ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIOVANNI RICCI

Le trasformazioni di Christoffel e di Darboux per le superficie rotonde, coniche e cilindriche. Alcune generazioni per rotolamento del cono e del cilindro di rotazione

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 15 (1927), exp. nº 5, p. 1-64
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1927_1_15__A5_0>

GIOVANNI RICCI

LE TRASFORMAZIONI

DI

CHRISTOFFEL E DI DARBOUX

PER LE

SUPERFICIE ROTONDE, CONICHE E CILINDRICHE

Alcune generazioni per rotolamento del cono
e del cilindro di rotazione.

INDICE

INTRODUZIONE

Questo lavoro consta di tre parti.

1). Nella prima parte (§ 1 - § 5) considero le trasformazioni conformi dello spazio in sè, nel campo complesso soffermandomi (§ 1) sul prodotto **H** di due inversioni coi poli su una stessa retta isotropa; anche col trascurare una similitudine questo prodotto non si può ridurre all'identità o ad un'unica inversione. Ai §§ 2, 3 soffermandami su qualche caso particolare, osservo le trasformate conformi delle superficie rotonde, coniche, cilindriche e di Joachimsthal, notando che mediante una trasformazione **H** si può passare da una superficie di Joachimsthal a una superficie modanata di Monge a cono direttore. Al § 5, basandomi su un resultato di P. Adam, scelgo le superficie isoterme fra le superficie che hanno un sistema di linee di curvatura segnate dalle sfere di un fascio.

2). Nella seconda parte studio un procedimento ricorrente di Darboux-Christoffel applicato alle superficie rotonde coniche e cilindriche. Ai §§ 6-9 studio la trasformazione di Christoffel per le superficie rotonde, coniche e cilindriche, considerando (§ 8) quella per le superficie rotonde come una trasformazione di curve piane rappresentabile mediante un' inversione per raggi vettori reciproci. Ai §§ 10, 11 faccio alcune considerazioni generali sul procedimento in discorso, osservando come questo permette di dividere l' insieme delle superficie isoterme in classi [Δ] ciascuna contenente infinite superficie, dipendenti da infiniti parametri arbitrarî. Ai §§ 12-15 applico il detto procedimento alle superficie rotonde, coniche e cilindriche soffermandomi su alcuni casi particolari, e prendo occasione al § 14 di enunciare, per mezzo di considerazioni geometriche, alcune proposizioni in accordo con i resultati di P. Adam sulle superficie isoterme.

3). Nella terza parte studio le trasformazioni D_m per le superficie rotonde, coniche e cilindriche. Al § 16 ricordo la definizione e le formole relative alle trasformazioni D_m, e alcune proposizioni fondamentali su di esse. Al § 17 osservo le classi di superficie isoterme costruibili mediante le formole del Calò sulla generazione del piano e della sfera come superficie di rotolamento. Ai §§ 18, 19, 20 studio le trasformazioni D_m rispettivamente per le superficie rotonde, coniche e cilindriche riportando il problema alla integrazione di un' equazione differenziale lineare omogenea del terzo ordine. Ai §§ 21, 22 determino tutte le trasformazioni D_m e le corrispondenti generazioni per rotolamento del cono e del cilindro di rotazione. Le formole relative al cilindro rotondo contengono come caso particolare le trasformazioni di Ribaucour-Guichard del cilindro stesso come superficie a curvatura media costante, e mostrano che il sistema coniugato (u, v) della superficie d' appoggio è permanente in una deformazione continua ad un parametro con cui si passa dalla superficie d' appoggio detta alla superficie rotolante. In ultimo, al § 23, accenno alle generazioni per rotolamento che risultano senz' altro note insieme a quelle precedentemente determinate, fra cui quelle della ciclide di Dupin.

PARTE PRIMA

Sulle trasformazioni conformi

§ 1. È noto che le trasformazioni conformi dello spazio in sè costituiscono un gruppo continuo finito a 10 parametri e si ottengono combinando i movimenti colle inversioni per raggi vettori reciproci.

Ricordiamo che (vedi Darboux «Principes de Géométrie Analytique», n. 241 e segg.): A due inversioni per raggi vettori reciproci $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ possiamo sostituirne due altre $\mathbf{I'}_1, \mathbf{I'}_2$ le cui sfere principali appartengono al fascio delle due precedenti colla condizione che: detti P_1, P_2, Q_1, Q_2 i poli rispettivi delle quattro inversioni, e L, L' i due punti limite del fascio, i due gruppi (L, L', P_1, Q_1), (L, L', P_2, Q_2) siano projettivi. Il teorema perde significato se P_1 e P_2 coincidono.

Per mezzo di questo teorema, assumendo Q_1 improprio si arriva facilmente a concludere che: La più generale trasformazione conforme $\mathbf{J}$ dello spazio in sè è una similitudine oppure si riduce a un'inversione seguita da un movimento (di prima specie). È evidente che se $\mathbf{J}$ non è una similitudine tale riduzione può effettuarsi in un modo unico.

Poichè l'inversione subordina una projettività fra due cerchî (o rette) corrispondenti si conclude: La corrispondenza di punto a punto subordinata dalla più generale trasformazione conforme fra due cerchi (o rette) corrispondenti è una projettività.

Lo studio delle trasformazioni conformi, tralasciando il caso della similitudine, si riduce allo studio di una inversione oppure della trasformazione di che appresso.

Allorchè si introduca sistematicamente l'immaginario si presenta un caso in cui il primo teorema ricordato sussiste sempre, ma non può più applicarsi al punto Q_1 improprio:

Siano $\mathbf{I}_1$ *e* $\mathbf{I}_2$ *due inversioni coi poli* P_1 *e* P_2 *sulla stessa retta isotropa* j*, e consideriamo la trasformazione conforme (essenzialmente immaginaria)* $\mathbf{H} = \mathbf{I}_1 . \mathbf{I}_2$. In questo caso uno dei due punti limite L, L' è improprio e non può assumersi come punto Q_1. Un piano τ per P_1 taglia il cono isotropo di centro P_2 in un cerchio Γ; il cerchio Γ è trasformato da $\mathbf{I}_1$ in una retta a, mentre da $\mathbf{I}_2$ nell'assoluto, quindi $\mathbf{H}$ trasforma la retta a nell'assoluto.

Evidentemente il fascio di piani di asse a si trasforma con $\mathbf{H}$ nel fascio di sfere concentriche il cui centro comune M si ottiene invertendo con $\mathbf{I}_2$ il centro del secondo cono isotropo per Γ. Al variare di τ per P_1, a descrive una congruenza di rette parallele ad un piano isotropo e la $\mathbf{H}$ trasforma ciascuna retta della congruenza nell'assoluto; questo basta per concludere:

La trasformazione $\mathbf{H}$ *non è una similitudine e non si può ridurre al prodotto di un' inversione per un movimento.*

La rete di sfere ortogonale al fascio di piani di asse a si trasforma nella rete ortogonale al fascio di sfere concentriche, cioè nella stella dei piani diametrali. Se A e A'

sono i due punti in cui una sfera S della rete incontra la retta a e $\overline{A}$, $\overline{A}'$ i punti corrispondenti per $\mathbf{I}_1$ su Γ, il piano trasformato di S mediante $\mathbf{H}$ è il piano per M parallelo a $P_2\ \overline{A}\ \overline{A}'$.

Tutte le considerazioni sulla trasformazione $\mathbf{H}$ che precedono si possono confermare analiticamente. Fissata per semplicità una terna ortogonale $P_1(\xi, \eta, \zeta)$ col piano $P_1\xi\eta$ per j, risulta $P_1 \equiv (0, 0, 0)$, $P_2 \equiv (l, il, 0)$ e dette α e β le potenze rispettive delle due inversioni le formole di $\mathbf{H}$ si calcolano subito

$$(1)\quad \begin{cases} \bar{\xi} = \dfrac{\beta}{\theta}\left(\xi - \dfrac{l\varrho}{\alpha}\right),\ \bar{\eta} = \dfrac{\beta}{\theta}\left(\eta - \dfrac{il\varrho}{\alpha}\right),\ \bar{\zeta} = \dfrac{\beta\zeta}{\varrho} \\ \varrho = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2;\ \theta = \alpha - 2l(\xi + i\eta). \end{cases}$$

La retta a di equazioni $\left(\eta = 0, \xi = \dfrac{\alpha}{2l}\right)$ si inverte con $\mathbf{I}_1$ nel cerchio Γ di equazioni $(\eta = 0, \xi^2 + \zeta^2 - 2l\xi = 0)$ che appartiene al cono isotropo di centro P_2, e questo cerchio a sua volta con $\mathbf{I}_2$ si trasforma nell'assoluto, di modo che il fascio ci piani di asse a

$$\xi + h\eta = \frac{\alpha}{2l}$$

si trasforma con $\mathbf{H}$ nel fascio di sfere:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2l\xi - i2\left(l + \frac{\beta}{2l}\right)\eta - \beta\left(1 + \frac{\beta}{2l^2(1 + ih)}\right) = 0$$

aventi il centro comune nel punto

$$M \equiv \left(l, il + \frac{i\beta}{2l}, 0\right)$$

inverso per $\mathbf{I}_2$ del punto $(l, -il, 0)$.

Fra l'azimut v del piano nel fascio e il raggio ϱ della sfera corrispondente corre la relazione semplicissima

(2) $$\varrho^2 = k^2 \frac{\operatorname{tg} v + i}{\operatorname{tg} v - i}, \quad \left(k = \frac{\beta}{2l}\right).$$

La sfera S

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \frac{\alpha}{l}\xi - \frac{\alpha n}{lm}\zeta + \frac{\alpha^2}{2lm} = 0$$

della rete ortogonale alla retta a si trasforma con $\mathbf{H}$ nel piano

$$(l-m)\xi + il\eta - n\zeta + \left(ml + \frac{\beta}{2}\right) = 0$$

passante per M e parallelo al piano $P_2 \bar{A}\bar{A}'$ di equazione:

$$(l-m)\xi + il\eta - n\zeta + lm = 0.$$

Quando si trascuri un'omotetia, nelle formole (1) possiamo evidentemente assumere $l = \alpha = \beta = 1$, e le formole assumono la forma

(1)' $$\bar{\xi} = \frac{\xi - \varrho}{\theta}, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta - i\varrho}{\theta}, \quad \bar{\zeta} = \frac{\zeta}{\theta};$$

$$(\varrho = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \ \theta = 1 - 2(\xi + i\eta)).$$

Tenendo conto del teorema ricordato al principio di questo § si vede che ad ogni retta isotropa j si può associare la trasformazione (1)' assumendo il riferimento in modo che sia $P_1 \equiv (0,0,0)$, $P_2 \equiv (1,i,0)$.

§ **2.** *a*) Sia Σ una superficie rotonda di asse a; la sfera S col centro sull'asse inviluppata da Σ incontra l'asse in due punti M, M' e definisce così una corrispondenza (M, M') fra i punti dell'asse. Con un'inversione che ha il polo sull'asse la Σ si trasforma in una nuova superficie rotonda Σ_1; detti M_1, M'_1 i punti corrispondenti di M, M', la corrispondenza (M_1, M'_1) è trasformata della (M, M') mediante un'involuzione. Nel caso in cui (M, M') sia una projettività si vede facilmente che Σ è una superficie torica (eventualmente cono o cilindro); in tal caso (M_1, M'_1) è una projettività collo stesso invariante assoluto.

Un'inversione che ha il polo P fuori dell'asse a trasforma Σ in una nuova superficie Σ_1 le cui linee $u = \text{cost}$ (*) sono circolari e stanno in un fascio di piani; infatti tale fascio non è altro che il trasformato del fascio di sfere avente per cerchio base il cerchio per P di asse a; dunque Σ_1 è una superficie di Joachimsthal (vedi « B » § 193 e segg.) (**) a profili meridiani circolari. Le linee $v = \text{cost}$ su Σ_1 sono segnate ortogonalmente (***) dal fascio di sfere trasformato del fascio di piani di asse a.

Se Σ è un toro, Σ_1 ha anche le linee $v = \text{cost}$ circolari ed è una ciclide di Dupin; Σ_1 sarà anch'essa un toro quando P appartiene al cerchio focale ordinario (cioè allorchè P è punto limite del fascio definito dai due cerchî ottenuti segando il toro con il piano meridiano per P), ma i meri-

---

(*) Diremo linee $u = \text{cost}$ per le superficie rotonde i paralleli, per le superficie coniche (e cilindriche) le generatrici e le trasformate di queste; linee $v = \text{cost}$ quelle ortogonali alle precedenti.

(**) Per le citazioni più frequenti denoteremo con « B », « Bianchi, Lezioni di Geometria differenziale, Pisa, 1922 » e con « D », « G. Darboux, Leçons sur la Théorie des Surfaces, Paris ».

(***) Con « segnate ortogonalmente », qui e nel seguito, intendiamo dire che ogni sfera taglia la superficie Σ_1 secondo nn angolo retto, lungo tutta la linea $v = \text{cost}$ corrispondente.

diani di Σ_1 corrispondono ai paralleli di Σ; si vedrebbe facilmente che per Σ_1 il rapporto fra il raggio del cerchio meridiano e quello del cerchio focale ordinario è il reciproco del rapporto analogo per Σ e quindi la projettività (N, N') definita sull'asse del toro Σ_1 dalla sfera inviluppata che incontra l'asse nei due punti N, N' e la projettività (M, M') hanno gl'invarianti assoluti in generale diversi; le due projettività (M, M'), (N, N') sono projettivamente identiche allora ed allora soltanto che, per Σ, hanno egual raggio il cerchio meridiano e il cerchio focale ordinario. Inversamente, se due superficie rotonde sono trasformate conformi l'una dell'altra in modo che i meridiani dell'una corrispondono ai paralleli dell'altra, tali meridiani devono essere circolari e quindi le due superficie sono toriche.

Per quel che precede possiamo enunciare.

Condizione necessaria e sufficiente perchè due superficie rotonde Σ e Σ_1 siano trasformate conformi l'una dell'altra è che siano projettivamente identiche le corrispondenze (M, M'), (M_1, M'_1) definite sull'asse dalla sfera inviluppata. Fa eccezione solo il caso in cui Σ e Σ_1 sono due superficie toriche tali che il rapporto fra i raggi del cerchio meridiano e del cerchio focale ordinario di Σ sia il reciproco di quello analogo per Σ_1, poichè allora Σ si può trasformare in Σ_1 collo scambio dei meridiani coi paralleli.

b) Con un'inversione di polo P un cono Σ di vertite V si trasforma in una nuova superficie Σ_1 colle linee $u = \text{cost}$ circolari sui piani per PV, mentre le linee $v = \text{cost}$ sono segnate ortogonalmente dalle sfere del fascio trasformato del fascio di sfere di centro V. Dunque Σ è una superficie di J. a profili meridiani circolari.

c) Con un'inversione di polo P una superficie cilindrica si trasforma in una superficie di J. a profili meridiani circolari avente per asse la retta per P parallela alle generatrici; ogni profilo circolare è tangente in P all'asse.

d) Inversamente, se Σ_1 è una superficie di J. a profili circolari allora ed allora soltanto l'altro sistema di linee di curvatura è segnato ortogonalmente dalle sfere di un fascio. Possono presentarsi tre casi: 1.°) Il fascio di sfere ha il cerchio base reale. Allora i profili meridiani non incontrano l'asse e un'inversione col polo P sul cerchio base trasforma la superficie in una superficie rotonda. 2.°) I profili meridiani tagliano l'asse in due punti P, Q e allora un'inversione di polo P trasforma la superficie in un cono. 3.°) I profili meridiani toccano in P l'asse, allora con un'inversione di polo P la superficie si trasforma in un cilindro. Dunque: *Allorchè il piano di un fascio di cerchî ruota attorno all'asse radicale, un cerchio, variando nel fascio stesso, descrive la più generale trasformata conforme di una superficie rotonda, conica, cilindrica, secondochè il fascio à i punti base immaginarî coniugati, reali distinti, reali coincidenti.*

Una trasformazione **H** che muti l'asse a di una superficie rotonda Σ nell'assoluto, trasforma Σ in una superficie Σ_1 in cui il sistema di linee di curvatura $v = \text{cost}$ è segnato ortogonalmente da un fascio di sfere concentriche di centro V, per cui Σ_1 è un cono di vertice V; possiamo enunciare:

Non facendo distinzione fra il reale e l'immaginario, mediante una trasformazione **H** *si può passare da una superficie di rotazione a un cono e inversamente.*

La superficie torica si trasforma in un cono rotondo.

§ 3. Sia Σ una superficie di Joachimsthal; allorchè si assuma il suo asse come asse delle z, per parametro t la coordinata z del centro della sfera S ortogonale e per parametro v la longitudine, le equazioni di Σ sono (vedi «B», § 193):

$$(3) \qquad x = R\frac{\cos v}{\cosh \tau}, \quad y = R\frac{\operatorname{sen} v}{\cosh \tau}, \quad z = t - R \operatorname{tgh} \tau;$$

$$\left(\tau = \int \frac{dt}{R} + V\right)$$

dove $R = R(t)$ è il raggio della sfera di centro $(0, 0, t)$ e $V = V(v)$ è funzione della sola v. Il piano di profilo (v) taglia Σ secondo un angolo σ definito dalla formola

$$(4) \qquad \cos \sigma = \frac{V'}{\sqrt{1 + V'^2}}.$$

Diciamo (A, A') la corrispondenza posta fra i punti dell'asse $A \equiv (t - R)$, $A' \equiv (t + R)$ intersezioni di questo colla sfera S. I profili meridiani $v = \text{cost}$ nel piano $O(r, z)$ hanno l'equazione

$$(5) \qquad r = \frac{R}{\cosh \tau}, \quad z = t - R \operatorname{tgh} \tau.$$

Con un'inversione avente il polo sull'asse seguita da un movimento la superficie Σ si trasforma in una nuova superficie di J. Σ_1: denotiamo con l'indice 1 gli elementi relativi a questa snperficie; allora (A, A') e (A_1, A'_1) sono projettivamente identiche e per la (4) abbiamo identicamente

$$(6) \qquad V_1(v + c) = V(v) + c'$$

con c e c' costanti opportune. Inversamente, se due superficie di J. sono trasformate conformi l'una dell'altra con corrispondenza di profili meridiani le due condizioni ora dette sono soddisfatte a meno che le due superficie siano a profili meridiani circolari, nel qual caso si vede facilmente che la seconda condizione può non essere soddisfatta. Dunque:

Se due superficie di Joachimsthal Σ e Σ_1 sono trasformate conformi l'una dell'altra allora le due corrispondenze (A, A'), (A_1, A'_1) definite su ciascun asse dal sistema di sfere ortogonali sono projettivamente identiche, ed esistono due costanti c e c' per cui è identicamente soddisfatta la (6). *Fa eccezione il caso in cui una almeno delle due superficie sia a profili meridiani circolari, nel qual caso la condizione* (6) *può non essere soddisfatta.*

Consideriamo alcuni casi particolari.

a) Se $V = \text{cost}$, la superficie Σ è rotonda.

b) Se $V = av + b$, $(a \neq 0)$, il piano di profilo forma angolo costante con la superficie; per questo le linee $t = \text{cost}$ sono lossodromiche sferiche (Scheffers).

c) Le superficie di J. per cui (A, A') è un'involuzione sono le trasformate conformi delle superficie rotonde (involuzione ellittica), coniche (involuzione iperbolica), cilindriche (involuzione degenere). Queste superficie sono caratterizzate da

$$R = \sqrt{t^2 + at + b}, \qquad (a, b \text{ costanti}).$$

d) Se $R = k$, la corrispondenza (A, A') è una traslazione, e i profili meridiani (trattrici di tangente k) hanno le equazioni:

$$(5)' \qquad r = \frac{2kce^{\frac{t}{k}}}{1 + c^2 e^{\frac{2t}{k}}}, \quad z = t + k\,\frac{1 - c^2 e^{\frac{2t}{k}}}{1 + c^2 e^{\frac{2t}{k}}} \quad (c \text{ costante}).$$

Se $R = kt$ la corrispondenza (A, A') è una similitndine e i profili meridiani hanno l'equazioni

$$(5)'' \qquad r = kt\,\frac{2ct^{\frac{1}{k}}}{1 + c^2 t^{\frac{2}{k}}}, \quad z = t + kt\,\frac{1 - c^2 t^{\frac{2}{k}}}{1 + c^2 t^{\frac{2}{k}}} \quad (c \text{ costante}).$$

I profili meridiani delle superficie di J. per cui (A, A') è una proiettività si ottengono tutti con inversione dalle curve (5)' e (5)''.

e) Le elicoidi pseudosferiche del Dini sono superficie di J. caratterizzate da $R = k$, $V = av + b$, per cui: Le superficie di J. trasformate delle elicoidi pseudosferiche del Dini sono tutte e sole quelle per cui (A, A') è una projettività parabolica e la funzione V è lineare.

§ 4. *Diciamo superficie* (*J*) *ogni superficie sulla quale un sistema di linee di curvatura è segnato dalle sfere (o piani) di un fascio.*

Trasformando una superficie di Joachimsthal Σ con un' inversione il cui polo non appartenga all' asse a otteniamo evidentemente una superficie (J) sulla quale le linee $v = \text{cost}$ sono segnate dalle sfere pel cerchio Γ inverso di a. Se Σ e l' inversione sono reali, anche Γ è reale.

Trasformando Σ con una **H** che porti a nell' assoluto, otteniamo una nuova superficie Σ_1 avente il sistema di linee di curvatura $v = \text{cost}$ su sfere concentriche, quindi (vedi « B », § 192) Σ_1 è modanata a sviluppabile direttrice conica. La generatrice piana C della superficie modanata Σ_1 dipende soltanto dalla funzione V, mentre il cono direttore dipende dalla funzione R. Riferito un piano $t = \text{cost}$ a coordinate polari (ϱ, θ) col polo M nel vertice del cono direttore, l' equazione della curva C ha la forma

$$\theta = \int \frac{V'}{\varrho} d\varrho,$$

l' apice indicando la derivazione rispetto a v, ed essendo V' funzione di ϱ composta mediante la v data dalla formola (2) del § 1. A questa equazione si arriva osservando che è noto l'angolo $\sigma_1 = \frac{\pi}{2} - \sigma$ formato dal raggio vettore colla curva C.

Consideriamo alcuni casi particolari.

a) Per le superficie rotonde è $V = \text{cost}$, quindi $\theta = \text{cost}$ e si conferma essere Σ_1 un cono di vertice M (§ 2).

b) Se $V = av + b$, $(a \neq 0)$ la curva C è la spirale logaritmica

$$\varrho = c e^{\frac{\theta}{a}} \quad (c \text{ costante}).$$

c) Se (A, A') è una projettività, con facili considerazioni si vede che Σ_1 ha il cono direttore rotondo; tale cono iperoscula l'assoluto nel caso della projettività parabolica e si riduce a una retta nel caso dell'involuzione. Evidentemente un'inversione trasforma una superficie modanata a cono direttore in una superficie (J).

Un'inversione di polo P trasforma una superficie modanata a sviluppabile direttrice cilindrica in una superficie (J) in cui il relativo fascio di sfere è costituito dalle sfere tangenti in P al piano per P normale alle generatrici del cilindro direttore.

Tali considerazioni si invertono facilmente, per cui possiamo enunciare:

Le superficie che hanno un sistema di linee di curvatura segnate dalle sfere (o piani) di un fascio (S), superficie (J), hanno l'altro sistema di linee di curvatura segnate ortogonalmente da ∞^1 sfere (o piani) tratte dalla rete ortogonale a (S). Le superficie (J) per cui (S) ha i punti limite immaginarî coniugati, reali e distinti, reali e coincidenti sono tutte e sole le trasformate conformi rispettivamente delle superficie di Joachimsthal, delle superficie modanate a cono direttore, delle superficie modanate a cilindro direttore.

Allorchè non si faccia alcuna distinzione fra il reale e l'im-

maginario, le superficie modanate a cono direttore e le superficie di Joachimsthal hanno a comune le trasformate conformi; mediante una trasformazione **H** *si passa da una superficie di Joachimsthal a una superficie modonata a cono direttore e inversamente; e possiamo precisare che la forma del cono direttore e della curva generatrice di questa dipendono soltanto e rispettivamente dalle funzioni* $R = R(t)$, $V = (v)$ *che definiscono quella.*

Le formole (5)' *e* (5)'' *assegnano i profili meridiani delle superficie di Joachimsthal per cui* (A, A') *è una projettività; le superficie modanate corrispondenti hanno il cono direttore rotondo, e se la projettività è parabolica, tale cono iperoscula l'assoluto. Le superficie di Joachimsthal per le quali* $V = av + b$, $(a \neq 0)$, *si trasformano nelle superficie modanate la cui generatrice piana è una spirale logaritmica col polo nel vertice del cono direttore.*

Ogni elicoide pseudosferica del Dini si trasforma in una superficie modanata il cui cono direttore iperoscula l'assoluto e la cui generatrice piana è una spirale logaritmica col polo nel vertice del cono direttore.

Mediante una trasformazione **H** *si passa da una superficie rotonda ad un cono e inversamente. Le superficie rotonde per cui* (A, A') *è una projettività si trasformano nei coni evolventi dei coni rotondi.*

Dal considerare la inversione di una superficie (J) in una superficie modanata a cono direttore, discende come corollario:

Sia (S) un sistema di sfere semplicemente infinito appartenente a una rete i cui punti base diciamo B, B'; segnata su una sfera qualunque S_0 del sistema una linea L_0, le trajettorie ortogonali del sistema (S) uscenti da L_0 segnano su ogni sfera S una linea L. Si verifica la proprietà caratteristica per tal sistema: Le proiezioni stereografiche conformi da B' sui piani per B delle sfere S dànno per immagini delle curve L, le curve C, che sono congruenti per una rotazione attorno a B. In particolare, se L_0 è un cerchio, tutte le linee L sono circolari.

§ 5. P. Adam (« Sur les surfaces isothermiques... » Comptes rendus, tome CXVI, 1893, p. 1036) ha dimostrato che le sole superficie di Joachimsthal isoterme, oltre a quelle rotonde, sono quelle a profili meridiani circolari; e poichè invertendo una di queste superficie si ottiene ancora una superficie a profili meridiani circolari si conclude:

Le superficie (J) isoterme sono tutte e sole le superficie rotonde, coniche, cilindriche e le loro trasformate conformi.

PARTE SECONDA

Il procedimento ricorrente di Darboux-Christoffel applicato alle superficie rotonde, coniche e cilindriche.

La trasformazione di Christoffel per le superficie di rotazione.

§ 6. « *Nota.* Due superficie che si corrispondono per parallelismo di normali in una rappresentazione conforme si dicono trasformate di Christoffel l'una dell'altra (vedi « D », II, n. 429 e segg.; « B », § 291). Tale trasformazione è definita a meno di un'omotetia, risulta involutoria e richiede che le due superficie siano isoterme (*). Se

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad z = z(u,v); \quad ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2)$$

sono le equazioni e il quadrato dell'elemento lineare della prima superficie, le equazioni della superficie trasformata e il suo elemento lineare sono dati da:

$$(C) \qquad \begin{cases} dx_1 = e^{-2\theta}\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\, du - \dfrac{\partial x}{\partial v}\, dv\right) \\ dy_1 = e^{-2\theta}\left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\, du - \dfrac{\partial y}{\partial v}\, dv\right) \\ dz_1 = e^{-2\theta}\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\, du - \dfrac{\partial z}{\partial v}\, dv\right), \end{cases}$$

$$ds_1^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2).$$

(*) Ricordiamo che assegnata una superficie isoterma le sue linee di curvatura si determinano con quadrature (vedi « B », § 292).

La definizione geometrica cade in difetto nel caso delle superficie ad area minima, ma estendendo a questo caso la definizione analitica (C) sappiamo che:

1) Tutte e sole le superficie ad area minima si ottengono come trasformate di Christoffel della sfera riferita ad un sistema isotermo che risulta l'immagine sferica delle linee di curvatura (Bour);

2) Due superficie trasformate di Christoffel l'una dell'altra, sono parallele allora ed allora soltanto che hanno la medesima curvatura media costante; la trasformazione di Christoffel in questo caso particolare si riduce alla corrispondenza per parallelismo del teorema di Bonnet».

Siano

$$x = r(u_1)\cos v\,,\quad y = r(u_1)\,\mathrm{sen}\, v\,,\quad z = z(u_1)$$

le equazioni parametriche di una superficie rotonda Σ (u_1 arco di meridiano), il cui elemento lineare ds è dato dalla formola

$$ds^2 = du_1^2 + r^2\, dv^2.$$

Riduciamoci ai parametri isometrici (u, v) col porre

$$du = \frac{du_1}{r}\,,\quad e^\theta = r$$

dove $\theta = \theta(u)$ è funzione della sola u. Le equazioni di Σ diventano

$$(a)\qquad x = e^\theta \cos v\,,\ y = e^\theta\,\mathrm{sen}\, v\,,\ z = \int e^\theta \sqrt{1-\theta'^2}\, du$$

e quelle del meridiano

$$(b)\qquad r = e^\theta,\ \ z = \int e^\theta \sqrt{1-\theta'^2}\, du$$

Il quadrato dell'elemento lineare assume la forma

$$(\mathrm{I})\qquad ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2).$$

La trasformata di Christoffel Σ_1 della superficie Σ di rotazione ha l'immagine sferica, a comune con Σ, composta di meridiani e paralleli, quindi Σ_1 è modanata a cilindro direttore (vedi « B », § 192) parallelo all'asse di Σ. Poichè la trasformazione di Christoffel ha definizione geometrica indipendente dal riferimento, e la Σ ammette un gruppo (a un parametro) di movimenti in se stessa, anche la Σ_1, univocamente determinata, ammette un gruppo continuo di movimenti in se stessa, ed è quindi rotonda coll'asse parallelo a quello di Σ.

Possiamo confermare ciò analiticamente; infatti denotando con l'indice 1 gli elementi relativi alla superficie Σ_1, integrando le (C) otteniamo le equazioni di Σ_1, definita a meno di una traslazione:

$$(1)\quad x_1 = -e^{-\theta}\cos v,\ y_1 = -e^{-\theta}\operatorname{sen} v,\ z_1 = \int e^{-\theta}\sqrt{1-\theta'^2}\,du$$

dalle quali apparisce che Σ_1 è di rotazione col meridiano di equazioni

$$(2)\qquad r_1 = -e^{-\theta},\ z_1 = \int e^{-\theta}\sqrt{1-\theta'^2}\,du;$$

il quadrato dell'elemento lineare è dato da

$$(3)\qquad ds_1{}^2 = e^{-2\theta}(du^2 + dv^2).$$

Vediamo così che fra i punti P, P_1 dei meridiani delle due superficie Σ, Σ_1 la trasformazione di Christoffel subordina una corrispondenza definita dalle equazioni:

$$(4)\qquad r r_1 = -1,\ \frac{dz}{r} = -\frac{dz_1}{r_1}.$$

§ 7. Esempî.

1). La sfera Σ di meridiano

$$r = \frac{a}{\cosh u}, \quad z = a \operatorname{tgh} u$$

si trasforma nel catenoide Σ_1 di meridiano

$$r_1 = -a \cosh \frac{z_1}{a}.$$

2). Possiamo ricercare servendoci della trasformazione di Christoffel, le superficie rotonde a curvatura media costante, tenendo conto della *Nota* 2) al principio del paragrafo precedente. Notiamo che due superficie rotonde parallele devono avere lo stesso asse e quindi se Σ è a curvatura media costante il suo meridiano è parallelo a quello di Σ_1 ad una distanza $2a$, e lungo il primo, come lungo il secondo, sono soddisfatte le equazioni

$$rr_1 = -1, \quad \frac{dz}{r} = -\frac{dz_1}{r_1}, \quad (r-r_1)^2+(z-z_1)^2 = 4a^2.$$

Differenziando la terza e tenendo conto delle prime due equazioni si ha:

$$(r^2+1)\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dz}\right)^2} - 2ar = 0.$$

Questa è l'equazione differenziale caratteristica delle curve del Delaunay che sono le rullette dei fuochi di un'ellisse o di un'iperbola (vedi Cesaro « Geometria intrinseca » p. 69) e la superficie Σ è l'onduloide o il nodoide (vedi « B », § 336). In questo caso interessante le due superficie Σ e Σ_1 sono congruenti per una traslazione lungo l'asse delle z.

3) Applichiamo la trasformazione di Christoffel alle quadriche rotonde; prendendo i meridiani a definire le su-

perficie si hanno le coppie seguenti:

$$r^2 = 2pz, \qquad z_1 = -\frac{1}{p}\log r_1$$

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \qquad r_1 = -\frac{1}{a}\cosh\frac{a^2 z_1}{b}$$

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -1, \qquad r_1 = \frac{i}{a}\operatorname{sen}\frac{a^2 z_1}{b}$$

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \qquad r_1 = \frac{1}{a}\operatorname{sen}\frac{a^2 z_1}{b}, \ (a > b)$$

$$\frac{r^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \qquad r_1 = -\frac{1}{a}\operatorname{senh}\frac{a^2 z_1}{b}, (a < b).$$

§ 8. Pel fatto che la trasformazione di Christoffel muta una superficie rotonda in una superficie rotonda, può considerarsi come una trasformazione involutoria **T** di curve piane, definendo come curve corrispondenti i meridiani C e C_1 di due superficie Σ e Σ_1 trasformate l'una dell'altra ed aventi l'asse a comune.

La trasformazione **T** ha le equazioni (4) del § 6 che, chiamando O (x, y) il riferimento, si scrivono

$$xx_1 = -1, \quad \frac{dy}{x} = -\frac{dy_1}{x_1}. \tag{T}$$

Per **T** è indifferente una traslazione lungo l'asse delle y. Rappresentiamo il piano O (x, y) in un nuovo piano O (X, Y) al modo seguente. Ad un elemento lineare $\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$ orientato facciamo corrispondere il punto $\bar{P} \equiv (X, Y)$ ottenuto riportando, sulla parallela per O all'elemento lineare, un segmento $OP = x$; questa rappresentazione è definita dalle formole:

$$X^2 + Y^2 = x^2, \quad \frac{Y}{X} = \frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

Introducendo le coordinate polari (ϱ, θ) definite da $\varrho \cos \theta = X$, $\varrho \operatorname{sen} \theta = Y$, le (5) si scrivono

$$(5)^* \qquad \varrho = x, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}.$$

Per queste formole a una curva C con verso del piano $O(x, y)$ corrisponde una sola immagine $\overline{C}$ nel piano $O X, Y)$ e inversamente ad una curva $\overline{C}$ di questo piano di equazione

$$\theta = F(\varrho)$$

corrispondono le curve C di equazione differenziale

$$dy = \operatorname{tg}[F(x)]\, dx$$

e le loro simmetriche rispetto a un punto qualunque dell'asse Oy.

Ad esempio, la retta $Y = k$ è l'immagine della catenaria $x = k \cosh \frac{y}{k}$. I due cerchî simmetrici rispetto a O:

$$X^2 + Y^2 \pm 2aY + 1 = 0$$

sono l'immagine delle curve

$$(x^2 + 1)\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \pm 2ax = 0$$

rullette dei fuochi di una conica a centro (§ 7, 2)).

Due curve C e C_1 corrispondenti per la $\mathbf{T}$ hanno per immagini $\overline{C}$ e $\overline{C}_1$ i cui punti (ϱ, θ), (ϱ_1, θ_1) corrispondenti sono legati dalle relazioni

$$\varrho \varrho_1 = -1, \quad \theta = \theta_1.$$

Dunque: *Nella rappresentazione* (5), *la trasformazione* $\mathbf{T}$ (subordinata dalla trasformazione di Christoffel) *ha per immagine l'inversione per raggi vettori reciproci di polo O e potenza — 1.*

Per questo, ad esempio, lo studio delle superficie Σ rotonde che si trasformano con Christoffel in superficie congruenti (ad es. superficie del Delaunay, § precedente) si riconduce allo studio delle curve anallammatiche del piano, e delle curve simmetriche delle loro inverse rispetto al polo.

§ 9. Vogliamo in questo paragrafo accennare alla trasformazione di Christoffel per i coni e i cilindri.

La definizione della trasformazione di Christoffel, indipendente dal riferimento, ci dice che la superficie Σ_1, trasformata di un cono, è sviluppabile e si cambia in sè per un gruppo a un parametro di omotetie, quindi è un cono. Ciò si conferma analiticamente. Siano

$$x = e^v \alpha(u), \quad y = e^v \beta(u), \quad z = e^v \gamma(u)$$

le equazioni di un cono col vertice nell'origine e riferito ai parametri isometrici u, v (e^v segmento di generatrice, (α, β, γ) coseni direttori di questa) valgono le relazioni.

$$S\alpha^2 = S\alpha'^2 = -S\alpha'\alpha'' = 1, \quad S\alpha\alpha' = S\alpha'\alpha'' = 0.$$

Il quadrato dell'elemento lineare del cono è

$$ds^2 = e^{2v}(du^2 + dv^2).$$

Integrando le (C) del § 6 si ottengono le equazioni della superficie trasformata:

$$x_1 = e^{-v}\alpha, \quad y_1 = e^{-v}\beta, \quad z_1 = e^{-v}\gamma; \quad ds^2_1 = e^{-2v}(du^2 + dv^2).$$

Queste sono le equazioni dello stesso cono collo scambio di v in $-v$, cioè la superficie trasformata del cono, è il cono ottenuto da quello dato con un'inversione che ha il polo nel vertice e potenza 1.

Analogamente si vede che il cilindro colle generatrici parallele all'asse Oz, di equazioni

$$x = \alpha(u)\,,\ y = \beta(u)\,,\ z = v\,;\ (du^2 = d\alpha^2 + d\beta^2)$$

essendo v il segmento di generatrice e u l'arco di direttrice nel piano $z = 0$, e di elemento lineare ds

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

si trasforma in se stesso

$$x_1 = \alpha(u)\,,\ \ y_1 = \beta(u)\,,\ \ z_1 = -v$$

mediante la simmetria rispetto al piano $z = 0$.

Sul procedimento ricorrente di Darboux-Christoffel.

§ 10. Il Darboux (vedi « D » II, n. 434) basandosi sul fatto che la trasformazione di Christoffel non è permutabile con l'inversione, dà un procedimento ricorrente col quale da una superficie isoterma iniziale riferita alle linee di curvatura, possiamo dedurne infinite altre nelle quali compariscono costanti arbitrarie in numero comunque grande. Un tale procedimento è l'applicazione successiva e alternata dell'inversione e della trasformazione di Christoffel. In questo paragrafo consideriamo come identiche due superficie simili, quindi, tenuto conto che la trasformazione di Christoffel è permutabile colla similitudine, possiamo supporre senza diminuire la generalità che le successive inversioni abbiano potenza 1.

Partendo da una superficie isoterma iniziale Σ la cui prima forma fondamentale, con (u, v) linee di curvatura, è

$$ds^2 = e^{2\lambda}(du^2 + dv^2)\,, \tag{1}$$

con l'inversione $\mathbf{I}_1$ di polo $P_1 \equiv (a_1, b_1, c_1)$ otteniamo la superficie $\overline{\Sigma}_1$ per cui il quadrato dell'elemento lineare è

$$d\sigma_1^2 = \frac{1}{\varrho_1^2} e^{2\lambda}(du^2 + dv^2)$$

essendo $\varrho_1 = S(x - a_1)^2$. La trasformazione di Christoffel fa passare con tre quadrature da questa superficie ad un'altra determinata Σ_1 il cui elemento à per quadrato

$$ds_1^2 = \varrho_1^2 \cdot \frac{1}{e^{2\lambda}}(du^2 + dv^2).$$

L'inversione $\mathbf{I}_2$ di polo $P_2 \equiv (a_2, b_2, c_2)$ trasforma Σ_1 in una nuova superficie $\overline{\Sigma}_2$ per cui il quadrato dell'elemento lineare è

$$d\sigma_2^2 = \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2} \frac{1}{e^{2\lambda}}(du^2 + dv^2)$$

con $\varrho_2 = S(x_1 - a_2)^2$. Così continuando indefinitamente otteniamo la successione di superficie

$$\text{(A)} \qquad \Sigma, \ \overline{\Sigma}_1, \ \Sigma_1, \ \overline{\Sigma}_2, \ \Sigma_2, \ldots$$

i cui elementi lineari rispettivi hanno per coefficiente

$$e^{\lambda}, \ \frac{1}{\varrho_1} e^{\lambda}, \ \varrho_1 \frac{1}{e^{\lambda}}, \ \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{1}{e^{\lambda}}, \ \frac{\varrho_2}{\varrho_1} e^{\lambda}, \ldots$$

Su questo procedimento ricorrente, vogliamo aggiungere una semplice osservazione. Se alla superficie $\overline{\Sigma}$, trasformata di Christoffel di Σ, applichiamo il procedimento in discorso otteniamo le superficie isoterme

$$\text{(B)} \qquad \overline{\Sigma}, \ \Sigma_{-1}, \ \overline{\Sigma}_{-1}, \ \Sigma_{-2}, \ \overline{\Sigma}_{-2}, \ldots$$

i cui elementi lineari rispettivi hanno per coefficiente

$$\frac{1}{e^{\lambda}}, \ \frac{1}{\varrho_0} \frac{1}{e^{\lambda}}, \ \varrho_0 e^{\lambda}, \ \frac{\varrho_0}{\varrho_{-1}} e^{\lambda}, \ \frac{\varrho_{-1}}{\varrho_0} \frac{1}{e^{\lambda}}, \ldots$$

dove (a_{-i}, b_{-i}, c_{-i}) sono le coordinate del polo dell'inversione con la quale si passa da $\overline{\Sigma}_{-i}$ a $\Sigma_{-(i+1)}$, $(\overline{x}_{-i}, \overline{y}_{-i}, \overline{z}_{-i})$ le coordinate del punto di $\overline{\Sigma}_{-i}$ e

$$\varrho_{-i} = \mathrm{S}\,(\overline{x}_{-i} - a_{-i})^2.$$

Conviene dare l'indice 0 alle superficie Σ e $\overline{\Sigma}$ di partenza e riunire le superficie di (A) e (B) nell'unico allineamento

$$(\mathrm{C}) \qquad \ldots \overline{\Sigma}_{-2},\ \Sigma_{-2},\ \overline{\Sigma}_{-1},\ \Sigma_{-1},\ \overline{\Sigma}_0,\ \Sigma_0,\ \overline{\Sigma}_1,\ \Sigma_1,\ \overline{\Sigma}_2,\ \Sigma_2, \ldots$$

Il passaggio da Σ_n a $\overline{\Sigma}_{n+1}$ $(n \gtreqless 0)$ si fa in termini finiti e con l'introduzione di tre costanti arbitrarie, mentre il passaggio dalla $\overline{\Sigma}_n$ alla Σ_n si fa mediante le tre quadrature di Christoffel. Indicando con $[\Sigma_n]$ l'insieme delle superficie Σ_n, consideriamo la classe di superficie

$$[\Delta] \qquad \ldots, [\overline{\Sigma}_{-1}],\ [\Sigma_{-1}],\ \overline{\Sigma}_0,\ \Sigma_0,\ [\overline{\Sigma}_1],\ [\Sigma_1], \ldots$$

Diremo *procedimento ricorrente di Darboux-Christoffel* il procedimento per cui dalle superficie $(\overline{\Sigma}_0, \Sigma_0)$ iniziali si passa alla classe $[\Delta]$; diremo dell'n^{ma} *fase* le superficie di indice n.

Consideriamo due superficie $(\overline{\Sigma}_n, \Sigma_n)$ di $[\Delta]$ trasformate di Christoffel l'una dell'altra, di indice $n > 0$. Il procedimento ricorrente applicato a Σ_n conduce a superficie contenute in $[\Delta]$ alla destra di $[\Sigma_n]$, mentre quello applicato a $\overline{\Sigma}_n$ conduce a superficie contenute in $[\Delta]$ parte alla sinistra e parte alla destra di $\overline{\Sigma}_n$; questo si vede facilmente riflettendo che, a meno di similitudini, il prodotto di due inversioni (salvo il caso immaginario della trasformazione **H** del § 1) è l'identità o un'inversione, quindi le inverse della $\overline{\Sigma}_n$ sono una Σ_{n-1} e le rimanenti contenute in $[\overline{\Sigma}_n]$. Si conclude che il procedimento ricorrente di Darboux-Christoffel applicato alla coppia $(\overline{\Sigma}_n, \Sigma_n)$ conduce ad una classe $[\Delta]'$ di superficie contenuta in $[\Delta]$. Si ha il resultato analogo per $n < 0$. Ma adesso osserviamo che la coppia $(\overline{\Sigma}_0, \Sigma_0)$ appartiene alla fase $-n$ della classe $[\Delta]'$ e quindi per quel che precede $[\Delta]$ è contenuta in $[\Delta]'$. Si conclude che le due classi $[\Delta]$ e $[\Delta]'$ coincidono. Dunque:

Applicando il procedimento ricorrente di Darboux-Christoffel alla coppia iniziale $(\overline{\Sigma}, \Sigma)$ *di superficie isoterme (trasformate di Christoffel l'una dell'altra) otteniamo la classe* $[\Delta]$ *di superficie isoterme, la quale rimane invariata allorchè si sostituisca alla coppia* $(\overline{\Sigma}, \Sigma)$ *come iniziale un'altra qualunque coppia analoga* $(\overline{\Sigma}^*, \Sigma^*)$ *appartenente ad essa.*

Due classi distinte non hanno alcuna superficie isoterma a comune.

È ovvio che a individuare una classe $[\Delta]$ basta una superficie appartenente ad essa, e che il procedimento ricorrente detto subordina fra due superficie qualunque di $[\Delta]$ una rappresentazione conforme.

§ **11.** Consideriamo tutte le trasformazioni conformi nel campo complesso definite a meno di una similitudine, e cioè l'identità, le inversioni di potenza 1 e le trasformazioni **H** di cui al § 1. Da una superficie isoterma Σ con tutte le trasformazioni dette otteniamo tante superficie $\overline{\Sigma}_1$ delle quali possiamo considerare le trasformate con Christoffel Σ_1. Diciamo $\overline{\Sigma}_2$ tutte le trasformate conformi delle superficie Σ_1 e cosi di seguito. Otteniamo così la classe

$$[\Delta'] \qquad\qquad \Sigma, [\overline{\Sigma}_1], [\Sigma_1], [\overline{\Sigma}_2], [\Sigma_2], \ldots$$

che contiene evidentemente la classe $[\Delta]$ relativa a Σ definita al paragrafo precedente.

Pel teorema alla fine del § 2 si vede che: Se in una classe $[\Delta']$ è contenuta una superficie di rotazione, vi sono contenuti anche tutti i coni suoi trasformati conformi; ed assumendo come iniziale la superficie di rotazione, tali coni si trovano fra le superficie della prima fase.

Il procedimento ricorrente di Darboux-Christoffel applicato alle superficie rotonde, coniche e cilindriche.

§ 12. Andiamo ad applicare il procedimento ricorrente del § 10 alle superficie rotonde, coniche e cilindriche.

a) La superficie rotonda Σ (§ 6):

$$x = r\cos v\,,\quad y = r\,\mathrm{sen}\,v\,,\quad z = \zeta(u) \tag{1}$$

con l'inversione di polo $(1, 0, 0)$ e potenza 2 si trasforma nella superficie $\overline{\Sigma}_1$ di equazioni

$$\overline{x}_1 = \frac{\zeta^2 + r^2 - 1}{\varrho_1},\ \overline{y}_1 = \frac{2r\,\mathrm{sen}\,v}{\varrho_1},\ \overline{z} = \frac{2\zeta}{\varrho_1}, \tag{2}$$
$$(\varrho_1 = r^2 + \zeta^2 + 1 - 2r\cos v)$$

e il quadrato dell'elemento lineare è

$$d\sigma_1^2 = \frac{4r^2}{\varrho_1^2}(du^2 + dv^2).$$

Ogni linea di curvatura $u = \mathrm{cost}$ è il cerchio intersezione del piano per l'asse Oy

$$2\zeta x - (\zeta^2 + r^2 - 1)z = 0$$

con la sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - \frac{2}{\zeta}z + 1 = 0$$

che ha il centro nel piano $y = 0$ e incontra l'asse Oy nei due punti fissi $(0, i, 0)$, $(0, -i, 0)$.

b) Il cono Σ di equazioni (§ 9)

$$(3)\qquad x = e^v \alpha(u), \quad y = e^v \beta(u), \quad z = e^v \gamma(u), \quad (\mathrm{S}\,\alpha^2 = 1)$$

con l'inversione di polo $(0, 1, 0)$ e potenza 2 si trasforma nella superficie $\overline{\Sigma}_1$ di equazioni

$$(4)\qquad \overline{x}_1 = \frac{\alpha}{\cosh v - \beta}, \quad \overline{y}_1 = \frac{\operatorname{senh} v}{\cosh v - \beta}, \quad \overline{z}_1 = \frac{\gamma}{\cosh v - \beta}$$

il cui elemento lineare $d\sigma_1$ è dato da

$$d\sigma_1^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(\cosh v - \beta)^2} = \frac{4e^{2v}}{\varrho_1^2}(du^2 + dv^2); \quad (\varrho_1 = 2e^v(\cosh v - \beta)).$$

Ciascuna linea di curvatura $u = \text{cost}$ è il cerchio intersezione del piano per l'asse $\mathrm{O}y$

$$\gamma x - \alpha z = 0$$

colla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\frac{\beta}{\alpha}x - 1 = 0$$

che incontra l'asse $\mathrm{O}y$ nei due punti fissi $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$.

c) L'inversione col polo nell'origine e potenza 1 trasforma il cilindro Σ di equazioni (§ 9)

$$(5)\qquad x = \alpha(u), \quad y = \beta(u), \quad z = v, \quad (dx^2 + dy^2 = du^2)$$

nella superficie $\overline{\Sigma}_1$ di equazioni

$$(6)\qquad \overline{x}_1 = \frac{x}{\varrho_1}, \quad \overline{y}_1 = \frac{y}{\varrho_1}, \quad \overline{z}_1 = \frac{z}{\varrho_1}, \quad (\varrho_1 = \mathrm{S}\,x^2)$$

di cui l'elemento lineare $d\sigma_1$ è dato da

$$d\sigma_1^2 = \frac{1}{\varrho_1^2}(du^2 + dv^2)$$

e ciascuna linea $u = \text{cost}$ è il cerchio intersezione del piano per l'asse $\mathrm{O}z$

$$\beta x - \alpha y = 0$$

colla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 - \alpha x = 0$$

che tocca l'asse Oz nell'origine.

Si confermano in questi tre casi $a), b), c)$ le considerazioni del § 2.

§ 13. Nella rappresentazione sferica della superficie $\overline{\Sigma}_1$ ottenuta nei tre casi $a), b), c)$ del paragrafo precedente, le linee $u = \text{cost}$ sono cerchî coi centri distribuiti sul cerchio massimo $y = 0$, per $a)$ e $b)$, $z = 0$ per $c)$.

Nel caso particolare in cui sulla sfera fondamentale il sistema di cerchî $u = \text{cost}$ è un fascio, allora anche le immagini delle linee $v = \text{cost}$ sono cerchî del fascio ortogonale al precedente, e quindi sulla superficie $\overline{\Sigma}_1$ sono piane anche la linee di curvatura $v = \text{cost}$. Siccome il cerchio è l'unica linea piana che si mantiene tale con l'inversione si conclude che le linee $v = \text{cost}$ su $\overline{\Sigma}_1$ sono cerchî e quindi $\overline{\Sigma}_1$ è la ciclide di Dupin.

La trasformata di Christoffel Σ_1 di $\overline{\Sigma}_1$ ha a comune con questa l'immagine sferica delle linee di curvatura, quindi: *Sulla superficie Σ_1 le linee di curvatura $u = \text{cost}$ sono piane e i loro piani sono paralleli all'asse Oy o all'asse Oz.*

Integrando le formole (C) del § 6 relative alla superficie $\overline{\Sigma}_1$ otteniamo le equazioni della superficie Σ_1 sua trasformata di Christoffel.

$a)$ Le equazioni e il quadrato dell'elemento lineare di Σ_1 ottenuta dalla superficie Σ rotonda risultano:

$$(7)\quad x_1 = A - \frac{r^2 + \zeta^2 - 1}{2r}\cos v,\ y_1 = v - \frac{r^2 + \zeta^2 + 1}{2r}\operatorname{sen} v,\ z_1 = B - \frac{\zeta}{r}\cos v$$

$$\left\{ A = \frac{1}{2}\int \frac{d(r^2+\zeta^2)}{r^2},\ B = \int \frac{1}{2r^2}\left[d\zeta - \zeta^2 d\left(\frac{r^2+\zeta^2}{\zeta}\right)\right]\right\},$$

$$ds_1^2 = \frac{\varrho_1^2}{4r^2}(du^2 + dv^2). \tag{8}$$

Dalle equazioni (7) apparisce, come avevamo previsto geometricamente, che la linea $u = \cos t$ appartiene al piano

$$2\zeta x - (r^2 + \zeta^2 - 1)z = 2\zeta A - (r^2 + \zeta^2 - 1)B.$$

Assumendo in questo piano per asse $O_1\eta$ la sua traccia sul piano $y = 0$ e per origine O_1 il punto di coordinate

$$A - \frac{r^2 + \zeta^2 - 1}{r^2 + \zeta^2 + 1},\ 0,\ B - \frac{2\zeta}{r^2 + \zeta^2 + 1},$$

la linea di curvatura ha le equazioni:

$$\xi = v - m \operatorname{sen} v,\ \eta = \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{m} - \sqrt{m^2 - 1}\cos v;\ m = \frac{r^2 + \zeta^2 + 1}{2r} \tag{9}$$

e si ottiene come projezione della cicloide di raggio 2, parametro m e base $O_1\xi$, disposta in un piano che forma col piano (u) l'angolo ψ definito da $\cos\psi = \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{m}$. La forma delle linee $u = \cos t$ dipende dall'unico parametro m.

a_1) Nel caso particolare in cui Σ è la superfice torica di meridiano

$$r^2 + z^2 - 2ar + 1 = 0$$

il cui cerchio focale ordinario passa pel polo, anche la superficie Σ_1 è torica, e le equazioni della Σ_1 risultano

$$x_1 = -\frac{a}{r} - \frac{ar - 1}{r}\cos v,\ y_1 = v - a \operatorname{sen} v,\ z_1 = a\frac{\zeta}{r} - \frac{\zeta}{r}\cos v. \tag{7'}$$

Essendo $m = a$ costante le linee $u = \cos t$ sono congruenti; inoltre si vede facilmente che i loro piani appartengono a un fascio e il punto O_1 descrive il cerchio

$$y=0, \quad (x+a^2)^2+z^2=\frac{(a^2-1)^3}{a^2}.$$

Si conclude che Σ_1 è di rotazione; questo esempio si può aggiungere a quelli del § 7.

b) Le equazioni e il quadrato dell'elemento lineare della superficie Σ_1 ottenuta dal cono Σ risultano

$$(10) \quad x_1=A+\alpha\cosh v, \quad y_1=-v+\beta \operatorname{senh} v, \quad z_1=B+\gamma \operatorname{senh} v$$

$$\left\{A=\int(\beta'\alpha-\beta\alpha')\,du, \quad B=\int(\beta'\gamma-\beta\gamma')\,du\right\},$$

$$(11) \qquad d s_1^2=\frac{\varrho_1^2}{4e^{2v}}(du^2+dv^2).$$

Dalle equazioni (10) apparisce che la linea $u=\text{cost}$ appartiene al piano parallelo all'asse Oy

$$\gamma x-\alpha z=\gamma A-\alpha B;$$

assumendo come riferimento cartesiano $O_1(\xi,\eta)$ in questo piano le sue tracce sui piani $z=0$, $y=0$, le equazioni della linea di curvatura diventano

$$(12) \qquad \xi=-v+\beta \operatorname{senh} v, \quad \eta=\sqrt{1-\beta^2}\left(\frac{B}{\gamma}+\cosh v\right)$$

e la sua forma dipende dai parametri β, $\dfrac{B}{\gamma}$.

b$_1$) Nel caso particolare in cui il cono Σ sia rotondo attorno all'asse Oy, Σ_1 risulta una superficie torica collo stesso asse. In questo caso è

$$\alpha=k \operatorname{sen}\frac{u}{k}, \quad \beta=\sqrt{1-k^2}, \quad \gamma=k\cos\frac{u}{k}; \quad (k \text{ costante})$$

$$A=-k\sqrt{1-k^2}\operatorname{sen}\frac{u}{k}, \quad B=-k\sqrt{1-k^2}\cos\frac{u}{k}.$$

Le equazioni (10) della superficie e quelle (12) della linea $u = \text{cost}$ sono

$$(10)' \quad x_1 = V \operatorname{sen} \frac{u}{k}, \; y_1 = -v + \sqrt{1-k^2} \operatorname{senh} v, \; z_1 = V \cos \frac{u}{k},$$

$$(12)' \quad \xi = -v + \sqrt{1-k^2} \operatorname{senh} v, \; \eta = V; \left\{ V = k(\cosh v - \sqrt{1-k^2}) \right\}.$$

c) Le equazioni e il quadrato dell'elemento lineare della superficie Σ_1 ottenuta dal cilindro Σ risultano:

$$(13) \quad x_1 = A + \alpha v^2, \; y_1 = B + \beta v^2, \; z_1 = \frac{v^3}{3} - (\alpha^2 + \beta^2) v$$

$$\left\{ A = -\int \alpha^2 d\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha}\right), \; B = -\int \beta^2 d\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}\right) \right\},$$

$$(14) \qquad ds_1^2 = \varrho_1^2 (du^2 + dv^2).$$

Ogni linea $u = \text{cost}$ è una cubica piana, il cui piano

$$\beta x - \alpha y = \beta A - \alpha B$$

è parallelo all'asse Oz. Fissando in questo piano come assi $O_1\xi$ e $O_1\eta$ le sue tracce sui piani $z = 0, y = 0$ le equazioni della curva diventano

$$(15) \quad \xi = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, v^2 + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, \frac{B}{\beta}, \; \eta = \frac{v^3}{3} - (\alpha^2+\beta^2) v$$

e la sua forma dipende dai due parametri $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \frac{B}{\beta}$.

c$_1$) Nel caso particolare in cui il cilindro Σ sia rotondo, possiamo assumere l'asse come retta $y = 0$, $x = k$, e il raggio $= 1$; le equazioni si scrivono

$$x = k + \cos u, \quad y = \operatorname{sen} u, \quad z = v.$$

Le equazioni (13) e (15) diventano:

$$(13)' \quad \begin{cases} x_1 = (1-k)^2 \cos u + (k + \cos u)\, v^2 \\ y_1 = 2ku + (1 + k^2 + v^2) \operatorname{sen} u \\ z_1 = \dfrac{v^3}{3} - (1 + k^2 + 2k \cos u)\, v\,, \end{cases}$$

$$(15)' \quad \begin{cases} \xi = \sqrt{1 + k^2 + 2k \cos u} \left(v^2 + 1 + k^2 + \dfrac{2ku}{\operatorname{sen} u} \right) \\ \eta = \dfrac{v^3}{3} - v \sqrt{1 + k^2 + 2k \cos u}\,. \end{cases}$$

§ **14.** Se una superficie S ha una linea di curvatura C circolare, su ogni superficie S_1 parallela a S la linea di curvatura C_1, corrispondente a C, è pure un cerchio; possiamo aggiungere che C e C_1 sono sezioni rette dello stesso cono rotondo. Ciò segue immediatamente dal fatto che il piano di C taglia secondo angolo costante la superficie S.

1.°) Sulla superficie $\overline{\Sigma}_1$, nei tre casi *a*), *b*), *c*), le linee di curvatura $u =$ cost sono circolari, mentre sulla superficie Σ_1 (quando il polo dell'inversione è fuori dell'asse della superficie rotonda, o distinto dal vertice del cono) le linee $u =$ cost hanno nei tre casi rispettivamente le equazioni (9), (12), (15) e quindi non sono cerchî. Dunque le superficie $\overline{\Sigma}_1$ e Σ_1 non possono essere parallele, e inoltre la Σ_1 non può essere mai una sfera; per la *Nota* al § 6 possiamo concludere:

All'infuori delle superficie del Delaunay (onduloide, nodoide, catenoide) che sono di rotazione, fra le trasformate conformi delle superficie rotonde, coniche e cilindriche non esistono superficie a curvatura media costante o nulla.

2.°) Esaminiamo le superficie del tipo Σ_1.

Se la superficie iniziale rotonda Σ è una sfera $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$, oppure un piano $z = k$, $(k \neq 0)$, la $\overline{\Sigma}_1$ è una sfera riferita a un doppio sistema ortogonale di cerchî; ne segue (§ 6, *Nota*) che la Σ_1 è la superficie ad area minima di Ossian Bonnet (con ambedue i sistemi di linee di curvatura piane) (vedi « D », I, nn. 206, 207).

Se la superficie iniziale cilindrica Σ è un piano $x = k$, $(k \neq 0)$, la Σ_1 è una sfera riferita ad un doppio sistema ortogonale di cerchî a punti base coincidenti, quindi la Σ_1 è la superficie minima di Enneper. Concludiamo:

Fra le superficie del tipo $[\Sigma_1]$, *le sole superficie ad area minima sono il catenoide, le superficie di Ossian Bonnet e la superficie di Enneper.*

La stessa considerazione fatta in 1.°) ci dimostra

All'infuori delle superficie del Delaunay (onduloide, nodoide) fra le superficie del tipo $[\Sigma_1]$ *non vi sono superficie a curvatura media costante non nulla.*

3.°) Tenendo presenti le osservazioni al principio del § 13 possiamo enunciare:

Le superficie del tipo $[\Sigma_1]$ *che hanno piane le linee di curvatura di ambedue i sistemi, sono le superficie rotonde e le trasformate delle ciclidi di Dupin. In tali superficie i piani dei due sistemi inviluppano due cilindri colle generatrici fra loro perpendicolari.*

Possiamo aggiungere che l'unico caso in cui la superficie Σ_1 risulta rotonda, pur essendo il polo dell'inversione fuori dell'asse di Σ, è quello del segno a_1) del paragrafo precedente.

Tutto ciò che abbiamo ottenuto in questo paragrafo con considerazioni geometriche è in accordo con i resultati esposti da P. Adam nella Memoria citata al § 5, anzi possiamo aggiungere, riferendosi alle notazioni della memoria stessa: Le superficie isoterme di P. Adam per le quali $k=0$ si ottengono tutte nella prima fase del procedimento ricorrente di Darboux-Christoffel applicato alle superficie rotonde, coniche e cilindriche. E precisamente il caso $U=0$ conduce alle trasformate conformi delle superficie rotonde, coniche e cilindriche, il caso $U_1=0$ conduce alle superficie del tipo $[\Sigma_1]$.

§ 15. Sia L una linea di curvatura segnata sulla superficie Σ dalla sfera S, e L' la sua immagine sferica; diciamo L_0 la curva, sulla sfera fondamentale, omotetica di L. È evidente che la distanza geodetica di due punti P_0 e P' su L_0 e L' corrispondenti a un punto P di L è eguale all'angolo σ che formano in P le due superficie Σ e S, quindi tale distanza, per una nota proprietà, non varia al variare di P su L. La tangente in P alla linea L è normale al raggio di S uscente da P, quindi tale raggio giace nel piano principale della superficie Σ ortogonale in P alla L; per questa ragione la distanza geodetica da P_0 a P' è contata sul cerchio massimo ortogonale a L' in P'. Concludiamo: *L' immagine sferica L' di una linea di curvatura sferica L è geodeticamente parallela alla curva L_0 omotetica di L, e la distanza geodetica σ delle due curve è l'angolo che la superficie forma colla sfera di L.*

Segue da ciò immediatamente che una linea di curvatura sferica definisce la sua immagine a meno di un parametro (l'angolo d'intersezione della sfera colla superficie), mentre è definita dalla sua immagine sferica a meno di un parametro (il detto angolo) e di un'omotetia.

Proseguendo nell'applicazione del procedimento ricorrente di Darboux-Chistoffel, mediante l'inversione di polo

$P_2 \equiv (a_2, b_2, c_2)$ e potenza 1, la superficie Σ_1 si trasforma nella $\overline{\Sigma}_2$ di cui le equazioni e il quadrato dell'elemento lineare sono:

$$\overline{x}_2 = a_2 + \frac{x_1 - a_2}{\varrho_2}, \quad \overline{y}_2 = b_2 + \frac{y_1 - b_2}{\varrho_2}, \quad \overline{z}_2 = c_2 + \frac{z_1 - c_2}{\varrho_2},$$

$$d\sigma^2 = \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2}(du^2 + dv^2).$$

dove

$$\varrho_2 = \mathrm{S}\,(x_1 - a_2)^2, \quad \lambda = r, e^v, 1 \text{ nei tre casi } a), b), c).$$

Escluso il caso banale in cui Σ_1 è rotonda (o conica) con P_2 sull'asse (o nel vertice) la superficie $\overline{\Sigma}_2$ ha le linee di curvatura $u = \text{cost}$ sferiche, appartenenti a un sistema ∞^1 di sfere passanti per P_2 e coi centri distribuiti nel piano per P_2 perpendicolare all'asse Oy nei casi a) e b), e all'asse Oz nel caso c). Ciascuna linea $u = \text{cost}$ è la projezione stereografica da P_2 sulla sfera corrispondente della curva (9), o (12), o (15) del § 13, quindi la sua forma dipende dai parametri

$$(m, a_2, b_2, c_2), \quad \left(\beta, \frac{B}{\gamma}, a_2, b_2, c_2\right), \quad \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \frac{B}{\beta}, a_2, b_2, c_2\right)$$

rispettivamente nei tre casi di Σ rotonda, conica e cilindrica.

Per l'osservazione al principio di questo paragrafo si conclude che le immagini sferiche delle linee di curvatura $u = \text{cost}$ dipendono, oltre che dai parametri precedenti, soltanto dall'angolo σ secondo cui il piano (u) taglia la Σ_1.

PARTE TERZA

Sulle trasformazioni D_m di Darboux.

§ 16. Le trasformazioni D_m di Darboux consistono nel passaggio da una superficie isoterma data Σ ad un'altra superficie isoterma Σ' che costituisce con Σ le due falde dell'inviluppo di una congruenza di sfere per cui la corrispondenza di contatto è conforme (*congruenza conforme* o di Darboux); tali trasformazioni permettono di ottenere dalla superficie isoterma Σ altre ∞^4 superficie isoterme (vedi « *B* », Cap. XX; Bianchi « Ricerche sulle superficie isoterme » Annali di Matematica, serie 3ª, tomo XI, 1905):

Riferiamo la superficie Σ alle linee di curvatura (u, v), ciò che è possibile sempre con quadrature, e seguendo le notazioni delle citate « Lezioni » di Bianchi, sia $P \equiv (x, y, z)$ il punto e (X_i, Y_i, Z_i) $(i = 1, 2, 3)$ il triedro principale della superficie stessa. Il quadrato dell'elemento lineare di Σ e della sua rappresentazione sferica siano rispettivamente

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2), \quad d\overline{s}^2 = h_1^2\, du^2 + h_2^2\, dv^2.$$

Sono verificate identicamente le equazioni

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + h_1 h_2 = 0 \text{ (Gauss)}; \quad \beta_{12} = \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad \beta_{21} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \text{ (Codazzi)}$$

$$\left(\beta_{12} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u}, \quad \beta_{21} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial v}\right).$$

La ricerca delle trasformazioni D_m sotto l'aspetto analitico, è la ricerca di *cinque funzioni* (*trasformatrici*) γ_1, γ_2, w, φ, σ di (u, v) che soddisfano al seguente sistema ai differenziali totali completamente integrabile (Darboux):

$$(D)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} = m(e^\theta \sigma + e^{-\theta}\varphi) - h_1 w - \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\gamma_2, & \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial v} = \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\gamma_2 \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial u} = \dfrac{\partial \theta}{\partial v}\gamma_1, & \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} = m(e^\theta \sigma - e^{-\theta}\varphi) - h_2 w - \dfrac{\partial \theta}{\partial u}\gamma_1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = e^\theta \gamma_1, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = e^\theta \gamma_2 \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = h_1 \gamma_1, & \dfrac{\partial w}{\partial v} = h_2 \gamma_2 \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} = e^{-\theta}\gamma_1, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} = -e^\theta \gamma_2, \end{cases}$$

(m costante della trasformazione) e alla condizione

$$(E)\qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 - 2m\varphi\sigma = 0.$$

Poniamo

$$(1)\qquad \Omega^2 = 2m\varphi\sigma$$

$$(2)\qquad \xi = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + w X_3,\quad \eta = \ldots,\quad \zeta = \ldots$$

Denotando con l'apice gli elementi relativi alla superficie trasformata abbiamo:

$$(3)\qquad x' = x - \frac{\xi}{m\sigma},\ \text{ecc.}$$

$$(4)\qquad X_1' = X_1 - \frac{2\gamma_1\xi}{\Omega^2},\quad X_2' = X_2 - \frac{2\gamma_2\xi}{\Omega^2},\quad X'_3 = X_3 - \frac{2w\xi}{\Omega^2}$$

$$ds'^2 = e^{-2\theta} \frac{\varphi^2}{\sigma^2} (du^2 + dv^2); \; - H_1' = H_2' = e^{\theta} \frac{\varphi}{\sigma}. \tag{5}$$

$$h_1' = h_1 - \frac{2mw}{\Omega^2} (e^{\theta} \sigma + e^{-\theta} \varphi), \quad h_2' = h_2 - \frac{2mw}{\Omega^2} (e^{\theta} \sigma - e^{-\theta} \varphi). \tag{6}$$

I triedri principali $P(X_i, Y_i, Z_i)$ e $P'(X_i', Y_i', Z_i')$ delle due superficie sono simmetrici rispetto al piano tangente alla superficie S dei centri della congruenza, ed i segmenti R_1, R_2, R_3 staccati sui loro spigoli sono dati dalle formole:

$$R_1 = -\frac{\varphi}{\gamma_1}, \quad R_2 = -\frac{\varphi}{\gamma_2}, \quad R_3 = -\frac{\varphi}{w} \tag{7}$$

di cui l'ultimo dà anche il raggio $R = R_3$ della sfera (u, v) della congruenza conforme.

Riguardo alla superficie S dei centri il punto $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ e la normale (X_0, Y_0, Z_0) sono dati da

$$x_0 = x + R X_3, \text{ ecc.}; \quad X_0 = \frac{\xi}{\Omega}, \text{ ecc.} \tag{8}$$

e i coefficienti (E, F, G), (D, D', D'') delle sue due forme fondamentali $S\,dx_0^2, -S\,dx_0\,dX_0$ sono:

$$\left\{ \begin{aligned} E &= \frac{w^2 + \gamma_1^2}{w^4} (h_1 \varphi - e^{\theta} w)^2 \\ F &= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{w^4} (h_1 \varphi - e^{\theta} w)\,(h_2 \varphi - e^{\theta} w) \\ G &= \frac{w^2 + \gamma_2^2}{w^4} (h_2 \varphi - e^{\theta} w)^2, \end{aligned} \right. \tag{9}$$

$$\left\{ \begin{aligned} D &= \frac{m}{w\,\Omega} (e^{\theta} \sigma + e^{-\theta} \varphi)\,(h_1 \varphi - e^{\theta} w) \\ D' &= 0 \\ D'' &= \frac{m}{w\,\Omega} (e^{\theta} \sigma - e^{-\theta} \varphi)\,(h_2 \varphi - e^{\theta} w). \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Risulta

$$EG - F^2 = \frac{\Omega^2}{w^6}(h_1\varphi - e^\theta w)^2\ (h_2\varphi - e^\theta w)^2 \tag{11}$$

$$\sqrt{1-\Delta_1 R} = \frac{w}{\Omega}\,. \tag{12}$$

La curvatura totale K di S è data dalla formola

$$K = \frac{m^2 w^4 (e^\theta \sigma + e^{-\theta}\varphi)\ (e^\theta\sigma - e^{-\theta}\varphi)}{\Omega^4 (h_1\varphi - e^\theta w)\ (h_2 \varphi - e^\theta w)}\,. \tag{13}$$

Ricordiamo inoltre:

a) Dalla quintupla trasformatrice $(\gamma_1, \gamma_2, w, \varphi, \sigma)$ per la superficie isoterma Σ, otteniamo la quintupla $\left(\frac{\gamma_1}{\varphi\sigma}, \frac{\gamma_2}{\varphi\sigma}, \frac{w}{\varphi\sigma}, \frac{1}{\sigma}, \frac{1}{\varphi}\right)$ relativa alla trasformazione inversa e anche la quintupla $(\gamma_1, -\gamma_2 - w, \sigma, \varphi)$ relativa alla trasformazione D_m della superficie $\overline{\Sigma}$ trasformata di Christuffel di Σ.

b) Essendo la trasformazione D_m permutabile con l'inversione e con la trasformazione di Christoffel si conclude che (§ 10, § 11):

Nota una trasformazione D_m di una superficie isoterma Σ, è nota la trasformazione D_m con cui si passa dalla classe [Δ] *di Σ a quella* [Δ]' *definita dalla superficie Σ' trasformata di Σ.*

c) Se di una superficie isoterma Σ iniziale si conóscono tutte le trasformate di Darboux, l'applicazione successiva e illimitata del processo di trasformazione si compie con soli calcoli di derivazione (*Bianchi*).

d) Ogni trasformazione D_m di Darboux della superficie isoterma Σ dà, colla superficie S dei centri, la superficie d'appoggio per la generazione di Σ come superficie di rotolamento; la superficie rotolante S_0 è definita come quella deformata della S in cui il sistema corrispondente alle linee di curvatura di Σ si mantiene coniugato (*Bianchi*).

§ 17. Le formole del Calò (vedi « B », § 328, (XII) e (XIII)) sulla generazione del piano e della sfera come superficie di rotolamento dànno tutte le trasformazioni D_m del piano e della sfera riferiti a un doppio sistema isotermo dipendenti dalla funzione $\tau' = f(\tau)$ arbitraria della variabile complessa τ sul piano (o sulla sfera).

Poichè un piano s'inverte in una sfera e l'inversione conserva l'isotermia, basta considerare il piano riferito al sistema isotermo dipendente da f come superficie iniziale del procedimento ricorrente di Darboux-Christoffel che conduce alla classe $[\Delta]_f$. Essendo note tutte le trasformazioni D_m del piano ricoperto da un tal sistema isotermo, ne segue che alla classe $[\Delta]_f$ sappiamo applicare il procedimento delle D_m successive per soli calcoli di derivazione (§ 16, *c*)).

L'insieme delle classi $[\Delta]_f$ apparisce notevole se si pensa che tali classi dipendono dalla funzione $\tau' = f(\tau)$ e che inoltre, allorquando si assuma come superficie iniziale della classe $[\Delta]_f$ un piano isotermo corrispondente, nella prima fase del procedimento ricorrente di Darboux-Christoffel si trovano come superficie $\overline{\Sigma}_1$ le sfere riferite a un doppio sistema isotermo, e come superficie Σ_1 (§ 6, *Nota*) tutte e sole le superficie ad area minima.

Ricordando il teorema di Guichard sulla trasformazione delle superficie ad area minima (vedi « B », § 335, § 346) vediamo che le formole del Calò possono fornire alcune generazioni per rotolamento delle superficie minime.

Sulle trasformazioni D_m per le superficie rotonde, coniche e cilindriche.

§ 18. *a*) Superficie di rotazione.

Per la superficie di rotazione di equazioni (§ 6)

$$x = e^{\theta} \cos v,\ y = e^{\theta} \operatorname{sen} v,\ z = \int e^{\theta} \sqrt{1-\theta'^2}\, du;\ \theta = \theta(u)$$

con le consuete notazioni, valgono le formole:

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 = \theta' \cos v, & X_2 = -\operatorname{sen} v, & X_3 = -\sqrt{1-\theta'^2} \cos v \\ Y_1 = \theta' \operatorname{sen} v, & Y_2 = \cos v, & Y_3 = -\sqrt{1-\theta'^2} \operatorname{sen} v \\ Z_1 = \sqrt{1-\theta'^2}, & Z_2 = 0, & Z_3 = \theta' \end{array}\right.$$

$$ds^2 = e^{2\theta}(du^2 + dv^2)$$

$$d\bar{s}^2 = S\, dX_3^2 = h_1^2 du^2 + h_2^2 dv^2, \left(h_1 = \frac{\theta''}{\sqrt{1-\theta'^2}},\ h_2 = -\sqrt{1-\theta'^2}\right)$$

Si notino le relazioni

$$h_2^2 + \theta'^2 = 1,\ h_1 h_2 = -\theta'',\ dh_2 = h_1 d\theta,\ \beta_{12} = \theta',\ \beta_{21} = 0.$$

Il sistema (D) si scrive:

$$(D)_1 \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} = m(e^{\theta}\sigma + e^{-\theta}\varphi) - h_1 w, & \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial v} = \theta' \gamma_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} = m(e^{\theta}\sigma - e^{-\theta}\varphi) - h_2 w - \theta' \gamma_1 \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = e^{\theta}\gamma_1, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = e^{\theta}\gamma_2 \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial u} = h_1 \gamma_1, & \dfrac{\partial w}{\partial v} = h_2 \gamma_2 \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} = e^{-\theta}\gamma_1, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} = -e^{-\theta}\gamma_2, \end{array}\right.$$

$$(E) \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 - 2\,m\,\varphi\,\sigma = 0\,.$$

Si vede che γ_2 è funzione della sola v, e derivando la seconda equazione della seconda linea otteniamo:

$$\frac{d^2\gamma_2}{d\,v^2} = -(2\,m + 1)\,\gamma_2\,.$$

Posto:

$$(1) \qquad \begin{cases} V = c\cos\left(\sqrt{2m+1}\,v\right) + d\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{2\,m+1}\,v\right) + \dfrac{\alpha}{2\,m+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{per } m \neq -\dfrac{1}{2} \\ V = \dfrac{\alpha}{2}\,v + c\,v + d, \qquad\qquad \text{per } m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

dove α, c, d sono costanti arbitrarie, abbiamo in ogni caso $\gamma_2 = V'$; con ciò l'integrale generale del sistema $(D)_1$ ha la forma :

$$(\Delta)_1 \qquad \begin{cases} \gamma_1 = U + \theta'\,V, \;\; \gamma_2 = V', \;\; w = U_3 + h_2\,V, \\ \varphi = e^{\theta}\,(U_1 + V), \;\; \sigma = e^{-\theta}(U_2 - V) \end{cases}$$

dove U, U_1, U_2, U_3 sono funzioni della sola u da determinarsi opportunamente.

Dalla seconda linea del sistema $(D)_1$ otteniamo

$$(2) \qquad \theta'\,U + h_2\,U_3 + m\,(U_1 - U_2) + \alpha = 0.$$

Dalle linee prima, terza, quinta e quarta otteniamo il sistema

$$(3) \qquad \begin{cases} U' = m\,(U_1 + U_2) - h_1\,U_3 \\ U_1' + \theta'\,U_1 = U, \;\; U_2' - \theta'\,U_2 = U, \;\; U'_3 = h_1\,U. \end{cases}$$

Sostituendo nella (E) i valori $(\Delta)_1$ e separando la parte dipendente da v, da quella dipendente da u otteniamo

$$(E)_1 \qquad U^2 + U_3 - 2m\,U_1\,U_2 = l^2$$

dove

$$\left\{\begin{array}{ll} l^2 = \dfrac{\alpha^2}{2m+1} - (c^2 + d^2), & \text{per } m \neq -\dfrac{1}{2} \\ l^2 = 2\,\alpha\,d - c^2, & \text{per } m = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Derivando la prima delle (3) e tenendo conto delle altre otteniamo:

$$U_3 = e^f(U'' + g\,U), \quad \text{con } e^f = (h_2\,\theta' - h'_1)^{-1}, \quad g = \theta'^2 - h_1^2 + 2m.$$

Derivando questa e tenendo conto dell'ultima delle (3) otteniamo:

$$(4) \qquad U''' + f'\,U'' + g\,U' + (f'g + g' + h_1\,e^{-f})\,U = 0$$

equazione lineare omogenea del terzo ordine per la funzione U. Integrata questa equazione, per le (2) e (3) le altre funzioni sono

$$(5) \qquad \left\{\begin{array}{l} U_1 = \dfrac{1}{2m}\,[U' - \theta'\,U + (h_1 - h_2)\,U_3 - \alpha] \\ U_2 = \dfrac{1}{2m}\,[U' + \theta'\,U + (h_1 + h_2)\,U_3 + \alpha] \end{array}\right.$$

$$U_3 = \int h_1\,U\,du.$$

Le costanti arbitrarie contenute in U, U_3 devono essere scelte in modo da soddisfare alla $(E)_1$.

L'equazione (4) si integra facilmente pel cono rotondo e pel cilindro rotondo (§ 21, § 22).

§ **19.** *b*) Superficie conica.

Pel cono di equazioni (§ 9) (u, v parametri isometrici)

$$x = e^v \cdot \alpha(u), \quad y = e^v \cdot \beta(u), \quad z = e^v \cdot \gamma(u); \quad (S\alpha^2 = S\alpha'^2 = 1)$$

si hanno le formule:

$$X_1 = \alpha', \qquad X_2 = \alpha \qquad X_3 = e^{-v}(\beta'\gamma - \beta\gamma')$$

e analoghe,

$$ds^2 = e^{2v}(du^2 + dv^2)$$

$$d\bar{s}^2 = S\,dX_3^2 = h_1^2\,du^2; \left(h_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}, \; h_2 = 0 \right).$$

Il sistema (D) si scrive

$$(D)_2 \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \gamma_1}{\partial u} = m\,(e^v \sigma + e^{-v}\varphi) - h_1 w - \gamma_2, \; \frac{\partial \gamma_1}{\partial v} = 0 \\ & \frac{\partial \gamma_2}{\partial u} = \gamma_1, \qquad \frac{\partial \gamma_2}{\partial v} = m\,(e^v \sigma - e^{-v}\varphi) \\ & \frac{\partial \varphi}{\partial u} = e^v \gamma_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = e^v \gamma_2 \\ & \frac{\partial w}{\partial u} = h_1 \gamma_1, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = 0 \\ & \frac{\partial \sigma}{\partial u} = e^{-v}\gamma_1, \; \frac{\partial \sigma}{\partial v} = -\, e^{-v}\gamma_2, \end{aligned} \right.$$

$$(E) \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 - 2\,m\,\varphi\,\sigma = 0.$$

Dal sistema apparisce che γ_1 e w sono funzioni della sola u; dalla quarta linea e derivando rapporto a u la prima equazione otteniamo

$$w = \int h_1 \gamma_1 du; \quad \frac{d^2\gamma_1}{du^2} = (2m - 1 - h_1^2)\gamma_1 - h'_1 \int h_1 \gamma_1 du.$$

Dunque l'integrale generale del sistema $(D)_2$ ha la forma:

$$(\Delta)_2 \qquad \begin{cases} \gamma_1 = U', \quad \gamma_2 = U + V, \quad w = \int h_1 U' du, \\ \varphi = e^v (U + V_1), \quad \sigma = e^{-v}(U + V_2), \end{cases}$$

dove U è funzione della sola u, mentre V, V_1, V_2 sono funzioni della sola v, tutte da determinarsi opportunamente.

La seconda equazione della seconda linea di $(D)_2$ ci porge:

$$(6) \qquad V' = -m(V_1 + V_2).$$

La prima equazione della prima linea, separando la parte dipendente da u, da quella dipendente da v conduce alle

$$(7) \qquad \begin{cases} U'' = (2m - 1)U - h_1 \int h_1 U' du \\ V + \alpha = m(V_1 - V_2), \qquad (\alpha \text{ costante}). \end{cases}$$

Dalle (6) e (7) si trae:

$$(8) \qquad V_1 = \frac{V + \alpha - V'}{2m}, \qquad V_2 = -\frac{V + \alpha + V'}{2m},$$

Derivando rapporto a v la seconda equazione della seconda linea, e tenendo conto delle (7) otteniamo:

$$(9) \qquad V'' = -(2m - 1)V + \alpha$$

che ammette l'integrale generale (c, d cost. arbitrarie):

$$(10)\quad \begin{cases} V = c\cos(\sqrt{2m-1}\,v) + d\,\mathrm{sen}(\sqrt{2m-1}\,v) + \dfrac{\alpha}{2m-1}, & \left(\text{per } m \neq \dfrac{1}{2}\right) \\ V = \dfrac{\alpha}{2}v^2 + cv + d, & \left(\text{per } m = \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Derivando la prima delle (7) perveniamo alla seguente equazione lineare omogenea del terzo ordine per la funzione incognita U:

$$(11)\qquad U''' - \frac{h'_1}{h_1}U'' + (h_1^2 - 2m + 1)U' + (2m-1)\frac{h'_1}{h_1}U = 0.$$

I valori delle costanti arbitrarie contenute in U e w vanno scelti in guisa da soddisfare alla condizione (E) che nel nostro caso prende la forma

$$(E)_2\qquad U'^2 - (2m-1)\,U^2 - 2\alpha U + w^2 = l^2$$

dove

$$\begin{cases} l^2 = \dfrac{\alpha^2}{2m-1} - \dfrac{2m-1}{2m}(c^2 + d^2), & \left(\text{per } m \neq \dfrac{1}{2}\right) \\ l^2 = \alpha^2 + 2\alpha d - c^2, & \left(\text{per } m = \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

L'equazione (11) si integra facilmente nel caso del cono rotondo caratterizzato da h_1 costante.

§ **20.** *c*) SUPERFICIE CILINDRICA.

Pel cilindro di equazioni (§ 9) (u, v parametri isometrici):

$$x = \alpha(u),\quad y = \beta(u),\quad z = v;\quad (dx^2 + dy^2 = du^2)$$

si hanno le formule

$$\begin{cases} X_1 = x', & X_2 = 0, & X_3 = y' \\ Y_1 = y', & Y_2 = 0, & Y_3 = -x' \\ Z_1 = 0, & Z_2 = 1, & Z_3 = 0, \end{cases}$$

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

$$d\bar{s}^2 = S\, dX_3^2 = h_1^2\, du^2; \quad (h_1 = x'\, y'' - y'\, x'',\ h_2 = 0).$$

Il sistema (D) assume la forma

$$(D)_3 \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} = m(\sigma + \varphi) - h_1 w, & \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} = m(\sigma - \varphi) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \gamma_1, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = \gamma_2 \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = h_1 \gamma_1, & \dfrac{\partial w}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} = \gamma_1 & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} = -\gamma_2, \end{cases}$$

$$(E) \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 - 2m\, \varphi\, \sigma = 0.$$

Dal sistema $(D)_3$ apparisce che γ_1 e w sono funzioni della sola u, mentre γ_2 è funzione della sola v. Derivando la prima equazione della prima linea rapporto a u, e la seconda equazione della seconda linea rapporto v otteniamo rispettivamente

$$\frac{d^2 \gamma_1}{du^2} = (2\, m - h_1^2)\, \gamma_1 - h'_1\, w; \quad \frac{d^2 \gamma_2}{dv^2} = -2\, m\, \gamma_2.$$

Posto

(12) $$V = c \cos (\sqrt{2m}\, v) + d \operatorname{sen} (\sqrt{2m}\, v), \quad (c, d \text{ costanti})$$

l'integrale generale del sistema $(D)_3$ ha la forma

$$\gamma_1 = U', \quad \gamma_2 = V', \quad w = \int h_1 U' du, \quad \varphi = U_1 + V, \quad \sigma = U_2 - V$$

dove U, U_1, U_2 sono funzioni della sola u da determinarsi opportunamente.

La seconda equazione della seconda linea, tenendo conto della (12) dà $U_1 = U_2$.

Le prime equazioni della prima, terza e quinta linea dànno rispettivamente

(13) $$U'' = m(U_1 + U_2) - h_1 \int h_1 U' du; \quad U' = U'_1 = U'_2.$$

Evidentemente senza alterare la generalità possiamo porre $U_1 = U_2 = U$ e dalle (13) otteniamo l'equazione lineare omogenea del terzo ordine per la U:

(14) $$U''' - \frac{h'_1}{h_1} U'' + (h_1^2 - 2m) U' + 2m \frac{h'_1}{h_2} U = 0$$

che ha la stessa forma della (11) relativa al cono; dettane U la soluzione generica, l'integrale generale del sistema $(D)_3$ ha la forma

$(\Delta)_3$ $$\begin{cases} \gamma_1 = U', \quad \gamma_2 = V', \quad w = \int h_1 U' du \\ \varphi = U + V, \quad \sigma = U - V. \end{cases}$$

Nel caso del cilindro rotondo, caratterizzato da h_1 costante la (14) si integra subito (§ 22).

Le trasformazioni D_m del cono e del cilindro rotondo, e le corrispondenti generazioni per rotolamento.

§ 21. Le equazioni del cono rotondo col vertice nell'origine e angolo di apertura φ, e le formole relative sono (§ 18)

$$x = e^{ku}\cos v,\ y = e^{ku}\operatorname{sen} v,\ z = e^{ku}\frac{\sqrt{1-k^2}}{k};\ (\operatorname{sen}\varphi = k \neq 0,1)$$

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 = k\cos v, & X_2 = -\operatorname{sen} v, & X_3 = -\sqrt{1-k^2}\cos v \\ Y_1 = k\operatorname{sen} v, & Y_2 = \cos v, & Y_3 = -\sqrt{1-k^2}\operatorname{sen} v \\ Z_1 = \sqrt{1-k^2}, & Z_2 = 0, & Z_3 = k, \end{array}\right.$$

$$ds^2 = e^{2ku}(du^2 + dv^2);\qquad (\theta = ku)$$

$$d\bar{s}^2 = S\,dX_3^2 = (1-k^2)\,dv^2;\ (h_1 = 0,\ h_2 = -\sqrt{1-k^2})$$

$$\beta_{12} = k,\ \beta_{21} = 0.$$

Il sistema (D) ha la forma

$$(D)'\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial u} = m\,(e^{ku}\sigma + e^{-ku}\varphi), & \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial v} = k\gamma_2 \\ \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial v} = m\,(e^{ku}\sigma - e^{-ku}\varphi) + \sqrt{1-k^2}\,w - k\gamma_1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = e^{ku}\gamma_1, & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = e^{ku}\gamma_2 \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial w}{\partial v} = -\sqrt{1-k^2}\,\gamma_2 \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial u} = e^{-ku}\gamma_1, & \dfrac{\partial\sigma}{\partial v} = -e^{-ku}\gamma_2, \end{array}\right.$$

$$(E)\qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 - 2m\varphi\sigma = 0.$$

Dal sistema apparisce che γ_2 e w sono funzioni della sola v. Derivando la seconda equazione della seconda linea abbiamo

$$\frac{d^2\gamma_2}{dv^2} = -(2m+1)\gamma_2.$$

Posto

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} & V = c\cos(\sqrt{2m+1}\,v) + d\,\mathrm{sen}(\sqrt{2m+1}\,v) + \frac{\alpha}{2m+1}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left(\text{per } m \neq -\frac{1}{2}\right) \\ & V = \frac{\alpha}{2}v^2 + cv + d, \qquad\qquad \left(\text{per } m = -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}\right.$$

dove α, c, d sono costanti arbitrarie, l'integrale generale del sistema $(D)'$ ha la forma

$$(\Delta)'\quad \left\{\begin{aligned} & \gamma_1 = U + kV, \ \gamma_2 = V', \ w = -\sqrt{1-k^2}\,V \\ & \varphi = e^{ku}(U_1 + V), \ \sigma = e^{-ku}(U_2 - V) \end{aligned}\right.$$

dove U, U_1, U_2 sono funzioni della sola u da determinarsi opportunamente.

Dalla seconda equazione della seconda linea otteniamo:

$$(16)\qquad kU + \alpha + m(U_1 - U_2) = 0.$$

Dalle linee prima, terza, quinta otteniamo il sistema

$$(17)\quad U' = m(U_1 + U_2), \ U_1' + kU_1 = U, \ U_2' - kU_2 = U.$$

Dalla prima di questo sistema e dalla (16) abbiamo

$$(18)\qquad U_1 = \frac{U' - kU - \alpha}{2m}, \quad U_2 = \frac{U' + kU + \alpha}{2m}.$$

Derivando la prima del sistema (17) otteniamo l'equazione del secondo ordine per U:

$$(19)\qquad U'' = h^2U + k\alpha; \quad (h^2 = 2m + k^2)$$

che ammette l'integrale generale

$$U = a e^{hu} + b e^{-hu} - \frac{k\alpha}{h^2}; \quad (a, b \text{ cost. arbitrarie}). \tag{20}$$

Risulta

$$\left\{ \begin{aligned} U' &= h\,(a e^{hu} - b e^{-hu}) \\ U_1 &= \frac{(h-k)\,a\,e^{hu} - (h+k)\,b\,e^{-hu}}{2m} - \frac{\alpha}{h^2} \\ U_2 &= \frac{(h+k)\,a\,e^{hu} - (h-k)\,b\,e^{-hu}}{2m} + \frac{\alpha}{h^2} \end{aligned} \right. \tag{21}$$

La condizione (E) dà

$$\frac{4abh^2}{2m} + \frac{\alpha^2}{h^2} = l^2, \tag{$(E)'$}$$

dove

$$\left\{ \begin{aligned} l^2 &= \frac{\alpha^2}{2m+1} - (c^2 + d^2), \quad &\text{per } m \neq -\frac{1}{2} \\ l^2 &= 2\alpha d - c^2, \quad &\text{per } m = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

Essendo nota la quintupla trasformatrice $(\Delta)'$ del cono dato, andiamo a calcolare gli elementi relativi alla superficie trasformata e alla superficie dei centri applicando le formole del § 16. Otteniamo facilmente

$$\Omega^2 = U^2 - 2m V^2 + 2kUV + 2\alpha V - l^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= (kU + V)\cos v - V' \operatorname{sen} v \\ \eta &= (kU + V)\operatorname{sen} v + V' \cos v \\ \zeta &= \sqrt{1 - k^2}\, U \end{aligned} \right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x' &= e^{ku}\left[\cos v - \frac{\xi}{m(U_2 - V)}\right] \\ y' &= e^{ku}\left[\operatorname{sen} v - \frac{\eta}{m(U_2 - V)}\right] \\ z' &= e^{ku}\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}\left[1 - \frac{kU}{m(U_2 - V)}\right] \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} X_3' &= \sqrt{1-k^2}\left(-\cos v + \frac{2V\xi}{\Omega^2}\right) \\ Y_3' &= \sqrt{1-k^2}\left(-\operatorname{sen} v + \frac{2V\eta}{\Omega^2}\right) \\ Z_3' &= k + \frac{2\sqrt{1-k^2}\,V\zeta}{\Omega^2} \end{aligned}\right.$$

$$ds'^2 = \left(\frac{U_1 + V}{U_2 - V}\right)^2 (du^2 + dv^2)$$

$$h_1' = \frac{2\sqrt{1-k^2}\,U'V}{\Omega^2}, \quad h'_2 = \frac{-\sqrt{1-k^2}\,(U^2 + 2mV^2 - l^2)}{\Omega^2}$$

$$R_1 = -e^{ku}\frac{U_1 + V}{kV + U'}, \quad R_2 = -e^{ku}\frac{U_1 + V}{V'}, \quad R = \frac{e^{ku}(U_1 + V)}{\sqrt{1-k^2}\,V}$$

$$x_0 = -\frac{e^{ku}U_1}{V}\cos v, \quad y_0 = -\frac{e^{ku}U_1}{V}\operatorname{sen} v, \quad z_0 = e^{ku}\frac{k^2 U_1 + V}{k\sqrt{1-k^2}\,V}$$

$$X_0 = \frac{\xi}{\Omega}, \quad Y_0 = \frac{\eta}{\Omega}, \quad Z_0 = \frac{\zeta}{\Omega}.$$

$$\left\{\begin{aligned} E &= e^{2ku}\frac{U^2 + V^2 + 2kUV}{(1-k^2)V^2}, \\ F &= -e^{2ku}\frac{U_1 V'(kV + U)}{(1-k^2)V^3}, \\ G &= e^{2ku}\frac{U_1^2\left[(1-k^2)V^2 + V'^2\right]}{(1-k^2)V^4}. \end{aligned}\right.$$

$$D = -e^{ku}\frac{U'}{\Omega}, \quad D' = 0, \quad D'' = e^{ku}\frac{U_1(kU + \alpha - 2mV)}{V\Omega}$$

$$EG - F^2 = e^{4ku}\frac{\Omega^2 U_1^2}{(1-k^2)V^4}$$

$$K = \frac{-(1-k^2)U'V^3(kU + \alpha - 2mV)}{e^{2ku}U_1\Omega^4}$$

$$\sqrt{1 - \Delta_1 R} = \frac{-\sqrt{1-k^2}\,V}{\Omega}.$$

Le generazioni per rotolamento del cono corrispondenti alle trasformazioni D_m saranno determinate non appena siano noti i coefficienti $\bar{D}, \bar{D}', \bar{D}''$ della seconda forma fondamentale relativa alla superficie rotolante.

Tali valori sono dati dalle formole (vedi « B » § 314)

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\bar{D} = \frac{RR_{11} - \left\{E - \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2\right\}}{R\sqrt{1 - \Delta_1 R}}, \quad \bar{D}' = \frac{RR_{12} - \left\{F - \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}\right\}}{R\sqrt{1 - \Delta_1 R}} \\ &\bar{D}'' = \frac{RR_{22} - \left\{G - \left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2\right\}}{R\sqrt{1 - \Delta_1 R}} \end{aligned}\right.$$

dove R_{11}, R_{12}, R_{22} sono le derivate seconde covarianti della funzione R rispetto alla forma fondamentale $S dx_0^2$.

Nel nostro caso dai simboli di Christoffell

$$\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\} = k + \frac{U'(kV + U)}{\Omega^2}, \qquad \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} = -\frac{U'VV'}{U_1\Omega^2}$$

$$\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\} = 0 \qquad \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} = \frac{U}{U_1}$$

$$\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\} = \frac{U_1(h^2UV - \alpha U + \alpha kV - kl^2)}{V\Omega^2}$$

$$\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\} = V'\left(-\frac{2}{V} + \frac{kU + \alpha - 2mV}{\Omega^2}\right)$$

si ricava

$$R_{11} = e^{ku} \frac{\sqrt{1-k^2}\, U' V}{\Omega^2}, \quad R_{12} = 0$$

$$R_{22} = e^{ku} \frac{\sqrt{1-k^2}\, U_1 (U^2 + k U V + \alpha V - l^2)}{V \Omega^2}.$$

Applicando le formole (α) otteniamo:

$$\bar{D} = e^{uk} \frac{k U - 2m V + \alpha}{\Omega}, \quad \bar{D}' = 0, \quad \bar{D}'' = - e^{ku} \frac{U_1 U'}{V\Omega}$$

Il sistema coniugato (u, v) è permanente in una deformazione finita.

§ 22. Le equazioni del cilindro rotondo di raggio 1, avente per asse l'asse Oz, e le formole ad esso relative sono (§ 18)

$$x = \cos v, \qquad y = \operatorname{sen} v, \qquad z = u$$

$$\begin{cases} X_1 = 0, & X_2 = - \operatorname{sen} v, & X_3 = - \cos v \\ Y_1 = 0, & Y_2 = \cos v, & Y_3 = - \operatorname{sen} v \\ Z_1 = 1, & Z_2 = 0, & Z_3 = 0 \end{cases}$$

$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

$$d\bar{s}^2 = S\, dX_3^2 = dv^2; \quad (h_1 = 0, \quad h_2 = -1, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = 0).$$

Il sistema (D) assume la forma

$$(D)'' \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial u} = m(\sigma + \varphi), & \dfrac{\partial \gamma_1}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial \gamma_2}{\partial v} = m(\sigma - \varphi) + w \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \gamma_1, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = - \gamma_2 \\ \dfrac{\partial w}{\partial u} = 0, & \dfrac{\partial w}{\partial v} = - \gamma_2 \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} = \gamma_1, & \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} = - \gamma_2, \end{cases}$$

$$(E) \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + w^2 - 2m\,\varphi\,\sigma = 0.$$

Dal sistema apparisce che γ_1 è funzione della sola u, mentre γ_2 e w sono funzioni della sola v.

Derivando la prima equazione della prima linea rapporto a u e la seconda equazione della seconda linea rapporto a v otteniamo

$$\frac{d^2\gamma_1}{du^2} = 2m\,\gamma_1, \qquad \frac{d^2\gamma_2}{dv^2} = -(2m+1)\,\gamma_2.$$

Si conclude che posto

$$(22) \qquad U = a\cosh(\sqrt{2m}\,u) + b\,\mathrm{senh}(\sqrt{2m}\,u)$$

$$(23) \quad \begin{cases} V = c\cos(\sqrt{2m+1}\,v) + d\,\mathrm{sen}(\sqrt{1m+1}\,v) + \dfrac{\alpha}{2m+1}, & \text{per } m \neq -\dfrac{1}{2} \\[2ex] V = \dfrac{\alpha}{2}v^2 + c\,v + d, & \text{per } m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$(a, b, c, d, \alpha$ costanti arbitrarie)

l'integrale generale del sistema $(D)''$ à la forma

$$(\Delta'') \qquad \gamma_1 = U', \gamma_2 = V', w = -V + \alpha, \varphi = U + V, \sigma = U - V$$

La condizione (E) assume la forma

$$(E)'' \qquad -2\,m\,(b^2 - a^2) = l^2$$

dove

$$\begin{cases} l^2 = \dfrac{2\,m\,\alpha^2}{2\,m+1} + (2m+1)(c^2 + d^2), & \text{per } m \neq -\dfrac{1}{2} \\[2ex] l^2 = 2\,\alpha\,d - c^2 - \alpha^2, & \text{per } m = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Essendo noto l'integrale generale $(\Delta)''$ del sistema $(D)''$ possiamo determinare gli elementi relativi alla superficie trasformata Σ' e alla superficie dei centri S applicando le formole ricordate al § 16. Otteniamo

$$\Omega^2 = 2\, m\, (U^2 - V^2)$$

$$\xi = (V - \alpha) \cos v - V' \operatorname{sen} v, \eta = (V - \alpha) \operatorname{sen} v + V' \cos v, \zeta = U'$$

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \cos v - \frac{\xi}{m\,(U - V)} \\ y' &= \operatorname{sen} v - \frac{\eta}{m\,(U - V)} \\ z' &= u - \frac{U'}{m\,(U - V)} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} X'_3 &= -\cos v + \frac{2\,(V - \alpha)\,\xi}{\Omega^2} \\ Y'_3 &= -\operatorname{sen} v + \frac{2\,(V - \alpha)\,\eta}{\Omega^2} \\ Z'_3 &= \frac{2\, U'\,(V - \alpha)}{\Omega^2} \end{aligned}\right.$$

$$ds'^2 = \left(\frac{U + V}{U - V}\right)^2 (du^2 + dv^2)$$

$$h'_1 = \frac{2\, U (V - \alpha)}{U^2 - V^2}, \qquad h'_2 = -\frac{U^2 + V^2 - 2\,\alpha\, V}{U^2 - V^2}$$

$$R_1 = -\frac{U + V}{U'}, \quad R_2 = -\frac{U + V}{V'}, \quad R = \frac{U + V}{V - \alpha}$$

$$x_0 = \frac{U + V}{-V + \alpha} \cos v, \quad y_0 = \frac{U + V}{-V + \alpha} \operatorname{sen} v, \quad z_0 = u$$

$$E = 1 + \left(\frac{U'}{V - \alpha}\right)^2, \quad F = -\frac{(U + \alpha)\, U'\, V'}{(V - \alpha)^3},$$

$$G = \left(\frac{U + \alpha}{V - \alpha}\right)^2 \left[1 + \left(\frac{V'}{V - \alpha}\right)^2\right]$$

$$D = \frac{-\sqrt{2\,m}\,U}{\sqrt{U^2 - V^2}}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{U+\alpha}{V-\alpha}\,\frac{\sqrt{2\,m}\,V}{\sqrt{U^2-V^2}}$$

$$E\,G - F^2 = \frac{2\,m\,(U+\alpha)^2\,(U^2 - V^2)}{(V-\alpha)^4}$$

$$K = \frac{U\,V\,(V-\alpha)^3}{(U+\alpha)\,(U^2 - V^2)^2}; \quad \sqrt{1 - \Delta_1 R} = \frac{-V+\alpha}{\Omega}.$$

La curvatura totale K' e la curvatura media H' della superficie trasformata sono

$$K' = -\frac{2\,U(V-\alpha)\,(U^2+V^2-2\alpha V)}{(U+V)^4}, \quad H' = -1 + \frac{2\,\alpha V}{(U+V)^2}$$

Si vede dunque che *per* $\alpha = 0$ *anche la superficie* Σ' *è a curvatura media costante* -1, *e la trasformazione di Darboux si riduce a una trasformazione di Ribaucour-Guichard* (vedi « B », §§ 336, 337) e la superficie S dei centri è una deformata di una quadrica a centro di rotazione attorno all'asse focale di lunghezza 2. In questo caso $D = D''$ e il sistema (u, v) su S è *isotermo coniugato;* si verifica così il teorema di Darboux.

Andiamo a determinare le generazioni per rotolamento del cilindro rotondo. I simboli di Christoffel

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \frac{U\,U'}{U^2 - V^2}, \qquad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = -\frac{U\,V'\,(V-\alpha)}{(U+\alpha)\,(U^2-V^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{U'}{U+\alpha}$$

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = \frac{U'\,V\,(U+\alpha)}{(V-\alpha)\,(U^2-V^2)} \qquad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \frac{V'\,(V^2 - 2\,U^2 + \alpha\,V)}{(V-\alpha)\,(U^2 - V^2)}.$$

Da questi ricaviamo

$$R_{11}=\frac{U(V-\alpha)}{U^2-V^2},\quad R_{12}=0,\quad R_{22}=\frac{(U+\alpha)(U^2-\alpha V)}{(V-\alpha)(U^2-V^2)}$$

e applicando le formole (α) del § precedente otteniamo i coefficienti della seconda forma fondamentale relativa alla superficie rotolante

$$\overline{D}=\frac{\sqrt{2m}\,V}{\sqrt{U^2-V^2}},\quad \overline{D}'=0,\quad \overline{D}''=\frac{\sqrt{2m}\,U(U+\alpha)}{(V-\alpha)(U^2-V^2)}$$

Il sistema coniugato (u, v) sulla superficie S dei centri è permanente in una deformazione finita. Vogliamo dimostrare che:

La superficie dei centri S ammette una deformazione continua ad un parametro colla quale (il sistema (u, v) conservandosi sempre coniugato) si perviene alla superficie rotolante.

Infatti, denotando con l'apice i simboli di Christoffel relativi alla terza forma fondamentale di S abbiamo

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'=-\frac{D''}{D}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\frac{VV'}{U^2-V^2};\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'=-\frac{D}{D''}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=\frac{-UU'}{U^2-V^2}.$$

Risulta

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'=2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'=-\frac{2\,UU'VV'}{(U^2-V^2)^2}$$

ed è soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema coniugato (u, v) sia permanente in una deformazione infinitesima e in una deformazione finita; d'onde l'asserto (vedi « B », § 294).

§ 23. Nei due precedenti § abbiamo trovato tutte le trasformazioni D_m del cono e del cilindro di rotazione; si può quindi (§ 16, c)) applicare con soli calcoli di derivazione il procedimento delle D_m successive, e ne risulta integrato il sistema ai differenziali totali relativo ad ogni superficie Σ' trasformata, e così di seguito. Di tutte le superficie isoterme ottenute veniamo a conoscere ∞^4 generazioni per rotolamento.

È noto che ogni ciclide di Dupin si può trasformare con un'inversione in una superficie torica, e quindi anche in un cono rotondo o cilindro rotondo (eventualmente immaginario). Assumendo come superficie iniziale il cono (o cilindro) rotondo nella classe [Δ] di superficie isoterme (§ 10, § 11) si trovano come superficie $\overline{\Sigma}_1$ le ciclidi di Dupin; fra le superficie Σ_1 si trovano in particolare quelle che hanno le equazioni (10)′ e (13)′ del § 13. Di tutte queste superficie conosciamo dunque infinite generazioni per rotolamento.