supporre $a_{11}=1$.

Per una varietà euclidea la forma (20) si riduce allora alla seguente:

$$ds^2 = dx_1^2 + [f(x_2) + x_1 g(x_2)]^2 dx_2^2 + \sum_3^n {}_i\, dx_i^2. \tag{20'}$$

Dal che, riferendoci a coordinate cartesiane, risulta facilmente che se una per funzione $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ sono nulli tutti i minori del second'ordine del suo hessiano (fatto a cui si riducono in coordinate cartesiane le (22) quando

$$\mathrm{v} = \mathrm{grad} \cdot \Phi)$$

ed è inoltre

$$\sum_1^n {}_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)^2 = 1,$$

e v dà luogo ad una forma normale, si ha

$$\Phi = F(y_1, y_2)$$

dove

$$y_1 = \alpha + \sum_1^n {}_i\, a_i x_i, \qquad y_2 = \beta + \sum_2^n {}_i\, \beta_i x_i,$$

α e β essendo due costanti arbitrarie, le a_i e β_i pure costanti soddisfacenti alle condizioni

$$\sum_1^n {}_i\, a_i^2 = 1, \qquad \sum_1^n {}_i\, \beta_i^2 = 1, \qquad \sum_1^n {}_i\, a_i \beta_i = 0,$$

ed $F(y_1, y_2)$ è la più generale soluzione dell'equazione

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y_2}\right)^2 = 1.$$

6. - Torniamo ora ad occuparci di una V_n generica normale di seconda classe. Messo il ds^2 sotto la forma (5) con le note condizioni per le a_{ii}, denotiamo con v_i il versore relativo alla linea x_i $(i = 2, 3, ..., n)$. Per la linea x_1 il versore è il vettore v che figura nella (1).

Essendo $\dot{\mathrm{v}}$ ortogonale a v, sarà

$$\dot{\mathrm{v}} = \sum_1^n {}_i (\dot{\mathrm{v}} \times \mathrm{v}_i) \mathrm{v}_i.$$

Vi sono delle linee lungo le quali lo spostamento (1) è il parallelismo: esse sono tutte e sole le linee lungo le quali si ha $\dot{\mathrm{v}} = 0$, perchè per tali linee la (1) dà $\dot{\mathrm{u}} = 0$. Le linee in discorso sono quelle lungo le quali è

$$\dot{\mathrm{v}} \times \mathrm{v}_i = 0 \qquad (i = 2, 3, ..., n).$$

Per trovare tali linee osserviamo che denotando con τ^i le componenti controvarianti di $\dot{\mathrm{v}}$ lungo una linea L riferita ad un parametro t, è $\tau^1 = 0$, e per $i > 1$

(poichè le componenti controvarianti di v sono nulle, tranne la prima che è eguale ad $\frac{1}{\sqrt{a_{11}}}$) sarà

$$\tau^i = \sum_1^n {}_k \left\{ \begin{matrix} 1 & k \\ & i \end{matrix} \right\} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{dx_k}{dt} = \frac{a^{ii}}{\sqrt{a_{11}}} \sum_1^n {}_k \left[\begin{matrix} 1 & k \\ & i \end{matrix} \right] \frac{dx_k}{dt}$$

cioè

$$\tau^i = \frac{a^{ii}}{\sqrt{a_{11}}} \left\{ \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ & i \end{matrix} \right] \frac{dx_1}{dt} + \left[\begin{matrix} 1 & i \\ & i \end{matrix} \right] \frac{dx_i}{dt} \right\} = \frac{a^{ii}}{2\sqrt{a_{11}}} \left\{ \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_1} \frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial a_{11}}{\partial x_i} \frac{dx_1}{dt} \right\}.$$

Le linee lungo le quali lo spostamento (1) è il parallelismo sono dunque le linee lungo le quali

(23) $$\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_1} dx_i - \frac{\partial a_{11}}{\partial x_i} dx_1 = 0 \qquad (i=2, 3,...., n).$$

Esse costituiscono in generale una congruenza, ma possono anche costituire un sistema di maggiore dimensione.

Tra esse sono le linee x_1 quando e soltanto quando queste linee sono geodetiche, il che succede quando a_{11} è funzione della sola x_1, cioè quando v è un gradiente. Tale è il caso delle varietà a curvatura costante: per esse le linee (23) costituiscono una congruenza che coincide con quella delle linee x_1.

Per le varietà euclidee, le linee x_1 fanno parte delle (23) quando il ds^2 ha la forma (20′): la congruenza di geodetiche che fanno da linee x_1 non si può scegliere ad arbitrio, ma deve soddisfare a condizioni ben definite. Per esempio, per $n=3$ la congruenza più generale si ottiene nel seguente modo: si fissi un piano π ed in esso una linea L; le rette di π ortogonali ad L proiettate ortogonalmente sopra i piani paralleli a π danno nello spazio la congruenza generale.

Analogamente, con le dovute modificazioni, per $n>3$.

Si può caratterizzare la congruenza di geodetiche in generale o anche solo in altri casi particolari, per esempio per le varietà a curvatura costante?

Valendoci della proprietà caratteristica delle linee (23), possiamo realizzare il trasporto rigido definito dalla (1) nel modo seguente. Siano P e Q due punti di V_n ed in P sia fissato un vettore **u**. Sia C la linea (23) passante per P (o una di quelle che passano per P se le (23) non costituiscono una congruenza) H il punto dove C incontra la varietà V_{n-1} $x_1=$cost. contenente Q. Si trasporta **u** da P in H lungo C per parallelismo in V_n, il vettore così ottenuto in H lo si decompone in due ortogonali, uno dei quali tangente alla V_{n-1}, che si trasporta in Q per parallelismo nella V_{n-1} (che è euclidea). Il vettore così ottenuto in Q si compone con un altro, ortogonale alla V_{n-1}, in modo che il vettore risultante **u**′ abbia la stessa lunghezza di **u**: **u**′ è il risultato del trasporto di **u** da P in Q secondo la (1).

Si può operare in senso inverso, e cioè eseguire prima una decomposizione in P, trasportare uno dei vettori per parallelismo nella V_{n-1} $x_1=$cost. contenente P, eseguire una composizione, trasportare il vettore ottenuto per parallelismo in V_n lungo una linea (23) per arrivare in Q.

Per esempio: nello spazio ordinario le linee x_1 siano le semirette perpendicolari ad una retta r, uscenti dai suoi punti, le linee x_2 le circonferenze aventi i centri nei punti di r situate nei piani perpendicolari ad r, le linee x_3 siano le parallele ad r. Allora

$$ds^2 = dx_1^2 + x_1^2 dx_2^2 + dx_3^2.$$

Tra le linee (23) sono le x_1. Le V_{n-1} $x_1 = \text{cost.}$ sono le superficie cilindriche circolari aventi per asse r. Si può applicare la costruzione precedente prendendo come linea C una linea x_1. Naturalmente ci sono altri modi per realizzare il trasporto, per esempio facendo intervenire rotazioni intorno ad r, ma sono costruzioni che si applicano al caso particolare, mentre quella che abbiamo data ed un'altra che daremo, sono costruzioni generali. L'esempio si mostra però interessante perchè è in istretto legame coi movimenti elicoidali aventi per asse r, e quindi coi movimenti rigidi nello spazio ordinario.

Un esempio più generale del precedente, sempre per $n=3$, si ha in corrispondenza alla forma (20'). Invece di superficie cilindriche circolari coassiali si hanno superficie cilindriche equidistanti, le linee x_1 sono le normali alle superficie cilindriche.

Per la forma più generale (20) le V_{n-1} ortogonali alle linee x_1 sono pure superficie cilindriche con le generatrici parallele, ma del resto arbitrarie, le linee x_1 sono linee piane ortogonali alle superficie cilindriche. La costruzione relativa si può effettuare in infiniti modi, in corrispondenza agli infiniti cambiamenti di coordinate che conservano le linee x_3.

7. - Il trasporto (1) per una V_n normale di seconda classe si può anche realizzare in un secondo modo, il quale coincide col primo quando le linee x_1 sono geodetiche. Questo secondo modo, con la sua unicità, caratterizza le V_n normali di seconda classe, mentre non sappiamo se l'unicità del primo modo le caratterizzi egualmente.

Questa seconda costruzione è analoga alla prima, con la differenza che in luogo delle linee (23) bisogna servirsi delle linee x_1: lungo una di esse il trasporto (1) è il parallelismo di FERMI (il quale è il trasporto rappresentato dalla (1) quando $\mathbf{v}$ è il versore sulla linea lungo la quale viene effettuato).

Orbene: l'unicità di questa seconda costruzione caratterizza le V_n normali di seconda classe.

Infatti, sia una V_n ed in essa una congruenza normale di linee L. Le V_{n-1} ortogonali alla congruenza siano euclidee.

Definiamo un trasporto di vettori nel seguente modo.

Siano P e Q due punti di V_n ed in P sia fissato un vettore $\mathbf{u}$. Sia H il punto dove la L passante per P incontra la V_{n-1} che contiene Q. Si trasporti $\mathbf{u}$ da P in H lungo la L secondo il parallelismo di FERMI ed il vettore così ottenuto in H si decomponga in due vettori ortogonali, uno tangente alla L, l'altro tangente alla V_{n-1}. Quest'ultimo si trasporti da H in Q per parallelismo nella V_{n-1} e lo si componga poi con un vettore ortogonale alla V_{n-1}, in modo che il vettore risultante abbia la stessa lunghezza di $\mathbf{u}$: il vettore $\mathbf{u}'$ così ottenuto in Q è il risultato del trasporto di $\mathbf{u}$ da P in Q.

Supponiamo che $\mathbf{u}'$ sia indipendente dal modo come si arriva da P in Q, nel senso che se P, P_1, P_2,...., P_m, Q è una qualunque catena di punti, il trasporto di $\mathbf{u}$ da P in P_1, da P_1 in P_2 etc., dia sempre in Q il medesimo vettore. Dimostreremo che allora la V_n è normale di seconda classe.

Assumiamo le L come linee x_1 e fissati in un punto di V_n $n-1$ vettori $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$,...., $\mathbf{v}_n$ a due a due ortogonali ed ortogonali alla linea x_1, trasportiamoli in ogni punto della V_n e poi assumiamo come linee x_i $(i=2, 3,...., n)$ quelle della congruenza tangente a $\mathbf{v}_i$. Chiamiamo $\mathbf{v}$ il versore sulle linee x_1.

Per la particolare scelta di linee coordinate sarà

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_i\, a_{ii} dx_i^2.$$

Occupiamoci di un trasporto infinitesimo da un punto P di coordinate x_i ad un punto P' di coordinate $x_i + dx_i$. Per P si consideri la linea x_1 e sia H il punto di essa la cui prima coordinata è $x_1 + dx_1$.

Trasportiamo un vettore $\mathbf{u}$ da P in H lungo la linea x_1 secondo il parallelismo di FERMI.

Il trasporto di $\mathbf{u}$ lungo la linea x_1 definirà lungo questa linea un vettore, che continuiamo a chiamare $\mathbf{u}$, e per il quale si avrà

$$\dot{\mathbf{u}} = -(\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{v}})\mathbf{v} + (\mathbf{u} \times \mathbf{v})\dot{\mathbf{v}}, \tag{24}$$

intendendo le derivazioni rispetto al parametro x_1 al quale la linea è riferita.

Ora $\dot{\mathbf{v}}$ ha nulla la prima componente controvariante, mentre le altre sono

$$\begin{Bmatrix} 1\ 1 \\ i \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} = -\frac{1}{a_{ii}\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_i} \qquad (i=2, 3,...., n)$$

e perciò

$$\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \sum_{2}^{n}{}_i \begin{Bmatrix} 1\ 1 \\ i \end{Bmatrix} a_{ii} u^i = -\frac{1}{2\sqrt{a_{11}}} \sum_{2}^{n}{}_i \frac{\partial a_{11}}{\partial x_i} u^i;$$

poi è

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = a_{11} u' \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} = \sqrt{a_{11}} u'.$$

La (24) ci darà dunque, per $i > 1$,

$$du^i + \sum_{1}^{n}{}_h \begin{Bmatrix} h\ 1 \\ i \end{Bmatrix} u^h dx_1 = -\sqrt{a_{11}} u^1 \frac{1}{2a_{ii}\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_i} dx_1 = -\frac{1}{2a_{ii}} \frac{\partial a_{11}}{\partial x_i} u^1$$

e cioè

$$du^i + \sum_{2}^{n}{}_h \begin{Bmatrix} h\ 1 \\ i \end{Bmatrix} u^h dx_1 = 0$$

e finalmente

$$du^i + \frac{1}{2a_{ii}} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_1} u^i dx_1 = 0 \qquad (i=2, 3,\dots, n). \tag{25}$$

Avremo così nel punto H un vettore le cui componenti controvarianti sono $u^i + du^i$. Questo lo decomponiamo in due, uno tangente alla linea x_1 e l'altro ortogonale. Quest'ultimo, nella varietà euclidea $x_1 = \text{cost.}$ contenente H, riferita alle coordinate $x_2, x_3,\dots, x_n$, avrà le componenti controvarianti $u^i + du^i$ $(i > 1)$. In questa varietà euclidea lo spostiamo per parallelismo da H in P'. Avremo così in P', nella varietà euclidea, un vettore le cui componenti controvarianti sono

$$u^i + du^i + \sum_2^n{}_{hk} \left\{ {h\,k \atop i} \right\} (u^h + du^h) dx_k \qquad (i=2, 3,\dots, n)$$

ossia, trascurando gli infinitesimi di second'ordine:

$$u^i + du^i + \sum_2^n{}_{hk} \left\{ {h\,k \atop i} \right\} u^h dx_k \qquad (i=2, 3,\dots, n)$$

e cioè, per la (25),

$$u^i - \frac{1}{2a_{ii}} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_1} u^i dx_1 + \sum_2^n{}_{hk} \left\{ {h\,k \atop i} \right\} u^h dx_k .$$

Queste, per $i=2, 3,\dots, n$, rappresentano anche le componenti di posto i del vettore $\mathbf{u}$ trasportato da P in P' nella V_n secondo la costruzione che abbiamo indicata.

Detto trasporto, che abbiamo definito per via geometrica, è perciò rappresentato da un sistema di n equazioni differenziali, $n-1$ delle quali sono le seguenti:

$$du^i = -\frac{1}{2a_{ii}} \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_1} u^i dx_1 + \sum_2^n{}_{hk} \left\{ {h\,k \atop i} \right\} u^h dx_k \qquad (i=2, 3,\dots, n).$$

Queste in particolare debbono essere soddisfatte dai versori $\mathbf{v}_i$ $(i > 1)$ delle linee coordinate x_i. Per $\mathbf{v}_2$, avendo questo nulle tutte le componenti controvarianti tranne $u^2 = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}$, se i è diverso da 1 e 2, sarà

$$0 = \sum_2^n{}_k \left\{ {2\,k \atop i} \right\} \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} dx_k$$

cioè

$$\left\{ {2\,2 \atop i} \right\} dx_2 + \left\{ {2\,i \atop i} \right\} dx_i = 0$$

e quindi

$$\left\{ {2\,2 \atop i} \right\} = 0, \qquad \left\{ {2\,i \atop i} \right\} = 0,$$

e finalmente

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial a_{ii}}{\partial x_2} = 0.$$

Analogamente, se $i \neq j$, $i > 1$, $j > 1$,

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial x_j} = 0,$$

cioè a_{ii} per $i > 1$ è funzione delle sole x_1 ed x_i, cioè la V_n è normale di seconda classe.

Resterebbe a vedere se esistono V_n di seconda classe che non siano normali.