Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Antonino Gennaro

Sopra un tipo di trasformazioni cremoniane fra spazi a quattro dimensioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 15 (1927), exp. nº 6, p. 1-50
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1927_1_15__A6_0>

SOPRA UN TIPO

DI TRASFORMAZIONI CREMONIANE

FRA

SPAZI A QUATTRO DIMENSIONI

TESI DI ABILITAZIONE

PRESENTATA DAL

DOTT. ANTONINO GENNARO

(*Pisa, Giugno 1927*).

PREFAZIONE

Nel presente lavoro mi occupo principalmente (§§ 6-12) della trasformazione cremoniana che nasce fra due spazi lineari S_4 ed S_4^*, quando si riferiscano proiettivamente gli iperpiani di S_4^* alle quadriche V_3^2 di S_4 passanti per una curva generale del quinto ordine di genere 1, quadriche che costituiscono un sistema lineare ∞^4 omaloidico.

Questo sistema omaloidico è fra quelli enumerati in una nota da Del Pezzo (Reale Accademia di Napoli: Adunanza del 15 giugno 1895), ma già avanti il Bianchi ne aveva provato l'esistenza a proposito di uno studio sugli integrali ellittici di prima specie (Mathematische Annalen: Band XVII, 1880).

Il secondo sistema omaloidico, di S_4^*, risulta essere costituito dalle ipersuperficie del terzo ordine con 10 punti doppi, passanti per una rigata ellittica del quinto ordine. Al variare della ipersuperficie nel sistema i 10 punti doppi descrivono la rigata ellittica; si ottiene così un sistema omaloidico la cui ipersuperficie generica possiede punti doppi variabili (sopra una varietà base), in conformità di un teorema generale di Bertini (cfr. E. Bertini: Introduzione alla Geometria Proiettiva degli Iperspazi; Cap. X, 10).

Trattato il caso generale, passo quindi ai più importanti fra i 13 casi particolari in cui la quintica ellittica sia riducibile; cinque di questi non sono menzionati nella detta nota di Del Pezzo. In alcuni dei casi le ipersuperficie del sistema omaloidico di S_4^* diventano ipersuperficie del terzo ordine con una retta doppia e quattro punti doppi ulteriori (§§ 15-16). La rappresentazione spaziale della generica di tali ipersuperficie è costituita dalle quadriche dello spazio ordinario passanti per cinque punti, dei quali quattro complanari.

Ho creduto opportuno far precedere lo studio propostomi da alcune considerazioni di indole generale, le quali giustificano il procedimento da me seguito e rendono più spedita la trattazione.

CAPITOLO PRIMO

Alcune generalità.

§ 1. Si abbia in S_4 un sistema lineare ∞^4 omaloidico $|\varphi|$ di ipersuperficie φ dell'ordine n. Indichiamo con F la superficie variabile intersezione di due φ generiche e con m il suo ordine, con Γ la curva intersezione di tre φ generiche, fuori della varietà base, e con l il suo ordine.

Riferendo proiettivamente le ipersuperficie φ agli iperpiani di un altro spazio S_4^*, cosicchè le F corrisponderanno ai piani di S_4^* e le Γ alle rette, nasce una trasformazione birazionale o cremoniana fra i due spazi S_4 ed S_4^*. In S_4^* viene allora determinato un secondo sistema omaloidico $|\psi|$ di ipersuperficie ψ, corrispondenti agli iperpiani di S_4, e gli ordini relativi al sistema $|\psi|$ sono i numeri l, m, n, cioè le ψ sono dell'ordine l, le superficie variabili intersezioni di due ψ sono dell'ordine m e le curve intersezioni di tre ψ, fuori della varietà base, sono dell'ordine n. Le ψ passeranno dunque per una superficie fissa dell'ordine $l^2 - m$, le superficie variabili intersezioni di due ψ avranno in comune con la varietà base una curva dell'ordine $l\,m - n$, e le curve intersezioni di tre ψ fuori della varietà base, avranno con questa $l\,n - 1$ punti in comune.

§ 2. Consideriamo lo spazio S_4 e il sistema omaloidico $|\varphi|$ in esso definito, valendo le stesse considerazioni per per lo spazio S_4^* e per il sistema $|\psi|$.

I punti fondamentali di S_4, cioè quelli che hanno i corrispondenti indeterminati, sono di quattro tipi:

Tipo 1°: Punti ai cui intorni corrispondono in S_4^* delle ipersuperficie. Essi diconsi *punti fondamentali isolati,* perchè in tal modo si comportano i punti base isolati di $|\varphi|$, nei quali le parti variabili dei coni tangenti alle φ formino altrettanti sistemi lineari semplici o composti con una involuzione, considerate le generatrici dei coni come elementi. Se δ è il grado del sistema lineare dei coni tangenti in un tal punto, ossia δ è il numero delle tangenti variabili nel punto alle linee Γ, la ipersuperficie corrispondente all' intorno del punto sarà di ordine δ ovvero $\frac{\delta}{\mu}$ secondo che il sistema dei coni tangenti è semplice o composto con una involuzione d' ordine μ.

Tipo 2°: Punti ai cui intorni corrispondono delle superficie. Essi diconsi *punti di linea fondamentale,* perchè quel comportamento ha il punto generico di una linea base isolata di $|\varphi|$, nel quale il cono tangente generico non abbia la parte variabile riducibile. Infatti, se P è un tal punto appartenente a uua linea base L di molteplicità r per $|\varphi|$, il cono d' ordine r, tangente in P alla φ generica, è costituito da piani per la tangente in P ad L; quindi a tutti i punti infinitamente vicini a P, situati in uno stesso piano tangente in P ad L, corrisponde in S_4^* uno stesso punto, giacchè staccano da $|\varphi|$ tutti lo stesso sistema ∞^3. Se δ è il numero dei piani variabili che compongono il cono tangente in P alla superficie F generica, la superficie, necessariamente razionale, corrispondente all' intorno di P, è di ordine δ ovvero $\frac{\delta}{\mu}$ secondo che il sistema dei coni tangenti in P alle φ è semplice ovvero composto con una involuzione d'ordine μ, considerati i piani generatori come elementi.

La linea fondamentale L si dice *di 1ª* o *di 2ª specie* secondo che la superficie corrispondente al suo punto generico è variabile o fissa. Nel primo caso, al variare del punto su L, la superficie corrispondente descrive una ipersuperficie, il cui ordine è il numero dei punti variabili comuni alla Γ generica e ad L. Se tale numero è nullo, la linea L è quindi di 2ª specie; in tal caso la superficie fissa corrispondente al punto generico di L è una superficie fondamentale di 3ª specie per $|\psi|$; (vedi Tipo 3°).

Tipo 3°: Puuti ai cui intorni corrispondono delle curve. Essi diconsi *punti di superficie fondamentale,* perché in tal modo si comporta il punto generico di una superficie R, base di $|\varphi|$. Infatti, se r è la molteplicità di R per $|\varphi|$, il cono d'ordine r, tangente in un suo punto generico P alla φ generica, si spezza in r iperpiani passanti per il piano π tangente in P ad R, e a tutti i punti infinitamente vicini a P, situati in uno stesso iperpiano per π, corriin S_4^* un medesimo punto, poichè staccano da $|\varphi|$ lo stesso sistema ∞^3. Se δ è il numero degli iperpiani variabili che compongono il cono tangente in P alla φ generica, l'ordine della curva, necessariamente razionale, corrispondente all'intorno di P, è uguale a δ ovvero a $\dfrac{\delta}{\mu}$ secondo che il sistema dei coni tangenti in P alle φ è semplice o composto con una involuzione d'ordine μ, considerati gl'iperpiani per π come elementi.

La superficie fondamentale R dicesi *di 1ª specie* se al variare di P su R la curva corrispondente varia, assumendo una doppia infinità di posizioni. Allora variando P su R la curva descrive una ipersuperficie, il cui ordine è uguale al numero dei punti variabili comuni ad R e alla Γ generica. Se tale numero è nullo, la superficie R sarà di una delle specie seguenti.

La superficie R dicesi *di seconda specie* se esiste su R un sistema $|\gamma|$ di linee γ, tali che, facendo muovere P su una linea γ, la curva corrispondente resti fissa, mentre variando γ varii la curva corrispondente. Per ogni punto di R passerà una linea di $|\gamma|$ e due linee γ non avranno punti comuni. A tutta la superficie R corrisponderà allora in S_4^* una superficie R^*, pure fondamentale di 2ª specie per $|\psi|$, il cui sistema analogo $|\gamma^*|$ sarà costituito dalle curve corrispondenti alle linee γ, e l'ordine di R^* sarà uguale al numero delle γ variabili contenute nella superficie F generica.

La superficie R si dirà *di terza specie* se, variando comunque P su R, la curva corrispondente resta fissa. Questa curva sarà allora fondamentale di seconda specie per il sistema $|\psi|$.

Tipo 4.°: Punti ai cui intorni corrispondono intorni di punti. In tal modo si comporta un punto base di $|\varphi|$ nel quale il cono tangente alla φ generica sia fisso. Non è detto però che a un punto fondamentale del 4.° tipo corrisponda nell'altro spazio pure un punto fondamentale del 4.° tipo; (vedi fine del § 18).

In un punto fondamentale di qualsiasi tipo direzioni eccezionali sono quelle comuni a tutti i coni tangenti nel punto alle ψ. Per vedere ciò che corrisponde a una tale direzione, occorre fare degli esami ulteriori.

§ 3. La totalità dei punti corrispondenti agl'intorni di tutti i punti fondamentali di $|\varphi|$ costituisce la jacobiana di $|\psi|$. Infatti, se P è un punto fondamentale del primo tipo, detta V_3 la ipersuperficie corrispondente all'intorno di P, poichè un iperpiano generico di S_4 non contiene punti dell'intorno di P. una ipersuperficie generica ψ non ha punti comuni variabili con V_3. Allora le ψ passanti per un punto generico Q di V_3 contengono tutta la V_3 ed hanno in Q un iperpiano tangente fisso: quello tangente alla V_3. Il punto Q appartiene quindi alla jacobiana di $|\psi|$.

Sia P un punto di linea L fondamentale di prima specie per $|\varphi|$ e diciamo V_2 la superficie corrispondente. Poichè l'iperpiano generico di S_4 non ha punti in comune con l'intorno di P, la ipersuperficie generica ψ non ha con V_2 punti comuni. Allora le ψ passanti per un punto generico Q di V_2 contengono tutta la V_2 ed hanno quindi in Q un piano tangente fisso: quello tangente a V_2. Il punto Q appartiene dunque alla jacobiana di $|\psi|$.

Se P è un punto di superficie R fondamentale di prima specie per $|\varphi|$, si vede in modo analogo che le ψ passanti per un punto generico della curva corrispondente all'intorno di P contengono tutta la curva ed hanno quindi come tangente comune la tangente alla curva in quel punto. Questo appartiene dunque alla jacobiana di $|\varphi|$.

Le considerazioni superiori valgono anche per le varietà corrispondenti all'intorni di P nelle eventuali direzioni eccezionali.

La jacobiana è inoltre esaurita da tutte le varietà corrispondenti agli elementi fondamentali. Infatti, tenendo presente che un punto della jacobiana è caratterizzato dal fatto che tutte le ipersuperficie del sistema passanti per esso hanno ivi una tangente comune e che d'altra parte le ipersuperficie del sistema $|\psi|$ passanti per un punto Q della jacobiana hanno in comune una linea o una superficie o una ipersuperficie per Q, alla quale corrisponderà in S_4 un punto, questo è dunque fondamentale per $|\varphi|$.

§ 4. Per la determinazione della molteplicità delle varie parti costituenti la jacobiana di $|\psi|$ sono utili le considerazioni generali seguenti.

Sia in uno spazio S_r un sistema lineare ∞^r $|\varphi|$ di ipersuperficie, rappresentato dall'equazione

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \ldots\ldots + \lambda_r\varphi_r = 0.$$

La sua ipersuperficie jacobiana è data dall'equazione

$$\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right] = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0} & \ldots\ldots & \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_0} \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_r} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_r} & \ldots\ldots & \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} = 0.$$

Supponiamo che per un punto P di S_r passino ∞^μ ipersuperficie del sistema aventi in P un punto doppio (almeno). Esse costituiranno un sistema lineare, la cui equazione possiamo supporre sia

$$\lambda_0\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + \ldots\ldots + \lambda_\mu\varphi_\mu = 0.$$

Si avrà allora

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_i}\right)_P = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}\right)_P = \ldots\ldots = \left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_i}\right)_P = 0, \quad (i = 0, 1, 2, \ldots r),$$

essendo le derivate calcolate nel punto P. Quindi il determinante $\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}\right]$, sostituendovi per $x_0, x_1, \ldots, x_r$ le coordinate di P, viene ad avere $\mu+1$ colonne nulle ed è perciò nullo insieme con le sue derivate prime, seconde, ... μ^{esime}. Il punto P è dunque almeno $(\mu+1)^{uplo}$ per la jacobiana di φ.

Non vale però la reciproca, cioè un punto della jacobiana può essere di molteplicità $\mu + 1$ ed esserci soltanto un sistema di dimensione inferiore a μ di ipersuperficie φ aventi quel punto come doppio.

Dall'osservazione superiore segue che se tutte le ipersuperficie di un sistema lineare ∞^r passanti per un punto P hanno in P un S_k tangente comune, il punto P è k^{uplo} almeno per la jacobiana. In tal caso infatti esistono ∞^{k-1} ipersuperficie del sistema aventi in P un punto doppio, bastando imporre alle ipersuperficie di essere tangenti in P ad $r - k$ rette generiche per P.

Nel caso $r = 4$, ricordando (§ 3) che le ipersuperficie di $|\psi|$ passanti per il punto generico dell'ipersuperficie corrispondente a un punto fondamentale del 1° tipo hanno nel punto un iperpiano tangente fisso, e che le ipersuperficie di $|\psi|$ passanti per il punto generico della superficie corrispondente a un punto fondamentale del 2° tipo hanno nel punto un piano tangente fisso, si deduce che la parte di jacobiana di $|\psi|$ corrispondente a un punto fondamentale del 1° tipo è almeno tripla, e la parte corrispondente a una linea fondamentale di 1ª specie è almeno doppia per la jacobiana. Ciò vale anche se negli elementi fondamentali che si considerano esistono direzioni eccezionali.

La cosa ora mostrata è generale, cioè in una trasformazione cremoniana fra due S_r la parte di jacobiana corrispondente a una V_k fondamentale isolata ha almeno molteplicità $r - k - 1$.

§ 5. Segando il sistema omaloidico $|\varphi|$ con un S_3 generico dell'S_4, si ottiene la rappresentazione iperpiana in S_3 della ipersuperficie generica ψ. Conoscendo la jacobiana di $|\varphi|$ si ha un metodo alquanto spedito che ci permette di trovare le linee e le superficie fondamentali di prima specie, nonchè i punti fondamentali isolati del sistema $|\psi|$.

Sia R una superficie fondamentale di prima specie per $|\psi|$. Ai punti della ψ infinitamente vicini ad R corrispondono in S_3 i punti della superficie G intersezione di S_3 con la parte di jacobiana di $|\varphi|$ corrispondente ad R. Detto $|\chi|$ il sistema ∞^4 di superficie rappresentativo delle sezioni iperpiane di ψ, cioè il sistema sezione di $|\varphi|$, l'ordine di R sarà uguale al numero dei gruppi neutri in cui si distribuiscono i punti comuni all'intersezione di due χ generiche e a G fuori della varietà base di $|\chi|$, e la molteplicità di R sarà uguale al numero dei punti che costituiscono ciascun gruppo neutro.

Sia L una curva fondamentale di prima specie per $|\psi|$. Ai punti di ψ infinitamente vicini ad L corrispondono in S_3 i punti della superficie K intersezione di S_3 con la parte di jacobiana di $|\varphi|$ corrispondente ad L. L'ordine di L sarà uguale al numero delle curve γ variabili comuni ad una χ generica e a K, e la molteplicità di L per ψ sarà uguale al numero dei punti variabili comuni ad una γ e alla residua intersezione, fuori di γ e delle linee base di $|\chi|$, di due γ passanti per γ. Infatti agl'intorni su ψ dei punti comuni ad un iperpiano generico di S_4^* e ad L corrispondono in S_3 altrettante curve γ comuni a K e alla χ corrispondente alla sezione di ψ con quell'iperpiano.

Inoltre se P è uno dei punti comuni ad L e all'iperpiano, e k è la sua molteplicità per ψ (cioè la molteplicità di L per ψ), la superficie intersezione di ψ con l'iperpiano ha P come punto k^{uplo}, e ai punti infinitamente vicini a P sul cono tangente d'ordine k a questa superficie corrispondono i punti di γ; poichè un piano generico per P, contenuto nell'iperpiano, ha in comune col cono k generatrici, e alla sezione del piano con ψ corrisponde la curva intersezione di due χ contenenti γ, la residua curva intersezione delle due χ, fuori di γ e delle linee base di $|\chi|$, avrà in comune con γ k punti variabili.

Invece la molteplicità k' di L per le superficie sezioni della ψ con le altre ipersuperficie del sistema, le quali hanno per immagini i piani di S_3, sarà uguale all'ordine di quelle curve γ, come è facile vedere con considerazioni analoghe.

Sia P un punto fondamentale isolato di $|\psi|$. Ai punti della ψ infinitamente vicini a P corrispondono i punti della superficie H, sezione di S_3 con la parte di jacobiana di $|\varphi|$ corrispondente a P. La molteplicità di P per ψ è uguale al numero dei punti variabili, fuori delle linee base di $|\chi|$, comuni ad H e all'ulteriore intersezione di due χ contenenti H. Infatti i punti di H corrispondono ai punti infinitamente vicini a P sul cono tangente in P a ψ; due sezioni iperpiane generiche per P hanno per corrispondenti due χ contenenti H; se il punto P è h^{uplo} per ψ, ossia è d'ordine h il cono tangente in P a ψ, il piano intersezione di quei due iperpiani contiene h generatrici del cono, onde la curva intersezione delle due χ ha h punti variabili su H.

La molteplicità h' di P per le superficie sezioni di ψ con le altre ipersuperficie del sistema è uguale al numero dei punti variabili, fuori delle linee base di $|\chi|$, comuni ad H e alla sezione piana generica della parte che rimane, tolta H, di una χ contenente H, come si vede segando con un iperpiano per P il cono d'ordine h' tangente in P alla superficie intersezione di due ψ.

Invece la molteplicità h'' di P per le curve sezioni della ψ con le superficie intersezioni delle altre ψ del sistema prese due a due, curve che corrispondono alle rette di S_3, è evidentemente uguale all'ordine di H.

Viceversa, consideriamo la superficie H intersezione di S_3 con una parte della jacobiana di $|\varphi|$. Se l'intersezione di due χ generiche ha k punti comuni con H fuori della varietà base di $|\chi|$ e quei k punti si distribuiscono in gruppi neutri di μ punti ciascuno, si ha in $|\psi|$ una superficie fondamentale di prima specie dell'ordine $\frac{k}{\mu}$ e di molteplicità μ. Se è $k=0$ e una χ generica sega H in n curve variabili, ad H corrisponde una curva fondamentale di prima specie per $|\psi|$, il cui ordine è n e la cui molteplicità per ψ si calcola nel modo visto dianzi. Se è $n=0$, ad H corrisponde un punto fondamentale isolato, la cui molteplicità si computa come sopra.

Si osservi che in quello che precede i numeri k, k', k'' hanno i significati anzidetti solo quando nel punto generico della linea fondamentale isolato che si considera non esistono piani o rette tangenti fissi.

Quanto poi alle superficie di S_4 corrispondenti agli intorni in S_4^* dei punti di una linea fondamentale di prima specie per $|\psi|$, esse non sono altro che le parti in cui si spezzano le superficie secondo cui le φ tagliano, fuori delle superficie base, la parte di jacobiana corrispondente a quella linea, come risulta segando la linea con gl'iperpiani di S_4^*. Invece le curve corrispondenti agl'intorni in S_4^* dei punti di una superficie fondamentale di prima specie non sono che le parti in cui si spezzano le curve secondo cui le superficie F segano, fuori della varietà base di $|\varphi|$, la parte di jacobiana corrispondente a quella superficie, come risulta segando la superficie con i piani dell'S_4^*.

Si noti in fine che segando $|\varphi|$ con un piano generico si ottiene la rappresentazione piana della superficie intersezione di due ψ generiche.

CAPITOLO SECONDO

Trasformazione (2, 4, 3): Caso generale.

§ 6. Consideriamo in S_4 una curva generale Γ^5 del quinto ordine di genere 1, (curva normale di S_4, giacchè la serie lineare g_4^5 segata su di essa dagl' iperpiani di S_4 è completa) (*). Tutte le quadriche φ di S_4 passanti per Γ^5 formano un sistema lineare $|\varphi|$ che dico essere omaloidico.

Infatti le ∞^{14} quadriche di S_4 segnano su Γ^5 una serie lineare dell'ordine 10, completa, perchè contiene gli ∞^8 gruppi segati dalle coppie di iperpiani senza essere da questi gruppi esaurita; essa è quindi una g_{10}^9. Le quadriche di S_4 linearmente indipendenti contenenti Γ^5 sono dun-

(*) Una tale curva Γ^5 è evidentemente ulteriore intersezione di tre quadriche di S_4 passanti per una cubica gobba. Inoltre Γ^5 è la più generale curva ottenuta nel modo suddetto. Infatti tre quadriche di S_4 passanti per una cubica gobba Γ^3 si segano ulteriormente in una quintica Γ^5, che dico essere di genere 1. Invero due delle quadriche si segano in una $V_2{}^4$ contenente 16 rette tali che ad ognuna di esse se ne appoggiano altre cinque. L' S_3 cui appartiene Γ^3 taglia $V_2{}^4$ ulteriormente in una retta r, corda di Γ^3, e ad r si appoggiano 5 rette di $V_2{}^4$; le altre 10 si appoggeranno a Γ^3. Consideriamo ora la terza quadrica per Γ^3, che taglia, fuori di Γ^3, la $V_2{}^4$ in Γ^5. È chiaro che la retta r non s' appoggia a Γ^5, que $14 - 9 = 5$, cioè il sistema lineare considerato è ∞^4. Inoltre tre quadriche φ si tagliano, oltre che in Γ^5, in una cubica gobba Γ^3 avente con Γ^5 cinque punti in comune, giacchè l'S_3 cui appartiene Γ^3 incontra Γ^5 in cinque punti, i quali non possono essere fuori di Γ^3, altrimenti la corda di Γ^3 passante per uno di tali punti apparterrebbe alle tre φ e quindi a Γ^5, contro l'ipotesi che questa sia irriducibile. Una quarta φ per Γ^5 sega Γ^3 ulteriormente in un punto variabile, onde $|\varphi|$ è omaloidico.

Riferiamo proiettivamente le quadriche del sistema $|\varphi|$ agli iperpiani di un altro S_4, che indicheremo con S_4^*. Nasce allora una trasformazione cremoniana tra S_4 ed S_4^*, nella quale agli iperpiani di S_4^* corrispondono le quadriche φ, ai piani di S_4^* le V_2^4 per Γ^5, basi di fasci di quadriche, e alle rette di S_4^* le cubiche gobbe appoggiate in cinque punti a Γ^5. (Si osservi che ogni cubica avente cinque punti in comune con Γ^5, essendo, insieme con Γ^5, base di ∞^2 quadriche, è intersezione di tre φ.

In S_4^* viene determinato un secondo sistema omaloidico $|\psi|$ di ipersuperficie ψ, corrispondenti agli iperpiani di S_4. Il sistema $|\psi|$ è di ipersuperficie del terzo ordine con 10 punti doppi, come si deduce osservando che la rappresentazione iperpiana di una ψ generica, ottenuta segando $|\varphi|$

---

mentre le 5 rette appoggiate ad r sono bisecanti di Γ^5 e le 10 rette appoggiate a Γ^3 sono unisecanti di Γ^5. Proiettando Γ^5 da r sopra un piano π otterremo una curva piana C^5 in corrispondenza biunivoca con Γ^5, dotata di cinque punti doppi: quelli in cui i piani per r contenenti le bisecanti di Γ^5 incontrano π. (Si noti che se un piano per r contiene due punti di Γ^5, la loro congiungente, avendo tre punti in comune con le prime due quadriche, appartiene a V_2^4). Il genere di C^5, e quindi di Γ^5, è dunque $\frac{(5-1)(5-2)}{2} = 1$, c. d. d.

con un iperpiano generico di S_4, è costituita dalle quadriche per 5 punti, le quali corrispondono alle sezioni iperpiane della ψ. (Cfr. *Castelnuovo; Ricerche di geometria della retta...;* Atti dell'Ist. veneto; serie settima, tomo secondo, 1890-91. — *Sig. Dragoni; Sulla varietà cubica di S_4 dotata di 10 punti doppi;* Giornale di matematica, 40, 1902).

§ 7. La jacobiana di $|\varphi|$, che si sa *a priori* essere del quinto ordine, è costituita dalle ∞^4 corde di Γ^5. Infatti una corda di Γ^5 appartiene certo alla jacobiana, inquantochè tutte le φ passanti per un punto della corda la contengono tutta. D'altra parte la ipersnperficie luogo di tali corde è del quinto ordine. Invero, presa una retta generica r di S_4, consideriamo il fascio di quadriche φ passanti per Γ^5 ed r. L'ordine della nostra ipersuperficie sarà il numero delle corde di Γ^5 appoggiantisi ad r, cioè delle rette della V_2^4 base incidenti ad r, e tale numero è 5.

La jacobiana di $|\varphi|$, che indicheremo con V_3^5, ha Γ^5 come curva tripla. Per dimostrare ciò, consideriamo una retta generica per un punto di Γ^5 e proiettiamo da essa la Γ^5 sopra un piano: otterremo una curva piana C^4, del quarto ordine, in corrispondenza biunivoca con Γ^5. Dovendo C^4 essere di genere 1, avrà due punti doppi, i quali nascono da due corde di Γ^5 incontranti la retta r fuori del punto d'appoggio a Γ^5(*). In questo punto sono dunque raccolte tre intersezioni della retta r con V_3^5.

(*) Si noti che da un punto di Γ^5 non può uscire una retta che sia ulteriormente corda di Γ^5, altrimeuti questa sarebbe razionale, perchè da questa trisecante la Γ^5 sarebbe proiettata sopra un piano in una conica, o anche perchè, esistendo dei piani quadrisecanti di Γ^5, i punti di questa si potrebbero far corrispondere biunivocamente agl' iperpiani di un fascio.

La stessa cosa si può vedere altrimenti, dimostrando che un piano generico π per un punto P di Γ^5 sega V_3^5 in una curva C^5 avente in P un punto triplo. Infatti la curva C^5 si può considerare generata dai 4 punti, dei quali uno cade sempre in P, che il cono del quarto ordine, proiettante Γ^5 da un suo punto variabile, ha su π. Quando il vertice del cono s'avvicina a P, i tre punti variabili comuni a π e al cono si avvicinano a P, fino a cadere tutti in P quando il vertice del cono cade in P. Da P escono dunque tre rami di C^5, onde questa ha in P un punto triplo (*).

§ 8. La curva Γ^5 è evidentemente una linea fondamentale di prima specie per $|\varphi|$, (§ 2). All'intorno di ogni suo punto corrisponde in S_4^* un piano, il quale, al variare del punto su Γ^5, varia e descrive una ipersuperficie del quinto ordine, poichè la curva Γ^3, intersezione di tre φ, ha cinque punti variabili su Γ^5. Tale ipersuperficie, contata due volte (§ 4), costituisce la jacobiana di (ψ), (§ 3).

In S_4^*, dovendo due ψ segarsi in una V_2^4 variabile (§ 1), si avrà una superficie V_2^{*5}, del quinto ordine, base di $|\psi|$, la quale sarà irriducibile, come la jacobiana di $|\varphi|$ che le corrisponde. La V_2^{*5} è una superficie fondamentale di prima specie, perchè in S_4 non ci sono superficie fondamentali di

---

(*) Per il rigore della deduzione è però necessario osservare che nessuno dei tre punti variabili può passare più volte per P (onde la molteplicità di P non supera 3) nè due di essi possono descrivere lo stesso ramo (onde la molteplicità di P non è inferiore a 3). E infatti nel primo caso esisterebbe una trisecante di Γ^5, ciò che è assurdo; nel secondo caso per un punto generico di quel ramo passerebbero due corde di Γ^5, onde il loro piano sarebbe quadrisecante Γ^5, il che è pure assurdo.

seconda specie nè curve fondamentali di seconda specie (§ 2). All'intorno di un punto generico di V_2^{*5} corrisponde in S_4 una retta (essendo V_2^{*5} semplice per $|\psi|$), la quale, non dovendo incontrare le quadriche φ in punti variabili, sarà una corda di Γ^5. Variando il punto su V_2^{*5} quella corda descrive la jacobiana di $|\varphi|$. Ai cinque punti che un piano generico di S_4^* ha in comune con V_2^{*5} corrispondono le cinque corde di Γ^5 giacenti sulla V_2^4 corrispondente a quel piano.

Due ipersuperficie ψ si segano in una V_2^4 variabile, che è la proiezione di una superficie di Veronese su un S_4 fatta da un punto dell'S_5, cui appartiene la superficie di Veronese, esterno a questa. Infatti le sue sezioni iperpiane sono rappresentate in un piano da un sistema lineare ∞^4 di coniche senza punti base (§ 5).

Dovendo una ψ generica segare una tale V_2^4 in una conica variabile, (§ 1), fuori della V_2^{*5} base, questa avrà in comune con la V_2^4 una curva Γ^{10} del 10° ordine.

Poichè infine il sistema $|\psi|$ è omaloidico, le coniche di S_4^*, corrispondenti alle rette di S_4, avranno cinque punti in comune con la V_2^{*5} base. Si noti anzi che ogni conica appoggiata in cinque punti a V_2^{*5} corrisponde a una retta di S_4, perchè, insieme con V_2^{*5}, è base di una rete di ipersuperficie ψ.

§ 9. Studiamo la superficie V_2^{*5} base di $|\psi|$. Seghiamo per questo il sistema $|\varphi|$ e la sua jacobiana con un S_3 generico di S_4. Otterremo in S_3 la rappresentazione iperpiana di una ψ generica, le cui sezioni iperpiane sono rappresentate dalle ∞^4 quadriche χ di S_3 passanti per i cinque punti in cui l'S_3 incontra Γ^5 (punti *fondamentali* per la rappresentazione), e le sezioni piane dalle quartiche di prima specie per quei cinque punti. Alla V_2^{*5} di ψ corrisponde in S_3 la sezione della jacobiana di $|\varphi|$ con l'S_3. Tale sezione è una superficie $V_2'^5$, del 5° ordine, che ha i cinque punti fondamentali di S_3 come tripli.

I sei sistemi di rette di ψ hanno per immagini in S_3 le cinque stelle di rette aventi i centri nei cinque punti fondamentali e il sistema delle cubiche per i cinque punti stessi. Ora la cubica di questo sistema passante per un punto generico di $V_2'^5$ avendo con questa 16 punti a comune, vi giace per intero. Quindi per un punto generico di V_2^{*5} passa una retta appartenente alla superficie stessa, onde questa è rigata.

La V_2^{*5} è di genere 1 come luogo delle sue generatrici. Infatti, segando la sua immagine $V_2'^5$ con un piano π di S_3 passante per due dei punti fondamentali, si ottiene una curva piana del 5° ordine con due punti tripli, che si spezza nella retta congiungente i due punti tripli e in una quartica con due punti doppi. Tale quartica è di genere 1 ed ha i suoi punti in corrispondenza biunivoca con le cubiche di $V_2'^5$ e quindi con le generatrici di V_2^{*5}.

La stessa cosa si può vedere in altro modo. I punti di V_2^{*5} sono in corrispondenza biunivoca con le corde di Γ^5, cioè con le coppie di punti di Γ^5. A una generatrice di V_2^{*5} corrisponde quindi su Γ^5 una serie razionale γ_2^1, la quale, dovendo essere contenuta in una serie lineare, è essa stessa una g_2^1; (si tenga presente che Γ^5 è di genere 1). Viceversa, a una g_2^1 di Γ^5, individuata da una coppia di punti, corrisponde una generatrice di V_2^{*5}, quella passante per il punto corrispondente a quella coppia. Poichè la totalità delle g_2^1 di Γ^5 è birazionalmente identica ai punti di Γ^5, la V_2^{*5} è di genere 1.

La V_2^{*5} possiede inoltre una semplice infinità di cubiche piane di genere 1. Consideriamo infatti due generatrici generiche di V_2^{*5} e seghiamo questa con l'iperpiano da esse individuato.

La ulteriore intersezione è una cubica C^3 che non può essere gobba, perchè altrimenti, essendo i suoi punti in corrispondenza biunivoca con le generatrici di V_2^{*5} ed essendo una cubica gobba razionale, la rigata V_2^{*5} sarebbe razionale. La cubica C^3 è dunque una cubica piana di genere 1 (senza punto doppio), alla quale si appoggiano tutte le generatrici di V_2^{*5}. Ognuna delle ∞^2 coppie di generatrici determina dunque una cubica C^3, ma una stessa cubica è determinata da ∞^1 coppie di generatrici, come risulta dall'osservare che un iperpiano generico del fascio avente per sostegno il piano della cubica sega ulteriormente V_2^{*5} in una coppia di generatrici. Quelle cubiche sono dunque ∞^1.

La V_2^{*5} è di genere 1 anche come luogo delle sue cubiche. Infatti possiamo stabilire una cosrispondenza biunivoca tra le generatrici di V_2^{*5} e le sue cubiche, assumendo per esempio come corrispondenti una cubica e una generatrice le quali stiano in uno stesso iperpiano con una generatrice fissa.

Le cubiche di V_2^{*5} hanno per immagini su $V_2'^5$ delle quartiche di prima specie, per i punti fondamentali, come risulta *a priori* dal fatto che quelle cubiche sono delle particolari sezioni piane di ψ. Una qualunque delle immagini si ottiene considerando due cubiche di $V_2'^5$ per i cinque punti fondamentali e segando $V_2'^5$ con la quadrica χ passante per quelle cubiche. L'ulteriore intersezione è l'immagine cercata, ed è evidentemente una quartica di genere 1, perchè birazionalmente identica alla totalità delle cubiche gobbe di $V_2'^5$ per i cinque punti fondamentali, e passa per questi cinque punti.

Consideriamo un iperpiano generico passante per una generatrice g di V_2^{*5}. Esso sega V_2^{*5} ulteriormente in una quartica di prima specie avente un punto in comune con ciascuna generatrice e quindi anche con g. Il punto P in cui la quartica incontra g è di contatto dell'iperpiano con V_2^{*5}. È chiaro che il piano tangente a V_2^{*5} in P, toccando in P la quartica, incontra questa, e quindi la V_2^{*5}, in due punti ulteriori. I due iperpiani congiungenti g con le due generatrici passanti per quei punti segano V_2^{*5} ulteriormente in due cubiche piane passanti per P, perchè, contenendo ambedue il piano tangente in P, le loro sezioni con V_2^{*5} devono avere P come punto doppio. Da P, che è poi punto generico di V_2^{*5}, escono dunque due cubiche della superficie.

Su V_2^{*5} si ha dunque un doppio sistema di linee: generatrici e cubiche piane. Da ogni punto di V_2^{*5} escono una generatrice e due cubiche e le ∞^1 cubiche sono punteggiate dalle generatrici.

È chiaro allora che la V_2^{*5} è la superficie generata dalle rette che congiungono i punti corrispondenti di due cubiche piane C, C' di genere 1 con un punto comune, quando fra i loro punti si sia stabilita una corrispondenza biunivoca algebrica nella quale il punto comune sia unito. Una tale superficie è infatti una rigata di genere 1 del quinto ordine.

Invero, per vedere in quanti punti è incontrata da un piano generico π, stabiliamo nel fascio d'iperpiani di centro π una corrispondenza (3, 3) in questo modo: a un iperpiano per π, considerato del primo ente facciamo corrispondere i tre iperpiani che congiungono π con i punti di C' corrispondenti ai tre punti in cui quell' iperpiano sega C.

Gli iperpiani uniti sono 6 e sono gl' iperpiani del fascio contenenti due punti corrispondenti delle due cubiche. Uno degli iperpiani uniti è quello che congiunge π con il punto comune alle due cubiche; gli altri cinque contengono ciascuno una generatrice della nostra superficie. A π si appoggiano dunque 5 generatrici.

Osserviamo infine che le serie lineari g_2^1 di V_2^{*5}, considerate le generatrici come elementi, sono costituite dalle coppie di generatrici in cui gl' iperpiani dei fasci aventi per centri i singoli piani delle cubiche segano la V_2^{*5}, mentre le g^1_2, considerate le cubiche come elementi, sono costituite dalle coppie di cubiche uscenti dai punti delle singole generatrici.

§ 10. È facile vedere che la jacobiana di $|\psi|$ è costituita dagli ∞^1 piani delle cubiche di V_2^{*5}. Infatti tutte le ∞^3 ψ passanti per un punto generico di uno di quei piani, contengono quel piano, giacchè hanno in comune con il piano una cubica e un punto.

La stessa cosa si può vedere altrimenti. La jacobiana di $|\psi|$ è costituita dai piani corrispondenti ai punti della curva Γ^5 base di $|\varphi|$. Per vedere l'ordine della curva che un tal piano, corrispondente a un punto P di Γ^5, ha in comune con V_2^{*5} bisogna cercare quante corde di Γ^5 uscenti da P appartengono a una φ generica. Ora il cono proiettante Γ^5 da P è del quarto ordine e la curva sezione di φ con il cono è costituita da Γ^4 e da tre ulteriori corde di Γ^5 uscenti da P. Dunque π ha in comune con V_2^{*5} una cubica, la quale è di genere 1 come il cono che le corrisponde. Anzi, poichè una corda di Γ^5 è generatrice di due coni proiettanti Γ^5 da due suoi punti, si ritrova che da ogni punto di V_2^{*5} escono due cubiche della superficie stessa.

Cerchiamo la molteplicità di V_2^{*5} per la jacobiana di $|\psi|$. Ad una retta r, passante genericamente per un punto Q di V_2^{*5}, corrisponde in S_4 una cubica gobba avete cinque punti su Γ^5 (§ 6) e della quale fa parte la corda di Γ^5 corrispondente a Q. Rimane ulteriormente una conica per tre punti di Γ^5, ai quali corrispondono in S_4^* tre punti comuni ad r e alla jacobiana di $|\psi|$, distinti da Q. La V_2^{*5}, la quale è il luogo dei punti comuni alle coppie di piani generatori della jacobina di $|\psi|$, è dunque doppia per la jacobiana.

Segue da ciò che la jacobiana di $|\psi|$ può dirsi anche costituita dalle trisecanti di V_2^{*5}. Infatti una trisecante di V_2^{*5}, per il fatto che questa è doppia per la jacobiana, giace su questa (che è del 5º ordine). Anzi le trisecanti suddette sono tutte e sole quelle giacenti nei piani delle cubiche di V_2^{*5}, giacchè non essendo una qualunque di esse incontrata in punti variabili dalle ψ, i punti corrispondenti a quelli della trisecante devono trovarsi nell'intorno di un punto di Γ^5.

§ 11. Riprendiamo a considerare la rappresentazione iperpiana in S_3 della ψ generica (§ 9).

La ψ ha 10 punti doppi, ai cui intorni corrispondono in S_3 le rette che congiungono due a due i cinque punti fondamentali, e 15 piani, dei quali cinque corrispondono agl'intorni dei suddetti punti e gli altri dieci corrispondono ai piani che congiungono tre a tre quei punti. Ogni piano contiene 4 punti doppi.

I dieci punti doppi di ψ giacciono sulla V_2^{*5}, poichè ciò avviene per le rispettive immagini; e sono tutti variabili; al variare di ψ entro il sistema ciascuno di essi descrive la V_2^{*5}, giacchè una corda di Γ^5, concepita appartenente ad un S_3 di S_4, può assumere, variando l'S_3, la posizione di una corda qualsiasi di Γ^5. Inoltre due punti generici di V_2^{*5} sono doppi per una ed una sola ψ.

Dei 15 piani della ψ cinque descrivono, al variare di ψ, la jacobiana di $|\psi|$, e sono quelli corrispondenti ai punti fondamentali dell'S_3 rappresentativo. Gli altri dieci piani descrivono tutto l'S_4^*, anzi da un punto generico di S_4^* escono ∞^1 di tali piani, quelli che proiettano dal punto le generatrici di V_2^{*5} i quali costituiscono evidentemente un cono del 5° ordine di genere 1. Infatti uno qualunque π di quei dieci piani è rappresentato in S_3 dal piano π' congiungente tre dei punti fondamentali. Il piano π' taglia $V_2'^5$ nelle tre rette congiungenti due a due quei tre punti e in una ulteriore conica passante per i punti stessi e per il punto in cui π' è segato dalla retta che congiunge gli altri due punti fondamentali di S_3. Poichè a quella conica (la quale insieme a questa retta dà una cubica di $V_2'^5$ per i cinque punti fondamentali) corrisponde una retta di V_2^{*5}, il piano π ha in comune con V_2^{*5} una generatrice (e tre punti ulteriori doppi per la ψ).

Viceversa, un piano α qualunque, passante per una generatrice, g di V_2^{*5}, appartiene a un fascio di ψ. E infatti α sega V_2^{*5} nella g e in tre ulteriori punti, il che si vede tagliando la superficie con un S_3 per α, ottenendo così una quartica di prima specie, la quale ha 4 punti su α, di cui uno su g. Il piano α segherà una ψ generica in g e in una conica per quei tre punti. Imponendo dunque alle ψ del sistema il passaggio per tre punti generici di α si ha un fascio di ψ contenenti α.

La totalità descritta da quei 10 piani è quindi costituita da tutti i piani passanti per le generatrici di V_2^{*5}. Ad essi corrispondono in S_4 i piani trisecanti di Γ^5, e si può vedere direttamente che da un punto generico P di S_4

escono ∞^1 piani trisecanti di Γ^5. Proiettiamo infatti da P la Γ^5 in un S_3. Otterremo una quintica ellittica Γ'^5 dello spazio ordinario, senza punti doppi, perchè da P non escono corde di Γ^5, essendo P generico e quindi fuori della jacobiana di $|\varphi|$. I piani trisecanti di Γ^5 e passanti per P segheranno l'S_3 in una retta trisecante di Γ'^5, e inversamente. Ora é facile vedere che da ogni punto di Γ'^5 escono due trisecanti della curva stessa. Invero proiettando Γ'^5 da un suo punto generico su un piano, otteniamo una quartica di genere 1 e quindi con due punti doppi.

Osserviamo qui incidentalmente che gli ∞^1 piani trisecanti di Γ^5, uscenti da un punto P di S_4, formano un cono (di genere 1) del quinto ordine. Infatti ad esso corrisponde in S_4^* il cono proiettante da un punto P^* le generatrici di V_2^{*5}, e questo cono è incontrato, fuori della superficie base, in cinque punti variabili dalle coniche appoggiate in cinque punti alla V_2^{*5}, (coniche che corrispondono alle rette di S_4).

I 15 piani della ψ generica si distribuiscono in sei quintuple, ciascuna costituita dai piani incontrati dalle rette di uu sistema. Riferendosi all'S_3 rappresentativo, una delle quintuple è costituita dai piani corrispondenti agl'intorni dei cinque punti fondamentali, e che sono incontrati dalle rette aventi per immagini le cubiche per i cinque punti. Ciascuna delle altre cinque quintuple è costituita dal piano corrispondente a un punto fondamentale e dai quattro piani corrispondenti ai piani che congiungono tre a tre i rimanenti 4 punti.

§ 12. Le rette di S_4^* si comportano in vario modo rispetto alla superficie fondamentale.

a) Rette trisecanti di V_2^{*5}. Esse, come abbiamo visto al § 10, sono le rette giacenti nei piani generatori della jacobiana di $|\psi|$. (Si noti che le rette aventi più di tre punti in comune con V_2^{*5} giacciono su di essa, cioè sono sue generatrici, poichè appartengono a tutte le ψ.

b) Rette bisecanti di V_2^{*5}. Una r di tali rette, essendo incontrata in un sol punto variabile dalla ψ generica, ha per corrispondente in S_4 una retta, la quale è appoggiata in un punto a Γ^5. Infatti essa, insieme con le due corde di Γ^5 corrispondenti ai punti comuni ad r e a V_2^{*5}, deve costituire una cnbica appoggiata in cinque punti a Γ^5.

c) Rette unisecanti di V_2^{*5}. Ad esse corrispondono in S_4^* le coniche appoggiate in tre punti a Γ^5.

d) Rette zero-secanti di V_2^{*5}. Ad esse corrispondono le cubiche irriducibili appoggiate in cinque punti a Γ^5.

Presa una ψ generica, viene individuato un sistema di rette: quello cui appartengono le generatrici di V_2^{*5}. Alle rette di questo sistema corrispondono, nell' S_3 rappresentativo, le cubiche per i cinque punti fondamentali (§ 9). Al variare di ψ le rette di questo sistema descrivono dunque la totalità delle rette corrispondenti alle cubiche di S_4 appoggiate in 5 punti a Γ^5, ossia la totalità delle rette di S_4^*. Le rette degli altri 5 sistemi hanno per immagini le rette delle stelle aventi per centri i cinque punti fondamentali. Al variare di ψ le rette di quei sistemi descrivono dunque la totalità delle bisecanti di V_2^{*5}.

Da un punto generico P^* di S_4^* esce una semplice infinità di rette bisecanti di V_2^{*5}; quelle corrispondenti alle generatrici del cono proiettante Γ^5 dal punto P corrispondente in S_4. Quelle ∞^1 rette per P^* formano un cono del quinto ordine (di genere 1). Infatti un S_3^* per P^* taglia V_2^{*5} in una curva γ^5 del quinto ordine di genere 1 e per P^* passano 5 corde di γ^5, come si deduce dall' osservare che proiettando γ^5 da P^* su un piano dell'S_3^* si ottiene una curva piana del quiuto ordine di genere 1 e quindi con 5 punti doppi.

Presa una ψ generica, consideriamo uno dei suoi cinque sistemi di rette bisecanti di V_2^{*5}. È facile vedere che le rette di un tale sistema, appoggiate a una generatrice g di V_2^{*5}, segano ulteriormente la superficie nei punti di un'altra generatrice g_1, anzi esse sono le rette di un sistema di una quadrica V_2^2 per g e g_1. Infatti le rette del sistema considerato hanno per immagini in S_3 le rette uscenti da uno, diciamo P', dei punti fondamentali. La retta g ha per immagine una cubica Γ^3 di $V_2'^5$, passante per i punti fondamentali, e le rette di quel sistema appoggiate a g hanno per immagini le generatrici del cono quadrico proiettante Γ^3 da P'. Questo cono taglia $V_2'^5$ in Γ_3, nelle quattro rette che uniscono P' con gli altri quattro punti fondamentali, e in una ulteriore cubica Γ_1^3 per i cinque punti fondamentali. La Γ_1^3 corrisponde dunque a un'altra generatrice g_1 di V_2^{*5} e al cono quadrico proiettante corrisponde una quadrica, come si vede segandolo con una quartica di prima specie per i cinque punti fondamentali di S_3.

Ogni ψ determina dunque cinque corrispondenze involutorie tra le generatrici di V_2^{*5}. In ciascuna delle cinque corrispondenze le coppie di generatrici omologhe formano le coppie di una g_2^1, la quale è quella determinata da uno dei cinque piani che la ψ ha in comune con la jacobiana del sistema. Fissata una coppia arbitraria g, g_1 di generatrici di V_2^{*5}, si stacca da $[\psi|$ un sistema lineare ∞^3 di ipersuperficie possedenti ciascuna un sistema ∞^2 di rette che segna sulla rigata le coppie della g_2^1 individuata dalla coppia g, g_1.

Dette ipersuperficie sono quelle che passano per il piano della cubica in cui l' S_3 determinato da g e g_1 sega ulteriormente la V_2^{*5}. Fissata poi tra g e g_1 una proiettività, esiste una ed una sola ψ del sistema ∞^3 le cui rette incidenti a g e g_1 segnano su queste punti corrispondenti in quella proiettività.

CAPITOLO TERZO

Casi particolari.

§ **13.** La curva ellittica Γ^5, base di $|\varphi|$, si può spezzare in 13 modi diversi, e precisamente in:

1.° *Una quartica razionale normale* Γ^4, che impone 9 condizioni alle quadriche che devono contenerla, *e una retta* h, che, dovendo imporre una sola condizione ulteriore, sarà *corda di* Γ^4. Le Γ^3 intersezioni di tre φ incontrano una volta h e quattro volte Γ^4.

2.° *Una quartica* C^4 *ellittica e una retta* m *appoggiata in un punto a* C^4. La C^4 impone 8 condizioni alle quadriche che devono contenerla, poichè tutte le quadriche di S_4 segnano su C^4 una serie lineare completa g_8^7. La retta m, dovendo imporre altre due condizioni, s'appoggerà in un punto a C^4. Questa è poi necessariamente immersa in un S_3, perchè tutti gli ∞^4 S_3 di S_4 segnano su C^4 una serie completa g_4^3. Le curve Γ^3 incontrano due volte m e tre volte C^4. Consideriamo infatti tre quadriche per C^4 ed m segantisi ulteriormente in una Γ^3. Riferiamo proiettivamente le ∞^4 quadriche per C^4 ed m ai punti di un S'_4. Del sistema ∞^4 di quadriche fa parte la rete individuata da quelle tre quadriche e la rete di quadriche spezzate ciascuna nell'iperpiano fisso cui appartiene C^4 e in un iperpiano variabile per m. Alle suddette reti corrispondono in S'_4 due piani, che hanno un punto comune. Esiste dunque un iperpiano per m contenente Γ^3. Questo iperpiano sega la rete individuata dalle tre quadriche in un fascio di quadriche avente per base Γ^3 ed m, onde questa è corda di Γ^3.

La Γ^3 incontrerà poi C^4 nei tre punti in cui l'iperpiano cui appartiene Γ^3 sega C^4 fuori del punto d'appoggto di m a C^4.

3.° *Una cubica gobba* C^3, che impone 7 condizioni, e *una conica* C^2, che, dovendo imporre altre tre condizioni, sarà *appoggiata in due punti a* C^3. Le curve Γ^3 hanno tre punti su C^3 e due su C^2.

Il secondo caso dà origine ai seguenti sottocasi (*):

* *a*) Una cubica gobba, una sua corda e una retta appoggiata alla cubica.

* *b*) Una cubica gobba, una sua corda e una retta appoggiata alla corda.

c) Due coniche con due punti a comune e una retta appoggiata ad una di esse.

d) Una conica, due rette incidenti appoggiate alla conica e una retta appoggiata alla conica.

* *e*) Una conica, due rette incidenti appoggiate alla conica e una retta appoggiata a una delle rette precedenti.

* *f*) Un quadrilatero gobbo e una retta appoggiata a un lato.

Il terzo caso dà origine ai seguenti nuovi sottocasi:

a') Una cubica gobba e due rette incidenti ad essa appoggiate.

(*) Quelli segnati con asterisco non sono menzionati nella nota di Del Pezzo citata nella Prefazione.

* b') Due coniche con un punto a comune e una retta appoggiata ad entrambe.

c') Una conica, due rette appoggiate ad essa e una retta incidente alle due rette precedenti.

d') Un pentalatero di S_4.

Il primo caso dà origine a sottocasi già enumerati.

§ 14. Studiamo rapidamente la trasformazione birazionale cui dà origine il primo caso.

Il sistema omaloidico $|\varphi|$ è costituito dalle ∞^4 quadriche passanti per una quartica razionale normale Γ^4 e per una sua corda h.

La jacobiana di $|\varphi|$ è costituita dalle corde della curva base complessiva, cioè dal cono quadrico generato dai piani che proiettano i punti di Γ^4 da h, (cono che ha la retta h come doppia e la curva Γ^4 come semplice), e dalla ipersuperficie del terzo ordine V_3^3 generata dalle corde di Γ^4, (ipersuperficie che ha Γ^4 come doppia ed h come semplice) (*).

Segando la jacobiana di $|\varphi|$ con un S_3 otteniamo un cono quadrico $V_2'^2$ col vertice V' in uno dei cinque punti fondamentali di S_3 e passante per gli altri 4 punti fondamentali, e una superficie del terzo ordine $V_2'^3$ avente i 4 punti suddetti come doppi e passante per V'. Al cono $V_2'^2$ corrisponde in S_4^* una quadrica V_2^{*2} base di $|\psi|$, e a $V_2'^3$ corrisponde una superficie base del terzo ordine $V_2'^3$, che è una rigata razionale normale di S_4^*.

I due sistemi di rette di V_2^{*2} sono rappresentati sul cono $V_2'^2$ dalle generatrici e dalle cubiche per i cinque

(*) Tale ipersuperficie è fra quelle studiate da *Segre* nella sua memoria: *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni ecc.* Memorie dell'Accad. di Torino; Serie 2.ª Tomo 39, 1888, §§ 43, 44).

punti fondamentali. Su V_2^{*2} le rette che tengono l'ufficio delle generatrici del caso generale sono quelle corrispondenti alle cubiche. Le generatrici di V_2^{*3} sono rappresentate dalle cubiche per i cinque punti fondamentali e giacenti su $V_2'^3$.

Le superficie $V_2'^2$ e $V_2'^3$ hanno in comune una curva del sesto ordine, che evidentemente si spezza in due cubiche per i punti fondamentali. Questo ci dice che V_2^{*3} contiene due generatrici r, s (dello stesso sistema) di V_2^{*2}.

L' S_3, cui appartiene V_2^{*2}, sega V_2^{*3} nelle rette r, s e in una ulteriore retta d, alla quale s'appoggiano tutte le generatrici di V_2^{*3} (quindi anche r ed s). Essa è dunque la direttrice d'ordine minimo di V_2^{*3}, ed è rappresentata su $V_2'^3$ dall'intorno del punto V'.

Il sistema $|\psi|$ è costituito dalle ipersuperficie del terzo ordine con 10 punti doppi passanti per V_2^{*2} e per V_2^{*3}.

I piani di S_4^* corrispondenti ai punti della corda h sono i piani del fascio avente per asse d e contenuto nell' S_3^* cui appartiene V_2^{*2}. Ogni tale piano sega quindi la varietà base di $|\psi|$ in d e in una conica (di V_2^{*2}).

I piani di S_4^* corrispondenti ai punti di Γ^4 formano una totalità razionale costituente una ipersuperficie V_3^{*4} del quarto ordine. Ogni tale piano contiene una generatrice di V_2^{*2} di sistema diverso da quello cui appartengono r ed s, e una conica di V_2^{*3}. Essi si ottengono tutti segando V_2^{*3} con gl'iperpiani individuati da una generatrice fissa (variabile) di V_2^{*3} e da una generatrice g variabile (fissa) di V_2^{*2}, dello stesso sistema di r ed s; ciascuno di questi iperpiani sega ulteriormente V_2^{*3} in una conica il cui piano contiene anche una generatrice di V_2^{*2}, di sistema diverso da quello di g.

La jacobiana di $|\psi|$ è dunque costituita dall' S_3^* cui appartiene V_2^{*2} e dalla V_3^{*4} suddetta, ciascuna parte contata due volte; l'S_3^* corrisponde ad h, la V_3^{*4} a Γ^4. Ai due punti comuni ad h e a Γ^4 corrispondono i piani (dr), (ds), i quali, oltre a far parte del fascio di piani corrispondenti ai punti di h, sono due piani generatori di V_3^{*4}, in quanto che per es. il piano (dr) contiene una generatrice di V_2^{*2} incidente ad r e una conica (degenere) di V_3^{*3}, costituita dalle rette d, r. I piani (dr), (ds) e la V_2^{*2} costituiscono l'intersezione di S_3^* con V_4^{*3}.

I 10 punti doppi della ψ generica sono tutti variabili: quattro di essi, il cui gruppo indicheremo con A, descrivono la quadrica V_2^{*2}, e gli altri sei, il cui gruppo indicheremo con B, descrivono la V_2^{*3}.

Dei 15 piani della ψ generica, uno, contenente i quattro punti di A, descrive il fascio di asse d contenuto in S_3^*; quattro, contenenti ciascuno un punto di A e tre di B, descrivono la V_3^{*4}; dei rimanenti, quattro, contenenti ciascuno un punto di A e tre di B e passanti per delle generatrici di V_2^{*2} dello stesso sistema di r ed s, descrivono la totalità dei piani passanti per le generatrici del detto sistema di V_2^{*2}, e sei, contenenti ciascuno due punti di A e due di B e passanti per delle generatrici di V_2^{*2}, descrivono la totalità dei piani passanti per le generatrici di V_2^{*3}.

Dette proprietà si deducono subito dalla rappresentazione iperpiana della ψ generica.

§ 15. Consideriamo ora il sistema omaloidico delle quadriche φ passanti per una curva C^4 di genere 1 (appartenente necessariamente ad un S_3) e per una retta m appoggiata a C^4 in un punto P, (secondo caso, § 13).

La jacobiana di $|\varphi|$ è costituita dall'S_3 cui appartiene C^4, contato due volte (§ 4), e dal cono V_3^3 che proietta da m la curva C^4.

Segando $[\varphi|$ con un S_3 di S_4, otteniamo il sistema $|\chi|$ delle quadriche per 5 punti, di cui quattro giacciono in un piano π'. La jacobiana di $|\varphi]$ viene segata nel piano π' e in un cono ellittico $V_2'^3$, avente il vertice P' in quello dei 5 punti fondamentali che non giace su π' e passante per gli altri 4 punti.

Al cono $V_2'^3$ corrisponde in S_4^* una superficie rigata del quinto ordine ellittica V_2^{*5}, le cui generatrici hanno per immagini le generatrici di $V_2'^3$. Al piano π' corrisponde (§ 35) una retta d^* giacente su V_2^{*5} e doppia per $|\psi|$.

L'intorno di un punto d^* situato sulla ψ corrispondente all'S_3 rappresentativo ha per immagine su π' una conica per i 4 punti fondamentali di π', e poichè una tal conica incontra $V_2'^3$ in due punti variabili per ciascuno dei quali passa una generatrice di $V_2'^3$, da ogni punto di d^* partono due generatrici di V_2^{*5}, onde d^* è doppia per V_2^{*5}.

La superficie V_2^{*5} possiede una semplice infinità di cubiche piane di genere 1, le quali si ottengono tutte segando la superficie con gl'iperpiani passanti per una coppia fissa (qualunque) di generatrici uscenti da uno stesso punto di d^*. Queste cubiche passano tutte per un punto fisso P^* di V_2^{*5}, quello in cui il piano della coppia di generatrici considerata incontra ulteriormente V_2^{*5}, e ciascuna di esse è appoggiata a tutte le generatrici. Su ogni cubica le coppie di generatrici uscenti dai punti di d^* segnano una serie lineare g_2^1, la quale è segnata anche dal fascio di rette avente per centro P^* e giacente nel piano della cubica.

La V_2^{*5} si può dunque immaginare generata riferendo proiettivamente i punti di una retta d^* ai gruppi di una g_2^1 su una cubica di genere 1 e congiungendo i punti di d^* con i punti delle coppie corrispondenti sulla cubica.

Le cubiche di V_2^{*5} hanno per immagini sul cono $V_2'^3$

le quartiche di prima specie per i 5 punti fondamentali; tali quartiche sono le ulteriori intersezioni con $V_2'^3$ delle ∞^1 quadriche del sistema $|\chi|$ passanti per le due generatrici g_1, g_2 di $V_2'^3$ (diverse da quelle uscenti dai punti fondamentali di π') appoggiate a una conica fissa (qualunque) per i 4 punti fondamentali di π'. Si vede facilmente che le due generatrici g_1, g_2, qualunque sia la conica scelta, giacciono in un piano con una generatrice fissa g di $V_2'^3$: quella in cui l'S_3 rappresentativo sega il piano individuato dalla retta m e dalla tangente t a C^4 nel punto P comune ad m e a C^4. Ne segue che le quartiche immagini delle cubiche di V_2^{*5} sono tangenti in P' (vertice di $V_2'^3$) alla generatrice g, e ciò conferma che le cubiche di V_2^{*5} passano tutte per un punto P^*.

Il sistema $|\psi|$ è costituito da ipersuperficie del terzo ordine passanti per V_2^{*5}, aventi d^* come retta doppia e possedenti 4 punti doppi variabili fuori di d^*, (i quali sono rappresentati dalle rette che uniscono P' con gli altri 4 punti fondamentali di π').

I 4 punti doppi della ψ generica giacciono in un piano appartenente alla ψ, il quale è rappresentato dall'intorno di P'. Detto piano sega V_2^{*5} in una cubica di genere 1, che ha per immagine l'intorno di P' su $V_2'^3$.

La ψ generica contiene altri 10 piani: quattro sono quelli che congiungono d^* ai quattro punti doppi, e hanno per immagini gl'intorni dei quattro punti fondamentali di π'; gli altri sei sono quelli in cui i sei iperpiani individuati dai 4 piani precedenti due a due tagliano ulteriormente la ψ, e sono rappresentati dai piani congiungenti P' con le coppie di punti fondamentali su π' (*).

(*) Tale ipersuperficie è quella studiata da Segre al § 37 della memoria citata al § 14 del presente lavoro.

La jacobiana di $|\psi|$ è generata dal piano contenente i 4 punti doppi fuori di d^*, piano che corrisponde al punto generico della retta m, e dai piani proiettanti i suddetti punti doppi da d^*, i quali corrispondono a punti generici di C^4. Il primo piano descrive una quadrica V_3^{*2} e gli altri quattro descrivono una ipersuperficie del terzo ordine V_3^{*3}, (§ 2), ambedue doppie per la jacobiana.

La quadrica V_3^{*2} è specializzata una volta. I piani di V_3^{*2} corrispondenti ai punti di m costituiscono uno dei sistemi di piani di V_3^{*2}, e sono i piani delle cubiche di V_2^{*5}. I piani dell'altro sistema non sono altro che i piani delle coppie di generatrici uscenti dai punti di d^*, poichè tali piani, passando per P^* (che è poi il vertice di V_3^{*2}) appartengono alla quadrica suddetta.

L'altra parte V_3^{*3} della jacobiana è costituita dalla totalità dei piani che proiettano da d^* le generatrici di V_2^{*5}, e possiede quindi la d^* come tripla.

L'intersezione completa di V_3^{*2} e V_3^{*3} è costituita dalla superficie V_2^{*5} e da un ulteriore piano π^* per d^* e P^*, il quale corrisponde al punto P comune ad m e a C^4.

I quattro punti doppi della ψ generica sono tutti variabili e descrivono la V_2^{*5} base. Indicando il loro gruppo con A, si ha che degli 11 piani di ψ quello descrivente la V_3^{*2} contiene il gruppo A, ciascuno dei piani descriventi la V_3^{*3} contiene d^* e uno dei punti di A, e gli altri sei, i quali descrivono la totaliià dei piani passanti per le generatrici di V_2^{*5}, contengono ciascuno un punto di d^* e due punti di A (che sono i due punti in cui ciascuno dei detti piani incontra ulteriormente la superficie base, fuori della generatrice comune).

Notiamo infine che le superficie variabili intersezioni di due ψ generiche sono del quarto ordine e hanno d^* come doppia. La generica di esse è rappresentata sopra un piano in modo che alle sue sezioni iperpiane corrispondono le coniche del sistema lineare ∞^4 costituito dalle coniche del piano segnanti sopra una retta (la retta comune al piano e all' S_3 cui appartiene Γ^4) le coppie di una involuzione. Poichè a tutte le coniche del sistema è coniugata la conica inviluppo spezzata nei due punti uniti dell'involuzione, la nostra superficie è la proiezione in S_4 di una superficie di Veronese fatta da un punto della sua M_4^3, cioè da un punto appartenente al piano di una delle ∞^2 coniche della superficie stessa.

§ 16. Accenniamo qui all'ultimo sottocaso cui dà origine il secondo caso (§ 13); consideriamo cioè il sistema omaloidico $|\varphi|$ delle quadriche passanti per un quadrilatero gobbo di lati l_1, l_2, l_3, l_4, e per una retta r appoggiata per es. ad l_4. Supporremo che ogni lato l_i sia incidente al precedente e al seguente, in ordine circolare.

La jacobiana di $|\varphi|$ è costituita dall'iperpiano (contato due volte) cui appartiene il quadrilatero, e dai tre iperpiani $(l_1 r)$, $(l_2 r)$, $(l_3 r)$.

Segando $|\varphi|$ con un S_3 si hanno ∞^4 quadriche χ per cinque punti $L'_1, L'_2, L'_3, L'_4, R'$ (le notazioni sono evidenti), dei quali i primi quattro giacciono in un piano π'.

La sezione della jacobiana con l' S_3 è costituita dal piano π', dai piani $(L'_1 L'_4 R')$, $(L'_3 L'_4 R')$ e da un altro piano α' per L'_2 ed R'.

Come nel caso generale, (§ 15), le ψ sono del terzo ordine con una retta doppia d^* e con quattro punti doppi ulteriori, dei quali quello, che chiameremo P^*, avente per immagine la retta $(L'_4 R')$ è fisso, poichè il piano $(l_4 r)$, non essendo incontrato in punti variabili dalla φ generica, ha per corrispondente un punto.

Al piano α' corrisponde in S_4^* una quadrica V_2^{*2} passante per la retta doppia d^*, e il doppio sistema di generatrici di V_2^{*2} ha per immagine i due fasci di rette del piano α' aventi per centri L'_2 ed R'. Delle rette di V_2^{*2} quelle che tengono l'ufficio delle generatrici del caso generale sono quelle aventi per immagini le rette di α' per R', cioè quelle di sistema diverso da quello di d^*.

Al piano $(L'_1\, L'_4\, R')$ corrisponde un piano σ^* passante per una generatrice di V_2^{*2} incidente a d^*, e al piano $(L'_3\, L'_4\, R')$ corrisponde un piano τ^* passante pure per una generatrice di V_2^{*2} incidente a d^*. Il punto comune a σ^* e a τ^* è il punto doppio fisso P^*, e su σ^*, τ^* le rette che devono considerarsi come generatrici sono quelle che escono dai punti che σ^*, τ^* hanno in comune con d^*

Alla retta l_4 corrisponde un piano ε^*, giacchè l_4 è uua retta fondamentale di seconda specie per $|\varphi|$, onde ε^* sarà un piano fondamentale di terza specie per $|\psi|$, (§ 2). Esso è rappresentato in S_3 dall'intorno di L'_4 e passa per d^* e P^*.

Le ipersuperficie di $|\psi|$ passano tutte per V_2^{*2}, σ^*, τ^* ed ε.*

La jacobiana di $|\psi|$ è costituita da una quadrica V_3^{*2}, corrispondente alla retta r, e da tre iperpiani, corrispondenti alle rette $l_1\, l_2\, l_3$. Ciascuna di queste parti è doppia per la jacobiana. I piani che descrivono V_3^{*2}, e che corrispondono ai punti di r, sono quelli che proiettano da P^* le generatrici di V_2^{*2} dello stesso sistema di d^*. I piani che corrispondono ai punti di l_1 sono quelli passanti per d^* ed incidenti a σ^*, onde l'iperpiano corrispondente ad l_1 è quello individuato da d^* e σ^*. Analogamente l'iperpiano corrispondente ad l_3 è $(d^*\, \tau^*)$. L'iperpiano corrispondente ad l_2 è quello cui appartiene V_2^{*2}, i piani corrispondenti ai punti di l_2 essendo quelli passanti per d^* e seganti V_2^{*2} ulteriormente in una generatrice.

I tre punti doppi della ψ generica, fuori di d^* e diversi da P^*, sono variabili e descrivono uno il piano σ^*, un altro il piano τ^* e il rimanente la V_2^{*2}.

Degli 11 piani appartenenti alla ψ generica tre sono i piani fissi σ^*, τ^*, ε^*; i due piani descriventi gl'iperpiani $(d^* \sigma^*)$ e $(d^* \tau^*)$ contengono (oltre d^*) rispettivamente il punto doppio su σ^* e su τ^*; il piano descrivente l'S_3 cui appartiene V_2^{*2} contiene (oltre d^*) il punto doppio su V_2^{*2}; il piano descrivente la V_3^{*2} contiene P^* e gli altri tre punti doppi variabili. Dei rimanenti 4 piani due descrivono la totalità dei piani incidenti a σ^* e τ^* rispettivamente e passanti per i punti che questi piani hanno in comune con d^*, e contengono ciascuno il punto doppio su V_2^{*2} e il punto doppio su τ^* e su σ^* rispettivamente; un piano descrive la totalità dei piani passanti per le generatrici di V_2^{*2} incidenti a d^* e contiene i punti doppi su σ^* e τ^*; il rimanente descrive la totalità dei piani incidenti ad ε^* e passanti per P^* e contiene il punto doppio su V_2^{*2}. Su ε^* le rette che si devono dunque riguardare come generatrici sono quelle uscenti da P^*.

§ 17. Studiamo ora il caso in cui il sistema $|\varphi|$ è costituito dalle quadriche passanti per una cubica gobba C^3 e per una conica C^2 appoggiata in due punti a C^3.

La jacobiana di $|\varphi|$ è costituita dall'S_4 cui appartiene C^3 e della V_3^4 generata dalle rette appoggiate a C^2 e a C^3. Che questa ipersuperficie sia del quarto ordine si vede nel modo seguente. Presa una retta r generica di S_4, proiettiamo da essa la C^2 e la C^3. Otterremo una quadrica, con la retta r doppia, e una ipersuperficie del terzo ordine con la r come tripla. Esse hanno in comune sei piani per r, di cui due sono quelli che proiettano da r i due punti comuni a C^2

e a C^3. Gli altri quattro piani contengono ciascuno una retta appoggiata a C^2 a C^3 e ad r, cioè la ipersuperficie in discorso è del quarto ordine. Inoltre, come facilmente si vede, essa ha la C^3 come doppia e la C^2 come tripla.

Segando $|\varphi|$ con un S_3 otteniamo ∞^4 quadriche χ per cinque punti e la sezione con l'S_3 della jacobiana è costituita da un piano π' contenente tre punti fondamentali, che chiameremo P_1', P_2', P_3', e da una superficie del quarto ordine $V_2'^4$ avente P_1', P_2', P_3' come doppi e gli altri due punti fondamentali P_4', P_5' come tripli. La retta $(P_4' P_5')$ è dunque doppia per $V_2'^4$.

In S_4^* a π' e alla $V_2'^4$ corrispondono rispettivamente un piano π^* e una superficie V_2^{*4}, che sono base per $|\psi|$.

Le cubiche, che nel caso generale erano immagini delle generatrici della varietà base di $|\psi|$, sono ora date dalle cubiche passanti per i cinque punti fondamentali e giacenti su $V_2'^4$ e dalla retta fissa $(P_4' P_5')$ associata alle coniche del fascio avente come punti base P_1', P_2', P_3' e il punto Q' in cui la retta $(P_4' P_5')$ incontra π'.

La V_2^{*4} è una rigata razionale, perchè quelle cubiche di $V_2'^4$ formano una totalità razionale, e ha il punto P^*, corrispondente alla retta $(P_4' P_5')$, come doppio. Infatti due quadriche χ generiche per la retta $(P_4' P_5')$ si segano ulteriormente in una cubica gobba per P_1', P_2', P_3', appoggiata in due punti alla retta (P_4', P_5'), e questa cubica sega $V_2'^4$, fuori dei punti fondamentali e della retta $(P_4' P_5')$, in due punti ulteriori. Dunque un piano generico per P^* sega V_2^{*4} in due punti ulteriori.

Il punto P* è su π^* (perchè corrisponde al punto Q' di π') e per esso passano due generatrici di V_2^{*4} giacenti su π^*, giacchè la intersezione di $V_2'^4$ con π' è costituita da due coniche per P_1', P_2', P_3', Q'.

La V_2^{*4} possiede una semplice infinità di coniche, le quali si ottengono segando la superficie con gl' iperpiani passanti per una generatrice fissa (qualunque) e per una generatrice variabile, e hanno per immagini le coniche di $V_2'^4$ per P_4', P_5'. Tali coniche di V_2^{*4} sono punteggiate proiettivamente dalle generatrici e i loro piani sono incidenti a π^*. La nostra superficie si può dunque immaginare generata dalle rette che congiungono i punti corrispondenti di due coniche proiettive, aventi ciascuna due punti su π^*, con la particolarità che i 4 punti comnni con π^* siano a coppie corrispondenti nella proiettività.

Sulla V_2^{*4} esiste inoltre una semplice infinità di cubiche piane, dotate di punto doppio in P^*, che si ottengono segando la superficie con gl' iperpiani passanti per il piano individuato da P^* e da una generatrice fissa (qualunque).

Il sistema $|\psi|$ è costituito dalle ipersuperficie del terzo ordine con 10 punti doppi passanti per V_2^{*4} e per π^*.

La jacobiana di $|\psi|$ è costituita da una quadrica specializzata V_3^{*2} e da una ipersuperficie del terzo ordine V_3^{*3}, ciascuna contata due volte.

I piani che descrivono V_3^{*2} sono quelli corrispondenti ai pnnti di C^2 e sono anche i piani delle cubiche piane di V_2^{*4}. Il punto doppio di V_3^{*2} è dunque P^* e i piani suddetti costituiscono uno dei sistemi di V_2^{*2}. I piani dell'altro sistema sono quelli che proiettano da P^* le generatrici di V_2^{*4}, come si vede tagliando V_3^{*2} con gl' iperpiani passanti per il piano di una cubica.

I piani che generano V_3^{*3} sono quelli corrispondenti ai punti di C^3, e non sono altro che i piani delle coniche di V_2^{*4}, i quali contengono ciascuno una retta di π^*. Le rette in cui i piani generatori segano π^* costituiscono una conica inviluppo k^*, la qual cosa è evidente quando si pensi che tali rette congiungono i punti corrispondenti di due punteggiate proiettive (le due generatrici di V_2^{*4} su π^*), ovvero tenendo conto che una corda di C^3 (corrispondente a un punto di π^*) appartiene a due dei coni quadrici proiettanti la C^3 dai suoi punti (coni che corrispondono alle rette di k^*). Per un punto di π^* passano dunque due rette di k^* e quindi due piani generatori di V_3^{*3}, poichè per una retta di k^* passa un sol piano generatore. I punti di π^* sono dunque punti doppi bispaziali di V_3^{*3}, onde questa ha π^* come doppio (*).

L'intersezione di V_3^{*3} con V_3^{*2} è costituita dalle V_2^{*4} base e da due piani passanti per le generatrici di V_2^{*4} su π^*, i quali corrispondono ai due punti comuni a C^2 e a C^3.

Dei 10 punti doppi della ψ generica uno è il punto fisso P^*, tre descrivono π^*, e sei descrivono la V_2^{*4}.

Indicando con A il gruppo dei punti doppi variabili su π^* e con B quello su V_2^{*4}, si ha che dei 15 piani della ψ generica uno è il piano fisso π^*, due descrivono la V_3^{*2} e contengono ciascuno (oltre P^*) tre punti di B, tre descrivono la V_3^{*3} e contengono ognuno due punti di A e due di B; dei rimanenti, tre descrivono la totalità dei piani per P^* incidenti a π^* e contengono ciascuno un punto di A e due di B, e sei descrivono la totalità di piani passanti per le generatrici di V_2^{*4} e contengono ciascuno pure un punto di A e due di B.

(*) Cfr. § 52 della memoria di Segre citata al § 14 di questo lavoro. Tale ipersuperficie è rappresentabile in un S_3 riferendo proiettivamente le sue sezioni iperpiane alle quadriche di un sistema incompleto ∞^4 avente per elementi base una retta e un punto.

§ 18. Come ultimo caso consideriamo il sistema omaloidico $|\varphi|$ delle quadriche passanti per i lati di un pentalatero generico di S_4. Indicheremo con l_1, l_4, l_2, l_5, l_3 i cinque lati e supporremo che ciascuno sia incidente al precedente e al seguente, circolarmente. Così per es. l_4 è incidente ad l_1 ed l_2.

La jacobiana di $|\varphi|$ è costituita dai cinque iperpiani

$$(l_1\,l_2),\ (l_2\,l_3),\ (l_3\,l_4),\ (l_4\,l_5),\ (l_5\,l_1).$$

Segando $|\varphi|$ con un S_3 otteniamo le ∞^4 quadriche χ per cinque punti generici, onde le ψ sono ipersuperficie del terzo ordine con 10 puuti doppi. Indicando con 1, 4, 2, 5, 3 i punti in cui l'S_3 incontra rispettivamente l_1, l_4, l_2, l_5, l_3, la sezione dell'S_3 con la jacobiana è costituita dai piani

$$(\alpha) \qquad (1, 4, 2),\ (2, 5, 3),\ (3, 1, 4),\ (4, 2, 5),\ (5, 3, 1).$$

A questi corrispondono in S_4^* cinque piani base di $|\psi|$, ciascuno dei quali è ordinatamente incidente al precedente e al seguente, mentre non lo è agli altri due. Indichiamo con 1*, 2*, 3*, 4*, 5*, i cinque punti di ψ corrispondenti rispettivamente alle rette (2, 5), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (1, 4). Osservando che il piano (1, 4, 2), oltre a contenere le rette (1, 4) e (4, 2), immagini di 5* e 3*, contiene un punto di (3, 5), immagine di 4*, si ha che il piano base di $|\psi|$, avente per immagine il piano (1, 4, 2), è il piano (3*, 4*, 5*). Ai piani (α) corrispondono dunque ordinatamente i piani

$$(\beta)\ (3^*, 4^*, 5^*),\ (4^*, 5^*, 1^*),\ (5^*, 1^*, 2^*),\ (1^*, 2^*, 3^*),\ (2^*, 3^*, 4^*).$$

Sui piani (β) le rette che fanno l'ufficio di generatrici della rigata del caso generale sono quelli uscenti dai punti 4*, 5*, 1*, 2*, 3*. Infatti sul piano per es. (1*, 2*, 3*) le rette per 2* hanno per immagini le coniche per 4, 2, 5 e per il punto d'incontro del piano (4, 2, 5) con la retta (3, 1), coniche che associate alla retta fissa (1, 3) costituiscono delle cubiche per i cinque punti fondamentali.

I punti 1*, 2*, 3*, 4*, 5* sono punti doppi fissi per il sistema $|\psi|$, giacchè i piani $(l_2 l_5)$, $(l_3 l_1)$, $(l_4 l_2)$, $(l_5 l_3)$, $(l_1 l_4)$ non sono incontrati in punti variabili dalla φ generica.

La jacobiana di $|\psi|$ è costituita da cinque iperpiani, ciascuno contato due volte, corrispondenti ai lati l_1, l_4, l_2, l_5, l_3. Al punto generico per es. di l_1 corrisponde un piano per 2*, 5* e incidente alla retta (3*, 4*), onde al lato l_1 corrisponde l'iperpiano (2*, 3*, 4*, 5*).

Dei 10 punti doppi della ψ generica cinque sono fissi e gli altri descrivono ciascuno un piano base.

Dei 15 piani contenuti nella ψ generica cinque sono i piani base di $|\psi|$, cinque descrivono ciascuno un iperpiano della jacobiana, e i rimanenti cinque descrivono la totalità dei piani di S_4^* passanti per i punti 1*, 2*, 3*, 4*, 5* e incidenti rispettivamente ai piani (5*, 1*, 2*), (1*, 2*, 3*), (2*, 3*, 4*), (3*, 4*, 5*), (4*, 5*, 1*).

Ciascuno dei cinque piani base contiene tre punti doppi fissi e uno variabile; ciascuno dei cinque piani descriventi gli iperpiani della jacobiana contiene due punti doppi fissi e due variabili; ciascuno dei rimanenti cinque contiene un punto doppio fisso e tre variabili.

Tutte queste proprietà possiamo ritrovarle rapidamente per via analitica.

Prendiamo i successivi vertici del pentalatero fondamentale di S_4 come punti A_1, A_4, A_2, A_5, A_3 della piramide di riferimento. Si vede allora subito che l'equazione del sistema $|\varphi|$ è data da

$$(1) \qquad \lambda_1 x_3 x_4 + \lambda_2 x_4 x_5 + \lambda_3 x_5 x_1 + \lambda_4 x_1 x_2 + \lambda_5 x_2 x_3 = 0.$$

La jacobiana di $|\varphi|$ si trova essere rappresentata dall'equazione

$$x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = 0.$$

Le formole della trasformazione diretta T saranno

$$(T) \quad \varrho y_1 = x_3 x_4; \; \varrho y_2 = x_4 x_5; \; \varrho y_3 = x_5 x_1; \; \varrho y_4 = x_1 x_2; \; \varrho y_5 = x_2 x_3.$$

Da queste si ricava

$$x_1 = \frac{\varrho}{y_2 x_1 y_5} y_3 y_1 y_4; \; x_2 = \frac{\varrho}{y_3 x_2 y_1} y_4 y_2 y_5; \; x_3 = \frac{\varrho}{y_4 x_3 y_2} y_5 y_3 y_1;$$

$$x_4 = \frac{\varrho}{y_5 x_4 y_3} y_1 y_4 y_2; \; x_5 = \frac{\varrho}{y_1 x_5 y_4} y_2 y_5 y_3.$$

Osservando che per le (T) è

$$y_2 x_1 y_5 = y_3 x_2 y_1 = y_4 x_3 y_2 = y_5 x_4 y_3 = y_1 x_5 y_4 = \frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{\varrho^2},$$

le formole della trasformazione inversa T^{-1} saranno:

$$(T^{-1}) \quad \sigma x_1 = y_3 y_1 y_4; \; \sigma x_2 = y_4 y_2 y_5; \; \sigma x_3 = y_5 y_3 y_1; \; \sigma x_4 = y_1 y_4 y_2; \; \sigma x_5 = y_2 y_5 y_3.$$

Il sistema $|\psi|$ ha dunqne per equazione

$$(2) \quad \mu_1 y_3 y_1 y_4 + \mu_2 y_4 y_2 y_5 + \mu_3 y_5 y_3 y_1 + \mu_4 y_1 y_4 y_2 + \mu_5 y_2 y_5 y_3 = 0,$$

dalla quale si vede che la ψ generica passa per i cinque piani

$(A^{\bullet}_1 A^{\bullet}_2 A^{\bullet}_3)$, $(A^{\bullet}_2 A^{\bullet}_3 A^{\bullet}_4)$, $(A^{\bullet}_3 A^{\bullet}_4 A^{\bullet}_5)$, $(A^{\bullet}_4 A^{\bullet}_5 A^{\bullet}_1)$, $(A^{\bullet}_5 A^{\bullet}_1 A^{\bullet}_2)$

della piramide fondamentale di $S^{\bullet}_4$, i quali sono dunque i cinque piani base di $|\psi|$.

La jacobiana di $|\psi|$ si trova esser data da

$$y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2 y_5^2 = 0.$$

Ad un iperpiano variabile per es. per il lato $(A_1 A_4)$, di equazione $\lambda_3 x_3 + \lambda_5 x_5 + \lambda_2 x_2 = 0$, corrisponde la ipersuperficie ψ di equazione $\lambda_3 y_5 y_3 y_1 + \lambda_5 y_2 y_5 y_3 + \lambda_2 y_4 y_2 y_5$, da cui si stacca l'iperpiano $y_5 = 0$, che corrisponde dunque al lato $(A_1 A_4)$. Analogamente agli altri lati fondamentali di S_4 corrispondono i rimanenti iperpiani della jacobiana di $|\psi|$.

Per vedere ciò che corrisponde al pnnto generico di $(A_1 A_4)$ basta trovare la superficie variabile che una ψ ha in comune con l'iperpiano $y_5 = 0$. La completa intersezione si trova essere data dal sistema

$$y_5 = 0, \quad y_1 y_4 (\mu_1 y_3 + \mu_4 y_2) = 0,$$

cioè dai piani fondamentali

$$y_5 = 0,\ y_1 = 0; \quad y_5 = 0,\ y_4 = 0;$$

e dal piano variabile

$$y_5 = 0, \quad \mu_1 y_3 + \mu_4 y_2 = 0,$$

che è un piano del fascio avente per asse la retta $(A^*_1 A^*_4)$ e contenuto nell'iperpiano $(1^*\, 2^*\, 3^*\, 4^*)$.

I punti doppi della ψ generica hanno per coordinate le soluzioni del sistema di equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_1 y_3 y_4 + \mu_3 y_5 y_3 + \mu_4 y_4 y_2 = 0, \\ \mu_2 y_4 y_5 + \mu_4 y_1 y_4 + \mu_5 y_5 y_3 = 0, \\ \mu_3 y_5 y_1 + \mu_5 y_2 y_5 + \mu_1 y_1 y_4 = 0, \\ \mu_4 y_1 y_2 + \mu_1 y_3 y_1 + \mu_2 y_2 y_5 = 0, \\ \mu_5 y_2 y_3 + \mu_2 y_4 y_2 + \mu_3 y_3 y_1 = 0, \end{array}\right.$$

ottenute uguagliando a zero le derivate parziali del primo membro della (2). Siccome, per un teorema di Bertini, i punti doppi della ψ generica dovranno trovarsi sui piani base, si deduce che, oltre ai vertici $A^{\bullet}_i\,(i=1,2,3,4,5)$ della piramide fondamentale, si hanno i 5 punti doppi definiti dalle seguenti quaterne di equazioni

$$
\begin{array}{llll}
y_3=0, & y_4=0, & \mu_3 y_1+\mu_5 y_2=0, & \mu_4 y_1+\mu_2 y_5=0;\\
y_4=0, & y_5=0, & \mu_4 y_2+\mu_1 y_3=0, & \mu_5 y_2+\mu_3 y_1=0;\\
y_5=0, & y_1=0, & \mu_5 y_3+\mu_2 y_4=0, & \mu_1 y_3+\mu_4 y_2=0;\\
y_1=0, & y_2=0, & \mu_1 y_4+\mu_3 y_5=0, & \mu_2 y_4+\mu_5 y_3=0;\\
y_2=0, & y_3=0, & \mu_2 y_5+\mu_4 y_1=0, & \mu_3 y_5+\mu_1 y_4=0;
\end{array}
$$

Le coordinate dei punti doppi variabili, che indicheremo con $B^{\bullet}_i\,(i=1,2,3,4,5)$, sono dunque

$$
\begin{array}{llllll}
B^{\bullet}_1\equiv(& -\mu_1\mu_5, & \mu_2\mu_3, & 0, & 0, & \mu_4\mu_5)\\
B^{\bullet}_2\equiv(& \mu_5\mu_1, & -\mu_3\mu_1, & \mu_3\mu_4, & 0, & 0\ )\\
B^{\bullet}_3\equiv(& 0, & \mu_1\mu_2, & -\mu_4\mu_2, & \mu_4\mu_5, & 0\ )\\
B^{\bullet}_4\equiv(& 0, & 0, & \mu_2\mu_3, & -\mu_5\mu_3, & \mu_5\mu_1)\\
B^{\bullet}_5\equiv(& \mu_1\mu_2, & 0, & 0, & \mu_3\mu_4, & -\mu_1\mu_4)
\end{array}
$$

La ψ, oltre ai cinque piani base

$$
(A^{\bullet}_5 A^{\bullet}_1 A^{\bullet}_2 B^{\bullet}_1),\ (A^{\bullet}_1 A^{\bullet}_2 A^{\bullet}_3 B^{\bullet}_2),\ (A^{\bullet}_2 A^{\bullet}_3 A^{\bullet}_4 B^{\bullet}_3),
$$
$$
(A^{\bullet}_3 A^{\bullet}_4 A^{\bullet}_5 B^{\bullet}_4),\ (A^{\bullet}_4 A^{\bullet}_5 A^{\bullet}_1 B^{\bullet}_5),
$$

possiede altri 10 piani. Di questi, cinque si trovano subito segando ψ con gl'iperpiani della piramide fondamentale, che già contengono ciascuno due piani base. Si trovano così le cinque coppie di equazioni

$$y_5 = 0, \quad \mu_1 y_3 + \mu_4 y_2 = 0;$$
$$y_1 = 0, \quad \mu_2 y_4 + \mu_5 y_3 = 0;$$
$$y_2 = 0, \quad \mu_3 y_5 + \mu_1 y_4 = 0;$$
$$y_3 = 0, \quad \mu_4 y_1 + \mu_2 y_5 = 0;$$
$$y_4 = 0, \quad \mu_5 y_2 + \mu_3 y_1 = 0;$$

che rappresentano rispettivamente i piani

$$(A^\bullet_1 A^\bullet_4 B^\bullet_2 B^\bullet_3), \quad (A^\bullet_2 A^\bullet_5 B^\bullet_3 B^\bullet_4), \quad (A^\bullet_3 A^\bullet_1 B^\bullet_4 B^\bullet_5),$$
$$(A^\bullet_4 A^\bullet_2 B^\bullet_5 B^\bullet_1), \quad A^\bullet_5 A^\bullet_3 B^\bullet_1 B^\bullet_2).$$

Si osservi poi che per es. l' iperpiano $\mu_1 y_3 + \mu_4 y_2 = 0$ contiene il piano $(A^\bullet_4 A^\bullet_5 A^\bullet_1 B^\bullet_5)$ e il piano $(A^\bullet_1 A^\bullet_4 B^\bullet_2 B^\bullet_3)$. Segando dunque con esso la ψ si ottiene il piano ulteriore definito dalle equazioni

$$\text{(3)} \qquad \mu_1 y_3 + \mu_4 y_2 = 0, \quad \mu_1 \mu_2 y_4 - \mu_3 \mu_4 y_1 + \mu_5 \mu_1 y_3 = 0.$$

In modo analogo si trovano gli altri 4 piani definiti dalle coppie di equazioni che si ottengono permutando circolarmente gli indici nella precedente coppia di equazioni. Si verifica facilmente che le (3) e le altre coppie di equazioni che in tal modo se ne deducono rappresentano rispettivamente i piani

$$(B^\bullet_2 B^\bullet_5 B^\bullet_3 A^\bullet_5), \quad (B^\bullet_3 B^\bullet_1 B^\bullet_4 A^\bullet_1), \quad (B^\bullet_4 B^\bullet_2 B^\bullet_5 A^\bullet_2),$$
$$(B^\bullet_5 B^\bullet_3 B^\bullet_1 A^\bullet_3), \quad (B^\bullet_1 B^\bullet_4 B^\bullet_2 A^\bullet_4),$$

Al piano fondamentale $y_4 = 0$, $y_5 = 0$ di S_4^* corrisponde in S_4 l'iperpiano $x_2 = 0$. Infatti ad un iperpiano variabile per quel piano, di equazione $\mu_4 y_4 + \mu_5 y_5 = 0$, corrisponde la quadrica $\mu_4 x_1 x_2 + \mu_5 x_2 x_3 = 0$. Analogamente agli altri piani fondamentali corrispondono gli altri iperpiani che costituiscono la jacobiana di $|\varphi|$.

Si potrebbe facilmente vedere che ad un punto per es. del piano $y_4 = 0$, $y_5 = 0$, corrisponde una retta appoggiata ai lati $(A_5 A_3)$, $(A_1 A_4)$.

Osserviamo infine per giustificare un'asserzione fatta al § 2, che mentre in S_4^* i punti degli spigoli $(A_i^* A^*_{i+1})$ della piramide fondamentale sono del quarto tipo, giacchè nel generico di essi l'iperpiano tangente alla ψ generica è fisso (quello individuato dai due piani base incidenti lungo quello spigolo), in S_4 non si hanno punti del quarto tipo, onde si deduce che a un punto fondamentale del quarto tipo non corrisponde necessariamente un punto dello stesso tipo.