Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Nelda Pellizzari

Trasformazioni delle superficie applicabili sul catenoide ordinario allungato ed accorciato

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 12 (1912), exp. nº 2, p. 1-32

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1912_1_12__A2_0>

DOTT. NELDA PELLIZZARI

TRASFORMAZIONI DELLE SUPERFICIE

APPLICABILI SUL

CATENOIDE ORDINARIO ALLUNGATO ED ACCORCIATO

PREFAZIONE

Un notissimo corollario del celebre teorema di Weingarten collega le superficie applicabili sul catenoide ordinario con le superficie pseudosferiche. Ed infatti tutte le deformate *non rigate* del catenoide si ottengono prendendo le evolute delle superficie pseudosferiche, mentre quelle *rigate* si hanno come luogo delle normali ad una superficie pseudosferica lungo una sua linea asintotica. La teoria delle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche si può quindi interpretare come una teoria delle trasformazioni delle deformate del catenoide: ed anche in questo caso si trova che una qualunque deformata del catenoide e la sua trasformata sono le due falde focali di una congruenza rettilinea W.

Insieme con le deformate dell'ordinario catenoide la teoria delle superficie pseudosferiche conduce a considerare le deformate di altri due tipi di superficie di rotazione strettamente collegati con il catenoide e cioè il *catenoide accorciato* ed il *catenoide allungato,* nelle quali la curva meridiana è affine all'ordinaria catenaria e si ottiene da questa accorciando od allungando tutte le ordinate rispetto alla direttrice (asse di rotazione) in un rapporto costante.

Le deformate del catenoide accorciato si ottengono con una nota costruzione geometrica [1]) componendo due trasformazioni di Bäcklund reali ed opposte di una superficie reale pseudosferica, e quelle del catenoide allungato si ottengono in modo simile da superficie pseudosferiche immaginarie.

---

[1]) Cfr. BIANCHI. *Lezioni di Geometria differenziale,* vol. II, pag. 432.

Ed anche per le deformate di questi due nuovi tipi di superficie di rotazione, ne risulta così una teoria delle trasformazioni di proprietà perfettamente analoghe a quelle sopra osservate per il catenoide ordinario.

Nel presente lavoro mi sono proposta di trattare in modo uniforme e diretto le trasformazioni delle tre specie di catenoidi allungato, accorciato ed ordinario, delle quali le prime due si possono considerare come deformate di quadriche di rotazione [1]), e di raccogliere così in un unico sistema di formole le proprietà relative ai tre casi, che dedotte dalle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche apparivano ottenute in modo dissimetrico pei tre casi.

Nella prima parte del lavoro do la trattazione analitica del problema, fondandomi essenzialmente sul metodo tenuto dal professor Bianchi nel terzo capitolo del III volume delle sue Lezioni, dove, seguendo i concetti del Lie, riguarda le trasformazioni delle quadriche come trasformazioni degli elementi piani dello spazio. Nella seconda parte faccio un'analisi dei diversi casi che si possono presentare dal punto di vista reale, mettendo in evidenza come le formole di trasformazione per l'ordinario catenoide si possano ottenere come caso limite da quelle relative al catenoide allungato.

In una terza parte infine aggiungo una generalizzazione assai spontanea delle trasformazioni di Razzaboni per le curve di Bertrand, studiando la reciproca posizione di due curve deformate di un medesimo parallelo, appartenenti a due rigate applicabili sul catenoide allungato o sul catenoide ordinario, ed aventi per linee di stringimento, le prime, due curve di Bertrand legate da una trasformazione di Razzaboni, le altre, due curve a torsione costante trasformate di Bäcklund l'una dell'altra. Il risultato che così ottengo mi sembra abbastanza interessante dal lato geometrico e lo ho quindi riportato in questo lavoro.

[1]) Cfr. Bianchi. *L. c.*, vol. III, pag. 149.

Parte I.

Il teorema fondamentale

§ 1.

Le trasformazioni delle deformate del catenoide allungato coincidono, come già notammo, con quelle dell'iperboloide rotondo ad una falda sul qnale esso è applicabile e quelle delle deformate del catenoide accorciato non sono altro che le trasformazioni delle deformate dell'ellissoide immaginario di semiassi ia, ia, ib con $b > a$. Le trasformazioni dell'ordinario catenoide furono considerate dal prof. Bianchi [1], nel caso delle deformate rigate, facendole dipendere dalle trasformazioni di Bäcklund delle curve a torsione costante, mentre come abbiamo già osservato, le trasformazioni delle deformate non rigate del catenoide si possoao ottenere applicando le trasformazioni di Bäcklund per le superficie pseudosferiche alle evolute di queste superficie.

Qui consideriamo invece le trasformazioni dell'ordinario catenoide come un caso limite di quelle del catenoide allungato.

Dal catenoide allungato

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cosh \frac{z}{b}$$

si ottiene il catenoide accorciato supponendo il parametro a, invece che reale, puramente immaginario, e si ottiene poi l'ordinario catenoide supponendo nullo tale parametro.

---

[1]) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, gennaio 1908.

Risulta quindi evidente come la trattazione analitica del problema debba essere sostanzialmente la stessa per i tre casi, quando non si faccia alcuna distinzione tra reale ed immaginario e non si imponga quindi la condizione che la trasformazione sia reale.

Gli elementi lineari dei tre catenoidi sono:

$$ds^2 = \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - (a^2 + b^2)} d\rho^2 + \rho^2 dv^2 \quad \text{(catenoide allungato)}$$

$$ds^2 = \frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 - (b^2 - a^2)} d\rho^2 + \rho^2 dv^2 \quad \text{(idem. accorciato)}$$

$$ds^2 = \frac{\rho^2}{\rho^2 - b_2} d\rho^2 + \rho^2 dv^2 \quad \text{(idem. ordinario)}$$

essendo ρ il raggio del parallelo e v la longitudine.

Noi ci proponiamo di studiare più in generale le trasformazioni della superficie il cui elemento lineare si può ridurre alla forma

$$\text{(I)} \qquad ds^2 = \frac{A\rho^2 + B}{C\rho^2 + D} d\rho^2 + \rho^2 dv^2 ;$$

e supponendo da prima che nè A nè C siano nulli, assumiamo $A = C = 1$ e scriviamo il corrispondente elemento lineare sotto la forma.

$$(a) \qquad ds^2 = \frac{\rho^2 - \alpha}{\rho^2 - \beta} d\rho^2 + \rho^2 dv^2 .$$

Ora è facile vedere che le superficie di elemento lineare (a) sono applicabili sulla quadrica di rotazione.

$$(b) \qquad \frac{x^2 + y^2}{\alpha} + \frac{z^2}{\alpha - \beta} = 1$$

la quale, a seconda dei valori delle costanti α e β, può essere reale od immaginaria, effettiva o degenere.

Seguendo i concetti di Lie riguardiamo le trasformazioni delle superficie come trasformazioni infinitiformi degli elementi piani o faccette dello spazio. Sia S una superficie di elemento lineare (a), S_0 sia la quadrica (b) su cui la S è applicabile, ed $\overline{S}_0$ sia una qualsiasi quadrica omofocale ad S_0: si faccia corrispondere ad ogni faccetta f di S_0 una semplice infinità di faccette f_1 i cui centri siano distribuiti sulla conica sezione del piano π di f con la quadrica $\overline{S}_0$ ed i cui piani π_1 inviluppino il cono circoscritto dal centro di f ad $\overline{S}_0$. Senza fare distinzione alcuna tra reale ed immaginario dimostriamo che:

Per ogni deformazione della quadrica S_0 *in una superficie* S, *le* ∞^3 *faccette* f_1, *unite invariabilmente alla* f *corrispondente, si distribuiscono nelle faccette di* ∞^1 *superficie* S_1, *le quali appartengono come seconde falde focali ad* ∞^1 *congruenze W, aventi la* S *per prima falda focale; ogni superficie trasformata* S_1 *è applicabile sulla superficie primitiva* S, *e la legge di applicabilità della* S_1 *sulla* S *è data dall'affinità di Ivory fra le due quadriche omofocali* S_0 *ed* $\overline{S}_0$, *congiunta con una rotazione arbitraria di una delle due quadriche attorno al proprio asse.*

§ 2.

Le coordinate x_1, y_1, z_1, del centro F_1 di una faccetta f_1 corrispondente alla faccetta f di centro $F \equiv (x, y, z)$ si possono porre sotto la forma

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= x + l\frac{\partial x}{\partial \rho} + m\frac{\partial x}{\partial v} \\ y_1 &= y + l\frac{\partial y}{\partial \rho} + m\frac{\partial y}{\partial v} \\ z_1 &= z + l\frac{\partial z}{\partial \rho} + m\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned} \right.$$

dove l, m, sono funzioni di ρ, v, che non variano al variare della S per deformazione continua. (Cfr. Bianchi. *Geom. diff.* volume III, pag. 6). Quindi se $\overline{F}_0 \equiv (\overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{z}_0)$ è il punto di $\overline{S}_0$ dove cade F_1 quando, avendo adagiata la S su S_0, il punto F coincide con $F_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ si dovrà pure avere:

$$(2) \qquad \overline{x}_0 = x_0 + l\frac{\partial x_0}{\partial \rho} + m\frac{\partial x_0}{\partial v},$$

e le due analoghe. Ma essendo F_0 un punto di $\overline{S}_0$, si ha:

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{lll}
x_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\rho\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right) & \frac{\partial x_0}{\partial\rho} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right) & \frac{\partial x_0}{\partial v} = -\rho\operatorname{sen}\Big(\sqrt{} \\
y_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\rho\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right) & \frac{\partial y_0}{\partial\rho} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right) & \frac{\partial y_0}{\partial v} = \rho\cos\Big(\sqrt{} \\
z_0 = \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\sqrt{\rho^2-\beta} & \frac{\partial z_0}{\partial\rho} = \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\,\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2-\beta}} & \frac{\partial z_0}{\partial v} = 0
\end{array}\right.$$

e perciò le (2) prendono la forma

$$(2^*)\quad\left\{\begin{array}{l}
\bar{x}_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right)(\rho+l) - \rho\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right).m \\
\bar{y}_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right)(\rho+l) + \rho\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right).m \\
\bar{z}_0 = \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\sqrt{\rho^2-\beta} + \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\,\frac{\rho\,.\,l}{\sqrt{\rho^2-\beta}}
\end{array}\right.$$

Il punto $\overline{F}_0$ si può considerare come l'intersezione delle due generatrici, reali od immaginarie, della quadrica $\overline{S}_0$ passanti per esso. Sia:

$$\frac{\bar{x}_0^2 + \bar{y}_0^2}{\alpha'} + \frac{\bar{z}^0}{\alpha' - \beta'} = 1$$

l'equazione della quadrica $\overline{S}_0$, avendo posto per simmetria;

$$\alpha + k = \alpha' \quad , \quad \beta' = \beta\,;$$

le equazioni dei due sistemi di generatrici si possono scrivere:

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l}
\bar{x}_0 = \pm\sqrt{\frac{\alpha'}{\beta'-\alpha'}}\operatorname{sen}\vartheta\,.\,\bar{z}_0 + \sqrt{\alpha'}\cos\vartheta \\
\bar{y}_0 = \mp\sqrt{\frac{\alpha'}{\beta'-\alpha'}}\cos\vartheta\,.\,\bar{z}_0 + \sqrt{\alpha'}\operatorname{sen}\vartheta
\end{array}\right.$$

e se in esse introduciamo le espressioni (2*) di $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$, otteniamo due equazioni lineari per determinare l, m, e risolvendole si ha infatti

$$(5) \qquad l = \frac{A}{\Delta} \,, \quad m = \frac{B}{\rho \Delta}$$

dove

$$(6) \quad \begin{cases} A = -\sqrt{\alpha}\,\rho \pm \sqrt{\dfrac{\alpha'(\beta-\alpha)}{\beta'-\alpha'}} \sqrt{\rho^2-\beta}\,\mathrm{sen}\,\omega + \sqrt{\alpha'\beta}\cos\omega \\ B = \mp \alpha' \sqrt{\dfrac{\beta-\alpha}{\beta'-\alpha'}} \dfrac{\rho}{\sqrt{\rho^2-\beta}} + \sqrt{\alpha\alpha'}\,\mathrm{sen}\,\omega \pm \sqrt{\dfrac{\alpha\beta\alpha'(\beta-\alpha)}{\beta'-\alpha'}} \dfrac{\cos\omega}{\sqrt{\rho^2-\beta}} \\ \Delta = \sqrt{\alpha} \mp \sqrt{\dfrac{\alpha'(\beta-\alpha)}{\beta'-\alpha'}} \dfrac{\rho\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{\rho^2-\beta}} \end{cases}$$

avendo posto

$$\omega = \vartheta - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, v \,.$$

Sostituendo queste espressioni di l e di m nelle (1) esse ci forniscono le coordinate del centro della faccetta f_1 in funzione degli elementi della superficie S relativi al centro della faccetta f.

Analogamente posti i coseni di direzione X_1, Y_1, Z_1 della normale ad f_1 sotto la forma

$$(7) \qquad X_1 = \xi \frac{\partial x}{\partial \rho} + \eta \frac{\partial x}{\partial v} + \zeta X \,, \quad \text{ecc.}$$

le tre quantità ξ, η, ζ riescono indipendenti dalla particolare deformazione della S e si possono perciò determinare facilmente supponendo che la S coincida con la S_0, e si trovano così per ξ, η, ζ, a meno del segno che non ci interessa, le espressioni seguenti:

$$(8) \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{B}{\sqrt{B^2 + EA^2 + \Psi^2}} \,, \quad \eta = \frac{-\sqrt{E}\,A}{\rho \sqrt{B^2 + EA^2 + \Psi^2}} \,, \quad \zeta = \frac{\mp \Psi}{\sqrt{B^2 + EA^2 + \Psi^2}}$$

essendo:

$$E = \frac{\rho^2-\alpha}{\rho^2-\beta} \;; \quad \Psi = \alpha' \sqrt{\frac{\alpha}{\beta'-\alpha'}} \pm \frac{\sqrt{\alpha'(\beta-\alpha)}\,\rho\,\mathrm{sen}\,\omega}{\sqrt{\rho^2-\beta}} - \frac{\sqrt{\alpha'\beta}\,\rho\cos\omega}{\sqrt{\beta'-\alpha'}} .$$

Se nelle espressioni di l e di m che compaiono nelle (1) poniamo per ω una qualsiasi funzione delle coordinate, $\omega = \omega(\rho, v)$, veniamo a staccare dal sistema ∞^3 di faccette f_1, corrispondenti alle faccette della S, un sistema ∞^2 di dette faccette, e perchè questo sistema appartenga ad una superficie occorre e basta che siano soddisfatte le due equazioni

$$\Sigma X_1 \frac{\partial x_1}{\partial \rho} = 0 \quad , \quad \Sigma X_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0 . \tag{9}$$

Dalle (1), tenuto conto delle equazioni fondamentali della teoria (cfr. Bianchi. *Geom. diff.* vol. I, pag. 116) e dei valori dei simboli di Christoffel per l'elemento lineare (a), si ricava:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} &= L \frac{\partial x}{\partial \rho} + M \frac{\partial x}{\partial v} + (Dl + D'm) X \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= P \frac{\partial x}{\partial \rho} + Q \frac{\partial x}{\partial v} + (D'l + D''m) X \end{aligned} \right. \tag{10}$$

dove D, D', D'' sono i coefficienti della seconda forma fondamentale della S, ed L, M, P, Q hanno le espressioni:

$$\left\{ \begin{array}{ll} L = 1 + \dfrac{\partial l}{\partial \rho} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} l + \dfrac{\partial l}{\partial \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial \rho} & M = \dfrac{\partial m}{\partial \rho} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} m + \dfrac{\partial m}{\partial \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial \rho} \\ P = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} m + \dfrac{\partial l}{\partial \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial v} & Q = 1 + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} l + \dfrac{\partial m}{\partial \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial v} \end{array} \right.$$

talchè le equazioni (9) tenuto conto delle (7) e delle (10), e risolute la prima rispetto a $\dfrac{\partial \omega}{\partial \rho}$ e la seconda rispetto a $\dfrac{\partial \omega}{\partial v}$, diventano:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} &= \lambda + \mu \left(DA + D' \frac{B}{\rho} \right) \\ \frac{\partial \omega}{\partial v} &= \nu + \mu \left(D'A + D'' \frac{B}{\rho} \right) \end{aligned} \tag{11}$$

dove λ, μ, ν hanno le espressioni seguenti:

$$
(12)\quad
\begin{cases}
\lambda = \lambda(\rho, \omega) = \pm \dfrac{\sqrt{\alpha(\beta-\alpha)(\beta'-\alpha')}\ \mathrm{A}}{k\sqrt{\beta(\rho^2-\alpha)}\sqrt{\rho^2-\beta}} \\[2ex]
\mu = \mu(\rho) \quad = \pm \dfrac{\sqrt{(\beta'-\alpha')(\rho^2-\beta)}}{k\sqrt{\beta(\rho^2-\alpha)}} \\[2ex]
\nu = \nu(\rho, \omega) = -\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}} \mp \dfrac{\rho\sqrt{(\beta-\alpha)(\beta'-\alpha')(\rho^2-\beta)}\,\mathrm{B}}{k\sqrt{\alpha\beta}\,(\rho^2-\alpha)}\ .
\end{cases}
$$

Si può dimostrare direttamente che il sistema (11) è illimitatamente integrabile in virtù delle equazioni di Gauss e di Codazzi.

$$
\begin{cases}
\mathrm{D}\mathrm{D}'' - \mathrm{D}'^2 = \dfrac{(\alpha-\beta)\rho^2}{(\rho^2-\alpha)(\rho^2-\beta)} \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathrm{D}}{\partial v} - \dfrac{\partial \mathrm{D}'}{\partial \rho} = \dfrac{(\beta-\alpha)\rho \mathrm{D}'}{(\rho^2-\alpha)(\rho^2-\beta)} + \dfrac{\mathrm{D}'}{\rho} \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathrm{D}''}{\partial \rho} - \dfrac{\partial \mathrm{D}'}{d v} = \dfrac{\rho(\rho^2-\beta)}{\rho^2-\alpha}\mathrm{D} + \dfrac{\mathrm{D}''}{\rho}
\end{cases}
$$

a cui i coefficienti della seconda forma fondamentale della superficie S debbono sodisfare; sicchè basta osservare che A e B e quindi anche λ e ν sono polinomi lineari in $\operatorname{sen}\omega$, $\cos\omega$, per poter concludere che le due equazioni (11) ci forniscono un'unica equazione ai differenziali totali del tipo di Riccati nel parametro $t = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$. La soluzione generale ω delle (11) contiene dunque una costante arbitraria, che si fissa dando il valore ω_0 di ω per un sistema particolare (ρ_0, v_0) di valori delle variabili ρ, v; e quattro soluzioni segano le coniche luogo dei centri F_1 delle faccette f_1, corrispondenti ad uno stesso punto di S, in quattro punti di birapporto costante. Introducendo nelle espressioni di l e di m per ω una soluzione del sistema (11) il punto F_1, le cui coordinate sono date dalle (1), si muove, al muoversi di F sulla S, su una superficie S_1, e le due superficie S ed S_1 sono, per il procedimento tenuto, le due falde focali di una congruenza.

Ora vogliamo dimostrare che le due superficie S ed S_1 sono applicabili l'una sull'altra. L'affinita di Ivory fra le due quadriche omofocali S_0 ed $\overline{S}_0$ fa corrispondere al punto $\overline{F}_0$ di $\overline{S}_0$ il punto di S_0 le cui coordinate sono:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\,\overline{x}\ ;\ \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\,\overline{y}_0\ ;\ \sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta'-\alpha'}}\,\overline{z}_0\,.$$

e se ρ_1 e v_1 sono i valori delle coordinate curvilinee in questo punto si deve pure avere:

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\,\overline{x}_0=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\rho_1\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v_1\right);\ \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\,\overline{y}_0=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\rho_1\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v_1\right);$$
$$\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta'-\alpha'}}\,\overline{z}_0=\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\sqrt{\rho_1^2-\beta}\,.$$

Tenute presenti le espressioni (2*) di $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$, $\overline{z}_0$, ed introdotta inoltre la rotazione arbitraria di una delle due quadriche attorno all'asse di rotazione, si ottengono facilmente le seguenti *formole di applicabilità:*

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}
&\rho_1=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha'}}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(l+\rho)^2+\rho^2m^2}\\
&\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v_1+c\right)=\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,(l+\rho)\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right)+\rho m\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right)}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}(l+\rho)^2+\rho^2m^2}}\,.\\
&\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,v_1+c\right)=\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,(l+\rho)\cos\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right)-\rho m\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v\right)}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\,(l+\rho)^2+\rho^2m^2}}
\end{aligned}\right.$$

Infatti si può verificare direttamente, con un calcolo alquanto lungo e che non presenta alcun interesse, che l'elemento lineare della S_1,

$$ds_1^2=\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial\rho}\right)^2d\rho^2+2\sum\frac{\partial x_1}{\partial\rho}\frac{\partial x_1}{\partial v}\,d\rho\,dv+\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2dv^2,$$

si trasforma mediante le formole (13) di applicabilità nell'elemento lineare

$$ds^2 = \frac{\rho_1^2 - \alpha}{\rho_1^2 - \beta} d\rho_1^2 + \rho_1^2 dv_1^2 ,$$

il che prova appunto l'applicabilità della S_1 sulla S.

Infine per dimostrare che la congruenza dei segmenti FF_1 è una congruenza W ci basta verificare che è identicamente sodisfatta la relazione:

$$\frac{\delta^2}{\mathrm{sen}^2\,\Omega} = \sqrt{KK_1}$$

nella quale δ denota la distanza dei due punti F, F_1, Ω l'angolo delle due normali relative ad S ed S_1, K e K_1 le curvature delle due superficie in F ed F_1 rispettivamente (cfr. *Teor. di* Ribaucour, Bianchi: *Geom. diff.* vol. II, pag. 59).

PARTE II.

La trasformazione dal punto di vista reale

§ 3.

Dimostrato così il teorema fondamentale passiamo a studiare le trasformazioni dal punto di vista reale.

Supponiamo cioè che la superficie S sia reale e imponiamo la condizione che anche la superficie trasformata risulti reale. Per questa analisi è indispensabile suddistinguere i diversi casi che si possono presentare a seconda dei valori di α e di β.

È evidente che se la quadrica S_0 é reale, affinchè la superficie S_1 risulti pure reale, è necessario e sufficiente che la quadrica $\overline{S}_0$ sia reale ed a punti iperbolici.

Ora nei casi in cui è $\alpha \geq \beta \leq 0$ la quadrica S_0 è reale ma nella schiera omofocale l'unica quadrica rigata è degenere nell'asse di rotazione; quindi delle ∞^2 superficie trasformate una sola è reale: la superficie complementare della S rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani.

In tutti gli altri casi invece esistono, come ora mostreremo ∞^2 trasformate reali della superficie primitiva S.

§ 4.

I. Caso: $\beta > \alpha > 0$.

La quadrica S_0 è in questo caso un *iperboloide ad una falda* e dovremo quindi prendere per $\overline{S}_0$ un secondo iperboloide ad una falda. Porremo perciò:

$$\alpha = a^2 \; ; \; \beta - \alpha = b^2 \; ; \; \alpha' = a^2 + k = a'^2 \; ; \; \beta' - \alpha' = b^2 - k = b'^2 \; ; \quad -a^2 \leq k \leq b^2$$

e risulteranno a , b , a' , b' reali.

L'elemento lineare della superficie S

$$ds^2 = \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - (a^2 + b^2)} d\rho^2 + \rho^2 dv^2$$

riveste forma reale quando $\rho^2 > a^2 + b^2$, oppure quando, pur essendo ρ e v reali, è $\rho^2 < a^2$. Nel primo caso la superficie S è applicabile sulla regione reale dell'iperboloide e per superficie tipica di questa classe si può prendere il *catenoide allungato;* nel secondo caso invece la superficie S è applicabile sulla regione ideale dell'iperboloide stesso.

1.ª Classe. — **Deformate reali del catenoide allungato.**

Per le superficie di questa classe le formole di trasformazione si presentano sotto forma reale, ed inoltre le formole di applicabilità ci forniscono valori reali per ρ_1 e v_1, sodisfacenti alla limitazione $\rho_1^2 > a^2 + b$, talchè le superficie trasformate S_1 sono reali ed applicabili in senso ristretto sulla superficie iniziale S.

Esaminando i casi particolari delle *trasformazioni singolari* corrispondenti a $k = -a^2$, $k = b^2$, $k = 0$ vediamo che le formole relative alla trasformazione $B - B_{-a^2}$ diventano:

$$l = -\rho \quad ; \quad m = 0 \, ;$$

sicchè le ∞^1 superficie S_1 trasformate coincidono tutte in un'unica superficie, la complementare della S rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani. La costruzione geometrica per ottenere dalla S la S_1 risulta come è ben noto la seguente: si deformi la S in modo da renderla superficie di rotazione e si consideri per ogni suo punto il segmento tangente ad S e terminato all'asse di rotazione della superficie stessa; si deformi poi comunque la superficie S, trascinante seco questi segmenti, il luogo degli estremi di questi segmenti, in virtù del teorema di Bertrand, sarà sempre, per ogni configurazione della S, la superficie complementare rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani. Questo vale qualsiasi la superficie di rotazione S, ma nel caso particolare della deformata di una quadrica, le due superficie sono anche, per la teoria precedentemente svolta, applicabili l'una sull'altra.

La trasformazione B_{b_2} non presenta alcun interesse particolare: le espressioni di l ed m si mantengono determinate e così pure le equazioni differenziali per ω, essendo $b'A$ e $b'B$ finiti per $b'=0$, hanno il secondo membro finito.

Nel caso invece della trasformazione B_0, le formole differenziali per ω si presentano sotto forma infinita e portano quindi ad una indeterminazione per le funzioni trigonometriche di ω; però la trasformazione si può studiare direttamente con considerazioni geometriche.

Infatti in questo caso la quadrica $\overline{S}_0$ coincide con la S_0 e perciò la conica sezione del piano tangente in F_0 ad S_0 con $\overline{S}_0 \equiv S_0$ è degenere nelle due generatrici di S_0 uscenti da F_0; la congruenza FF_1 è perciò formata dalle tangenti alle geodetiche deformate delle generatrici dell'uno o dell'altro sistema della quadrica S_0. Le ∞^1 superficie S_1 si riducono quindi a due sole, e, se la S è rigata, una delle S_1 coincide con la S stessa. Il parametro ω si rende, in questo caso della trasformazione B_0, superfluo poichè tanto la distanza FF_1 quanto l'angolo dei piani focali riescono indipendenti dalla particolare deformata S di S_0 e si possono facilmente calcolare direttamente servendosi delle formole generali della teoria delle congruenze normali.

Nel caso particolare in cui la superficie S è rigata vogliamo dimostrare che la trasformazione si poteva ottenere partendo dalle trasformazioni di Razzaboni per le curve di Bertrand.

È noto infatti che le deformate rigate dell'iperboloide rotondo sono tutte e sole le rigate che si ottengono conducendo per ogni punto di una curva di Bertrand della famiglia.

$$\frac{a}{R} - \frac{b}{T} = 1 \tag{14}$$

(essendo R e T i raggi di flessione e di torsione della curva) la parallela alla binormale della curva coniugata nel punto corrispondente [1]) ed è pure noto [2]) che se C è una curva di Bertrand della famiglia (14), C_0 la sua coniugata e C_1 una trasformata della C_0 per mezzo di una trasformazione di Razzaboni, le due superficie applicabili sull'iperboloide rigato aventi C e C_1 rispettivamente per linee di stringimento formano le due falde focali di una congruenza W.

E noi ora osserviamo che se S ed S_1 sono due rigate, applicabili sul medesimo iperboloide, legate l'una all'altra da una trasformazione B_k, le loro linee di stringimento C e C_1, le quali sono due curve di Bertrand della medesima famiglia, sono legate l'una alla coniugata dell'altra da una trasformazione di Razzaboni.

Per questo basta evidentemente dimostrare che la congiungente PP_1 di due punti corrispondenti su C e C_1 è situata nel piano osculatore della C e che la distanza di P_1 dal punto P_0, corrispondente di P su C_0, è costante. Queste due proprietà sono geometricamente evidenti: infatti sia P' il punto di S corrispondente di P_1 nella congruenza W; il triangolo $P'P_1P$ situato nel piano tangente ad S in P' è fisso per ogni deformazione della S che lasci rigida la generatrice PP', d'altra parte quando S coincide con S_0, P_1 appartiene al cerchio di gola di $\overline{S}_0$ e quindi al piano osculatore di C in P; e poichè anche il triangolo PP_1P_0, situato in questo piano, è fisso al deformarsi della S e P_1P_0 è uguale al raggio del cerchio di gola di $\overline{S}_0$ anche la seconda parte riesce dimostrata. Possiamo quindi concludere che le trasformazioni ora studiate coincidono, nel caso delle deformate rigate dell'iperboloide rotondo ad una falda, con quelle trovate per altra via dal prof. Bianchi nella citata memoria.

2.ª Classe. — **Superficie applicabili sulla regione ideale dell'iperboloide.**

Per le trasformazioni delle superficie di questa seconda classe non possiamo più assumere ω reale, giacchè in tal caso l ed m non

---

[1]) Cfr. Bianchi. *Lezioni di Geom. diff.*, vol. II, pag. 573.

[2]) Cfr. Bianchi. *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde.* Memorie della Società dei XL, serie 3ª, tomo XIV, pag. 54.

risulterebbero reali. Cerchiamo quindi di determinare ω in guisa che l ed m risultino reali; a tale scopo introduciamo il parametro $t = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega$ ed indicando con $\bar{l}$ e $\bar{m}$ le quantità coniugate di l ed m, scriviamo le due relazioni

$$l = \bar{l} \quad , \quad m = \bar{m} .$$

Si trova facilmente che esse sono contemporaneamente sodisfatte quando t e $\bar{t}$ sodisfano alla relazione

$$\mathrm{F}(t, \bar{t}) = \alpha t \bar{t} + \beta t + \bar{\beta} \bar{t} + \gamma = 0 \tag{15}$$

dove α e γ sono quantità reali, β e $\bar{\beta}$ quantità complesse coniugate. La (15) ci rappresenta, nel piano complesso di Gauss, l'equazione di un cerchio reale, pur di restringere l'intervallo di variabilità per k ai soli valori negativi, e si verifica con tutta facilità che essa è per t una condizione iniziale, giacchè differenziando la $\mathrm{F}(t, \bar{t})$ si trova una espressione identicamente nulla in virtù delle equazioni differenziali per t e della (15) stessa. Possiamo quindi affermare che basta prendere per valore iniziale di t l'affissa di un punto del cerchio di equazione (15) per essere certi che la soluzione corrispondente del sistema differenziale per t è tale da rendere l ed m entrambi reali e da fornire quindi una superficie S_1 reale, trasformata della S mediante una B_k con $-a^2 \leq k \leq 0$. È poi evidente che la S_1 risulta anch'essa applicabile idealmente sull'iperboloide e quindi in senso ristretto sulla S.

§ 5.

II. Caso: $\beta > \alpha = 0$. Catenoide ordinario.

Se nelle formole relative al catenoide allungato teniamo fisso $\beta = a^2 + b^2$ e facciamo decrescere $\alpha = a^2$ fino allo zero, otteniamo le formole relative al catenoide ordinario. Infatti noi veniamo per tal modo a considerare il catenoide ordinario come la superficie limite di una serie semplicemente infinita di catenoidi allungati, aventi tutti il medesimo raggio del cerchio di gola, ed il cui parametro a di allungamento decresce fino allo zero; e corrispondentemente consideriamo le deformate del catenoide ordinario come superficie limiti di una serie di superficie applicabili sui diversi iperboloidi di rotazione ad una falda di un sistema omofocale, al tendere dell'iperboloide su cui esse sono applicabili all'iperboloide degenere rappresentato dall'asse di rotazione del sistema.

Le formole che ci danno l ed m non perdono di significato e si scrivono:

$$
(16) \qquad \begin{cases} l = \dfrac{\sqrt{\rho^2-b^2}}{\rho}\left(-\sqrt{\rho^2-b^2} \mp b' \cot\omega\right) \\ m = \dfrac{a'}{\operatorname{sen}\omega} \end{cases}
$$

avendo posto naturalmente

$$
b'^2 = b^2 - k \quad , \quad a'^2 = k. \qquad\qquad 0 \leq k \leq b^2
$$

Il termine rappresentato con ν nelle equazioni (11) si presenta sotto forma indeterminata, ma se ne calcola facilmente il valore vero ottenendo per ω le seguenti equazioni differenziali.

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial\rho} = \dfrac{\sqrt{\rho^2-b^2}}{a'\rho}\left(\sqrt{\rho^2-b^2}\operatorname{sen}\omega \pm b'\cos\omega\right)\mathrm{D} - \dfrac{\mathrm{D}'}{\rho} \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial v} = \mp\dfrac{b'\sqrt{\rho^2-b^2}}{a'\rho}\operatorname{sen}\omega - \dfrac{b^2\cos\omega}{a'\rho} + \dfrac{\sqrt{\rho^2-b^2}}{a'\rho}\left(\sqrt{\rho^2-b^2}\operatorname{sen}\omega \pm b'\cos\omega\right)\mathrm{D}' - \dfrac{\mathrm{D}''}{\rho}. \end{cases}
$$

Le formole di applicabilità infine si semplificano notevelmente:

$$
(18) \qquad \begin{cases} \rho_1^2 = \dfrac{b^2}{\operatorname{sen}^2\omega}. \\ dv_1 = dv \end{cases}
$$

Da esse risulta che le geodetiche deformate dei meridiani si corrispondono nella congruenza, e quindi, come immediato corollario: se la superficie S è rigata, tale sarà pure la superficie trasformata. Per le trasformazioni singolari si può ripetere quanto si disse nel caso del catenoide allungato, osservando però che nel caso presente la B_{-a^2} coincide con la B_0 e che, se la S è rigata, essa ci riporta alla S stessa; è questo infatti il noto caso di eccezione al teorema di Weingarten. (Cfr. BIANCHI. *Geom. diff.*, vol. I, pag. 288-89).

Se la superficie S è rigata le due curve a torsione costante, deformate del circolo di gola del catenoide, appartenenti alle due rigate S ed S_1, sono trasformate asintotiche l'una dell'altra. Ciò discende immediatamente da quanto dicemmo per le deformate rigate del catenoide allungato, pur di considerare le curve a torsione costante come un caso particolare di curve di Bertrand, osservando inoltre che la curva coniugata di una curva a torsione costante coincide con la curva stessa, e che la trasformazione di Razzaboni per le curve di Bertrand applicate alle curve a torsione costante riporta alle trasformazioni asintotiche di dette curve [1]; ma si può anche dimostrare direttamente, ritrovando così per ω l'equazione differenziale già data dal Bianchi [2]).

Se invece la S è una deformata non rigata dell'ordinario catenoide, ed S_1 una sua trasformata, si considerino le rigate R circoscritte alla S secondo il teorema di Chieffi e le corrispondenti R_1 relative alla S_1; due rigate R ed R_1 ottenute da due asintotiche corrispondenti sono trasformate asintotiche l'una dell'altra e le loro linee di stringimento, che sono due curve di uguale torsione costante, sono esse pure, per il teorema precedente, trasformate asintotiche l'una dell'altra. Ma le linee di stringimento delle rigate R sono le asintotiche di una superficie pseudosferica Σ, ed analogamente le linee di stringimento delle rigate R_1 sono le asintotiche di una seconda superficie pseudosferica Σ_1 di ugual raggio: le due superficie Σ e Σ_1 sono quindi le due falde focali di una congruenza W; e perciò anche le trasformazioni delle deformate non rigate del catenoide ordinario coincidono con le trasformazioni di Bäcklund per le superficie pseudosferiche applicate alle evolute di dette superficie. (Cfr. BIANCHI. *Geom. diff.*, vol. II, § 377).

---

[1]) Cfr. BIANCHI. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, genn. 1908, pag. 22.

[2]) Cfr. L. c., pag. 23.

§ 6.

III. Caso: $\alpha = \beta > 0$. Curve a flessione costante.

Supponiamo ora di tenere fisso β e di fare crescere α fino a raggiungere il valore β; percorreremo così una serie di iperboloidi omofocali e al limite per $\beta = \alpha$ otterremo il circolo focale C o, se si vuole, la sviluppabile delle tangenti a questo cerchio. Le deformazioni della curva C debbono perciò intendersi ottenute torcendo senza flettere il cerchio primitivo supposto inestendibile.

Abbiamo quindi un caso particolare di coniche distorte rappresentato da curve a flessione costante: la trasformazione non perde di significato e ci porta alle trasformazioni $B_\sigma \left(\text{con } \sigma = \text{arc cos} \frac{a'}{a} \right)$ applicate alla curva C_0, coniugata della C.

Posto nelle formole generali

$$\alpha = \beta = a^2 \quad , \quad \alpha' = a^2 + k = a'^2 \quad , \quad \rho = a$$

esse ci forniscono

$$l = -a + a' \cos \omega \quad ; \quad m = \frac{a'}{a} \operatorname{sen} \omega \, .$$

Ma indicando con α, β, γ ; ξ, η, ζ ; λ, μ, ν i coseni di direzione della tangente, normale principale e binormale della curva C, nel suo punto generico, si ha:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)_{\rho = a} = -\xi \quad ; \quad \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{\rho = a} = \alpha$$

e le analoghe, e quindi le formole di trasformazione diventano

$$x_1 = x + a \, . \, \xi - a' \cos \omega \, . \, \xi + a' \operatorname{sen} \omega \, . \, \alpha$$

od anche, introducendo gli elementi relativi alla curva C_0:

$$x_1 = x_0 + a' (\cos \omega \, \xi_0 + \operatorname{sen} \omega \, \lambda_0) \, .$$

L'equazione differenziale per ω si presenta sotto forma indeterminata; ma a noi non occorre ricercarne la vera espressione, giacchè la teoria generale ci assicura che la curva C_1 luogo del punto

(x_1, y_1, z_1) è una curva con la medesima flessione costante della C e quindi anche della C_0; perciò possiamo prendere per ω l'equazione differenziale [1]).

$$\frac{d\omega}{ds_0} = \frac{1}{T_0} + \frac{a - a'\cos\omega}{a b'}$$

dove s_0 e T_0 sono rispettivamente l'arco ed il raggio di torsione della curva C_0.

§ 7.

IV. Caso: $\alpha > \beta > 0$. Ellissoide reale schiacciato.

Come già notammo, la quadrica S_0 essendo reale, occorre prendere per quadrica omofocale $\overline{S}_0$ un iperboloide ad una falda; ma poichè S_0 è a punti ellittici ed $\overline{S}_0$ a punti iperbolici, l'affinità di Ivory fa corrispondere alla regione reale di S_0 la regione ideale di $\overline{S}_0$ e viceversa; quindi se la superficie iniziale S è applicabile realmente sull'ellissoide schiacciato S_0, la S_1 risulterà applicabile idealmente sull'ellissoide stesso e viceversa; occorre dunque applicare un numero pari di volte la trasformazione per ottenere una superficie applicabile sulla primitiva in senso ristretto.

Se la superficie S è applicabile sulla regione reale di S_0 è $\rho^2 < \beta$, e tutte le formole di trasformazione si presentano sotto forma reale. Se invece la superficie S è applicabile sulla regione ideale di S_0 è $\rho^2 > \alpha$ ed l, m non risultano reali per ω reale: introdotto il parametro $t = \text{tang}\,\frac{1}{2}\omega$ e scritte le due relazioni

$$l = \bar{l} \quad , \quad m = \bar{m}$$

si trova anche in questo caso che, pur di prendere per valore iniziale di t l'affissa di un cerchio reale del piano complesso di Gauss, la corrispondente soluzione delle equazioni differenziali per ω rende l ed m reali e ci conduce quindi ad una superficie S_1 applicabile idealmente sulla S e quindi in senso ristretto sull'ellissoide fondamentale S_0.

---

[1]) Cfr. BIANCHI. Rendiconti di Palermo, pag. 33, formola 56.

§ 8.

V. Caso: $\beta > 0 > \alpha$. Ellissoide immaginario: $a < b$.

Naturalmente dovremo prendere per quadrica $\overline{S}_0$ un ellissoide immaginario; porremo quindi

$$\alpha = -a^0 \quad , \quad \beta - \alpha = b^2 \quad , \quad b^2 > a^2$$
$$\alpha' = -a^2 + k = -a'^2 \quad , \quad \beta' - \alpha' = b^2 - k = b'^2 . \qquad k \leq a^2$$

L'elemento lineare dell'ellissoide si scrive:

$$ds^2 = \frac{\rho^2 + a^2)}{\rho_2 - (b^2 - a^2)} d\rho^2 + \rho^2 dv^2$$

e riveste forma reale sia prendendo ρ e v reali con la limitazione $\rho^2 > b^2 - a^2$, sia assumendo ρ e v puramente immaginari con la limitazione $\rho^2 + a^2 > 0$.

Nel primo caso si hanno superficie applicabili in senso ristretto sull'ellissoide, e come superficie tipica di questa prima classe possiamo prendere il *catenoide accorciato,* nel secondo caso si hanno invece superficie applicabili sull'ellissoide fuori dei limiti.

1.ª Classe. — **Deformate reali del catenoide accorciato.**

Essendo ρ e v reali perchè la superficie trasformata S_1 sia reale occorre e basta che l ed m siano reali. Anche in questo caso se introduciamo il parametro $t = \operatorname{tang} \frac{1}{2} \omega$ e scriviamo

$$l = \bar{l} \quad , \quad m = \bar{m}$$

otteniamo per t e $\bar{t}$ una relazione bilineare

$$F(t, \bar{t}) = \alpha t \bar{t} + \beta(t + \bar{t}) + \gamma = 0$$

la quale pur di mantenere k entro l'intervallo

$$0 \leq k \leq a^2$$

ci rappresenta l'equazione di un cerchio reale; e si vede facilmente che anche in questo caso essa è per t una condizione iniziale. Le formole di applicabilità poi forniscono valori reali per ρ_1 e v_1 sodisfacenti alla medesima limitazione cui sodisfa ρ; la superficie trasformate S_1 è quindi applicabile sulla S in senso ristretto.

La trasformazione singolare B_{a^2} conduce al solito ad un'unica superficie trasformata, la complementare della S rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani; mentre la trasformazione B_0 ci riporta alla superficie iniziale S.

Si può dimostrare analiticamente che le trasformazioni considerate, anche nel caso attuale del catenoide accorciato, dipendono dalle trasformazioni di Bäcklund delle superficie pseudosferiche, come già accennammo nella prefazione.

2.ª Classe. — **Superficie applicabili sull'ellissoide immaginario fuori dei limiti.**

In questo caso essendo ρ e v puramente immaginari, perchè la superficie S_1 risulti reale, occorre che l ed m siano immaginari puri. Anche qui se scriviamo

$$l+\bar{l}=0 \qquad m+\bar{m}=0$$

troviamo che pur di prendere per valore iniziale di $t=\tang\frac{1}{2}\omega$ l'affissa di un punto di un cerchio del piano complesso di Gauss, la corrispondente soluzione delle equazioni differenziali per ω rende l ed m puramente immaginari e fornisce quindi una superficie S_1 reale ed applicabile sulla S in senso ristretto.

§ 9.

VI. Caso: $\alpha<\beta<0$. Ellissoide immaginario: $a>b$

Anche in questo caso dobbiamo scegliere per quadrica $\overline{S}_0$ un ellissoide immaginario, e poniamo quindi

$$\alpha=-a^2 \ ; \ \beta-\alpha=b^2 \ ; \ \alpha'=-a^2+k=-a'^2 \ ; \ \beta'-\alpha'=b^2-k=b'^2$$

mantenendo per k l'intervallo di variabilità

$$0\leq k\leq b^2.$$

L'elemento lineare della superficie S_0:

$$ds^2 = \frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2 + a^2 - b^2} d\rho^2 + \rho^2 dv^2$$

riveste forma reale sia per ρ e v reali, sia per ρ e v puramente immaginari e sodisfacenti alla limitazione

$$-(a^2 - b^2) > \rho^2 > -a^2 .$$

Come superficie tipica della prima classe possiamo prendere il *sinusoide iperbolico* e per quelle della seconda classe la sua superficie complementare [1]).

I risultati che si ottengono sono identici a quelli del paragrafo precedente, ed anche in questo caso si può dimostrare che le trasformazioni ora considerate dipendono da quelle di Bäcklund per le superficie pseudosferiche.

§ 10.

Superficie a curvatura costante e paraboloidi rotondi.

Se nelle formole generali facciamo il cambiamento di parametri definito dalle formole

$$r = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\rho \qquad u = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,v$$

e successivamente supponiamo $\beta = 0$, otteniamo le formole di trasformazione per le *superficie a curvatura costante,* le quali coincidono con quelle di Bäcklund; l'elemento lineare corrispondente assume la forma (I) § 1 con $A = 0$.

Se invece supponiamo di fare crescere α e β fino all'infinito in modo che rimanga finito il rapporto $\frac{\alpha^2}{\beta}$, veniamo a considerare il caso dell'elemento lineare (I) con $C = 0$, ed otteniamo corrispondentemente le trasformazioni dei *paraboloidi di rotazione.*

---

[1]) BIANCHI. *Teoria delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche rotonde,* pag. 9.

Nel caso delle deformate del paraboloide reale, $\beta<0$, la sola trasformazione reale è la complementare, non esistendo alcun paraboloide di rotazione rigato.

Supporremo quindi $\beta>0$ e porremo $\frac{\alpha^2}{\beta}=p^2$, per modo che l'equazione (b) § 1 mutatovi x in $x+\sqrt{\alpha-\beta}$ si può scrivere

$$x_0^2+y_0^2=2ipx\,,$$

ed assumiamo per $\overline{S}_0$ il paraboloide omofocale al precedente

$$\frac{\bar{x}_0^2+\bar{y}_0^2}{p'}=2i\bar{z}_0-k\,. \qquad p'=p+k\;,\; p>0<p'$$

Introduciamo infine un nuovo parametro λ legato al parametro $\vartheta=\omega+u$ dalle relazioni:

$$\begin{cases} \lim\limits_{\alpha,\beta=\infty}\sqrt{\frac{\alpha'}{\beta'-\alpha'}}\operatorname{sen}\vartheta=\pm\lambda\sqrt{ip'}\;;\; \lim\limits_{\alpha,\beta=\infty}\left(\pm i\sqrt{\frac{\alpha'(\beta-\alpha)}{\beta'-\alpha'}}\operatorname{sen}\vartheta+\sqrt{\alpha'}\cos\vartheta\right)=\frac{\sqrt{ip'}}{2}\Big(ik\lambda \\ \lim\limits_{\alpha,\beta=\infty}\sqrt{\frac{\alpha'}{\beta'-\alpha'}}\cos\vartheta=-\lambda\sqrt{-ip'}\;;\; \lim\limits_{\alpha,\beta=\infty}\left(\mp i\sqrt{\frac{\alpha'(\beta-\gamma)}{\beta'-\alpha'}}\cos\vartheta+\sqrt{\alpha'}\operatorname{sen}\vartheta\right)=\pm\frac{\sqrt{-ip'}}{2}\Big(ik \end{cases}$$

Con queste posizioni le formole di trasformazione, scritte sotto la forma:

$$x_1=x+l'\frac{\partial x}{\partial r}+m'\frac{\partial x}{\partial u}\,,$$

si presentano sotto forma finita, risultando finite le espressioni di l' ed m'; e perchè la superficie trasformata S_1, sia reale come la primitiva S, dovremo ancor qui imporre le condizioni:

$$l'=\bar{l}' \quad , \quad m'=\bar{m}'\,,$$

che si traducono in una relazione bilineare per λ e $\bar{\lambda}$

$$\alpha\lambda\bar{\lambda}+\beta\lambda+\bar{\beta}\bar{\lambda}+\gamma=0$$

con α, γ reali, β e $\bar{\beta}$ immaginari coniugati, la quale è nel piano di Gauss l'equazione di un cerchio reale.

Anche in questo caso si vedrebbe facilmente che essa è per λ una condizione iniziale.

§ 11.

Il teorema di permutabilità.

Non sarebbe difficile stabilire analiticamente il teorema di permutabilità per le trasformazioni delle superficie di elemento lineare (I), e dimostrare cioè che *se* S_1 *ed* S_2 *sono due superficie trasformate di una medesima* S *per mezzo delle trasformazioni* B_{k_1} e B_{k_2}, *esiste una quarta superficie* $\overline{S}$, *perfettamente determinata, legata rispettivamente alla* S_1 *ed alla* S_2 *da due trasformazioni* B_{k_2} e B_{k_1} *a costanti invertite.* Però, avendo sempre in vista le trasformazioni reali, ci basta tenere presente la dimostrazione del teorema di permutabilità per le trasformazioni delle deformate generali delle quadriche [1]) e per le trasformazioni delle curve a flessione ed a torsione costante, per poter affermare l'esistenza di configurazioni mobili di Möbius di 2^n superficie tutte applicabili fra loro oppure di 2^n curve aventi tutte la medesima flessione costante.

---

[1]) Cfr. Bianchi. *Geom. diff.*, vol. III, § 65.

Parte III.

Estensione della trasformazione di Razzaboni alle deformate dei paralleli dell'iperboloide rotondo ad una falda e del catenoide ordinario per una deformazione della superficie che lasci rigide le generatrici di un sistema.

Le sole superficie reali di rotazione ammettenti delle deformate rigate sono, come è noto, l'iperboloide ed una falda ed il catenoide, e nella precedente trattazione si vide che la trasformazione pone in una particolare relazione reciproca le linee di stringimento di due rigate trasformate: possiamo dire che una curva è legata alla coniugata dell'altra da una trasformazione di Razzaboni per le curve di Bertrand, comprendendo così come caso particolare quello delle curve a torsione costante.

Sia ϑ l'angolo costante che la generatrice della rigata R applicabile sul catenoide (allungato se $\vartheta \neq 0$, ordinario se $\vartheta = 0$) forma con la binormale della linea di stringimento C_0; $\frac{a}{\operatorname{sen}\vartheta}$ sia il raggio del cerchio di gola del catenoide; u il segmento di generatrice compreso fra la deformata C di un parallelo e la linea di stringimento C_0, ed ε sia infine il rapporto costante di due archi corrispondenti delle due curve C e C_0.

Evidentemente fra le quattro costanti così introdotte deve sussistere la relazione

$$1 + \frac{u^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}{a^2} = \varepsilon^2 \tag{1}$$

La curva C_0 è una curva di Bertrand della famiglia

$$\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{R_0}+\frac{\cos\vartheta}{T_0}=\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{a} \tag{2}$$

essendo R_0 e T_0 i raggi di flessione e di torsione della curva C_0 stessa.

Se l, m, n, sono i coseni di direzione della generatrice g di R; α, β, γ ; ξ, η, ζ ; λ, μ, ν quelli della tangente, della normale principale e della binormale alla C si trovano facilmente per l, m, n le espressioni seguenti

$$l=\frac{\operatorname{sen}\vartheta}{\varepsilon}\,.\,\gamma-\frac{\varepsilon^2-1}{u\varepsilon^2}R\,.\,\xi+\sqrt{\frac{\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\vartheta}{\varepsilon^2}-\frac{(\varepsilon^2-1)^2}{u^2\varepsilon^4}R^2}\,.\,\lambda \tag{3}$$

e le due analoghe; mentre per la curva C si ottiene la seguente equazione:

$$R'+\frac{\operatorname{sen}\vartheta\,(\varepsilon^2-1)}{\varepsilon u(\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\theta)}R-\frac{u\varepsilon\operatorname{sen}\vartheta}{(\varepsilon^2-1)R}+\left(\frac{\cos\theta\sqrt{\varepsilon^2-1}}{u(\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\theta)}-\frac{1}{T}\right)\sqrt{\frac{\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\theta)u^2\varepsilon}{(\varepsilon^2-1)^2}-R^2}=0 \tag{I}$$

dove abbiamo indicato con R' la derivata di R presa rispetto all'arco v della C.

Siano ora C_0 e C'_0 due curve di Bertrand della famiglia (2) legate fra loro da una trasformazione di Razzaboni, R ed R' siano le due rigate che le hanno per linee di stringimento costruite secondo il teorema di Bioche; g e g' siano le due generatrici di R ed R' passanti per due punti P_0 e P'_0 corrispondenti su C_0, C'_0. Come e noto, la distanza $P_0P'_0$ è costante $\left(\delta_0=\frac{a\cos\sigma}{\operatorname{sen}\vartheta}\right)$ ed è pure costante $\left(=\frac{\pi}{2}-\sigma\right)$ l'angolo delle due generatrici g e g'; quindi se C e C' sono su R ed R' due deformate di un medesimo parallelo e P e P' i punti di C e C' situati sulle generatrici g e g' rispettivamente, sarà, pure costante la distanza δ dei due punti P e P' e la loro congiungiunte formerà con g e con g' uno stesso angolo costante τ.

Le formole relative alla trasformazione di Razzaboni ci danno [1]).

$$x'_0=x_0+\frac{a\cos\sigma}{\operatorname{sen}\vartheta}\left(-\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi\gamma_0+\cos\varphi\xi_0+\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi\lambda_0\right) \tag{4}$$

---

[1]) Cfr. RAZZABONI. Atti del R. Ist. Veneto, tomo LX, parte 2ª; oppure CHIEFFI. Giornale di Matematiche, anno 1905, pag. 15.

essendo φ una soluzione dell'equazione

$$(5)\quad \frac{d\varphi}{dv_0} = \frac{1}{\operatorname{sen}\sigma + \cos\vartheta}\left\{\frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi}{a} - \operatorname{sen}\sigma\left(\frac{\cos\vartheta}{R_0} - \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{T_0}\right) - \frac{1}{R_0}\right\}$$

del tipo di Riccati in $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$.

I coseni di direzione l', m', n' della generatrice g' hanno l'espressione:

$$(6)\quad l' = \operatorname{sen}\sigma(\operatorname{sen}\vartheta\alpha_0 + \cos\vartheta\lambda_0) + \cos\sigma(\cos\vartheta\cos\varphi\alpha_0 + \operatorname{sen}\varphi\xi_0 - \operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi\lambda_0)$$

e le due analoghe; quindi le coordinate del punto P' si scrivono:

$$(7)\quad x' = x + u(l' - l) + \frac{a\cos\sigma}{\operatorname{sen}\vartheta}(-\cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi\alpha_0 + \cos\varphi\xi_0 + \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi\lambda_0).$$

Da queste si ricava facilmente

$$\delta^2 = \sum (x' - x)^2 = \frac{a^2\cos^2\sigma}{\operatorname{sen}^2\vartheta} + 2u^2(1 - \operatorname{sen}\sigma)$$

$$\cos\tau = \sum \frac{x' - x}{\delta}\, l = \frac{u}{\delta}(\operatorname{sen}\sigma - 1)$$

ed eliminando σ

$$(8)\quad \delta\left(1 + \frac{\cos^2\tau}{\varepsilon^2 - 1}\right) + \frac{2u\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}\cos\tau = 0$$

Questa è nel piano, l'equazione di un'ellisse di semiassi $\frac{u\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon - 1}}$, u. Interpretando questo risultato abbiamo. Gli estremi P' dei segmenti PP', partenti da un medesimo punto P di C e terminati alle ∞^2 curve trasformate C', sono distribuiti su un ellissoide di rotazione schiacciato E, avente per asse di rotazione la retta g passante per P ed il centro essendo situato alla distanza $-u$ da P ossia nel punto P_0 corrispondente di P su C_0.

Inoltre, essendo $\frac{u^2\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1} - u^2 = \frac{a^2}{\operatorname{sen}^2\vartheta}$, gli ∞^1 ellissoidi relativi ad una generetrice di R formano un sistema omofocale. Fissando σ, ossia fissando una coppia di valori per le costanti δ e τ, avremo come luogo dei punti P' corrispondenti a P un parallelo Γ dell'ellissoide E; muovendosi P su C si muove corrispondentemente l'ellissoide E, ed il cerchio Γ, fisso su E, descrive una superficie cerchiata Σ sulla quale si trovano le ∞^1 curve C' trasformate della C relative tutte ad una medesima costante di trasformazione.

Si tratta ora di individuare analiticamente le linee C' su Σ.

Indicando con ω l'angolo che il piano della retta g e del punto P' forma con il piano tangente in P alla R, si ha facilmente

$$(9)\qquad \frac{x'-x}{\delta} = \frac{\operatorname{sen}\vartheta\cos\tau}{\varepsilon} + \sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{\varepsilon^2}}\operatorname{sen}\tau\cos\omega\alpha +$$

$$+\left(\cos\tau M - \frac{\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\tau\cos\omega}{\sqrt{\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\vartheta}}M + \frac{\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{\varepsilon^2}}}N\right)\xi +$$

$$+\left(\cos\tau N - \frac{\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\tau\cos\omega}{\sqrt{\varepsilon-\operatorname{sen}^2\vartheta}}N - \frac{\operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{1-\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta}{\varepsilon^2}}}M\right)\lambda$$

avendo posto:

$$(10)\qquad M = \frac{-(\varepsilon^2-1)R}{u\varepsilon^2}\ ;\quad N = \sqrt{\frac{\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\vartheta}{\varepsilon^2} - \frac{(\varepsilon^2-1)^2R^2}{u^2\varepsilon^4}}\ .$$

Ma l'angolo ϑ non differisce che per una costante dall'angolo φ di Razzaboni; più precisamente si ha:

$$(11)\qquad \cos\varphi = \frac{\operatorname{sen}\omega(\cos\vartheta+\varepsilon^2-1)+\cos\omega\sqrt{\varepsilon^2-1}\,(1-\cos\vartheta)}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\vartheta}}\ ;$$

per ciò, tenendo presente la formola (5), si ricava facilmente per ω la seguente equazione differenziale, pure essa del tipo di Riccati in $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\omega$,

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{d\omega}{dv} = \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\vartheta\{\operatorname{sen}\omega(\cos\vartheta+\varepsilon^2-1)+\cos\omega\sqrt{\varepsilon^2-1}\,(1-\cos\vartheta)\}}{a\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\vartheta}\,(\operatorname{sen}\sigma+\cos\vartheta)} +$$

$$+\frac{\operatorname{sen}^2\vartheta\,(\cos\vartheta\operatorname{sen}\sigma-\varepsilon^2+1)}{a\varepsilon(\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\vartheta)(\operatorname{sen}\sigma+\cos\vartheta)} - \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\vartheta)}{R^2}-\frac{(\varepsilon^2-1)\operatorname{sen}^2\vartheta}{a^2}}}{\varepsilon^2-\operatorname{sen}^2\vartheta}\ .$$

Per il procedimento tenuto siamo certi che se nelle (9) poniamo per ω una soluzione della (II), esse ci definiscono una curva C' della famiglia (I), e la retta g' ad essa relativa riesce inclinata dell'angolo τ sulla congiungente PP'.

Se la rigata R è una deformata dell'ordinario catenoide le formole (I), (9) e (II) si semplificano notevolmente e ci danno:

$$\text{(I')} \qquad R' - \frac{u\varepsilon}{T}\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2-1)^2} - \frac{R^2}{u^2\varepsilon^2}} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - \dfrac{(\varepsilon^2-1)^2 R^2}{u^2\varepsilon^2}}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon^2-1}}\,.$$

$$\text{(9')} \qquad \frac{x'-x}{\delta} = \operatorname{sen}\tau\cos\omega\,\alpha + (\cos\tau\,M + \operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\omega\,N)\,\xi + $$
$$+ (\cos\tau\,N - \operatorname{sen}\tau\operatorname{sen}\omega\,M)\,\lambda$$

$$\text{(II')} \qquad \frac{d\omega}{dv} = -\sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon^4 T_0^2}} + \frac{\cos\sigma\operatorname{sen}\omega}{T_0(\operatorname{sen}\sigma+1)}\,.$$

Infine osserviamo esplicitamente che tutte le formole sussistono anche quando $\vartheta = \frac{\pi}{2}$; in tal caso la linea C_0 è una curva a flessione costante $\frac{1}{a}$ e la rigata R è la sviluppabile delle tangenti a questa linea; le curve C si ottengono staccando sulle tangenti alla curva C_0, ed a partire da essa, un segmento u costante.

Pisa, dicembre 1909.