

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GAETANO SCORZA

**In memoria di Luigi Bianchi**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1<sup>re</sup> série, tome 16, n° 2 (1930), p. 3-27*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1930\\_1\\_16\\_2\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1930_1_16_2_3_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1930, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

GAËTANO SCORZA

IN MEMORIA

DI

LUIGI BIANCHI

COMMEMORAZIONE

*tenuta nella R. Scuola Normale Superiore di Pisa  
addì 8 aprile 1930 (VIII)*

PISA

TIPOGRAFIA EDITRICE PACINI MARIOTTI

—  
1930 - VIII



---

Come alla gioia del ritorno in patria, per l'esule che ne sia rimasto lungamente lontano, non è estranea una certa malinconica tristezza, per gli inevitabili dolorosi mutamenti apprestatigli dal tempo edace, così il piacere di ritrovarmi in questa nostra gloriosa Scuola Normale, che richiama alla mia memoria taluni dei ricordi più cari della mia gioventù, non è disgiunto da un senso di profonda mestizia.

Troppo recenti sono le dipartite del Bianchi, del Rosati e del Nicoletti, cui mi legavano sentimenti di venerazione devota, di fraterna amicizia o di cordiale colleganza, perchè in me sia sparita ogni traccia dello schianto, che, a volta a volta, ne ho provato, o dello stupore angoscioso col quale ho assistito ad un così pervicace accanirsi del Fato contro la Facoltà matematica pisana.

Comunque ringrazio sentitamente il sen. Gentile d'avermi dato, con l'invito a rievocare dinanzi a voi l'alta figura del Bianchi, l'occasione di riavvicinarmi alla nostra comune *alma mater* e di rivivere per qualche momento nel ricordo i dolci tempi passati.

Veramente, se l'amicizia non gli avesse fatto velo, avrebbe dovuto rivolgersi per tale incarico ad altri, assai più esperti di me nel campo coltivato con maggior compiacenza dal Bianchi; ma egli deve aver pensato che, qui, più che di una fredda

cerimonia accademica si tratta di un rito di rievocazione amorosa; e nel supporre non inferiore ad altri nella devozione verso la memoria del nostro grande Maestro io non credo che egli si sia ingannato.

Mi basta richiamar nel ricordo la figura fisica del Bianchi, quale mi apparve nel 1894, allorchè venni qui a Pisa per iniziare i miei studi matematici, e quale la rividi negli ultimi anni di Sua vita, quando nel novembre del 1923 ci trovammo insieme nel Consiglio Superiore nominato da S. E. Gentile, perchè nei tratti di essa io riconosca l'immagine migliore delle doti precipue dello scienziato e dell'uomo.

Di statura media, ma dalle membra possenti nel pieno della virilità, ben piantata sulle gambe poderose, come su solidi pilastri, la persona del Bianchi si era venuta via via affinando col proceder degli anni; e la costante dolcezza e serenità dello sguardo, che dapprima non riusciva a togliere alle Sue fattezze un certo che di massiccio e quasi di rude, aveva finito per dare all'alta fronte ed a tutto il Suo viso una luminosità pacata e spanta, pronta a fiorire, al bisogno, in un sorriso arguto e festevole.

Ebbene, la robusta possanza, la solida quadrata saldezza erano le caratteristiche fondamentali della Sua meravigliosa operosità scientifica e della Sua cultura; e la semplicità mite, la bontà candida ed ingenua, quasi di fanciullo, non disgiunta, come nella puerizia, da una certa timidità, erano i tratti essenziali dell'anima del Bianchi, che a noi Suoi allievi lo rendevano estremamente caro.

Amplissima, se non enciclopedica, era la Sua cultura; ma in tutte le regioni, cui si estendeva, penetrante arditamente fino agli strati più profondi,

La pura conoscenza erudita non era nelle simpatie del Bianchi; delle teorie scientifiche, cui si rivolgeva la Sua attenzione, non gli bastava essere informato così alto, alto, alla bell'e meglio, tanto da sapere all'ingrosso in che consistessero. Egli voleva signoreggiarle da padrone assoluto, sì da potersene valere con sicurezza per risolvere questioni di larga portata.

V'era anche per Lui il campo di ricerche prediletto, cui i Suoi studi si rivolgevano con amore particolare e costanza indefessa — e cioè la geometria infinitesimale metrica della quale per anni egli ha tenuto il primato mondiale—; ma all'analisi pura, all'algebra superiore ed all'alta aritmetica Egli non guardò con occhi disattenti o di semplice curioso, bensì di conoscitore avveduto e di collaboratore efficace. E quando si rifletta alle parecchie migliaia di pagine delle Sue Memorie originali, ai poderosi volumi, con i quali ha dotata la nostra trattatistica di una magnifica collana di opere divulgative, e ai corsi di lezioni sulle parti più elevate della matematica che Egli variava con frequenza ammirevole ed impartiva con invidiabile bravura, non si può non riconoscere che in Lui la felicità dell'ispirazione e la fecondità della vena si disposavano egregiamente con una ben rara e grandiosa capacità di lavoro.

Nè la Sua fatica, fornita sempre con gioia, ha conosciuto soste o stanchezza; l'ultimo frutto di essa è stata una ponderosa Memoria uscita per le stampe qualche mese dopo la Sua morte.

La vita di Luigi Bianchi, come di solito accade per i matematici della Sua levatura, si svolse tranquilla e serena, tra il culto perenne e disinteressato della Scienza, la dolcezza degli affetti familiari, i doveri dell'insegnamento adempiuti con zelo ed efficacia esemplari.

Fu la vita dello studioso, schiva dei romori mondani, tutta assorta nell'appassionato fervore dell'indagine scientifica e per ciò stesso arrisa da un mite, diffuso lume di poesia.

Egli nacque a Parma il 18 gennaio 1856 da Francesco Saverio Bianchi, giurista valoroso; e innamoratosi della matematica fin da quando nel ginnasio, avvicinata l'aritmetica razionale, potè sentire il fascino dei procedimenti deduttivi, al termine degli studi secondarî si presentò agli esami di concorso banditi da questa Scuola Normale Superiore, e nel novembre del 1873, non ancora diciottenne, vi fu ammesso, con i pieni voti assoluti, quale allievo interno.

In essa ed all'Università ebbe a maestri, ricordati poi sempre con venerazione affettuosa e devota, il Betti ed il Dini; e, percorso con somma lode il *curriculum* degli studî universitari e normalistici, nel novembre del 1877 conseguì la laurea in matematiche presentando alla Commissione esaminatrice una tesi sulle superficie applicabili, dichiarata degna di stampa ed accolta nel II° volume degli Annali di questa Scuola.

Laureato, rimase qui a Pisa due anni col posto di perfezionamento Lavagna; e nel gennaio del 1879 superò trionfalmente l'esame di abilitazione all'insegnamento con una tesi sulle superficie a curvatura costante e le elicoidi — pure stampata nel detto volume degli Annali —, che divenne ben presto classica, perchè in essa apparvero i primi germi di quella teoria della trasformazione, di cui tra poco avremo da parlare, e che costituisce la gloria maggiore della Sua carriera di scienziato.

Nel biennio successivo, quale vincitore di una borsa di perfezionamento all'estero, frequentò le Università di Monaco e di Gottinga e potè avvicinare così l'avvincente personalità del Klein, ossia di quel gran signore della matematica che, pur non

essendo il ricercatore più geniale e più profondo dei suoi tempi (si pensi che egli fu contemporaneo del Poincaré!), con le sue larghe orientatrici vedute di insieme e con la meravigliosa operosità sua e dei suoi scolari, sorretta da una rara avvedutezza organizzatrice, ne ha dominati e promossi per decenni i progressi e gli sviluppi.

Tornato in Italia, nel 1881, nè i Maestri, che avevano potuto apprezzarne la promettente valentia, vollero che la Scuola pisana si lasciasse sfuggire la cooperazione del valoroso suo Allievo, nè il Bianchi, attratto dal fascino del loro alto magistero e dalla nobiltà delle tradizioni normalistiche, poté desiderare alla Sua vita compito più ambito che quello di collaborare con essi all'educazione matematica delle giovani generazioni, che quivi era perseguita con instancabile zelo e con elevatissima serietà di intenti.

Così egli fu subito nominato professore interno in questa Scuola Normale e, cinque anni dopo, nel 1886, quando già da qualche mese insegnava per incarico all'Università la geometria differenziale, ebbe ivi, in seguito a concorso, la cattedra di geometria analitica.

In essa rimase per tutta la Sua vita, pur continuando a tener corsi interni nella Scuola Normale e ad impartir lezioni all'Università, per 28 anni, di Matematiche superiori e, per 9, morto il Dini, di Analisi superiore.

Al Dini successe anche nella Direzione di questa Scuola che tenne finchè visse a partire dal novembre del 1918.

I Suoi altissimi meriti furono ben presto apprezzati nel mondo scientifico ed ebbero adeguati riconoscimenti.

Nel 1889, appena trentatreenne, vinse insieme col Pincherle il premio Reale dell'Accademia dei Lincei, che già da due anni l'aveva chiamato a suo socio; fu membro di numerose Ac-



ademie nostrane e forestiere, e nel 1909 le Sue famose ricerche sulle deformate delle quadriche per flessione furono premiate dall'Accademia di Parigi.

Nè gli mancarono onorificenze da parte del mondo ufficiale, sebbene queste venissero più lente per la Sua grande modestia e la Sua invincibile ritrosia a mettersi in mostra. Fu, per non alludere che alla più alta, Commendatore dell'Ordine Civile di Savoia; ma bisognò che con la riforma Gentile la nomina del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione fosse sottratta al gioco elettorale non sempre estraneo alle piccine rivalità accademiche, perchè egli fosse chiamato a farne parte, e che il Regime fascista instaurasse nella vita pubblica un salutare riconoscimento dei valori spirituali, perchè egli fosse nominato Senatore.

Come ho già accennato, il Bianchi fin dagli anni giovanili ebbe ad imbattersi, a proposito della Sua tesi di abilitazione, con l'ordine di idee che doveva poi costituire in prosieguo di tempo l'oggetto delle Sue ricerche più importanti e più famose.

In quella tesi Egli osservò che, mediante una semplice costruzione geometrica, nell'insieme delle superficie pseudosferiche con dato raggio, cioè nell'insieme delle superficie con data curvatura costante negativa, poteva essere stabilita una trasformazione, da Lui detta complementare, per la quale a ciascuna superficie dell'insieme venivano ad esserne collegate delle altre costituenti un sistema semplicemente infinito. Di più la natura della trasformazione era tale che, applicandola successivamente, da una superficie pseudosferica nota ne potevano esser dedotte altre costituenti un sistema di un ordine di infinità elevato quanto si volesse.

Dal punto di vista dell'analisi ciò veniva a significare l'acquisto di un procedimento per il quale, nota una soluzione particolare dell'equazione alle derivate parziali caratterizzante le superficie pseudosferiche di dato raggio, ne poteva esser costruita una soluzione dipendente invece da un numero grande a piacere di costanti arbitrarie.

Poichè in quel tempo per opera soprattutto del Lie e degli analisti francesi fervevano gli studi per l'integrazione delle equazioni differenziali, il rilievo del giovane matematico della Scuola pisana attrasse subito l'attenzione degli scienziati.

Gli è che, come ebbe a riconoscere il Lie, nessuno dei metodi noti era atto a fornire l'integrale generale dell'equazione alle derivate parziali delle superficie pseudosferiche; e quindi era da riguardare come altamente interessante un procedimento che in mancanza dell'integrale generale permettesse di costruirne di quelli dipendenti da un numero grande a piacere di costanti arbitrarie.

Si instaurava così quel metodo di integrazione ricorrente o successiva delle equazioni alle derivate parziali di cui il Bianchi avrebbe poi offerto sempre più numerose e vaste applicazioni.

Il Lie indicò pure una ulteriore trasformazione, estremamente semplice dal punto di vista analitico, per la quale da ogni assegnata superficie pseudosferica ne possono esser dedotte altre costituenti, insieme con essa, un sistema semplicemente infinito; ma codesto sistema riesce, per dir così, un *ciclo chiuso*, in quanto esso contiene le trasformate di Lie di tutte le sue superficie e non soltanto di quella a partir dalla quale è stato costruito.

Di guisa che, a differenza di quanto accade per la trasformazione complementare del Bianchi, quella del Lie, applicata

quante volte si voglia, da un integrale particolare dell'equazione delle superficie pseudosferiche non permette di dedurne che un integrale dipendente da una sola costante arbitraria.

Migliori progressi all'ordine di idee inaugurato dal Bianchi fece conseguire il Bäcklund con la scoperta, nel 1883, della trasformazione che porta il suo nome e che è una felice generalizzazione di quella complementare; ma anche per la trasformazione di Bäcklund fu il nostro Geometra, in primo luogo, ad indicare sotto quale aspetto meglio convenisse considerarla, e, in secondo luogo, a perfezionarne bellamente la teoria col teorema di permutabilità stabilito nel 1892 ed estendente una proposizione da Lui pure data fin dal 1885.

Giova fermarsi un momento a chiarire la duplice affermazione ora fatta, perchè così avremo il destro di porre in luce i motivi dominanti della parte più cospicua delle ricerche geometriche del Bianchi.

Fra i tanti modi di definire che cosa sia la trasformazione complementare, fissiamo l'attenzione su quello risultante dall'osservare che una superficie pseudosferica è trasformata complementare di un'altra quando, e solo quando, esse sono, insieme, le due falde focali di una congruenza pseudosferica normale.

Ebbene lasciamo cadere, col Bianchi, l'ipotesi che la congruenza sia normale, ma teniamo ferma quella che essa sia pseudosferica, cioè che siano costanti per essa e la distanza dei punti limiti e l'angolo dei piani focali. Le due falde focali della congruenza saranno due superficie pseudosferiche con la medesima curvatura e la trasformazione dell'una nell'altra segnata dai raggi della congruenza sarà appunto la più generale trasformazione di Bäcklund.

Ora la corrispondenza segnata sulle due falde focali dai raggi di una congruenza pseudosferica associa alle asintotiche dell'una falda quelle dell'altra, ossia è, come si dice, una corrispondenza asintotica; dunque la trasformazione di Bäcklund non veniva ad esser altro che una particolare trasformazione asintotica.

Ebbene le trasformazioni asintotiche costituiscono appunto lo strumento del quale il Bianchi si è avvalso per estendere a sempre più numerose e vaste classi di superficie le ricerche con tanta fortuna compiute per le superficie pseudosferiche.

E poichè la proprietà di segnare coi loro raggi sulle due falde focali una corrispondenza asintotica si appartiene non solo alle congruenze pseudosferiche ma a tutte, e solo, le così dette congruenze  $W$ , nell'ambito delle trasformazioni asintotiche rimase il Bianchi quando con fiducia, mostrata non vana dal successo, alle congruenze  $W$  fece ricorso per studiare le superficie applicabili sulle quadriche.

E diciamo ora in che sia consistito il perfezionamento apportato dal Bianchi alla teoria della trasformazione di Bäcklund col suo teorema di permutabilità.

Ad ottenere tutte le trasformate di Bäcklund di un'assegnata superficie pseudosferica occorre l'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria del tipo di Riccati; ora si domanda l'applicazione successiva della trasformazione di Bäcklund a tutte codeste trasformate richiede di nuovo, a volta, a volta, l'integrazione di un'equazione di Riccati o può essere effettuata con mezzi più semplici?

Una prima risposta è suggerita subito dal fatto ben noto che quando di un'equazione di Riccati si conosce un integrale

particolare quello generale si può ottenere per mezzo di quadrature; ciò porta infatti a riconoscere immediatamente che, compiuta la prima applicazione della trasformazione di Bäcklund ad una superficie pseudosferica assegnata, le successive richiedono non più la risoluzione di sempre nuove equazioni di Riccati, ma soltanto delle quadrature.

Ma assai più a fondo penetra la risposta che alla nostra domanda dà il teorema di permutabilità del Bianchi. Con esso infatti si riesce a dimostrare che l'applicazione ripetuta della trasformazione di Bäcklund, compiuto il primo passo, non richiede che calcoli algebrici e di derivazione!

La teoria della trasformazione per le superficie pseudosferiche, sorta, come abbiamo detto, nel 1879 con la tesi di abilitazione del Bianchi e divenuta per le Sue ulteriori ricerche congiunte a quelle del Bäcklund, nonchè del Lie e del Darboux, uno dei capitoli più belli della geometria differenziale, fino al 1899 rimase l'unico cospicuo esempio di quel metodo di integrazione ricorrente o successiva, cui poco fa è stato alluso.

Ed appariva come una singolarità strana la posizione, per dir così, di privilegio in cui, entro la classe delle superficie a curvatura costante, venivano a trovarsi le superficie pseudosferiche, cioè le superficie a curvatura negativa, di fronte a quelle con la curvatura positiva. Per le prime, tutta una serie di sviluppi interessanti e un tipo di trasformazioni estremamente efficaci; per le seconde, nient'altro che le trasformazioni di Hazzidakis e del Bonnet del tutto inadatte a fornire conseguenze utili nei riguardi dell'equazione alle derivate parziali ad esse relativa.

Lo spunto al gruppo di lavori coi quali il Bianchi riuscì

nel 1899 a costruire per le superficie a curvatura costante positiva una teoria della trasformazione, pari, per ampiezza di sviluppi e perfezione di risultati, a quella riguardante le superficie pseudosferiche, fu dato da una Nota del Guichard sulla deformazione delle quadriche rotonde comparsa nei *Comptes Rendus dell'Accademia di Parigi* il 23 gennaio di quell'anno.

A sì fatta teoria Egli pervenne dapprima a traverso l'inversione dei bei teoremi del Guichard — e quindi per una via differente da quelle che erano state percorse nel caso delle superficie pseudosferiche —; ma non tardò ad accorgersi che, in fondo, per ottenerla non v'era bisogno di cambiar mezzi di ricerca.

Se si tenta di operare sulle superficie a curvatura costante positiva al modo che il Bäcklund aveva fatto per quelle pseudosferiche si ottengono come loro trasformate non già delle superficie reali, ma bensì delle superficie immaginarie; gli è perciò che le trasformazioni di Bäcklund, sebbene dal punto di vista analitico potessero essere indifferentemente applicate a tutte le superficie a curvatura costante, positiva o negativa, sul terreno della geometria, non erano state sfruttate che per il caso della curvatura negativa, perchè soltanto per esse risultavano reali.

Ma il Bianchi, avvalendosi del Suo teorema di permutabilità, i cui sviluppi analitici sussistevano immutati anche per il caso di trasformazioni di Bäcklund immaginarie, riescì a far vedere che le nuove trasformazioni per le superficie a curvatura costante positiva, cui era stato condotto dall'inversione dei teoremi di Guichard non erano che prodotti di coppie, opportunamente scelte, di trasformazioni di Bäcklund immaginarie coniugate; e così egli non solo venne ad indicare una ulteriore via per ottenerle, ma chiarì anche perchè mai esse fossero rimaste per sì lungo tempo nascoste.

I teoremi del Guichard, che, indirettamente, avevano richiamata l'attenzione dei geometri sulle superficie a curvatura costante, più direttamente la attrassero sullo studio delle deformate per flessione delle quadriche, rotonde o non; e fu questo l'argomento di numerosi lavori del Bianchi che culminarono nella Memoria premiata il 1908 dall'Accademia di Parigi e furono esposti nel 3° volume della 2ª edizione della Sua Geometria differenziale.

Anche in essi l'uso dell'immaginario viene largamente adoperato, pur procedendosi in maniera che ad ogni passo della ricerca apparisca chiaro il significato reale dei risultati conseguiti; e dell'efficacia di tale strumento non vorrà meravigliarsi chi pensi alla sua indispensabilità nel campo della geometria algebrica e rifletta che per esso vengono a comporsi in bella unità tutti gli studi intorno alle superficie a curvatura costante, positiva o negativa, e intorno a quelle applicabili su quadriche, giacchè le superficie a curvatura costante altro non sono che le deformate delle superficie sferiche reali o immaginarie, secondo che la curvatura è positiva o negativa.

Il cardine fondamentale di queste nuove ricerche del Bianchi è da ravvisare nel teorema, da lui stabilito, che ogni superficie applicabile sopra una quadrica è prima falda focale di una doppia infinità di congruenze  $W$  che hanno per seconde falde focali superficie applicabili sulla quadrica medesima; ma difficilmente avrebbe superato i gravi ostacoli, che via via gli si paravano innanzi per stabilirlo, se non fosse stato continuamente sorretto dal suo acuto intuito geometrico che gli dava modo di dominare con sicura padronanza i faticosi sviluppi algoritmici.

E' rimasto famoso a codesto proposito il Suo ricorso all'affinità di Ivory per raggiungere con estrema semplicità un

risultato che per via analitica diretta avrebbe richiesto calcoli di enorme complicazione.

Nè meno significativa al proposito stesso è la piena conferma che lavori posteriori del Bianchi e più particolarmente del Calapso apportarono a quanto egli aveva previsto nella chiusa della prefazione al 3° volume della Sua Geometria differenziale, or ora ricordato; che cioè con le trasformazioni per le deformate delle quadriche da lui stabilite potessero comporsi tutte le altre che per lo scopo medesimo erano state escogitate.

Necessità di cose ci impedisce di entrare in dettagli a riguardo e di queste ricerche e delle altre numerosissime che il Bianchi ha compiuto sui più svariati argomenti di geometria differenziale.

Si tratta di circa 140 pubblicazioni, frequentemente assai ponderose, che hanno condotto alla scoperta di sempre più vaste estensioni della teoria della trasformazione a superficie o a sistemi tripli ortogonali; ad approfondimenti notevolissimi delle teorie dei sistemi ciclici, delle famiglie di Lamé o delle congruenze  $W$ ; all'introduzione di nuovi concetti di grande importanza, quali il coniugio in deformazione e gli insiemi di superficie che Egli ha chiamato sistemi obliqui di Weingarten; alla rielaborazione da un comune punto di vista di ricerche del Bianchi stesso o di altri, quale quella offerta dai Suoi amplissimi studi sul rotolamento e sulle congruenze di sfere; o al riconoscimento di proprietà riposte e inaspettate, quale la semplice caratterizzazione cinematica delle superficie  $W$  mediante un quadrilatero a lati eguali che si deformi in modo conveniente.



Il Fubini che ne ha discorso da par suo negli Annali di Matematica del 1928-'29 pur dedicandovi un articolo di circa 40 pagine non ha potuto darne un quadro completo.

Gli è che tra i singoli capitoli della Geometria Differenziale il Bianchi era riuscito a stabilire un così fitto reticolato di linee di comunicazione, che ogni progresso in un di essi gli si rifletteva in perfezionamenti di tutti gli altri; e i teoremi Gli fiorivano tra le mani con sì abbondevole facilità che spesso anche i risultati di una sola Memoria ad esser ricordati richiederebbero una troppo lunga enumerazione.

Nè a stabilir legami e intraveder relazioni tra i detti capitoli Egli si costringeva a rimaner nel campo della geometria differenziale euclidea.

Le estensioni ai casi non euclidei, che Egli frequentemente eseguiva, di teorie già fissate per quello euclideo, non erano compiute certo per il gusto di generalizzare, tanto più che spesso a far ciò non si incontravano difficoltà essenziali; ma per comporre il tutto in un corpo unitario di dottrine che fosse sempre più ricco di riscontri e di riflessi reciproci tra le sue singole parti.

Ed Egli si è avvalso tanto spesso e con sì esperta abilità delle geometrie non euclidee per resolver problemi riguardanti la geometria ordinaria, che il Fubini ben a ragione vede in codesto uso e in quello della nozione di trasformazione le due caratteristiche fondamentali della Sua produzione geometrica.

A mostrare infine con quanta prontezza, sorretta dalla Sua ampia coltura, il Bianchi sapesse trar profitto per il ramo di scienza da Lui prediletto degli aiuti che potevano essergli forniti dai rami di scienza da quello più discosti, basti ricordare una Sua Nota lineea del 1916, completata da una Memoria successiva del Cecioni, nella quale si risolve un problema ri-

guardante la determinazione di certe forme differenziali quadratiche a curvatura riemanniana nulla trasformandolo nel problema della determinazione di convenienti sistemi commutativi di numeri ipercomplessi.

Come è stato già detto non la sola geometria differenziale il Bianchi ha fatto oggetto di Suoi studi particolari.

A prescindere dalla circostanza che il metodo stesso, cui si informa quella disciplina e donde deriva il suo nome, Lo portava a cogliere, come abbiamo visto, risultanti interessanti non meno l'Analisi che la Geometria, non mancano tra le Sue pubblicazioni lavori di analisi pura, quali una bella Memoria sugli integrali ellittici di 1<sup>a</sup> specie ispirata a idee del Klein ed un cospicuo gruppo di Note lincee nelle quali, per non alludere che alle più importanti, o si dànno notevoli teoremi di unicità per problemi al contorno, o si estende il campo di applicabilità di un classico metodo di integrazione del Riemann, o si risolve il problema di Dirichlet per lo spazio non euclideo indefinito.

Degni di nota sono pure i Suoi contributi alla teoria dei gruppi continui, quale, ad es., la poderosa Memoria presentata all'Accademia dei XL sugli spazi a tre dimensioni con un gruppo continuo di movimenti; e ancora più, per numero e per mole, le Note e Memorie dedicate alla teoria dei numeri, disciplina che ha sempre attratta l'attenzione del Bianchi e per qualche tempo, fra il 1890 e il 1894, con maggiore intensità che la stessa geometria differenziale. Cadono appunto in codesto periodo di tempo le Sue belle ricerche sul gruppo modulare nei corpi quadratici immaginari, sulla teoria delle forme di Dirichlet e di Hermite appartenenti a quei corpi e sulle forme quadratiche quaternarie a coefficienti interi razionali; ricer-

che che costituiscono la parte più ragguardevole delle contribuzioni italiane all'aritmetica pura nel secolo XIX.

Ma a dare idea adeguata dell'efficacia propulsiva del Bianchi sulla cultura matematica italiana non basta tener conto dei Suoi imponenti contributi originali. Di pari, se non di maggiore importanza, perchè più estesa in superficie, è quella che Egli esercitò con la Sua attività di trattatista esperto e geniale, dallo stile lucido e stringato.

Lasciamo pur da parte, o perchè chiaro riflesso di ricerche personali, la Sua classica opera sulla geometria differenziale, le cui tre edizioni successive hanno offerto di codesta disciplina trattazioni via via rinnovantisi ed arricchentisi; o, perchè di carattere elementare ed affiancate nella nostra letteratura scientifica da ottimi testi dovuto ad altri autori, le Sue belle lezioni di geometria analitica; ma le funzioni di variabile complessa, le funzioni ellittiche ed i gruppi continui di trasformazioni non hanno ricevuto tra di noi esposizioni migliori di quelle fornite dai volumi del Bianchi; ed a quei giovani che chiedano libri italiani ove gli argomenti più elevati dell'alta aritmetica (forme quadratiche, corpi algebrici e loro ideali, rapporti reciproci fra la teoria dei numeri e quella delle funzioni analitiche) siano svolti con sufficiente ampiezza e ricchezza di sviluppi, non si possono indicare che le lezioni pubblicate dal Bianchi in litografia nel 1910 e il poderoso volume edito nei tipi della ditta Zanichelli nel 1923.

E se oggi, per un corso litografato del Cipolla, noi possediamo un'opera sulla teoria dei gruppi di ordine finito e i suoi rapporti con quella delle equazioni algebriche più aggiornata delle lezioni del Bianchi sui medesimi argomenti, pubblicate, in

litografia, il 1897 ed, a stampa, il 1910, dopo che per decenni erano state professate ai normalisti o da Lui o sui Suoi appunti da altri, a quest'ultime risale il merito di aver mantenuta viva fra di noi la conoscenza delle belle questioni dell'algebra superiore.

E qui, giacchè se ne offre l'occasione, giova fermarsi un momento ad additare ciò che a mio parere costituisce il carattere più saliente della tradizione normalistica nella cultura matematica italiana.

Come è noto l'ordinamento delle nostre Facoltà matematiche è tale che l'alta aritmetica e l'alta algebra non possono trovarvi posto costante. Non è il caso di parlarne nel primo biennio di natura elementare e propedeutica e rivolto tanto ai futuri matematici quanto ai futuri ingegneri; e nel secondo, dedicato ai corsi monografici, esse non si possono far penetrare, per di così, che di straforo, interpretandole, con criteri assai larghi, come capitoli di Analisi. Così accade bensì che a quando a quando nelle nostre Università qualche corso di Analisi superiore sia dedicato a quelle discipline; ma per necessità di cose, argomenti di più stretta pertinenza dell'Analisi premendo con urgenza maggiore, ciò non può avvenire che assai di rado ed in modo al tutto sporadico; di guisa che la loro influenza sulla nostra cultura sarebbe stata ben scarsa e grama, se non avesse potuto esercitarsi che a traverso quei corsi.

Ma per fortuna l'opera egregia delle personalità eminenti preposte alla Direzione di questa Scuola Normale, rivolta a farne, con energia sempre maggiore, un austero seminario scientifico, piuttosto che uno scialbo istituto pedagogico — e per ciò stesso la più efficace palestra di addestramento alla pro-

fessione di insegnante —, con la istituzione di due corsi ben nutriti pei giovani normalisti tenuti sistematicamente e dedicati, l'uno, nel primo anno di studi, alla teoria dei numeri, l'altro, nel secondo, a quella dei gruppi di ordine finito e sue applicazioni, provvide a che in Pisa trovassero culto costante le discipline in cui più risplende l'adamantina purezza della matematica e meglio si rivelano il suo fascino e la sua malia.

Ed è appunto nella solida preparazione aritmetico-algebrica fornitagli da questa Scuola che va ravvisato il vantaggio migliore di chi da essa si appresta ad entrare nell'arringo matematico.

In una conversazione avuta anni fa con l'Enriques, l'insigne geometra nostro che voi tutti conoscete, egli faceva risalire alle lezioni del Bianchi sulla teoria delle equazioni algebriche ed allo studio dei lavori del Nöther l'influenza più decisiva sulla formazione del suo abito mentale matematico.

Che dire infine dell'impressione che su tutti i Suoi allievi produceva l'insegnamento del Bianchi?

Ascoltarlo era un incanto! Ogni Sua lezione era una compiuta opera d'arte.

Come i capitoli dei Suoi libri sono suddivisi in brevi e spigliati paragrafi ciascuno avente una certa propria autonomia, nulla affatto in contrasto con la veduta unitaria dell'insieme, così le Sue lezioni, pur connettendosi strettamente fra di loro in un tutto armonico nell'economia generale del corso, erano tagliate in modo che ciascuna apparisse come qualche cosa di organico e di definitivo.

Di guisa che chi le seguiva, al pari di chi si ponesse alla lettura dei Suoi lucidi libri, aveva non già l'impressione di ag-

girarsi, smarrito, per una selva selvaggia, ma piuttosto di salire su su per un'incantevole strada panoramica con frequenti terrazze, che gli dessero agio di riposarsi e di godersi beatamente i punti di vista più deliziosi.

Ben conscio del fatto che, spesso, il porre chiaramente una questione è per metà risolverla e che il seguire un ragionamento un po' faticoso diventa agevole, ove si tenga fiso lo sguardo al termine cui si mira, egli non si poneva a dimostrare un teorema, se prima non ne avesse messo pienamente in luce il significato, e se la dimostrazione non poteva essere sbrigata in pochi minuti non v'era caso che egli si accingesse a svilupparla senza averne preaccennato i passi essenziali.

Rammento ancora com'Egli iniziasse le lezioni di *Matematiche superiori* a noi allievi del 3° corso nel novembre 1896.

Quell'anno si era proposto di svolgere i fondamenti della geometria differenziale; ma poichè ad esporli non bastavano le nozioni di analisi apprese nel corso di *Calcolo* bisognò che cominciasse dal dedicare un buon gruppo di lezioni alle equazioni differenziali.

Partì dai sistemi di equazioni differenziali del 1° ordine in forma normale ed, enunciato il teorema di esistenza, disse che per dimostrarlo avrebbe fatto ricorso al così detto metodo delle approssimazioni successive di Peano e di Picard.

E questo metodo e la così detta condizione di Lipschitz che compariva fra le ipotesi dell'enunciato erano, allora, per noi allievi, delle novità; quindi, in conformità delle Sue consuetudini, non si accinse a presentar senz'altro la dimostrazione, ma in primo luogo si pose a far vedere che le funzioni date soddisfacevano certo alla condizione di Lipschitz ove si fossero supposte derivabili; e, in secondo luogo, soppressi tutti i dettagli giustificativi, non indicò che lo schema del procedimento di

Peano e Picard chiarendone in modo concreto l'applicazione con lo sviluppo effettivo di un esempio.

La dimostrazione in piena forma, per necessità di cose un po' lunga, non fu data che nella lezione seguente; ma ne possedevamo ormai con piena padronanza il filo direttivo e ciò che altrimenti ci avrebbe data l'impressione di un'arruffata matassa, ci si sgomitò dinanzi con perfetta spontaneità ed agevolezza.

Si badi, per altro, che la chiarezza luminosa della Sua esposizione non era raggiunta con un proceder lento e prolisso, chè le lungaggini sono talvolta il più fastidioso impedimento a tener desta l'attenzione. Il Suo eloquio era anzi rapido e snello e gli sviluppi algoritmici, ove non richiedessero che la meccanica applicazione di semplici regole di calcolo letterale, erano bene spesso soppressi.

« E ciò è subito visto » — era uno dei Suoi intercalari favoriti; ed Egli poteva ben dirlo, chè era veramente maestro nello sbrigare in breve ed insieme con perspicuità cristallina, ciò che ad altri avrebbe portato via chi sa quanto tempo.

Ma ciò che soprattutto suscitava la nostra ammirazione era l'artistica eleganza con la quale Egli sapeva presentare tutto che dicesse; la signorilità disinvolta del Suo muoversi sicuro ed agevole fra i più delicati intrichi della matematica; il tono caldo e convinto del Suo discorso, il Suo rifletter pronto, con lo sfavillio delle pupille, la lucente bellezza delle teorie che veniva via via esponendo.

*... Si vis me flere, dolendum est*

*Primum ipsi tibi...*

avvertiva l'arguto poeta latino; ebbene il Bianchi riesciva a far sentire anche ai più refrattari il fascino della matematica mostrandosene Egli per il primo tutto quanto pervaso.

Non che la commozione estetica, della quale Egli era evidentemente in preda mentre parlava, trovasse mai espressione esplicita nelle Sue parole; era troppo profondamente sentita, perchè, come tutti i grandi amori, non si circondasse del più pudico riserbo. No, essa non appariva che dal tono della Sua voce e dall'illuminarsi del Suo sguardo; ma bastava, perchè essa ci investisse tutti ed ai più sensibili fra di noi desse dei veri brividi di godimento — l'alto godimento in cui solo lo spirito umano si acqueta e che ad esso non proviene se non dall'arrender divino di ciò che lo Shelley chamava la Bellezza Intellettuale.

Dicendo della commossa attenzione, con la quale il Bianchi era seguito dal Suo uditorio, ho implicitamente detto della grande influenza morale che intorno a Sè esercitava.

Oh, si dirà, altro è insegnare ed altro educare!

E sì le due cose sono ben diverse, quando siano astrattamente concepite; a quel modo che, in astratto, la Scienza non è una Fede o una Regola di vita.

Ma nella viva concreta realtà non esistono il puro insegnare o il puro educare, il puro sapere o il puro credere; esistono uomini che insegnano, educano, sanno o credono; uomini che vivono la vita dello spirito. E *se* la vivono, non possono che viverla in pieno; in tutto che facciano non possono non impegnare tutta la loro personalità, anche se all'osservatore distratto ciò non appare.

Non riesce veramente ad insegnare, se non chi riesce a



stabilire tra sè e i suoi scolari una corrente di calda simpatia umana, a traverso la quale le anime di questi gli si abbandonino col generoso entusiasmo di che son capaci i cuori giovanili. E la simpatia non sorge se nella voce dell'insegnante, checcè essa dica, per quell'intuito sottile che difficilmente li inganna, i discepoli non avvertono quell'inconfondibile timbro che solo può esser dato da una dignitosa serietà di vita.

Ora la bontà mite, la candida sincera modestia, l'integrità semplice e serena del Bianchi per noi non rimanevano fuori dell'aula quando ne ascoltavamo le lezioni; senza che ce ne accorgessimo operavano su di noi con quella suggestione che è tanto più potente, quanto più è silenziosa.

Il « taciturno Bianchi » ebbe a dire il sen. Gentile rievocando in un suo bello scritto su questa Scuola Normale i ricordi degli anni quivi vissuti come allievo; e difatti bisognava che Egli si trovasse in ristrettissimo cerchio di persone amiche perchè vincessero la Sua timida ritrosia e concedesse il dono della Sua conversazione arguta e gaia — della gaiezza spensierata che per solito sparisce con l'adolescenza, ma rimane compagna perenne delle vite vissute con purità e semplicità di cuore —; pure, tacendo sempre, non mettendosi mai in mostra, nulla abborrendo più che l'improntitudine esibizionistica dell'ambizione e della vanità, Egli seppe tanto irradiare intorno a sè l'amore alla scienza, alla scuola, alla famiglia, alla Patria riscaldante l'anima Sua eletta, che tutta Pisa, allorchè scomparve, sentì che era morto un grande scienziato e, insieme, un ottimo padre e un ottimo cittadino. E grata a chi l'aveva illuminata di tanta luce di sapere ed avvivata di tanto calor di virtù, ne accompagnò commossa la salma al riposo eterno nel suo glorioso Camposanto monumentale.

Riposo che non sarà una quiete fredda e sconsolata; il me-

more affetto dei Suoi cari e dei Suoi allievi, l'ammirazione di che sempre si circonda la Sua figura nella mente dello studioso posto a fronte dell'imperituro monumento, che Egli si è eretto con le Sue opere, sapranno suscitare intorno ad esso un consolante tepore.

Così il sonno del bimbo, che s'addormenta, beato, fra le braccia materne, è reso più dolce dalla calda atmosfera che attorno gli suscitano la commossa tenerezza e la trepida ammirazione della mamma.