

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

ANTONIO SIGNORINI

**La trasformazione  $B_k$  delle superficie applicabili sulle  
quadriche dello spazio ellittico**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1<sup>re</sup> série, tome 12*  
(1912), exp. n° 1, p. 1-124

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1912\\_1\\_12\\_\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1912_1_12__A1_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ANTONIO SIGNORINI

---

LA

Trasformazione  $B_k$  delle superficie applicabili

SULLE

QUADRICHE DELLO SPAZIO ELLITTICO

---

PISA

STAB. TIPOGRAFICO SUCC. FF. NISTRI

1909

---

Estratto dagli *Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa*, Vol. XI

---

## INTRODUZIONE

---

Nella sua memoria sulla *Théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales* <sup>1)</sup> il chiarissimo prof. BIANCHI ha enunciato che i risultati ivi ottenuti per la trasformazione  $B_k$  delle superficie applicabili sulle quadriche dello spazio ordinario sussistono inalterati in ogni spazio a curvatura costante.

In questo lavoro ci proponiamo appunto di sviluppare la teoria della trasformazione  $B_k$  delle deformate delle quadriche nello spazio ellittico. Dal seguito della nostra trattazione apparirà manifesto che il metodo stesso che vale per stabilire la teoria della trasformazione  $B_k$  nello spazio ordinario conserva inalterato il suo valore nello spazio ellittico. Ma potremo procedere molto più speditamente basandoci sopra un teorema, enunciato dal prof. BIANCHI (V. (M) Introduzione n. XI) che pone in stretta relazione le trasformazioni  $B_k$  relative alle superficie applicabili su due quadriche immerse in due spazi di curvatura costante differente: teorema che noi dimostreremo nel caso di due quadriche immerse rispettivamente nello spazio ordinario e in uno spazio ellittico.

---

<sup>1)</sup> V. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*. Tome XXXIV. Siccome ci capiterà spesso di dover citare questa memoria, nelle citazioni la indicheremo semplicemente con (M). Per la stessa ragione tutte le volte che ci riferiremo alle *Lezioni di Geometria differenziale* del prof. BIANCHI indicheremo quest'opera col solo nome di *Lezioni*.

Arriveremo così senza difficoltà a stabilire una trasformazione delle superficie applicabili sulle quadriche dello spazio ellittico, che include come caso particolare la trasformazione di BACKLUND delle superficie pseudosferiche e gode di tutte le proprietà di tale trasformazione convenientemente generalizzate.

Inoltre da questa teoria, valeudoci della legge di dualità, che nello spazio ellittico ha valore sia grafico che metrico, potremo senza altro dedurre una teoria del tutto analoga per la trasformazione degli involucri applicabili sugli involucri quadrici, o, ciò che è lo stesso, per la trasformazione delle superficie aventi la 3.<sup>a</sup> forma fondamentale equivalente alla 3.<sup>a</sup> forma fondamentale di una stessa quadrica.

È inutile che ci tratteniamo qui a dare gli enunciati dei teoremi che stabiliremo per le trasformazioni  $B_k$  delle superficie applicabili sulle quadriche dello spazio ellittico, tali enunciati coincidendo, meno per le quadriche diverse dalle quadriche di CLIFFORD, coi corrispondenti nello spazio ordinario. Nel caso delle quadriche di CLIFFORD c'è soltanto da avvertire che, assegnata una superficie applicabile sopra una di esse (e quindi sopra tutte le altre), cioè una superficie a curvatura nulla, non si hanno, come sempre accade per le superficie applicabili sulle quadriche dello spazio ordinario — ove non esistono quadriche che ammettano applicabilità in sè, non corrispondenti a movimenti dello spazio ambiente — soltanto  $\infty^2$  trasformazioni  $B_k$ , ma  $\infty^4$ ; avendosene una classe di  $\infty^2$  ogni volta che si sia fissata la quadrica di CLIFFORD sulla quale la superficie assegnata si considera applicabile, e l'applicabilità della superficie stessa sulla quadrica assegnata, a meno di un movimento della quadrica in sè. I teoremi che valgono in generale valgono allora anche nel caso particolare delle superficie di CLIFFORD, purchè ove occorra considerare più trasformazioni  $B_k$  relative alla stessa superficie a curvatura nulla, si intendano tutte ottenute considerando sempre

la superficie data come applicabile sopra una stessa quadrica di CLIFFORD colla stessa legge di applicabilità, a meno di un movimento della quadrica in sè. Di più nel caso particolare delle trasformazioni delle superficie rigate ci sarà da osservare che le trasformazioni delle rigate a curvatura nulla corrispondenti ad un'applicabilità sopra una quadrica di CLIFFORD, che non sovrappone le generatrici della rigata assegnata alle generatrici della quadrica non conservano più nessuno dei caratteri speciali che presentano negli altri casi le trasformazioni  $B_k$  delle superficie rigate, ma si comportano come le trasformazioni  $B_k$  delle deformate generali di una quadrica.

---



---

---

§ 1.

**Alcune formole fondamentali.**

Consideriamo una superficie  $S$  dello spazio ellittico o un punto  $F$  mobile su di essa. Servendoci delle usuali notazioni indicheremo rispettivamente con  $x_i, \xi_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) le coordinate di WEIERSTRASS del punto  $F$  e del piano tangente in  $F$  alla  $S$ . Supponiamo inoltre la superficie  $S$  riferita ad un sistema di coordinate curvilinee qualunque, rispetto al quale,  $R$  indicando il raggio di curvatura dello spazio, siano

$$(1) \quad \begin{cases} ds^2 = R^2 S dx_i^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2 \\ - R S dx_i d\xi_i = D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2 \end{cases}$$

le sue due prime forme fondamentali. Nel piano tangente in  $F$  alla superficie  $S$  immaginiamo poi un punto  $F'$  in posizione arbitraria, ma fissata con  $F$ . Se indichiamo con  $x'_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) le sue coordinate di WEIERSTRASS, avremo evidentemente

$$(2) \quad x'_i = p x_i + l \frac{\partial x_i}{\partial u} + m \frac{\partial x_i}{\partial v} \quad (i=0, 1, 2, 3)$$

$p, l, m$  essendo funzioni delle coordinate  $u, v$  di  $F$ , indipendenti dall'indice  $i$  della coordinata  $x$ .

Vogliamo prima di tutto far vedere che se supponiamo che la  $S$  deformandosi trascini seco i segmenti tangenti  $\overline{FF'}$ , le formole (2), finchè le funzioni  $p(u, v), l(u, v), m(u, v)$ , restano fisse, daranno



sempre le coordinate del punto  $F'$ , comunque la  $S$  si sia deformata. Per questo basta osservare che se  $\bar{x}_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) sono le coordinate del punto  $\bar{F}$  che corrisponde ad  $F$  dopo la deformazione di  $S$  in una superficie  $\bar{S}$ , se  $\bar{F}'$  è il punto di coordinate

$$(2) \quad \bar{x}'_i = p \bar{x}_i + l \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u} + m \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial v} \quad (i=0, 1, 2, 3)$$

se  $\bar{d}$  è la lunghezza del segmento  $\bar{F}\bar{F}'$ ,  $\bar{\alpha}_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) i coseni di direzione del segmento stesso nel punto  $\bar{x}_i$ , avremo

$$\bar{x}_i \cos \frac{\bar{d}}{R} + \bar{\alpha}_i \operatorname{sen} \frac{\bar{d}}{R} = \bar{x}'_i \quad (i=0, 1, 2, 3)$$

e quindi

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\bar{x}'_i - \bar{x}_i \cos \frac{\bar{d}}{R}}{\operatorname{sen} \frac{\bar{d}}{R}} :$$

di più, essendo evidentemente

$$(3) \quad \cos \frac{\bar{d}}{R} = S \bar{x}_i \bar{x}'_i = p$$

sarà pure, per le (2)

$$\bar{\alpha}_i = \frac{l \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u} + m \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial v}}{\sqrt{1-p^2}}$$

e infine

$$(4) \quad \begin{cases} S \bar{\alpha}'_i \frac{R}{\sqrt{E}} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} (El + Fm) \\ S \bar{\alpha}_i \frac{R}{\sqrt{G}} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial v} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} (Fl + Gm). \end{cases}$$

Le (3) e le (4) insieme mostrano immediatamente come la lunghezza del segmento  $\bar{F}\bar{F}'$  e gli angoli che forma in  $\bar{F}$  colle linee coordinate siano indipendenti dalla deformazione della  $S$  e come quindi il punto  $\bar{F}'$  non sia altro che il punto in cui dopo la deformazione della  $S$  in  $\bar{S}$  viene a cadere il punto  $F'$  c. d. d.

Il luogo dei punti  $F'$  sarà, in generale una superficie  $S'$ , che eccezionalmente si potrà ridurre a una linea o a un punto. Derivando le formole (2) e tenendo conto delle formole (V. *Lezioni* § 213).

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{E}{R^2} x + \frac{D}{R} \xi \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{F}{R^2} x + \frac{D'}{R} \xi \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{G}{R^2} x + \frac{D''}{R} \xi \end{cases}$$

si ottengono subito per le derivate delle coordinate di  $F'$  le formole

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial x'}{\partial u} = Ax + L \frac{\partial x}{\partial u} + M \frac{\partial x}{\partial v} + (Dl + D'm) \frac{G}{R} \\ \frac{\partial x'}{\partial v} = Bx + P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial x}{\partial v} + (D'l + D''m) \frac{G}{R} \end{cases}$$

ove

$$(7) \quad \begin{cases} A = \frac{\partial p}{\partial u} - \frac{E}{R^2} l - \frac{F}{R^2} m; \quad L = p + \frac{\partial l}{\partial u} + l \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + m \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad M = \frac{\partial m}{\partial u} + l \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} + m \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}; \\ B = \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{F}{R^2} l - \frac{G}{R^2} m; \quad P = \frac{\partial l}{\partial v} + l \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + m \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad Q = p + \frac{\partial m}{\partial v} + l \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + m \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}. \end{cases}$$

Osserveremo anche che, indicando con  $\bar{A}, \bar{B}, \bar{L}, \bar{P}, \bar{M}, \bar{Q}$  ciò che divengono i secondi membri di queste formole ove in essi per  $p, l, m$  si ponga rispettivamente

$$pk(u, v) \quad lk(u, v) \quad mk(u, v)$$

ove  $k$  è una funzione qualunque di  $u, v$ , si hanno le semplici relazioni

$$\begin{aligned} \bar{A} &= p \frac{\partial k}{\partial u} + kA & \bar{L} &= l \frac{\partial k}{\partial u} + kL & \bar{M} &= m \frac{\partial k}{\partial u} + kM \\ \bar{B} &= p \frac{\partial k}{\partial v} + kB & \bar{P} &= l \frac{\partial k}{\partial v} + kP & \bar{Q} &= m \frac{\partial k}{\partial v} + kQ. \end{aligned}$$

## § 2.

**Prime formole relative alle quadriche rigate.**

Supporremo sempre, tolto che quando avvertiremo esplicitamente il contrario, che l'equazione dell'assoluto sia data da

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Come è noto, l'equazione di una quadrica qualunque a coefficienti reali potrà allora ridursi alla forma

$$a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$$

ove  $a_0, a_1, a_2, a_3$  sono tutti reali. I tipi di quadriche proprie a coefficienti reali saranno dunque tre, cioè, supposto  $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_0$

1. quadriche rigate  $(a_1 \geq a_2 > 0 \quad a_0 \leq a_3 < 0)$
2.    >    *non rigate*  $(a_1 \geq a_2 \geq a_3 > 0 \quad a_0 < 0)$
3.    >    *immaginarie*  $(a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_0 \quad > 0)$ .

Cominceremo le nostre ricerche dal caso delle deformate delle quadriche rigate.

Sia  $Q_0$  la quadrica rigata della quale vogliamo studiare le deformazioni: ne scriveremo l'equazione nella forma

$$(12) \quad \frac{x_{10}^2}{a^2} + \frac{x_{20}^2}{b^2} = \frac{x_{30}^2}{c^2} + x_{00}^2.$$

Assumiamo a linee coordinate  $u, v$  sopra  $Q_0$  i due sistemi di generatrici rettilinee della quadrica, ponendo

$$(13) \quad x_{10} = \frac{a(1+uv)}{H} \quad x_{20} = \frac{b(u-v)}{H} \quad x_{30} = \frac{c(1-uv)}{H} \quad x_{00} = \frac{u+v}{H}$$

ove

$$(14) \quad H^2 = a^2(1+uv)^2 + b^2(u-v)^2 + c^2(1-uv)^2 + (u+v)^2.$$

Diremo

$$(15) \quad ds_0^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

la prima forma fondamentale di  $Q_0$  nel sistema di coordinate fissato.

Calcoliamo in primo luogo il valore di  $EG - F^2$  e le coordinate  $\xi_{i,0}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) del pian tangente nel punto  $(u, v)$  a  $Q_0$ , intendendo stabilito che debba risultare

$$\begin{vmatrix} x_{00} & x_{10} & x_{20} & x_{30} \\ \frac{\partial x_{00}}{\partial u} & \frac{\partial x_{10}}{\partial u} & \frac{\partial x_{20}}{\partial u} & \frac{\partial x_{30}}{\partial u} \\ \frac{\partial x_{00}}{\partial v} & \frac{\partial x_{10}}{\partial v} & \frac{\partial x_{20}}{\partial v} & \frac{\partial x_{30}}{\partial v} \\ \xi_{00} & \xi_{10} & \xi_{20} & \xi_{30} \end{vmatrix} = +\sqrt{EG - F^2}.$$

Avremo subito, dalle relazioni

$$S \xi_{i,0}^2 = 1 \quad S \xi_{i,0} x_{i,0} = 0 \quad S \xi_{i,0} \frac{\partial x_{i,0}}{\partial u} = 0 \quad S \xi_{i,0} \frac{\partial x_{i,0}}{\partial v} = 0.$$

che sarà

$$(16) \quad \xi_{00} = \frac{2(u+v)R^2H^{-3}}{\sqrt{EG-F^2}} abc \quad \xi_{10} = -\frac{2(1+uv)R^2H^{-3}}{\sqrt{EG-F^2}} bc$$

$$\xi_{20} = -\frac{2(u-v)R^2H^{-3}}{\sqrt{EG-F^2}} ac \quad \xi_{30} = \frac{2(1-uv)R^2H^{-3}}{\sqrt{EG-F^2}} ab$$

Da queste formole deduciamo

$$\frac{\xi_{00}}{x_{00}} = -\frac{\xi_{10}a^2}{x_{10}} = -\frac{\xi_{20}b^2}{x_{20}} = \frac{\xi_{30}c^2}{x_{30}} = \frac{2R^2H^{-2}}{\sqrt{EG-F^2}} abc$$

onde risulta

$$(17) \quad EG - F^2 = 4 \left( x_{00}^2 + \frac{x_{10}^2}{a^4} + \frac{x_{20}^2}{b^4} + \frac{x_{30}^2}{c^4} \right) R^4 H^{-4} a^2 b^2 c^2.$$

Sostituendo nelle (16) per  $EG - F^2$  il valore dato dalle (17) esse prendono la forma

$$(18) \quad \xi_{00} = \frac{u+v}{H'} abc \quad \xi_{10} = -\frac{1+uv}{H'} bc \quad \xi_{20} = -\frac{u-v}{H'} ac \quad \xi_{30} = \frac{1-uv}{H'} ab^1)$$

<sup>1)</sup> Queste formole si ottengono anche dalle (13) osservando che il luogo dei punti  $(\xi_{i,0})$  è la quadrica

$$a \xi_{10}^2 + b^2 \xi_{20}^2 = c^2 \xi_{30}^2 + \xi_{00}^2.$$

ove

$$(19) \quad H^2 = a^2 b^2 c^2 (u + v)^2 + b^2 c^2 (1 + uv)^2 + a^2 c^2 (u - v)^2 + a^2 b^2 (1 - uv)^2.$$

I coefficienti della seconda forma fondamentale di  $Q_0$  saranno poi dati da

$$D_0 = D''_0 = 0 \quad D'_0 = R \int \frac{\partial^2 x_{1,0}}{\partial u \partial v} \xi_{1,0} = - \frac{4 R^3 H^{-4}}{\sqrt{EF - F^2}} abc$$

onde segue per la curvatura relativa di  $Q_0$

$$k = - \frac{D_0^2}{EG - F^2} = - \frac{1}{R^2} \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \frac{1}{\left(x_{00}^2 + \frac{x_{10}^2}{a^4} + \frac{x_{20}^2}{b^4} + \frac{x_{30}^2}{c^4}\right)^2}.$$

<sup>1)</sup> Si osservi che da questa formola segue che una quadrica rigata sarà a curvatura costante allora e allora soltanto che sia

$$x_{00}^2 + \frac{x_{10}^2}{a^4} + \frac{x_{20}^2}{b^4} + \frac{x_{30}^2}{c^4} = \text{cost.}$$

Ora perchè questo si verifichi dovrà aversi che le equazioni

$$\begin{aligned} x_{00} \frac{\partial x_{00}}{\partial u} + \frac{1}{a^4} x_{10} \frac{\partial x_{10}}{\partial u} + \frac{1}{b^4} x_{20} \frac{\partial x_{20}}{\partial u} + \frac{1}{c^4} x_{30} \frac{\partial x_{30}}{\partial u} &= 0 \\ x_{00} \frac{\partial x_{00}}{\partial v} + \frac{1}{a^4} x_{10} \frac{\partial x_{10}}{\partial v} + \frac{1}{b^4} x_{20} \frac{\partial x_{20}}{\partial v} + \frac{1}{c^4} x_{30} \frac{\partial x_{30}}{\partial v} &= 0 \end{aligned}$$

siano conseguenza rispettivamente delle equazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \int x_{1,0}^2 = x_{00} \frac{\partial x_{00}}{\partial u} + x_{10} \frac{\partial x_{20}}{\partial u} + x_{20} \frac{\partial x_{20}}{\partial u} + x_{30} \frac{\partial x_{30}}{\partial u} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{x_{10}^2}{a^2} + \frac{x_{20}^2}{b^2} - \frac{x_{30}^2}{c^2} - x_{00}^2 \right) = \frac{x_{10}}{a^2} \frac{\partial x_{10}}{\partial u} + \frac{x_{20}}{b^2} \frac{\partial x_{20}}{\partial u} - \frac{x_{30}}{c^2} \frac{\partial x_{30}}{\partial u} - x_{00} \frac{\partial x_{00}}{\partial u} &= 0 \end{aligned}$$

e delle altre

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \int x_{1,0}^2 = x_{00} \frac{\partial x_{00}}{\partial v} + x_{10} \frac{\partial x_{10}}{\partial v} + x_{20} \frac{\partial x_{20}}{\partial v} + x_{30} \frac{\partial x_{30}}{\partial v} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{x_{10}^2}{a^2} + \frac{x_{20}^2}{b^2} - \frac{x_{30}^2}{c^2} - x_{00}^2 \right) = \frac{x_{10}}{a^2} \frac{\partial x_{10}}{\partial v} + \frac{x_{20}}{b^2} \frac{\partial x_{20}}{\partial v} - \frac{x_{30}}{c^2} \frac{\partial x_{30}}{\partial v} - x_{00} \frac{\partial x_{00}}{\partial v} &= 0. \end{aligned}$$

Posto

$$k = -\frac{1}{\rho^2}$$

otteniamo dunque

$$\rho = R abc \left( x_{00}^2 + \frac{x_{10}^2}{a^4} + \frac{x_{20}^2}{b^4} + \frac{x_{30}^2}{c^4} \right)$$

Calcoliamo infine i valori dei simboli di CHRISTOFFEL relativi al  $ds_0^2$  di  $Q_0$ . Essendo  $Q_0$  riferita alle sue asintotiche otteniamo subito

$$(23) \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v} \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u};$$

poichè inoltre le linee coordinate sono anche linee geodetiche sarà

$$(24) \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0.$$

Dopo ciò abbiamo

$$\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log E}{\partial u} \quad \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial v}$$

e siccome dalle (13) calcolando si trova

$$E = R^2 \frac{v^4 (a^2 + c^2) (1 + b^2) + 2v^2 \{ (b^2 + c^2) (1 + a^2) + (1 - c^2) (b^2 - a^2) \} + (a^2 + c^2) (1 + b^2)}{H^4}$$

$$G = R^2 \frac{u^2 v^2 (a^2 + c^2) (1 + b^2) + (u^2 + v^2) (c^2 - a^2) (1 + b^2) - 4uv (b^2 + a^2 c^2) + (a^2 + c^2) (1 + b^2)}{H^4}$$

$$J = R^2 \frac{u^4 (a^2 + c^2) (1 + b^2) + 2u^2 \{ (b^2 + c^2) (1 + a^2) + (1 - c^2) (b^2 - a^2) \} + (a^2 + c^2) (1 + b^2)}{H^4}$$

Per ciò è necessario e sufficiente che sia

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a^4} & \frac{1}{b^4} & \frac{1}{c^4} \\ 1 & -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$a^2 = b^2 \quad c^2 = 1.$$

Possiamo dunque concludere che le uniche quadriche rigate a curvatura nulla sono le quadriche di CLIFFORD

$$x_{00}^2 + x_{30}^2 = \frac{x_{10}^2 + x_{20}^2}{a^2}$$

per le quali

$$k = -\frac{1}{R^2}.$$

abbiamo infine

$$(25) \quad \begin{cases} 11 \\ 1 \end{cases} = -\frac{\partial \log H^2}{\partial u} \quad \begin{cases} 22 \\ 2 \end{cases} = -\frac{\partial \log H^2}{\partial v}.$$

Consideriamo ora una seconda quadrica rigata  $Q'$  di equazione

$$(26) \quad \frac{x'_{10}{}^2}{a'^2} + \frac{x'_{20}{}^2}{b'^2} = \frac{x'_{30}{}^2}{c'^2} + x'_{00}{}^2;$$

avremo allora pei due sistemi di rette di  $Q'$  le equazioni

$$(27) \quad \begin{cases} x'_{10} = \pm \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta x'_{30} + a' \cos \theta x'_{00} \\ x'_{20} = \mp \frac{b'}{c'} \cos \theta x'_{30} + b' \operatorname{sen} \theta x'_{00} \end{cases}$$

dove il doppio segno distingue i due sistemi e  $\theta$  indica il parametro che fissa le singole generatrici dell'uno o dell'altro sistema della quadrica. Sia  $C$  la conica sezione della quadrica rigata  $Q'$  col piano tangente a  $Q_0$  nel punto generico  $(x_{i0})$ . Le coordinate di un punto qualunque  $(x'_{i0})$  di  $C$  saranno date dalle formole

$$(28) \quad x'_{i0} = px_{i0} + l \frac{\partial x_{i0}}{\partial u} + m \frac{\partial x_{i0}}{\partial v} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

quando per  $p, l, m$  si assumano convenienti funzioni di  $u, v$  e di un parametro arbitrario che fissi i punti della conica  $C$ . Per tal parametro assumeremo il parametro  $\theta$  che fissa le singole generatrici di uno dei sistemi della quadrica  $Q'$ .

Sostituiamo allora nelle (27) i loro valori tratti dalle (28). Otterremo così per  $p, l, m$  tre equazioni lineari omogenee, che ci danno

$$p : l : m :: W : U : V$$

ove le funzioni  $W, U, V$  hanno precisamente le forme seguenti

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} W = (u+v) \left\{ \mp \operatorname{sen} \theta \frac{bc}{b'c'} - \frac{ab}{a'b'} \right\} + (u-v) \left\{ \frac{a}{a'} \operatorname{sen} \theta \pm \frac{c}{c'} \right\} + \\ \quad + 2 \cos \theta \frac{b}{b'} + U \frac{1}{2} \frac{\partial \log H^2}{\partial u} + V \frac{1}{2} \frac{\partial \log H^2}{\partial v} \\ U = \left( \pm \frac{ac}{a'c'} - \frac{b}{b'} \right) 2u \cos \theta + \left( \pm \frac{bc}{b'c'} - \frac{a}{a'} \right) (u^2 - 1) \operatorname{sen} \theta + \\ \quad + \left( \frac{ab}{a'b'} \mp \frac{c}{c'} \right) (u^2 + 1) \\ V = \left( \mp \frac{ac}{a'c'} - \frac{b}{b'} \right) 2v \cos \theta + \left( \pm \frac{bc}{b'c'} + \frac{a}{a'} \right) (v^2 - 1) \operatorname{sen} \theta + \\ \quad + \left( \frac{ab}{a'b'} \pm \frac{c}{c'} \right) (v^2 + 1) . \end{array} \right.$$

Poniamo allora

$$(30) \quad p = \frac{W}{M} \quad l = \frac{U}{M} \quad m = \frac{V}{M} ;$$

sostituendo nelle formole (28) a  $p, l, m$  questi valori e alle  $x_{i0}$ ,  $\frac{\partial x_{i0}}{\partial u}, \frac{\partial x_{i0}}{\partial v}$  i loro valori effettivi otteniamo:

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} x'_{10} = \frac{2a}{MH} \left\{ (1-uv) \cos \theta \frac{b}{b'} \mp \frac{bc}{b'c'} \operatorname{sen} \theta (u+v) \pm \frac{c}{c'} (u-v) \right\} \\ x'_{20} = \frac{2b}{MH} \left\{ \frac{ac}{a'c'} \cos \theta (u+v) \pm \frac{a}{a'} \operatorname{sen} \theta (1-uv) - \frac{c}{c'} (1+uv) \right\} \\ x'_{30} = \frac{2c}{MH} \left\{ \frac{b}{b'} \cos \theta (1+uv) - \frac{ab}{a'b'} (u+v) + \frac{a}{a'} \operatorname{sen} \theta (u-v) \right\} \\ x'_{00} = \frac{2}{MH} \left\{ \pm \frac{ac}{a'c'} \cos \theta (u-v) \mp \frac{bc}{b'c'} \operatorname{sen} \theta (1+uv) + \frac{ab}{a'b'} (1-uv) \right\} . \end{array} \right.$$

Queste formole ci saranno utili in seguito; intanto da esse, quadrando e sommando, si può immediatamente ricavare il valore di  $M^2$ , con che i valori di  $p, l, m$  risultano perfettamente determinati (a meno di un cambiamento simultaneo di segno).



Si osservi poi che in tutte le formole scritte il passaggio dai segni superiori agli inferiori equivale a scambiare  $u$  in  $v$ , cambiando al tempo stesso  $\theta$  in  $-\theta$ .

Supponiamo ora in particolare che  $Q'$  sia una quadrica rigata  $Q_k$  confocale a  $Q_0$ , di equazione

$$(32) \quad \frac{x_{10}^2}{a^2+k} + \frac{x_{20}^2}{b^2+k} = \frac{x_{30}^2}{c^2-k} + \frac{x_{00}^2}{1-k}.$$

Supporremo, ciò che non limita la generalità, potendo sempre ridurci a questo caso con un cambiamento di notazioni, supporremo

$$a^2 \geq b^2 \quad c^2 \leq 1:$$

vuol dire che affinché l'equazione precedente dia proprio una quadrica rigata confocale a  $Q_0$  dovrà essere, e basterà che sia,

$$-b^2 \leq k \leq c^2.$$

Le formole (29) (30) (31) si applicano subito al nostro caso, pur di porre

$$(33) \quad a' = \sqrt{\frac{a^2+k}{1-k}} \quad b' = \sqrt{\frac{b^2+k}{1-k}} \quad c' = \sqrt{\frac{c^2-k}{1-k}}.$$

Avvertiamo subito che escluderemo dalle considerazioni che andiamo a fare il valore  $k=0$ , pel quale la quadrica  $Q_k$  viene a coincidere con  $Q_0$  ma non escluderemo i valori estremi  $k=-b^2, k=c^2$ , pei quali  $Q_k$  si riduce rispettivamente alla regione del piano  $x_{20}=0$ , o del piano  $x_{30}=0$ , esterna alla rispettiva conica focale, contata due volte.

### § 3.

#### **Descrizione del metodo per la ricerca delle trasformazioni.**

Sia (S) una deformata qualunque di una quadrica  $Q_0$ . Se  $Q_0$  non è una quadrica di CLIFFORD le varie applicabilità di (S) su  $Q_0$  non differiranno tra loro altro che per un movimento della quadrica in sè: se invece  $Q_0$  è una quadrica di CLIFFORD ciò non è più vero, conformemente al fatto che in tal caso la quadrica fon-

damentale possiede delle applicabilità in sè che non corrispondono a movimenti rigidi dello spazio ambiente.

Nelle ricerche che andiamo a fare intenderemo che l'applicabilità di (S) su  $Q_0$  sia fissata una volta per tutte. Le ricerche stesse dimostreranno che il cambiare l'applicabilità fissata in un'altra che non ne differisca altro che per un movimento di  $Q_0$  in sè non porta alterazione nei nostri risultati, in modo che per le quadriche diverse dalle quadriche di CLIFFORD sarà in fondo inutile la convenzione ora fatta. Per le quadriche di CLIFFORD invece vedremo (V. § 19) che, conformemente a quanto abbiamo avvertito nell'*Introduzione* essa è essenziale.

Ciò premesso, descriviamo brevemente il metodo che terremo nella ricerca delle nostre trasformazioni. Noi supporremo dapprima che la quadrica fondamentale  $Q_0$  sia *rigata*, e sceglieremo arbitrariamente nel sistema confocale un'altra quadrica omofocale rigata  $Q_k$ . Consideriamo allora le  $\infty^2$  coniche C sezioni dei piani tangenti a  $Q_0$  colla quadrica confocale  $Q_k$ , e gli  $\infty^2$  coni K circoscritti dai punti di  $Q_0$  a  $Q_k$ . Quando  $Q_0$ , deformandosi, si applica sulla (S), le coniche C e i coni K, trascinati dai piani tangenti di (S), daranno un sistema di  $\infty^2$  coniche giacenti ognuna in un piano tangente ad (S) ed un sistema di  $\infty^2$  coni aventi i vertici nei punti di (S). Diciamo F il punto di contatto con (S) del piano della conica C, cioè il vertice del corrispondente cono K. Se, come abbiamo enunciato nell'*Introduzione*, esisteranno trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche dello spazio ellittico che godano di proprietà del tutto analoghe a quelle delle trasformazioni  $B_k$  nello spazio ordinario, dovrà esser possibile, (e ciò in  $\infty^1$  modi in generale) di scegliere su ciascuna conica C un punto  $F'$  in modo che la superficie (S') luogo degli  $\infty^2$  punti  $F'$  goda, tra l'altre, delle proprietà seguenti:

a) *Le due superficie (S) (S') siano le due falde focali di una congruenza W, generata dalle rette  $\overline{FF'}$  che congiungono i punti corrispondenti F, F'.*

b) *La superficie (S') sia applicabile su (S) e quindi sulla quadrica  $Q_0$ .*

*c) Il piano tangente ad (S') nel punto F' sia il piano  $\pi'$  tangente a K, che passa per la generatrice (dell'uno o dell'altro sistema) di  $Q_k$  per F'.*

Ognuna delle condizioni *a) b) c)* è sufficiente a determinare le nostre trasformazioni: noi cercheremo ora di soddisfare la condizione *c)* e verificheremo poi che le altre condizioni vengono soddisfatte di conseguenza.

Per giungere al nostro scopo procederemo nel modo seguente. Riferiamo la superficie (S) alle linee  $(u, v)$  che nell'applicabilità di (S) sopra  $Q_0$  si distendono sulle rette di  $Q_0$ , e diciamo  $x_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) le coordinate di un punto qualunque F di (S). Le coordinate  $x'_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) di un punto qualunque F' della conica C, situata nel piano tangente in F ad (S) saranno date dalle solite formole

$$(34) \quad x' = px + l \frac{\partial x}{\partial u} + m \frac{\partial x}{\partial v}$$

ove  $p, l, m$  hanno i valori (30) § 2. Le funzioni  $p, l, m$  contengono le variabili  $u, v$  e inoltre il parametro  $\theta$ . Noi dovremo considerare  $\theta$  come una funzione incognita  $\theta(u, v)$  che si tratterà di determinare in modo da soddisfare le condizioni *c)*.

Naturalmente avremo due specie distinte di trasformazioni in corrispondenza ai due sistemi di rette  $Q_k$ : ma siccome nelle formole relative si passa dall'un caso all'altro cambiando in tutte  $u$  in  $v$ ,  $\theta$  in  $-\theta$ , potremo limitarci nei calcoli di verifica al caso che il piano  $\pi'$  per F' passi per la generatrice di  $Q_k$  del primo sistema per F'. Osserviamo però che lo scambio di  $u$  in  $v$  nelle formole (13) ha per effetto di cambiare il segno di  $x_{20}$ , quindi nel secondo caso la legge di applicabilità si otterrà combinando con una simmetria rispetto al piano  $x_{20}=0$  la legge d'applicabilità che vale per le trasformazioni di 1.<sup>a</sup> specie.

#### § 4.

#### Le equazioni differenziali per $\theta(u, v)$ .

Cominciamo dal cercare delle formole che ci diano le coordinate  $\xi'_i$  ( $i=0,1,2,3$ ) di uno qualunque dei piani tangenti al cono

K relativo al punto  $F(u, v)$  in una qualunque deformazione (S) di  $Q_0$ .

Essendo ognuno di tali piani invariabilmente unito al triedro principale della (S) nel punto F, e i coseni di direzione in F delle tre rette che formano questo triedro essendo dati rispettivamente da  $\frac{R}{\sqrt{E}} \frac{\partial x_i}{\partial u}$ ,  $\frac{R}{\sqrt{G}} \frac{\partial x_i}{\partial v}$ ,  $\xi_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), potremmo ottenere le formole volute ponendo col solito metodo

$$\xi'_i = \pi^* \xi_i + \lambda^* \frac{\partial x_i}{\partial u} + \mu^* \frac{\partial x_i}{\partial v} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

ove  $\pi^*, \lambda^*, \mu^*$  sono funzioni di  $u, v$  che restano le stesse in ogni deformazione (S) di  $Q_0$ , e quindi si possono calcolare supponendo  $Q_0$  coincidente con (S).

Ma nel caso presente possiamo procedere più speditamente nel modo seguente. Poniamo

$$(35) \quad \xi'_i = \pi \xi_i + \lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial u} + \mu \frac{\partial \xi_i}{\partial v} .$$

Le funzioni  $\pi, \lambda, \mu$  non saranno ora più indipendenti dalla deformazione di  $Q_0$ , però, il piano ( $\xi'_i$ ) dovendo risultare invariabilmente unito al triedro principale di (S) in F, risulteranno indipendenti dalla deformazione di (S) le espressioni

$$S \frac{R}{\sqrt{E}} \frac{\partial x_i}{\partial u} \xi'_i, \quad S \frac{R}{\sqrt{G}} \frac{\partial x_i}{\partial v} \xi'_i, \quad S \xi_i \xi'_i$$

che danno i coseni degli angoli che il piano ( $\xi'_i$ ) forma coi piani normali in F alle tangenti alle linee coordinate e col piano tangente in F ad (S). Sarà dunque, indicando con  $\pi_0, \lambda_0, \mu_0$  i valori di  $\pi, \lambda, \mu$  quando (S) si riduce a  $Q_0$ ,

$$(36) \quad \begin{cases} \pi = \pi_0 \\ -S \frac{\partial x_i}{\partial u} \xi'_i = \lambda D + \mu D' = \mu_0 D'_0 \\ -S \frac{\partial x_i}{\partial v} \xi'_i = \lambda D' + \mu D'' = \lambda_0 D'_0 . \end{cases} .$$

Supponiamo allora che assumendo per  $\theta$  nelle (34) una conveniente funzione di  $u, v, \theta(u, v)$ , la superficie (S') luogo dei punti  $F'$  abbia per piano tangente in ogni suo punto  $F'$  il piano  $\pi'$  le cui coordinate sono date dalle (35), ove in  $\pi, \lambda, \mu$  [che evidentemente risultano funzioni di  $u, v, \theta$  indipendenti da  $D, D', D''$ ] per  $\theta$  si sostituisca la stessa funzione  $\theta(u, v)$ . Per ciò sarà necessario e sufficiente che sia

$$(37) \quad S \frac{\partial x'_i}{\partial u} \xi'_i = 0 \quad , \quad S \frac{\partial x'_i}{\partial v} \xi'_i = 0:$$

ponendo per  $\frac{\partial x'}{\partial u}, \frac{\partial x'}{\partial v}$  le loro espressioni (6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= A x + L \frac{\partial x}{\partial u} + M \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{(Dl + D'm)}{R} \xi \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= B x + P \frac{\partial x}{\partial u} + Q \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{(D'l + D''m)}{R} \xi \end{aligned}$$

e per le  $\xi'$  le loro espressioni (35), otteniamo subito

$$(38) \quad \begin{cases} -(Dl + D'm) \pi + L (\lambda D + \mu D') + M (\lambda D' + \mu D'') = 0 \\ -(D'l + D''m) \pi + P (\lambda D + \mu D') + Q (\lambda D' + \mu D'') = 0 \end{cases}$$

cioè per le (36)

$$(39) \quad \begin{cases} \pi_0 (Dl + D'm) = (L \nu_0 + M \lambda_0) D'_0 \\ \pi_0 (D'l + D''m) = (P \nu_0 + Q \lambda_0) D'_0. \end{cases}$$

Ora le (37) sono certamente verificate quando (S) è identica a  $Q_0$  assumendo  $\theta = \text{cost.}$  Quindi sussisteranno certamente le formole cui si riducono le (39) in queste ipotesi, cioè indicando con  $L_0, M_0, P_0, Q_0$  i valori di  $L, M, P, Q$  nell'ipotesi  $\theta = \text{cost.}$

$$(40) \quad \begin{cases} \pi_0 D'_0 m = (L_0 \nu_0 + M_0 \lambda_0) D'_0 \\ \pi_0 D'_0 l = (P_0 \nu_0 + Q_0 \lambda_0) D'_0. \end{cases}$$

Dopo ciò le (39), tenendo conto delle relazioni

$$L = L_0 + \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad M = M_0 + \frac{\partial m}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u}, \quad P = P_0 + \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v}, \quad Q = Q_0 + \frac{\partial m}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

possono scriversi

$$\pi_0 \{ D'l + (D' - D'_0) m \} = \frac{\partial \theta}{\partial u} \left( \frac{\partial l}{\partial \theta} \mu_0 + \frac{\partial m}{\partial \theta} \lambda_0 \right) D'_0$$

$$\pi_0 \{ (D' - D'_0) l + D''m \} = \frac{\partial \theta}{\partial v} \left( \frac{\partial l}{\partial \theta} \mu_0 + \frac{\partial m}{\partial \theta} \lambda_0 \right) D'_0$$

ovvero

$$(41) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial u} &= \frac{\pi_0}{D'_0 \left\{ \frac{\partial l}{\partial \theta} \mu_0 + \frac{\partial m}{\partial \theta} \lambda_0 \right\}} \{ D'l + (D' - D'_0) m \} \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \frac{\pi_0}{D'_0 \left\{ \frac{\partial l}{\partial \theta} \mu_0 + \frac{\partial m}{\partial \theta} \lambda_0 \right\}} \{ (D' - D'_0) l + D''m \}. \end{aligned} \right.$$

Con ciò abbiamo già ottenuto l'equazioni cercate. Trasformiamole ora tenendo conto dei valori effettivi di  $\pi_0, \lambda_0, \mu_0$ . Cominciamo dall'osservare che il luogo dei piani tangenti al cono  $K$  relativo ad  $F$ , quando  $(S)$  coincide con  $L_0$ , è la conica sezione della quadrica  $Q_k^{(p)}$ , polare di  $Q_k$ , col piano tangente alla quadrica  $Q_0^{(p)}$ , polare di  $Q_0$ , nel polo del piano  $\pi$  tangente in  $F$  a  $Q_0$ . Quindi per ottenere i valori di  $\pi_0, \lambda_0, \mu_0$  nelle formole

$$\xi'_{i0} = \pi_0 \xi_{i0} + \lambda_0 \frac{\partial \xi_{i0}}{\partial u} + \mu_0 \frac{\partial \xi_{i0}}{\partial v} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

basterà che applichiamo le formole (30) ponendo in esse per  $a, b, c, a', b', c'$ , i coefficienti delle equazioni delle quadriche  $Q_0^{(p)}, Q_k^{(p)}$ , che evidentemente, se riserbiamo le lettere  $a, b, c, a', b', c'$  per indicare i coefficienti delle equazioni di  $Q_0, Q_k$ , sono dati da

$$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{b} \quad \frac{1}{c} \quad \frac{1}{a'} \quad \frac{1}{b'} \quad \frac{1}{c'}$$

Da ciò deduciamo subito, tenendo presenti le (29<sub>2</sub>) (29<sub>3</sub>)

$$\begin{aligned} \lambda_0 : \mu_0 &= \left( \pm \frac{a'e'}{ac} - \frac{b'}{b} \right) 2u \cos \theta + \left( \pm \frac{b'e'}{bc} - \frac{a'}{a} \right) (u^2 - 1) \sin \theta + \left( \frac{a'b'}{ab} \mp \frac{c'}{c} \right) (u^2 + 1) : \\ \mp \frac{a'e'}{ac} - \frac{b'}{b} & \left( \pm \frac{b'e'}{bc} + \frac{a'}{a} \right) (v^2 - 1) \sin \theta + \left( \frac{a'b'}{ab} \pm \frac{c'}{c} \right) (v^2 + 1) = \mp \frac{a'b'c'}{abc} U : \pm \frac{a'b'c'}{abc} V \end{aligned}$$

e quindi

$$(42) \quad \lambda_0 : \mu_0 = l : -m.$$

Questa relazione ci conduce facilmente al nostro scopo. Infatti per la (40)<sub>1</sub> abbiamo

$$\frac{\pi_0}{\frac{\partial l}{\partial \theta} \mu_0 + \frac{\partial m}{\partial \theta} \lambda_0} = \frac{1}{m} \frac{L_0 \mu_0 + M_0 \lambda_0}{\frac{\partial l}{\partial \theta} \mu_0 + \frac{\partial m}{\partial \theta} \lambda_0}$$

quindi sarà anche

$$\frac{\pi_0}{\frac{\partial l}{\partial \theta} \mu_0 + \frac{\partial m}{\partial \theta} \lambda_0} = \frac{1}{m} \frac{l M_0 - m L_0}{l \frac{\partial m}{\partial \theta} - m \frac{\partial l}{\partial \theta}}.$$

Indichiamo ora con

$$\bar{L}_0 \quad \bar{M}_0 \quad \bar{P}_0 \quad \bar{Q}_0,$$

ciò che divengono

$$L_0 \quad M_0 \quad P_0 \quad Q_0$$

quando nelle loro espressioni a  $p, l, m$  si sostituisca rispettivamente  $W = pM, U = lM, V = mM$ .

Per l'osservazione finale del § 1 avremo evidentemente

$$\frac{1}{m} \frac{l M_0 - m L_0}{l \frac{\partial m}{\partial \theta} - m \frac{\partial l}{\partial \theta}} = - \frac{1}{V} \frac{U \bar{M}_0 - V \bar{L}_0}{V \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial V}{\partial \theta}} M$$

e dalle (40), tenendo conto della (42), dedurremo subito, dividendole a membro a membro

$$(43) \quad \frac{V}{U} = \frac{U \bar{M}_0 - V \bar{L}_0}{U \bar{Q}_0 - V \bar{P}_0}.$$

Teniamo ora conto delle espressioni effettive di  $\bar{L}_0 \quad \bar{M}_0 \quad \bar{P}_0 \quad \bar{Q}_0$  che pei valori attuali dei simboli di CHRISTOFFEL sono date da

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{L}_0 = W + \frac{\partial U}{\partial u} - \frac{\partial \log H^2}{\partial u} U + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v} V \quad \bar{M}_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u} V \\ \bar{P}_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v} U \quad \bar{Q}_0 = W + \frac{\partial V}{\partial v} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u} U - \frac{\partial \log H^2}{\partial v} V. \end{array} \right.$$

Sostituendo queste espressioni nella (43), questa si riduce all'identità

$$(45) \quad 2W + U' + V' - U \frac{\partial \log H^2}{\partial u} - V \frac{\partial \log H^2}{\partial v} = 0$$

che si può anche verificare direttamente sulle (29).

In conseguenza delle (44) avremo inoltre evidentemente

$$-\frac{1}{V} \frac{U \bar{M}_0 - V \bar{L}_0}{V \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial V}{\partial \theta}} = \frac{U' - U \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u} + \frac{\partial \log H^2}{\partial u} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v} V + W}{V \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial V}{\partial \theta}}.$$

Ora

$$abc\rho = \frac{R}{H^2} \left\{ (u+v)^2 a^2 b^2 c^2 + (1+uv)^2 b^2 c^2 + (u-v)^2 a^2 c^2 + (1-uv)^2 a^2 b^2 \right\}$$

$$\frac{abc}{2} \frac{\partial \rho}{\partial u} = \frac{R}{H^2} \left\{ (u+v) a^2 b^2 c^2 + v(1+uv) b^2 c^2 + (u-v) a^2 c^2 - v(1-uv) a^2 b^2 \right\} - \frac{1}{2} \frac{abc}{H^2} \frac{\partial H^2}{\partial u} \rho$$

$$\frac{abc}{2} \frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{R}{H^2} \left\{ (u+v) a^2 b^2 c^2 + u(1+uv) b^2 c^2 - (u-v) a^2 c^2 - u(1-uv) a^2 b^2 \right\} - \frac{1}{2} \frac{abc}{H^2} \frac{\partial H^2}{\partial v} \rho.$$

quindi, tenendo conto dell'identità (45) otteniamo

$$-\frac{1}{V} \frac{U \bar{M}_0 - V \bar{L}_0}{V \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial V}{\partial \theta}} = \frac{N}{V \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial V}{\partial \theta}} \frac{R}{H^2 \rho abc}$$

ove

$$N = \frac{U' - V'}{2} \left[ (u+v)^2 a^2 b^2 c^2 + (1+uv)^2 b^2 c^2 + (u-v)^2 a^2 c^2 + (1-uv)^2 a^2 b^2 \right] - \\ - U \left[ (u+v) a^2 b^2 c^2 + (1+uv) v b^2 c^2 + (u-v) a^2 c^2 - (1-uv) v a^2 b^2 \right] + \\ + V \left[ (u+v) a^2 b^2 c^2 + (1+uv) u b^2 c^2 - (u-v) a^2 c^2 - (1-uv) u a^2 b^2 \right].$$

Calcolando il valore di quest'espressione mediante le formole (29) e tenendo conto che  $Q_k$  è confocale a  $Q_0$ , cioè che si ha

$$a'^2 = \frac{a^2 + k}{1 - k} \quad b'^2 = \frac{b^2 + k}{1 - k} \quad c'^2 = \frac{c^2 - k}{1 - k} \quad 1)$$

1) Si noti che in tutto il ragionamento precedente non è inclusa la ipotesi che la quadrica  $Q_k$  sia confocale a  $Q_0$ .



si verifica facilmente l'identità

$$N = \mp \frac{abc a' b' c'}{h} \left( V \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)$$

ove

$$h = \frac{k}{1 - k}.$$

Dopo ciò abbiamo evidentemente

$$-\frac{1}{V} \frac{U \bar{M}_0 - V \bar{L}_0}{V \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial V}{\partial \theta}} = \mp \frac{R a' b' c'}{h H^2 \rho} M$$

e quindi, tenendo conto del valore effettivo (20) di  $D'_0$ :

$$\frac{1}{D'_0} \frac{\pi}{\frac{\partial l}{\partial \theta} \nu_0 + \frac{\partial m}{\partial \theta} \lambda_0} = \pm \frac{a' b' c'}{2 h \sqrt{abc} R \rho} M.$$

Possiamo dunque scrivere le (41) nella semplice

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \pm \frac{a' b' c'}{2 h \sqrt{abc} R \rho} \{DU + (D' - D'_0) V\} \\ \frac{\partial \theta}{\partial v} = \pm \frac{a' b' c'}{2 h \sqrt{abc} R \rho} \{(D' - D'_0) U + D'' V\}. \end{cases}$$

del tutto analoga a quella delle equazioni corrispondenti nello spazio ordinario.

Queste sono le equazioni alle quali deve soddisfare la  $\theta(u, v)$  affinchè, introdotta nelle funzioni  $\pi, \lambda, \nu$ , le formole (35) ci diano l'involuppo aderente alla superficie ( $S'$ ) definita dalle (34) ove in  $p, l, m$ , si sia introdotta la stessa funzione  $\theta(u, v)$ .

Le (I), come si può facilmente dimostrare con un calcolo del tutto analogo a quello che vale a dimostrare l'illimitata integrabilità del sistema corrispondente nello spazio ordinario (V. (M) § 40) formano un sistema illimitatamente integrabile. Noi non stiamo a sviluppare tale calcolo perchè l'illimitata integrabilità del sistema (I) per le quadriche diverse dalle quadriche di CLIFFORD seguirà im-

mediatamente dalle proprietà della *trasformazione* H (V. § 9): quanto alle quadriche di CLIFFORD, ciò seguirà dal fatto che nel seguito del presente lavoro dimostreremo direttamente (V. § 19) che ogni superficie a curvatura nulla, fissata la quadrica di CLIFFORD sulla quale si considera applicabile, e l'applicabilità della superficie stessa sulla quadrica a meno di un movimento della quadrica in sè, possiede  $\infty^2$  trasformazioni della specie considerata.

Ammissa dunque dimostrata l'illimitata integrabilità del sistema (I), possiamo affermare che da una deformata (S) qualunque di una quadrica rigata  $Q_0$ , corrispondentemente ad ogni sua applicabilità sopra  $Q_0$ , si hanno  $\infty^2$  superficie derivate (S') che godono della proprietà voluta. Siccome poi un movimento rigido dello spazio ambiente che trasforma  $Q_0$  in sè, trasforma pure in sè ognuna delle quadriche confocali risulta intanto evidente che le classi di superficie derivate corrispondenti a due diverse applicabilità di (S) su  $Q_0$  sono certamente coincidenti se si può passare dall'una all'altra delle applicabilità assegnate con un movimento di  $Q_0$  in sè.

Noi diremo che ognuna delle superficie (S') derivata da (S) corrispondentemente alla quadrica  $Q_k$ , è derivata da (S) per una *trasformazione*  $B_k$  e dimostreremo nei §§ seguenti che la trasformazione così definita gode di proprietà del tutto analoghe a quelle della trasformazione  $B_k$  nello spazio ordinario.

Inoltre diremo *congruenza*  $B_k$  la congruenza formata dalle rette che uniscono i punti corrispondenti di (S) (S').

## § 5.

### **Calcolo dell'elemento lineare delle superficie trasformate (S').**

Ci proponiamo ora di dimostrare che ognuna delle superficie (S') derivate da (S) per una  $B_k$  è effettivamente applicabile su  $Q_0$ , e la legge di applicabilità è data dall'affinità d'IVORY tra le quadriche  $Q_0, Q_k$ . Come abbiamo già avvertito, in questa verifica sarà inutile che conserviamo i doppi segni che compariscono per ora

nelle nostre formole, ma potremo limitarci al caso dei segni superiori.

Calcoliamo in primo luogo l'elemento lineare  $ds^2$  di una superficie (S') in coordinate  $u, v$ :

$$ds^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2.$$

Colle solite notazioni, le coordinate del punto generico  $F' \equiv (x', )$  di (S') saranno date dalle formole

$$x'_i = px + l \frac{\partial x}{\partial u} + m \frac{\partial x}{\partial v}.$$

ove in  $p, l, m$  s'immagini sostituita una conveniente soluzione  $\theta(u, v)$  del sistema (I).

Avremo quindi, secondo le formole del § 1

$$(46) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= A_0 x + L_0 \frac{\partial x}{\partial u} + M_0 \frac{\partial x}{\partial v} + D'_0 m \frac{\xi}{R} + \left[ \frac{\partial p}{\partial \theta} x + \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial v} \right] \frac{\partial \theta}{\partial u} + \\ &\quad + [Dl + (D' - D'_0)m] \frac{\xi}{R} \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= B_0 x + P_0 \frac{\partial x}{\partial u} + Q_0 \frac{\partial x}{\partial v} + D'_0 l \frac{\xi}{R} + \left[ \frac{\partial p}{\partial \theta} x + \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial v} \right] \frac{\partial \theta}{\partial v} + \\ &\quad + [(D'_0 - D'_0)l + D''m] \frac{\xi}{R}. \end{aligned} \right.$$

Avremo dunque

$$\begin{aligned} E' &= R^2 A_0^2 + E L_0^2 + 2 F L_0 M_0 + G M_0^2 + D^2 m^2 + \\ &\quad + 2 \frac{\partial \theta}{\partial u} \left[ R^2 A_0 \frac{\partial p}{\partial \theta} + (E L_0 + F M_0) \frac{\partial l}{\partial \theta} + (F L_0 + G M_0) \frac{\partial m}{\partial \theta} \right] + \\ &\quad + \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 \left[ R^2 \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + E \left( \frac{\partial l}{\partial \theta} \right)^2 + 2 F \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial m}{\partial \theta} + G \left( \frac{\partial m}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ &\quad + 2 D'_0 m \left[ Dl + (D' - D'_0)m \right] + \left[ Dl + (D' - D'_0)m \right]^2 : \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F' = & R^2 A_0 B_0 + E L_0 P_0 + F (L_0 Q_0 + M_0 P_0) + G M_0 Q_0 + D' l m \quad + \\
 & + \frac{\partial \theta}{\partial v} \left[ R^2 A_0 \frac{\partial p}{\partial \theta} + (E L_0 + F M_0) \frac{\partial l}{\partial \theta} + (F L_0 + G M_0) \frac{\partial m}{\partial \theta} \right] \quad + \\
 & + \frac{\partial \theta}{\partial u} \left[ R^2 B_0 \frac{\partial p}{\partial \theta} + (E P_0 + F Q_0) \frac{\partial l}{\partial \theta} + (F P_0 + G Q_0) \frac{\partial m}{\partial \theta} \right] \quad + \\
 & + \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} \left[ R^2 \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + E \left( \frac{\partial l}{\partial \theta} \right)^2 + 2 F \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial m}{\partial \theta} + G \left( \frac{\partial m}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad + \\
 & + D'_0 m [(D' - D'_0) l + D'' m] + D'_0 l [D l + (D' - D'_0) m] \quad + \\
 & + [D l + (D' - D'_0) m] [(D' - D'_0) l + D'' m]:
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G' = & R^2 B_0^2 + E P_0^2 + 2 F P_0 Q_0 + G Q_0^2 + D'^2 l^2 + \\
 & + 2 \frac{\partial \theta}{\partial v} \left[ R^2 B_0 \frac{\partial p}{\partial \theta} + (E P_0 + F Q_0) \frac{\partial l}{\partial \theta} + (F P_0 + G Q_0) \frac{\partial m}{\partial \theta} \right] \quad + \\
 & + \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 \left[ R^2 \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + E \left( \frac{\partial l}{\partial \theta} \right)^2 + 2 F \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial m}{\partial \theta} + G \left( \frac{\partial m}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad + \\
 & + 2 D'_0 l [(D' - D'_0) l + D'' m] + [(D' - D'_0) l + D'' m]^2.
 \end{aligned}$$

Per semplificare i calcoli prendiamo a considerare il caso che la superficie (S) si riduca alla quadrica  $Q_0$ , nel qual caso la superficie (S') si restringe ad una generatrice ( $\theta$ ) di  $Q_k$ . Avremo allora, colle solite notazioni

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\partial x'_{i0}}{\partial u} = A_0 x_{i0} + L_0 \frac{\partial x_{i0}}{\partial u} + M_0 \frac{\partial x_{i0}}{\partial v} + D'_0 m \xi_{i0} \\ \frac{\partial x'_{i0}}{\partial v} = B_0 x_{i0} + P_0 \frac{\partial x_{i0}}{\partial u} + Q_0 \frac{\partial x_{i0}}{\partial v} + D'_0 l \xi_{i0} \\ \frac{\partial x'_{i0}}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} x_{i0} + \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial x_{i0}}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial \theta} \frac{\partial x_{i0}}{\partial v}. \end{cases}$$

Quindi, posto

$$(48) \quad E'_0 = R^2 S \left( \frac{\partial x'_{i0}}{\partial u} \right)^2 \quad F'_0 = R^2 S \frac{\partial x'_{i0}}{\partial u} \frac{\partial x'_{i0}}{\partial v} \quad G'_0 = R^2 S \left( \frac{\partial x'_{i0}}{\partial v} \right)^2$$

avremo

$$(49) \quad \begin{cases} E'_0 = R^2 A_0^2 + EL_0^2 + 2 FL_0 M_0 + GM_0^2 + D_0^2 m^2 \\ F'_0 = R^2 A_0 B + EL_0 P_0 + F(L_0 Q_0 + M_0 P_0) + GM_0^2 + D_0^2 l m \\ G'_0 = R^2 B_0^2 + EP_0^2 + 2 FP_0 Q_0 + GQ_0^2 + D_0^2 l^2. \end{cases}$$

Quindi sarà infine

$$(50) \quad \begin{cases} E' = E'_0 + 2 \frac{\partial \theta}{\partial u} \left[ R^2 A_0 \frac{\partial p}{\partial \theta} + (EL_0 + FM_0) \frac{\partial l}{\partial \theta} + (FL_0 + GM_0) \frac{\partial m}{\partial \theta} \right] + \\ \quad + \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 \left[ R^2 \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + E \left( \frac{\partial l}{\partial \theta} \right)^2 + 2 F \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial m}{\partial \theta} + G \left( \frac{\partial m}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ \quad + 2 D'_0 m [Dl + (D' - D'_0) m] + [Dl + (D' - D'_0) m]^2 \\ F' = F'_0 + \frac{\partial \theta}{\partial v} \left[ R^2 A_0 \frac{\partial p}{\partial \theta} + (EL_0 + FM_0) \frac{\partial l}{\partial \theta} + (FL_0 + GM_0) \frac{\partial m}{\partial \theta} \right] + \\ \quad + \frac{\partial \theta}{\partial u} \left[ R^2 B_0 \frac{\partial p}{\partial \theta} + (EP_0 + FQ_0) \frac{\partial l}{\partial \theta} + (FP_0 + GQ_0) \frac{\partial m}{\partial \theta} \right] + \\ \quad + \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} \left[ R^2 \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + E \left( \frac{\partial l}{\partial \theta} \right)^2 + 2 F \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial m}{\partial \theta} + G \left( \frac{\partial m}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ \quad + D'_0 m [(D' - D'_0) l + D'' m] + D'_0 l [Dl + (D' - D'_0) m] + \\ \quad + [Dl + (D' - D'_0) m] [(D' - D'_0) l + D'' m] \\ G' = G'_0 + 2 \frac{\partial \theta}{\partial v} \left[ R^2 B_0 \frac{\partial p}{\partial \theta} + (EP_0 + FQ_0) \frac{\partial l}{\partial \theta} + (FP_0 + GQ_0) \frac{\partial m}{\partial \theta} \right] + \\ \quad + \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 \left[ R^2 \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + E \left( \frac{\partial l}{\partial \theta} \right)^2 + 2 F \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial m}{\partial \theta} + G \left( \frac{\partial m}{\partial \theta} \right)^2 \right] + \\ \quad + 2 D'_0 l [(D' - D'_0) l + D'' m] + [(D' - D'_0) l + D'' m]^2. \end{cases}$$

Calcoliamo ora i valori effettivi di  $E'_0, F'_0, G'_0$ . Ricordiamo intanto le formole (31):

$$\begin{aligned} x'_{00} &= \frac{2}{MH} \left\{ \pm \frac{ac}{a'e'} \cos \theta (u-v) \mp \frac{bc}{b'e'} \sin \theta (1+uv) + \frac{ab}{a'b'} (1-uv) \right\} \\ x'_{10} &= \frac{2}{MH} \left\{ \frac{b}{b'} \cos \theta (1-uv) \mp \frac{bc}{b'e'} \sin \theta (u+v) \pm \frac{c}{c'} (u-v) \right\} \end{aligned}$$

$$x'_{20} = \frac{2}{MH} \left\{ \frac{ae}{a'c'} \cos \theta (u+v) \pm \frac{a}{a'} \operatorname{sen} \theta (1-uv) - \frac{c}{c'} (1+uv) \right\}$$

$$x'_{30} = \frac{2}{MH} \left\{ \frac{b}{b'} \cos \theta (1+uv) - \frac{ab}{a'b'} (u+v) + \frac{a}{a'} \operatorname{sen} \theta (u-v) \right\}.$$

Per procedere più speditamente nei calcoli scriviamo queste formole nella forma

$$(51) \quad x'_{00} = \frac{n'_{00}}{MH} \quad x'_{10} = \frac{n'_{10}}{MH} \quad x'_{20} = \frac{n'_{20}}{MH} \quad x'_{30} = \frac{n'_{30}}{MH}$$

e osserviamo che si ha

$$E'_0 = R^2 \frac{S n'^2_{i0} S \left( \frac{\partial n'_{i0}}{\partial u} \right)^2 - \left( S n'_{i0} \frac{\partial n'_{i0}}{\partial u} \right)^2}{M^4 H^4}$$

$$(52) \quad F'_0 = R^2 \frac{S n'^2_{i0} S \frac{\partial n'_{i0}}{\partial u} \frac{\partial n'_{i0}}{\partial v} - \left( S n'_{i0} \frac{\partial n'_{i0}}{\partial u} \right) \left( S n'_{i0} \frac{\partial n'_{i0}}{\partial v} \right)}{M^4 H^4}$$

$$G'_0 = R^2 \frac{S n'^2_{i0} S \left( \frac{\partial n'_{i0}}{\partial v} \right)^2 - \left( S n'_{i0} \frac{\partial n'_{i0}}{\partial v} \right)^2}{M^4 H^4}.$$

Di più sussistono evidentemente le relazioni

$$(53) \quad \begin{cases} n'_{10} = \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta n'_{30} + a' \cos \theta n'_{00} \\ n'_{20} = -\frac{b'}{c'} \cos \theta n'_{30} + b' \operatorname{sen} \theta n'_{00} \end{cases}$$

e anche, supposto di considerare  $\theta$  costante, come appunto si deve fare nelle formole (52)

$$(54) \quad \begin{cases} \frac{\partial n'_{10}}{\partial u} = \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial n'_{30}}{\partial u} + a' \cos \theta \frac{\partial n'_{00}}{\partial u} \\ \frac{\partial n'_{20}}{\partial u} = -\frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial n'_{30}}{\partial u} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial n'_{00}}{\partial u} \end{cases}$$

e le analoghe per  $v$ . Da queste formole otteniamo immediatamente

$$\begin{aligned} M^4 H^4 E'_0 &= R^2 \frac{c^2}{c'^2} \left\{ \frac{n'_{30}}{c} \frac{\partial n'_{00}}{\partial u} - \frac{n'_{00}}{c} \frac{\partial n'_{30}}{\partial u} \right\}^2 \\ &\quad \left[ \{ a'^2 \text{sen}^2 \theta + b'^2 \text{cos}^2 \theta + c'^2 \} \{ a'^2 \text{cos}^2 \theta + b'^2 \text{sen}^2 \theta + 1 \} - (a'^2 - b'^2)^2 \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta \right] \\ M^4 H^4 F'_0 &= R^2 \left\{ \frac{n'_{30}}{c} \frac{\partial n'_{00}}{\partial u} - \frac{n'_{00}}{c} \frac{\partial n'_{30}}{\partial u} \right\} \left\{ \frac{n'_{30}}{c} \frac{\partial n'_{00}}{\partial v} - \frac{n'_{00}}{c} \frac{\partial n'_{30}}{\partial v} \right\} \\ &\quad \left[ \{ a'^2 \text{sen}^2 \theta + b'^2 \text{cos}^2 \theta + c'^2 \} \{ a'^2 \text{cos}^2 \theta + b'^2 \text{sen}^2 \theta + 1 \} - (a'^2 - b'^2)^2 \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta \right] \\ M^4 H^4 G'_0 &= R^2 \left\{ \frac{n'_{30}}{c} \frac{\partial n'_{00}}{\partial v} - \frac{n'_{00}}{c} \frac{\partial n'_{30}}{\partial v} \right\}^2 \\ &\quad \left[ \{ a'^2 \text{sen}^2 \theta + b'^2 \text{cos}^2 \theta + c'^2 \} \{ a'^2 \text{cos}^2 \theta + b'^2 \text{sen}^2 \theta + 1 \} - (a'^2 - b'^2)^2 \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta \right]. \end{aligned}$$

Ora sulle (29) (31) si verificano subito le identità

$$(55) \quad \begin{cases} \frac{n'_{30}}{c} \frac{\partial n'_{00}}{\partial u} - \frac{n'_{00}}{c} \frac{\partial n'_{30}}{\partial u} = 4 \frac{ab}{a'b'} V \\ \frac{n'_{30}}{c} \frac{\partial n'_{00}}{\partial v} - \frac{n'_{00}}{c} \frac{\partial n'_{30}}{\partial v} = 4 \frac{ab}{a'b'} U \end{cases}$$

quindi otteniamo infine

$$(56) \quad \left\{ \begin{aligned} E'_0 &= 16 R^2 \frac{a^2 b^2 c^2}{a'^2 b'^2 c'^2} \frac{V^2}{M^4 H^4} \left\{ (a'^2 \text{sen}^2 \theta + b'^2 \text{cos}^2 \theta + c'^2) (a'^2 \text{cos}^2 \theta + b'^2 \text{sen}^2 \theta + 1) - \right. \\ &\quad \left. - (a'^2 - b'^2)^2 \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta \right\} \\ F'_0 &= 16 R^2 \frac{a^2 b^2 c^2}{a'^2 b'^2 c'^2} \frac{UV}{M^4 H^4} \left\{ (a'^2 \text{sen}^2 \theta + b'^2 \text{cos}^2 \theta + c'^2) (a'^2 \text{cos}^2 \theta + b'^2 \text{sen}^2 \theta + 1) - \right. \\ &\quad \left. - (a'^2 - b'^2)^2 \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta \right\} \\ G'_0 &= 16 R^2 \frac{a^2 b^2 c^2}{a'^2 b'^2 c'^2} \frac{U^2}{M^4 H^4} \left\{ (a'^2 \text{sen}^2 \theta + b'^2 \text{cos}^2 \theta + c'^2) (a'^2 \text{cos}^2 \theta + b'^2 \text{sen}^2 \theta + 1) - \right. \\ &\quad \left. - (a'^2 - b'^2)^2 \text{sen}^2 \theta \text{cos}^2 \theta \right\} \end{aligned} \right.$$

Abbiamo così calcolata una parte degli elementi che compaiono nell'espressione di  $E' F' G'$ : per calcolare i restanti formiamo le somme:

$$R^2 S \frac{\partial x_{i0}}{\partial u} \frac{\partial x'_{i0}}{\partial u} \quad R^2 S \frac{\partial x_{i0}}{\partial u} \frac{\partial x'_{i0}}{\partial v} \quad R^2 S \frac{\partial x_{i0}}{\partial v} \frac{\partial x'_{i0}}{\partial u} \quad R^2 S \frac{\partial x_{i0}}{\partial v} \frac{\partial x'_{i0}}{\partial v}$$

dalle formole (48) e dalle formole

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_{10}}{\partial u} &= \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} + a' \cos \theta \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \\ \frac{\partial x'_{20}}{\partial u} &= -\frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \end{aligned}$$

e dalle loro analoghe per  $u, v$ . Confrontando i risultati ottenuti nei due casi otteniamo:

$$(57) \left\{ \begin{aligned} EL_0 + FM_0 &= R^2 \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial u} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial u} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \right\} + \\ &\quad + R^2 \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial u} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial u} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \right\} \\ FL_0 + GM_0 &= R^2 \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial v} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial v} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \right\} + \\ &\quad + R^2 \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial v} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial v} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \right\} \\ EP_0 + FQ_0 &= R^2 \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial u} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial u} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \right\} + \\ &\quad + R^2 \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial u} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial u} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \right\} \\ FP_0 + GQ_0 &= R^2 \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial v} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial v} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \right\} + \\ &\quad + R^2 \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial v} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial v} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \right\}. \end{aligned} \right.$$



Abbiamo poi evidentemente

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 &= \mathcal{S} x'_{i0} \frac{\partial x'_{i0}}{\partial u} = \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta x_{10} - \frac{b'}{c'} \operatorname{cos} \theta x_{20} + x_{30} \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \left\{ a' \operatorname{cos} \theta x_{10} + b' \operatorname{sen} \theta x_{20} + x_{00} \right\} \\ B_0 &= \mathcal{S} x'_{i0} \frac{\partial x'_{i0}}{\partial v} = \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta x_{10} - \frac{b'}{c'} \operatorname{cos} \theta x_{20} + x_{30} \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \left\{ a' \operatorname{cos} \theta x_{10} + b' \operatorname{sen} \theta x_{20} + x_{30} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Osserviamo inoltre che

$$(59) \quad \frac{\partial x'_{i0}}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} x_{i0} + \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial x_{i0}}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial \theta} \frac{\partial x_{i0}}{\partial v} \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Dopo ciò abbiamo

$$(59^*) \quad \left\{ \begin{aligned} R^2 A_0 \frac{\partial p}{\partial \theta} + (EL_0 + FM_0) \frac{\partial l}{\partial \theta} + (FL_0 + GM_0) \frac{\partial m}{\partial \theta} &= \\ &= R^2 \left[ \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \operatorname{cos} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \left\{ a' \operatorname{cos} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} \right] \\ R^2 B_0 \frac{\partial p}{\partial \theta} + (EP_0 + FQ_0) \frac{\partial l}{\partial \theta} + (FP_0 + GQ_0) \frac{\partial m}{\partial \theta} &= \\ &= R^2 \left[ \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \operatorname{cos} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \left\{ a' \operatorname{cos} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} \right] \end{aligned} \right.$$

Osserviamo inoltre che dalle (59) si ha immediatamente

$$(60) \quad R^2 \mathcal{S} \left( \frac{\partial x'_{i0}}{\partial \theta} \right)^2 = R^2 \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)^2 + E \left( \frac{\partial l}{\partial \theta} \right)^2 + 2F \frac{\partial l}{\partial \theta} \frac{\partial m}{\partial \theta} + G \left( \frac{\partial m}{\partial \theta} \right)^2.$$

Arriviamo così infine alle seguenti espressioni di  $E'$ ,  $F'$ ,  $G'$ :

$$\begin{aligned}
 E' &= E'_0 + 2R^2 \frac{\partial \theta}{\partial u} \left[ \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} \right] + \\
 &\quad + R^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2 S \left( \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} \right)^2 + 2D'_0 m [Dl + (D' - D'_0)m] + [Dl + (D' - D'_0)m]^2; \\
 F' &= F'_0 + R^2 \frac{\partial \theta}{\partial v} \left[ \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} \right] + \\
 &\quad + R^2 \frac{\partial \theta}{\partial u} \left[ \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} \right] + \\
 &\quad + R^2 \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} S \left( \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} \right)^2 + D'_0 l [Dl + (D' - D'_0)m] + \\
 &\quad + D'_0 m [(D' - D'_0)l + D''m] + [Dl + (D' - D'_0)m] [(D' - D'_0)l + D''m]; \\
 G' &= G'_0 + 2R^2 \frac{\partial \theta}{\partial v} \left[ \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} \right] + \\
 &\quad + R^2 \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 S \left( \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} \right)^2 + 2D'_0 l [(D' - D'_0)l + D''m] + [(D' - D'_0)l + D''m]^2.
 \end{aligned}$$

§ 6.

**Formole d'applicabilità dedotte dall'affinità d'Ivory.**

Le formole (61) danno quanto basta pel calcolo dell'elemento lineare delle superficie (S'). Dimostreremo ora che tale  $ds'^2$  è trasformabile nell'elemento lineare della quadrica fondamentale  $Q_0$ .

Si potrebbero applicare a questo scopo i procedimenti generali

che servono a stabilire se due  $ds^2$  sono equivalenti o no, ma i calcoli risulterebbero molto complicati: procederemo invece nel modo seguente.

Considereremo due punti  $F, F'$  corrispondenti sopra  $(S) (S')$ . Se applichiamo  $(S)$  su  $Q_0$  il segmento  $\overline{FF'}$ , trascinato nella deformazione risulterà tangente nel suo primo estremo  $M_0$  alla quadrica rigata  $Q_0$  e verrà ad avere il secondo estremo  $M'$  sulla quadrica confoCALE  $Q_k$ . Veniamo così a stabilire una corrispondenza tra  $(S')$  e  $Q_k$  in cui al punto  $F'$  di  $(S')$  corrisponde il punto  $M'$  di  $Q_k$ . D'altra parte se  $(S')$  è applicabile su  $Q_0$ , come dimostreremo, ogni punto  $F'$  di  $(S')$  avrà su  $Q_0$  un corrispondente  $M_1$  in ognuna delle applicabilità di  $(S')$  su  $Q_0$ . Evidentemente avremo ottenuta una legge d'applicabilità tra  $(S) (S')$  se riusciamo a stabilire una delle leggi di corrispondenza tra i punti  $M_1, M'$  delle due quadriche  $Q_0, Q_k$ .

Verificheremo ora, conformemente a quanto abbiamo già enunciato, che una di tali leggi è data semplicemente dall'affinità d'IVORY tra le quadriche  $Q_0, Q_k$ . Le formole che otterremo saranno applicabili anche al caso delle trasformazioni singolari  $B_{-b^2} B_{c^2}$ : soltanto in questo caso a un punto di  $Q_0$  faranno corrispondere un punto del piano principale, cui si riduce  $Q_k$ , esterno alla relativa conica focale.

Intanto nell'affinità d'IVORY tra le due quadriche  $Q_k, Q_0$  al punto  $M' \equiv (x'_{i0})$  di  $Q_k$  corrisponde il punto  $M_1$  di  $Q_0$  le cui coordinate  $\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3$  sono date dalle formole

$$(62) \quad \epsilon_0 = \frac{x'_{00}}{\sqrt{1-k}} \quad \epsilon_1 = \frac{a}{a'} \frac{x'_{10}}{\sqrt{1-k}} \quad \epsilon_2 = \frac{b}{b'} \frac{x'_{20}}{\sqrt{1-k}} \quad \epsilon_3 = \frac{c}{c'} \frac{x'_{30}}{\sqrt{1-k}}.$$

Indichiamo ora con  $u_1 v_1$  i valori delle coordinate curvilinee  $u, v$  nel punto  $M_1 \equiv (\epsilon_i)$ : essendo

$$(63) \quad \epsilon_0 = \frac{u_1 + v_1}{H_1} \quad \epsilon_1 = a \frac{1 + u_1 v_1}{H_1} \quad \epsilon_2 = b \frac{u_1 - v_1}{H_1} \quad \epsilon_3 = c \frac{1 - u_1 v_1}{H_1}$$

ove

$$H_1^2 = (u_1 + v_1)^2 + a^2 (1 + u_1 v_1)^2 + b^2 (u_1 - v_1)^2 + c^2 (1 - u_1 v_1)^2$$

avremo

$$(64) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_2}{b}}{\frac{\varepsilon_1}{a} + \frac{\varepsilon_3}{c}} = \frac{n'_{00} + \frac{n'_{20}}{b'}}{\frac{n'_{10}}{a'} + \frac{n'_{30}}{c'}} \\ v_1 = \frac{\varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_2}{b}}{\frac{\varepsilon_1}{a} + \frac{\varepsilon_3}{c}} = \frac{n'_{00} - \frac{n'_{20}}{b'}}{\frac{n'_{10}}{a'} + \frac{n'_{30}}{c'}} \end{array} \right.$$

Quindi, tenendo conto delle formole

$$\begin{aligned} n'_{10} &= \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta n'_{30} + a' \cos \theta n'_{00} \\ n'_{20} &= -\frac{b'}{c'} \cos \theta n'_{30} + b' \operatorname{sen} \theta n'_{00} \end{aligned}$$

si ottiene

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{n'_{00} (1 + \operatorname{sen} \theta) - \frac{n'_{30}}{c'} \cos \theta}{\frac{n'_{30}}{c'} (1 + \operatorname{sen} \theta) + n'_{00} \cos \theta} \\ v_1 = \frac{n'_{00} (1 - \operatorname{sen} \theta) + \frac{n'_{30}}{c'} \cos \theta}{\frac{n'_{30}}{c'} (1 + \operatorname{sen} \theta) + n'_{00} \cos \theta} \end{array} \right.$$

Ora, essendo evidentemente

$$\frac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta},$$

il secondo membro della formola che dà  $v_1$  risulta indipendente dal rapporto  $\frac{n'_{00}}{n'_{30}}$ , e precisamente si ha

$$v_1 = \frac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}.$$

Quindi, sostituendo nella  $(65)_1$  per  $n'_{00}$   $n'_{30}$  i loro valori effettivi

tratti dalle (31), le formole cercate posto

$$N_1 = \frac{ac}{a'e'} \cos \theta (u - v) - \frac{bc}{b'e'} \sin \theta (1 + uv) + \frac{ab}{a'e'} (1 - uv)$$

$$N_2 = \frac{b}{b'} (1 + uv) \cos \theta - \frac{ab}{a'b'} (u + v) + \frac{a}{a'} \sin \theta (u - v)$$

$$D_1 = \frac{b}{b'} \cos \theta (1 + uv) - \frac{ab}{a'b'} (u + v) + \frac{a}{a'} \sin \theta (u - v)$$

$$D_2 = \frac{ac}{a'e'} \cos \theta (u - v) - \frac{bc}{b'e'} \sin \theta (1 + uv) + \frac{ab}{a'b'} (1 - uv)$$

assumono la forma

$$(66) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \frac{(1 + \sin \theta) N_1 - \cos \theta N_2}{(1 + \sin \theta) D_1 + \cos \theta D_2} \\ v_1 = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} . \end{array} \right.$$

La formola che dà  $v_1$  non contiene nè  $u$ , nè  $v$ , come è naturale, l'affinità d'IVORY facendo sempre corrispondere a una retta di  $Q_k$ , una retta di  $Q_0$ . Anzi, poichè tale affinità fa corrispondere generatrici delle due quadriche per le quali il valore del parametro  $\theta$  che compare nelle formole (27) e nelle analoghe per  $Q_0$  è lo stesso, tale formola ci dà semplicemente la relazione che passa tra i due parametri  $\theta, v$ , di cui ci siamo serviti per individuare le generatrici del primo sistema di  $Q_0$ .

## § 7.

### Applicabilità delle superficie ( $S'$ ) su $Q_0$ .

Ottenute così le formole della corrispondenza considerata tra i punti delle due quadriche  $Q_0, Q_k$ , veniamo a dimostrare che tali formole sono effettivamente le formole d'applicabilità tra le due su-

perficie (S), (S'). Dovremo perciò dimostrare che il  $ds'^2$  di (S')

$$ds'^2 = E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2$$

si trasforma in coordinate  $(u_1, v_1)$  nel  $ds_1^2$  della quadrica rigata  $Q_0$

$$(67) \quad ds_1^2 = E_1 du_1^2 + 2F_1 du_1 dv_1 + G_1 dv_1^2$$

ove (Cfr. § 2)

$$37) \left\{ \begin{aligned} E_1 &= R^2 \frac{v_1^4 (a^2 + c^2)(1 + b^2) + 2v_1^2 \{ (b^2 + c^2)(1 + a^2) + (1 - c^2)(b^2 - a^2) \} + (a^2 + c^2)(1 + b^2)}{H_1^4} \\ F_1 &= R^2 \frac{u_1^2 v_1^2 (a^2 + c^2)(1 + b^2) + (u_1^2 + v_1^2)(c^2 - a^2)(1 + b^2) - 4u_1 v_1 (b^2 + a^2 c^2) + (a^2 + c^2)(1 + b^2)}{H_1^4} \\ G_1 &= R^2 \frac{u_1^4 (a^2 + c^2)(1 + b^2) + 2u_1^2 \{ (b^2 + c^2)(1 + a^2) + (1 - c^2)(b^2 - a^2) \} + (a^2 + c^2)(1 + b^2)}{H_1^4} \end{aligned} \right.$$

o anche

$$(68) \quad E_1 = R^2 S \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_1} \right)^2 \quad F_1 = R^2 S \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u_1} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial v_1} \quad G_1 = R^2 S \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial v_1} \right)^2.$$

Per far questo dovremo dimostrare che in conseguenza delle (I) sono verificate identicamente le tre eguaglianze

$$X' = E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 + 2 \left\{ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + F_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \left\{ E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2F_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + G_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \left( \frac{\partial \theta}{\partial u} \right)^2$$

$$X'' = E_1 \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial u_1}{\partial v} + \left\{ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + F_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right\} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right\} + \left\{ E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2F_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + G_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \frac{\partial \theta}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}$$

$$X''' = E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 + 2 \left\{ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + F_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \left\{ E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2F_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + G_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \left( \frac{\partial \theta}{\partial v} \right)^2 :$$

cioè, tenendo conto dei valori di  $\frac{\partial \theta}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial v}$  e del valore di  $D'_0$  (V.

§ 2 (20)), dovremo mostrare che sussistono le identità:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}'_0 + \frac{a'b'c'}{h\sqrt{abcR\rho}} \mathbf{R}^2 \left\{ \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \left[ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \left[ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right] - 4h \frac{abc}{a'b'c'} \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{M}^2 \mathbf{H}^2} \right\} \times \\
& \times \{ \mathbf{DU} + (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{V} \} + \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{4h^2 abc R \rho} \left\{ \mathbf{R}^2 \mathbf{S} \left( \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{4h^2 \mathbf{R}}{a'^2 b'^2 c'^2} \frac{\rho abc}{\mathbf{M}^2} \right\} \{ \mathbf{DU} + (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{V} \}^2 = \\
& = \mathbf{E}_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 + \frac{a'b'c'}{h\sqrt{abcR\rho}} \left\{ \mathbf{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mathbf{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial u_1}{\partial u} \{ \mathbf{DU} + (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{V} \} + \\
& + \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{4h^2 abc R \rho} \left\{ \mathbf{E}_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2\mathbf{F}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \mathbf{G}_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \{ \mathbf{DU} + (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{V} \}^2 : \\
& \mathbf{F}'_0 + \frac{a'b'c'}{2h\sqrt{abcR\rho}} \mathbf{R}^2 \left\{ \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \left[ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \left[ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right] - 4h \frac{abc}{a'b'c'} \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{M}^2 \mathbf{H}^2} \right\} \times \\
& \times \{ (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{U} + \mathbf{D}'' \mathbf{V} \} + \frac{a'b'c'}{2h\sqrt{abcR\rho}} \mathbf{R}^2 \left\{ \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \left[ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial x'_{10}}{\partial v} \left[ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right] - 4h \frac{abc}{a'b'c'} \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{M}^2 \mathbf{H}^2} \right\} \times \\
& \times \{ \mathbf{DU} + (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{V} \} + \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{4h^2 abc R \rho} \left\{ \mathbf{R}^2 \mathbf{S} \left( \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{4h^2 \mathbf{R}}{a'^2 b'^2 c'^2} \frac{\rho abc}{\mathbf{M}^2} \right\} \times \\
& \quad \times \{ \mathbf{DU} + (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{V} \} \{ (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{U} + \mathbf{D}'' \mathbf{V} \} = \\
& = \mathbf{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial u_1}{\partial v} + \frac{a'b'c'}{2h\sqrt{abcR\rho}} \frac{\partial u_1}{\partial u} \left\{ \mathbf{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mathbf{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right\} \{ (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{U} + \mathbf{D}'' \mathbf{V} \} + \\
& \quad + \frac{a'b'c'}{2h\sqrt{abcR\rho}} \frac{\partial u_1}{\partial v} \left\{ \mathbf{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mathbf{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right\} \{ \mathbf{DU} + (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{V} \} + \\
& + \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{4h^2 abc R \rho} \left\{ \mathbf{E}_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2\mathbf{F}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \mathbf{G}_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \{ \mathbf{DU} + (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{V} \} \{ (\mathbf{D}' - \mathbf{D}'_0) \mathbf{U} + \mathbf{D}'' \mathbf{V} \} :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{J}'_0 + \frac{a'b'c'}{h\sqrt{abc}R_\rho} R^2 \left\{ \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \left[ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \left[ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right] - 4h \frac{abc}{a'b'c'} \frac{U}{M^2 H^2} \right\} \times \\
 & \times \{ (D' - D'_0) U + D'' V \} + \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{4h^2 abc R_\rho} \left\{ R^2 S \left( \frac{\partial x'_{i0}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{4h^2 R_\rho abc}{a'^2 b'^2 c'^2 M^2} \right\} \{ (D' - D'_0) U + D'' V \}^2 = \\
 & = E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 + \frac{a'b'c'}{h\sqrt{abc}R_\rho} \left\{ E_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + F_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial u_1}{\partial v} \{ (D' - D'_0) U + D'' V \} + \\
 & + \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{4h^2 abc R_\rho} \left\{ E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2F_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + G_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \{ (D' - D'_0) U + D'' V \}^2.
 \end{aligned}$$

Dovendo queste tre identità verificarsi in qualunque deformazione (S) di  $Q_0$ , dovranno verificarsi *qualunque* siano i valori di  $D, D', D''$ : da ciò deduciamo subito che esse saranno verificate allora e allora soltanto che sussistano le identità seguenti:

$$(69) \quad E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 = E'_0 \quad E_1 \frac{\partial u_1}{\partial v} \frac{\partial u_1}{\partial v} = F'_0 \quad E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 = G'_0$$

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & \left( E_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + F_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u_1}{\partial u} = R^2 \left[ \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} - 4h \frac{abc}{a'b'c'} \frac{V}{M^2 H^2} \right]: \\
 & \left( E_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + F_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u_1}{\partial v} = R^2 \left[ \frac{\partial x'_{30}}{\partial v} \left\{ \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial x'_{00}}{\partial v} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} - 4h \frac{abc}{a'b'c'} \frac{U}{M^2 H^2} \right]:
 \end{aligned} \right.$$

$$(71) \quad E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2F_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + G_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^2 = R^2 S \left( \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{4h^2 R_\rho abc}{a'^2 b'^2 c'^2 M^2}.$$



§ 8. Dimostrazione delle identità (69) (70) (71).

Per dimostrare le (69) cominciamo dall'osservare che, essendo  $\frac{\partial v_1}{\partial u} = 0$ , si ha

$$E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 = R^2 S \left( \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial u} \right)^2$$

ovvero per le (62)

$$(1-k) \frac{E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2}{R^2} = (1-k) S \left( \frac{\partial x'_{i0}}{\partial u} \right)^2 + k \left[ \left( \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{c'^2} \left( \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{a'^2} \left( \frac{\partial x'_{10}}{\partial u} \right)^2 - \frac{1}{b'^2} \left( \frac{\partial x'_{20}}{\partial u} \right)^2 \right]$$

Ora, essendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_{10}}{\partial u} &= \frac{a'}{c'} \sin \theta \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} + a' \cos \theta \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \\ \frac{\partial x'_{20}}{\partial u} &= -\frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} + b' \sin \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial u} \end{aligned}$$

è anche

$$\frac{1}{a'^2} \left( \frac{\partial x'_{10}}{\partial u} \right)^2 + \frac{1}{b'^2} \left( \frac{\partial x'_{20}}{\partial u} \right)^2 = \frac{1}{c'^2} \left( \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \right)^2 + \left( \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \right)^2,$$

quindi risulta

$$E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial u} \right)^2 = R^2 S \left( \frac{\partial x'_{i0}}{\partial u} \right)^2 = E'_0 :$$

e la prima delle (69) è dimostrata.

Osserviamo ora che dall'espressione (65)<sub>1</sub> di  $u_1$  si deduce subito

$$\frac{\partial u_1}{\partial n'_{00}} n'_{00} + \frac{\partial u_1}{\partial n'_{30}} n'_{30} = 0 :$$

inoltre

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial u} &= \frac{\partial u_1}{\partial n'_{30}} \frac{\partial n'_{30}}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial n'_{00}} \frac{\partial n'_{00}}{\partial u} \\ \frac{\partial u_1}{\partial v} &= \frac{\partial u_1}{\partial n'_{30}} \frac{\partial n'_{30}}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial n'_{00}} \frac{\partial n'_{00}}{\partial v} . \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\frac{\frac{\partial u_1}{\partial u}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial n'_{30}} \frac{\partial n'_{30}}{\partial u} + \frac{\partial u_1}{\partial n'_{00}} \frac{\partial n'_{00}}{\partial u}}{\frac{\partial u_1}{\partial n'_{30}} \frac{\partial n'_{30}}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial n'_{00}} \frac{\partial n'_{00}}{\partial v}} = \frac{n'_{30} \frac{\partial n'_{30}}{\partial u} - n'_{00} \frac{\partial n'_{00}}{\partial u}}{n'_{30} \frac{\partial n'_{30}}{\partial v} - n'_{00} \frac{\partial n'_{00}}{\partial v}}.$$

Ricordiamo inoltre le identità (55)

$$n'_{30} \frac{\partial n'_{30}}{\partial u} - n'_{00} \frac{\partial n'_{00}}{\partial u} = \frac{4abc}{a'b'} V; \quad n'_{30} \frac{\partial n'_{30}}{\partial v} - n'_{00} \frac{\partial n'_{00}}{\partial v} = \frac{4abc}{a'b'} U.$$

Vediamo allora subito che si ha

$$(72) \quad \frac{\frac{\partial u_1}{\partial u}}{\frac{\partial u_1}{\partial v}} = \frac{V}{U}.$$

Ne segue che dall'identità dimostrata (69)<sub>1</sub> si deduce

$$E_1 \frac{\partial u_1}{\partial u} \frac{\partial u_1}{\partial v} = \frac{U}{V} E'_0$$

$$E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial v} \right)^2 = \frac{U^2}{V^2} E'_0:$$

d'altra parte per le (56) si ha

$$F'_0 = \frac{U}{V} E'_0 \quad G'_0 = \frac{U^2}{V^2} E'_0$$

quindi tutte le (69) restano completamente dimostrate.

Veniamo ora a dimostrare le (70): basterà che ne dimostriamo una, ad es. la 1<sup>a</sup>, l'altra deducendosi immediatamente da essa mediante l'identità

$$\sum x'_{i0} \frac{\partial x'_{i0}}{\partial \theta} = 0$$

cioè

$$x'_{30} \left\{ \frac{a'}{c'} \sin \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} + x'_{00} \left\{ a' \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + b' \sin \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} = 0$$

e le (55), (72).

Per dimostrare la (70)<sub>1</sub> cominciamo dall'osservare che si ha

$$(73) \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \frac{\partial v_1}{\partial \theta}$$

quindi

$$\mathbf{R}^2 \mathbf{S} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} = \mathbf{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mathbf{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} :$$

essendo  $\frac{\partial v_1}{\partial u} = 0$ , avremo dunque per le (62)

$$\left( \mathbf{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mathbf{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u_1}{\partial u} = \frac{\mathbf{R}^2}{1-k} \left( \frac{a^2}{a'^2} \frac{\partial x'_{10}}{\partial u} \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + \frac{b^2}{b'^2} \frac{\partial x'_{20}}{\partial u} \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{c^2}{c'^2} \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right).$$

D'altra parte

$$\frac{\partial x'_{10}}{\partial u} = \frac{a'}{c'} \sin \theta \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} + a' \cos \theta \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \quad \frac{\partial x'_{20}}{\partial u} = -\frac{b'}{c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} + b' \sin \theta \frac{\partial x'_{00}}{\partial u}$$

quindi

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{E}_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \mathbf{F}_1 \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u_1}{\partial u} (1-k) &= \mathbf{R}^2 \left[ \left\{ \frac{a^2}{a'c'} \sin \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{b^2}{b'c'} \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{c^2}{c'^2} \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{a^2}{a'^2} \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + \frac{b^2}{b'^2} \sin \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \right]. \end{aligned}$$

Paragonando questa identità con quella da dimostrare, vediamo subito che per giungere al nostro scopo dovremo far vedere che si ha :

$$\begin{aligned} 4k \frac{abc}{a'bc'} \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{M}^2 \mathbf{H}^2} &= \left\{ \left( \frac{a'}{c'} (1-k) - \frac{a^2}{a'c'} \right) \sin \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \left( \frac{b'}{c'} (1-k) - \frac{b^2}{b'c'} \right) \cos \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \left( 1-k - \frac{c^2}{c'^2} \right) \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} + \\ &\quad + \left\{ \left( \frac{a'}{c'} (1-k) - \frac{a^2}{a'c'} \right) \cos \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + \left( \frac{b'}{c'} (1-k) - \frac{b^2}{b'c'} \right) \sin \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} - k \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} \end{aligned}$$

ossia

$$4k \frac{abc}{a'b'c'} \frac{V}{M^2 H^2} = \left\{ \frac{1}{a'c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} - \frac{1}{b'c'} \operatorname{cos} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} - \frac{1}{c'^2} \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{a'} \operatorname{cos} \theta \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} + \frac{1}{b'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} - \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} \frac{\partial x'_{00}}{\partial u}.$$

Ora si ha evidentemente

$$\frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} = \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} + a' \operatorname{cos} \theta \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} + \frac{a'}{c'} \operatorname{cos} \theta x'_{30} - a' \operatorname{sen} \theta x'_{00}$$

$$\frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} = -\frac{a'}{c'} \operatorname{cos} \theta \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} + b' \operatorname{sen} \theta \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} + \frac{b'}{c'} \operatorname{sen} \theta x'_{30} + b' \operatorname{cos} \theta x'_{00}$$

quindi l'eguaglianza precedente si riduce all'altra

$$x'_{30} \frac{\partial x'_{00}}{\partial u} - x'_{00} \frac{\partial x'_{30}}{\partial u} = \frac{4abc}{a'b'} \frac{V}{M^2 H^2}$$

che per la (55)<sub>1</sub> è identicamente verificata.

Dopo ciò, per giungere al nostro scopo non ci resta da dimostrare altro che l'identità (71).

Intanto, tenendo conto del valore effettivo (22) di  $\zeta$ , vediamo subito ch'essa si può scrivere nella forma

$$E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2F_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + G_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^2 = R^2 S \left( \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} \right)^2 +$$

$$+ \frac{4R^2 h^2}{a'^2 b'^2 c'^2} \frac{a^2 b^2 c^2 (u+v)^2 + b^2 c^2 (1+uv)^2 + a^2 c^2 (u-v)^2 + b^2 c^2 (1-uv)^2}{H^2 M^2}.$$

Ora dalle (81) quadrando e sommando si ottiene, tenendo presenti le (62)

$$R^2 S \left( \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{R^2}{1-k} \left\{ \left( \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{a^2}{a'^2} \left( \frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{b^2}{b'^2} \left( \frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{c^2}{c'^2} \left( \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} \right)^2 \right\} =$$

$$= E_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \right)^2 + 2F_1 \frac{\partial u_1}{\partial \theta} \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + G_1 \left( \frac{\partial v_1}{\partial \theta} \right)^2$$

quindi l'identità da dimostrarsi può scriversi

$$\frac{1}{1-k} \left[ \left(1-k-\frac{a^2}{a'^2}\right) \left(\frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta}\right)^2 + \left(1-k-\frac{b^2}{b'^2}\right) \left(\frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta}\right)^2 + \left(1-k-\frac{c^2}{c'^2}\right) \left(\frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta}\right)^2 - k \left(\frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta}\right)^2 \right] + \frac{4h^2}{a'^2 b'^2 c'^2} [a^2 b^2 c^2 (u+v)^2 + b^2 c^2 (1+uv)^2 + a^2 c^2 (u-v)^2 + a^2 b^2 (1-uv)^2] \frac{1}{M^2 H^2} = 0$$

cioè

$$\frac{1}{a'^2} \left(\frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{b'^2} \left(\frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{c'^2} \left(\frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta}\right)^2 - \left(\frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{4h}{a'^2 b'^2 c'^2} \frac{a^2 b^2 c^2 (u+v)^2 + b^2 c^2 (1+uv)^2 + a^2 c^2 (u-v)^2 + a^2 b^2 (1-uv)^2}{M^2 H^2} = 0.$$

Ora dalle (81)\* si deduce subito

$$\frac{1}{a'^2} \left(\frac{\partial x'_{10}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{b'^2} \left(\frac{\partial x'_{20}}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{c'^2} \left(\frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta}\right)^2 - \left(\frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{x'^2_{30}}{c'^2} + x'^2_{00} - \frac{2}{c'} x'_{00} \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} + \frac{2}{c'} x'_{30} \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta}$$

onde la formola da dimostrarsi si riduce alla seguente:

$$M^2 H^2 \left\{ \frac{x'^2_{30}}{c'^2} + x'^2_{00} - \frac{2}{c'} x'_{00} \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} + \frac{2}{c'} x'_{30} \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} + \frac{4h}{a'^2 b'^2 c'^2} [a^2 b^2 c^2 (u+v)^2 + b^2 c^2 (1+uv)^2 + a^2 c^2 (u-v)^2 + b^2 c^2 (1-uv)^2] = 0.$$

Ora evidentemente

$$M^2 H^2 \left\{ \frac{x'^2_{30}}{c'^2} + x'^2_{00} - \frac{2}{c'} x'_{00} \frac{\partial x'_{30}}{\partial \theta} + \frac{2}{c'} x'_{30} \frac{\partial x'_{00}}{\partial \theta} \right\} = \frac{n'^2_{30}}{c'^2} + n'^2_{00} - \frac{2}{c'} n'_{00} \frac{\partial n'_{30}}{\partial \theta} + \frac{2}{c'} n'_{30} \frac{\partial n'_{00}}{\partial \theta} :$$

quindi l'eguaglianza scritta, tenendo conto dei valori effettivi delle  $n'_{i0}$  può porsi nella forma

$$\frac{c^2}{c'^2} \left[ (1+uv) \cos \theta \frac{b}{b'} - \frac{ab}{a'b'} (u+v) + \frac{a}{a'} \sin \theta (u-v) \right]^2 + \left[ \frac{ac}{a'c'} \cos \theta (u-v) - \frac{bc}{b'c'} \sin \theta (1+uv) + \frac{ab}{a'b'} (1-uv) \right]^2 - \frac{2c}{c'} \left[ (1+uv) \cos \theta \frac{b}{b'} - \frac{ab}{a'b'} (u+v) + \frac{a}{a'} \sin \theta (u-v) \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{ac}{a'e'} \operatorname{sen} \theta(u-v) + \frac{bc}{b'e'} \operatorname{cos} \theta(1+uv) \right] - \frac{2c}{e'} \left[ \frac{a}{a'} \operatorname{cos} \theta(u-v) - \frac{b}{b'} \operatorname{sen} \theta(1+uv) \right] \\ & \left[ \frac{ac}{a'e'} \operatorname{cos} \theta(u-v) - \frac{bc}{b'e'} \operatorname{sen} \theta(1+uv) + \frac{ab}{a'b'}(1-uv) \right] + \\ & + \frac{h}{a^2 b^2 c^2} [a^2 b^2 c^2 (u+v)^2 + b^2 c^2 (1+uv)^2 + a^2 c^2 (u-v)^2 + a^2 b^2 (1-uv)^2] = 0 \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 c^2} (u+v)^2 + \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2} (1-uv)^2 - \frac{b^2 c^2}{b^2 c^2} (1+uv)^2 - \frac{a^2 c^2}{a^2 c^2} (u-v)^2 + \\ & + \frac{h}{a^2 b^2 c^2} [a^2 b^2 c^2 (u+v)^2 + b^2 c^2 (1+uv)^2 + a^2 c^2 (u-v)^2 + a^2 b^2 (1-uv)^2] = 0. \end{aligned}$$

Ora, essendo

$$a^2 = \frac{a^2 + k}{1 - k} \quad b^2 = \frac{b^2 + k}{1 - k} \quad c^2 = \frac{c^2 - k}{1 - k}$$

questa eguaglianza si può scrivere

$$\begin{aligned} & a^2 b^2 c^2 (u+v)^2 + \frac{c^2 - k}{1 - k} a^2 b^2 (1-uv)^2 - \frac{a^2 + k}{1 - k} b^2 c^2 (1+uv)^2 - \frac{b^2 + k}{1 - k} a^2 c^2 (u-v)^2 + \\ & + \frac{k}{1 - k} [a^2 b^2 c^2 (u+v)^2 + b^2 c^2 (1+uv)^2 + a^2 c^2 (u-v)^2 + a^2 b^2 (1-uv)^2] = 0 \end{aligned}$$

e poichè si ha identicamente

$$(u+v)^2 + (1-uv)^2 = (u-v)^2 + (1+uv)^2$$

quest'eguaglianza, e insieme ad essa la (79), risulta un'identità.

Dopo ciò possiamo concludere:

**TEOREMA I.** — *Le superficie (S') dedotte dalla superficie iniziale (S) per mezzo della trasformazione  $B_k$  sono tutte applicabili, come (S), sulla quadrica fondamentale  $Q_0$ . La legge d'applicabilità tra (S) ed (S') è data dall'affinità d'Ivory tra le quadriche confocali  $Q_0 Q_k$ .*

Come abbiamo già avvertito, queste conclusioni sussistono ancora nel caso particolare delle trasformazioni singolari  $B_{-b^2}, B_{c^2}$ .

Osserviamo ancora che se nelle (I) s'introduce come incognita il parametro  $\lambda = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ , dal quale dipendono razionalmente (per fun-

zioni di 2.º grado) le coordinate di un punto mobile sulla conica  $C$ , o di un piano mobile nell'involuppo aderente al cono  $K$ , il sistema prende la forma di RICCATI. Possiamo dunque concludere:

TEOREMA II. — *Quattro superficie (S) trasformate di (S) per mezzo di una  $B_k$  incontrano le  $\infty^2$  coniche C tracciate nei piani tangenti di (S) secondo gruppi di quattro punti di egual birapporto. Analogamente i loro involuppi hanno in comune con ciascuno dei coni K quattro piani di birapporto costante.*

Osserviamo inoltre che tutti i risultati fin qui ottenuti per la trasformazione delle superficie applicabili sopra una quadrica rigata si estendono immediatamente alle superficie applicabili sia *realmente* che *idealmente* sopra ogni altra quadrica dello spazio ellittico, la trattazione precedente conservando inalterato il suo valore analitico anche se  $a, b, c$  sono immaginari: soltanto nel caso generale ci sarà da distinguere la realtà o meno degli elementi geometrici ottenuti. Per questo si potrebbe seguire un metodo analogo a quello che vale nello spazio ordinario, ma non lo faremo, perchè potremo risolvere molto più semplicemente la questione servendoci delle proprietà della *trasformazione H*.

### § 9.

#### La trasformazione H.

Consideriamo una congruenza  $B_{\bar{k}}$  dello spazio ordinario relativa ad una quadrica generale  $\bar{Q}_0$  e la congruenza  $\bar{C}_{\bar{k}}$  che da questa si ottiene quando una delle sue falde focali  $(\bar{S})$  si applica su  $\bar{Q}_0$  seco trascinando i raggi della congruenza  $B_{\bar{k}}$ . Sappiamo allora (V. (M) §§ 51-55) che esiste una proiettività che cambia  $\bar{Q}_0$  in una quadrica  $\bar{Q}_0^{(1)}$  ad essa coniugata in deformazione, e la congruenza  $\bar{C}_{\bar{k}}$  in una congruenza  $\bar{C}_{\bar{k}^{(1)}}$  che, quando  $\bar{Q}_0^{(1)}$  si deforma seco trascinando i raggi della  $\bar{C}_{\bar{k}^{(1)}}$  in modo da assumere la configurazione  $(\bar{S})^{(1)}$  coniugata ad  $(\bar{S})$ , diviene una congruenza  $B_{\bar{k}^{(1)}}$  relativa ad  $(\bar{S})^{(1)}$ , la cui seconda falda focale è coniugata in deformazione alla seconda falda focale della congruenza primitiva.

Vogliamo ora dimostrare che un teorema del tutto simile pone in relazione le congruenze  $B_{\bar{k}}$  dello spazio ordinario colle analoghe nello spazio ellittico.

Sappiamo intanto (V. (M) § 56) che, data una quadrica  $Q_0^*$  a centro dello spazio ordinario, se assumiamo un ellissoide immaginario ad essa confocale come assoluto di uno spazio ellittico, di cui indicheremo al solito con  $R$  il raggio di curvatura, le quadriche confocali a  $Q_0^*$ , considerata come appartenente allo spazio ordinario, risultano confocali a  $Q_0^*$  anche se si considera come appartenente allo spazio ellittico definito, e le due superficie corrispondenti nei due casi a  $Q_0^*$  risultano coniugate in deformazione, cioè ad ogni deformata euclidea  $(\bar{S})$  di  $Q_0^*$  corrisponde una deformata ellittica  $(S)$  tale che i coefficienti delle seconde forme fondamentali di  $(S)$   $(\bar{S})$  risultano proporzionali.

Sia ora data una congruenza  $B_{\bar{k}}$  dello spazio ordinario relativa alla quadrica  $Q_0^*$ , e siano  $(\bar{S})(\bar{S}')$  le sue falde focali: indichiamo di più con  $C^*$  la congruenza che si ottiene dalla  $B_{\bar{k}}$  quando la  $(S)$  si applica su  $Q_0^*$  seco trascinando i raggi di  $B_{\bar{k}}$ . Dimosteremo che

α) *Se deformiamo la  $Q_0^*$ , considerata come appartenente allo spazio ellittico, in modo che assuma la configurazione  $(S)$  coniugata in deformazione ad  $(\bar{S})$ , i raggi della  $C^*$ , trascinati da  $Q_0^*$  nella deformazione non euclidea considerata, vengono a deformazione compiuta a formare una congruenza  $B_k$  dello spazio ellittico la cui prima falda focale è  $(S)$ :*

β) *La seconda falda focale della congruenza  $B_k$  è la deformata (non euclidea)  $(S')$  di  $Q_0^*$  coniugata ad  $(\bar{S})'$ .*

Per dimostrare la proprietà α) basterà far vedere che la congruenza  $C^*$  non è altro che la congruenza che si ottiene da una congruenza  $B_k$  relativa alla deformata ellittica  $(S)$  di  $Q_0^*$  quando  $(S)$  va ad applicarsi <sup>1)</sup> su  $Q_0^*$  seco trascinando i raggi di  $B_k$ .

<sup>1)</sup> Si noti che le quadriche dello spazio ellittico coniugate in deformazione alle quadriche dello spazio ordinario non potendo essere quadriche di CLIFFORD, l'applicabilità di  $(S)$  su  $Q_0^*$  sarà sempre determinata a meno di un movimento di  $Q_0^*$  in sè, il che non ha influenza nelle nostre trasformazioni.



Per potere senz'altro applicare le formole precedentemente stabilite per le trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche dello spazio ellittico, trasformiamo omograficamente la metrica ellittica considerata, in modo che l'equazione dell'ellissoide immaginario assunto come assoluto prenda la forma

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Sia

$$(74) \quad \frac{\bar{x}_1^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{b}^2} = \frac{\bar{x}_3^2}{\bar{c}^2} + \bar{x}_0^2$$

l'equazione di  $Q^*$ , che supporremo, per ora, *rigata*, e sia

$$(75) \quad \frac{\bar{x}_1^2}{\bar{a}^2 - \bar{k}_1} + \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{b}^2 - \bar{k}_1} = \frac{\bar{x}_3^2}{\bar{c}^2 + \bar{k}_1} + \bar{x}_0^2 \begin{pmatrix} \bar{a}^2 - \bar{k}_1 < 0 \\ \bar{b}^2 - \bar{k}_1 < 0 \\ \bar{c}^2 + \bar{k}_1 > 0 \end{pmatrix}$$

l'equazione dell'ellissoide immaginario assunto come assoluto. Una trasformazione omografica che serve al nostro scopo sarà allora data evidentemente dalle formole

$$(76) \quad \frac{\bar{x}_1}{\bar{a}_1} = x_1 \quad \frac{\bar{x}_2}{\bar{b}_1} = x_2 \quad \frac{\bar{x}_3}{\bar{c}_1} = x_3 \quad \bar{x}_0 = x_0$$

ove

$$(77) \quad \bar{a}_1^2 = \bar{k}_1 - \bar{a}^2 \quad \bar{b}_1^2 = \bar{k}_1 - \bar{b}^2 \quad \bar{c}_1^2 = \bar{k}_1 + \bar{c}^2.$$

Dopo tale trasformazione l'equazione di  $Q^*$  diverrà

$$(78) \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = \frac{x_3^2}{c^2} + x_0^2$$

ove

$$a = \frac{\bar{a}}{\bar{a}_1} \quad b = \frac{\bar{b}}{\bar{b}_1} \quad c = \frac{\bar{c}}{\bar{c}_1}.$$

La nuova equazione di una quadrica qualunque

$$(79) \quad \frac{\bar{x}_1^2}{\bar{a}^2 + \bar{k}} + \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{b}^2 + \bar{k}} = \frac{\bar{x}_3^2}{\bar{c}^2 - \bar{k}} + \bar{x}_0^2$$

confocale a  $Q^*_0$  sarà poi

$$\frac{\bar{a}_1^2 x_1^2}{\bar{a}^2 + \bar{k}} + \frac{\bar{b}_1^2 x_2^2}{\bar{b}^2 + \bar{k}} = \frac{\bar{c}_1^2 x_3^2}{\bar{c}^2 - \bar{k}} + x_0^2$$

ovvero

$$(80) \quad \frac{x_1^2}{a^2 + k} + \frac{x_2^2}{b^2 - k} = \frac{x_3^2}{c^2 - k} + \frac{x_0^2}{1 - k}$$

ove

$$(81) \quad k = \frac{\bar{k}}{\bar{k}_1 + \bar{k}}.$$

Inoltre le equazioni di una generatrice di  $Q^*_0$  o di una quadrica ad essa confocale, di cui indicheremo con  $\bar{a}'$ ,  $\bar{b}'$ ,  $\bar{c}'$ , i coefficienti,

$$(82) \quad \begin{cases} \bar{x}_1 = \pm \frac{\bar{a}'}{\bar{c}'} \operatorname{sen} \theta \bar{x}_3 + \bar{a}' \cos \theta \bar{x}_0 \\ \bar{x}_2 = \mp \frac{\bar{b}'}{\bar{c}'} \cos \theta \bar{x}_3 + \bar{b}' \operatorname{sen} \theta \bar{x}_0 \end{cases}$$

dopo la trasformazione considerata, posto

$$(83) \quad \frac{\bar{a}'^2}{\bar{a}_1'^2} = a'^2 \quad \frac{\bar{b}'^2}{\bar{b}_1'^2} = b'^2 \quad \frac{\bar{c}'^2}{\bar{c}_1'^2} = c'^2$$

divengono

$$(84) \quad \begin{cases} x_1 = \pm \frac{a'}{c'} \operatorname{sen} \theta x_3 + a' \cos \theta x_0 \\ x_2 = \mp \frac{b'}{c'} \cos \theta x_3 + b' \operatorname{sen} \theta x_0 \end{cases}$$

ciò che mostra,  $a' b' c'$  risultando evidentemente i coefficienti della equazione trasformata, che i valori del parametro che individua le singole generatrici di  $Q^*_0$  non cambiano nella trasformazione omografica considerata.

Osserviamo infine che anche i valori delle nostre solite coordinate curvilinee  $u, v$  non si alterano nella trasformazione in discorso.

Ciò premesso, arriviamo facilmente a dimostrare la prima parte del teorema confrontando tra loro le equazioni differenziali delle

trasformazioni  $B_{\bar{k}}$  relative alle superficie  $(\bar{S})$  colle equazioni delle trasformazioni  $B_k$  relative ad (S).

Detti  $\bar{D}, \bar{D}', \bar{D}''$  i coefficienti della seconda forma fondamentale di  $(\bar{S})$ ,  $D, D', D''$  quelli della seconda forma fondamentali di (S), detti inoltre  $\bar{U}, \bar{V}$  i valori dei secondi membri delle formole (66) di (M) ove in esse per  $a, b, c, a', b', c'$ , si ponga  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'$ , avremo per le prime equazioni

$$(85) \quad \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\bar{a}' \bar{b}' \bar{c}'}{2 \bar{k} \sqrt{\bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{\rho}}} \{ \bar{D} \bar{U} + (\bar{D}' - \bar{D}'_0) \bar{V} \} \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{\bar{a}' \bar{b}' \bar{c}'}{2 \bar{k} \sqrt{\bar{a} \bar{b} \bar{c} \bar{\rho}}} \{ (\bar{D}' - \bar{D}'_0) \bar{U} + \bar{D}'' \bar{V} \}$$

e per le seconde

$$(86) \quad \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{a' b' c'}{2 h \sqrt{a b c \rho}} \{ D U + (D' - D'_0) V \} \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{a' b' c'}{2 h \sqrt{a b c \rho}} \{ (D' - D'_0) U + D'' V \}$$

Faremo ora vedere che se tra  $\bar{k}$  e  $k$  passa la relazione (81), cioè

$$k = \frac{\bar{k}}{\bar{k}_1 + \bar{k}},$$

il che equivale a dire che la quadrica  $Q_{\bar{k}}$  confocale a  $Q^*_0$  nello spazio ordinario, su cui vanno a disporsi gli estremi della congruenza  $B_{\bar{k}}$  quando  $(\bar{S})$  si applica su  $Q^*_0$ , coincide colla quadrica  $Q_k$  confocale a  $Q^*_0$  (nello spazio ellittico) su cui vanno a disporsi gli estremi dei segmenti focali della congruenza  $B_k$  quando (S) si applica su  $Q^*_0$ , i secondi membri delle equazioni (85) per valori eguali di  $\theta$  coincidono cogli analoghi delle equazioni (86). Vuol dire che in tal caso in punti di  $(\bar{S})$  (S) corrispondenti agli stessi valori di  $u, v$ , cioè in punti che quando  $(\bar{S})$  (S) si applicano su  $Q^*_0$  vanno a sovrapporsi, i valori di  $\theta$  risulteranno eguali, se si scelgono eguali inizialmente in un punto arbitrario di  $Q^*_0$ , e quindi la congruenza ottenuta da una  $B_{\bar{k}}$  relativa ad  $(\bar{S})$  quando  $(\bar{S})$  si applica su  $Q^*_0$ , coinciderà colla congruenza ottenuta da una  $B_k$  relativa ad (S) quando anche (S) si applica su  $Q^*_0$ .

Per dimostrare che i secondi membri delle equazioni (85) (86)

coincidono dei valori eguali di  $\theta$ , cominciamo dall'osservare che, essendo

$$\frac{\bar{a}'}{\bar{a}} = \frac{a'}{a} \quad \frac{\bar{b}'}{\bar{b}} = \frac{b'}{b} \quad \frac{\bar{c}'}{\bar{c}} = \frac{c'}{c}$$

nella nostra ipotesi si ha evidentemente, confrontando i valori di  $\bar{U}, \bar{V}$  [V. (M) § 12 (66)] coi valori di  $U, V$ , [(29<sub>2</sub>)(29<sub>3</sub>)] si ha

$$\bar{U} = U \quad \bar{V} = V.$$

Le superficie (S) ed ( $\bar{S}$ ) essendo poi coniugate in deformazione, si avrà

$$\frac{\bar{D}}{\bar{D}} = \frac{\bar{D}'}{\bar{D}'} = \frac{\bar{D}''}{\bar{D}''}$$

e poichè il rapporto dei coefficienti delle seconde forme fondamentali di due superficie coniugate in deformazione conserva inalterato il suo valore in qualunque deformazione simultanea delle superficie stesse, sarà anche

$$\frac{\bar{D}}{\bar{D}} = \frac{\bar{D}'}{\bar{D}'} = \frac{\bar{D}''}{\bar{D}''} = \frac{\bar{D}'_0}{\bar{D}'_0}.$$

Ora si ha [V. (M) § 12]

$$\bar{D}'_0 = -2(u+v)^{-2} \frac{\sqrt{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}}{\sqrt{\bar{\rho}}}$$

inoltre (V. § 2)

$$D'_0 = -2H^{-2} R^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{\rho}}.$$

Quindi le due identità da dimostrarsi

$$\frac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{2\bar{k}\sqrt{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\bar{\rho}} \{ \bar{D}\bar{U} + (\bar{D}' - \bar{D}'_0)\bar{V} \} = \frac{a'b'c'}{2h\sqrt{abc}R\rho} \{ DU + (D' - D'_0)V \}$$

$$\frac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{2\bar{k}\sqrt{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}\bar{\rho}} \{ (\bar{D}' - \bar{D}'_0)\bar{U} + \bar{D}''\bar{V} \} = \frac{a'b'c'}{2h\sqrt{abc}R\rho} \{ (D' - D'_0)U + D''V \}$$

si riducono all'unica

$$(87) \quad \frac{\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}'}{\bar{k}(u+v)^2\bar{\rho}} = \frac{a'b'c'R}{hH^2\rho}$$

ed essendo

$$a' = \frac{\bar{a}'}{\bar{a}_1} \quad b' = \frac{\bar{b}'}{\bar{b}_1} \quad c' = \frac{\bar{c}'}{\bar{c}_1} \quad h = \frac{\bar{k}}{\bar{k}_1}$$

questa diviene

$$(88) \quad \frac{\bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{c}_1}{\bar{\rho}(u+v)^2} = \frac{R \bar{k}}{h \rho H^2}.$$

Ricordiamo ora che condizione necessaria e sufficiente affinchè due superficie sulle quali si corrispondono le asintotiche, siano coniugate in deformazione, è che si corrispondano anche le geodetiche. Tra i simboli di CHRISTOFFEL relativi alle prime forme fondamentali di  $(\bar{S})$  (S) avremo dunque le relazioni

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{11} \\ 1 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} \bar{12} \\ 2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{22} \\ 2 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} \bar{12} \\ 1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \bar{11} \\ 2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \bar{22} \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Ora, siccome

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \bar{11} \\ 1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \bar{22} \\ 2 \end{Bmatrix} = - \frac{\partial \log(u+v)^2}{\partial u} = - \frac{\partial \log(u+v)^2}{\partial v} \\ \begin{Bmatrix} \bar{11} \\ 2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \bar{22} \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{Bmatrix} \bar{12} \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \bar{\rho}}{\partial v} \begin{Bmatrix} \bar{12} \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \bar{\rho}}{\partial u} \end{aligned}$$

e analogamente [V. § 2 (23) (24) (25)]

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} &= - \frac{\partial \log H^2}{\partial u} \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = - \frac{\partial \log H^2}{\partial v} \\ \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \rho}{\partial u}, \end{aligned}$$

queste quattro condizioni si riducono all'unica

$$(89) \quad \frac{\bar{\rho}(u+v)^2}{\rho H^2} = \text{cost.}$$

Calcolando il valore del 1° membro ad es. per  $u = v = 0$  si trova

$$(90) \quad \frac{\bar{\rho}(u+v)^2}{\rho H^2} = \frac{\bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{c}_1}{R \bar{k}_1}$$

e con ciò l'identità (88) e con essa la 1ª parte del nostro teorema risulta dimostrata.

Del resto la (90) si verifica direttamente senza difficoltà, e ciò prova di nuovo che le superficie (S) ( $\bar{S}$ ) sono coniugate in deformazione.

### § 10.

#### Corrispondenza delle asintotiche su (S) (S').

##### Dimostrazione della proprietà $\beta$ ).

Applichiamo subito i risultati ottenuti a dimostrare che anche le conseguenze  $B_k$  dello spazio ellittico sono congruenze W. Intanto da quanto ora abbiamo dimostrato segue subito che se (S) è una deformata qualunque di una quadrica che non sia una quadrica di CLIFFORD, e si considera una congruenza  $B_k$  ad essa relativa, lungo ogni sua asintotica  $a$  la funzione  $\theta(u, v)$  si ridurrà a una funzione dell'arco di  $a$  che non varia se (S) si flette intorno ad  $a$ . Da ciò deduciamo subito (cfr. (M) § 35) che, almeno le congruenze  $B_k$  relative a quadriche che non siano quadriche di CLIFFORD, sono congruenze W. Siccome poi dimostreremo in seguito con tutto rigore che il caso delle quadriche di CLIFFORD non fa eccezione, possiamo affermare che vale il seguente

*Teorema III. Le congruenze  $B_k$  sono tutte congruenze W.*

Dopo questo per dimostrare che le superficie (S') ( $\bar{S}'$ ) considerate nell'enunciato della proprietà  $\beta$ ) sono coniugate in deformazione, basterà evidentemente dimostrare che su di esse si corrispondono le linee geodetiche.

Ciò risulta immediatamente dall'osservare che i segmenti focali  $\overline{FF}'$  della congruenza  $B_k$ , trascinati da (S) nella sua applicazione su  $Q_0^*$ , vanno a coincidere coi segmenti focali corrispondenti della congruenza  $B_{\bar{k}}$ , trascinati da ( $\bar{S}$ ) nella sua applicazione su  $Q_0^*$ .

Diciamo infatti  $M^*_0$  la posizione finale comune di  $F, \bar{F}$  ed  $M^*$  la posizione finale comune di  $F', \bar{F}'$ : sia inoltre  $M^*_1$  il punto di  $Q^*_0$  che corrisponde ad  $M^*$  nell'affinità d'Ivory tra la quadrica  $Q^*_0$  e la quadrica  $Q'^*$  luogo dei punti  $M'^*$ , che, come si è osservato, è confocale a  $Q^*_0$  sia nello spazio ordinario che nello spazio ellittico. Evidentemente, se pensiamo di applicare  $(S')$  e  $(\bar{S}')$  su  $Q^*_0$  i punti  $F', \bar{F}'$  si sovrapporranno in  $M^*_1$ . Ora le geodetiche euclidee di  $Q^*_0$  sono pure le geodetiche di  $Q^*_0$  quando si consideri come appartenente allo spazio ellittico, quindi risulta evidente che se il punto  $F'$  descrive una geodetica su  $(S')$  anche  $\bar{F}'$  descrive una geodetica su  $(\bar{S}')$ .

Con questo il nostro teorema risulta completamente dimostrato.

Osserviamo esplicitamente che la dimostrazione data non si limita al caso che la quadrica  $Q^*_0$  sia una quadrica rigata, ma conserva inalterato il suo valore anche se  $Q^*_0$  è una quadrica non rigata o una quadrica immaginaria, la dimostrazione precedente valendo egualmente nel caso che i coefficienti  $a, b, c$  siano reali e nel caso che alcuni siano puramente immaginari: anzi si può osservare che i procedimenti analitici impiegati sono applicabili anche al caso più generale di  $a, b, c$  immaginari comunque.

Vogliamo ora vedere se assegnata una quadrica (a coefficienti reali) dello spazio ellittico, ad essa si può sempre applicare il teorema dimostrato.

Ciò sarà possibile evidentemente allora e allora soltanto che il sistema di quadriche confocali dello spazio ellittico individuato dalla quadrica assegnata si possa con un'omografia cambiare in un sistema di quadriche confocali dello spazio ordinario. Bisognerà e basterà dunque che una almeno delle coniche focali della schiera confocale cui appartiene la quadrica assegnata sia propria. Ora se

$$\frac{x_1^2}{A} + \frac{x_2^2}{B} + \frac{x_3^2}{C} + \frac{x_0^2}{D} = 0 \quad (A \geq B \geq C \geq D)$$

è l'equazione della quadrica assegnata, nell'ipotesi che l'equazione dell'assoluto sia

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_0^2 = 0,$$

per ciò sarà necessario e sufficiente che non sia insieme

$$A = B \quad C = D$$

cioè la quadrica assegnata non sia una *quadrica di Clifford*. Ciò del resto si verifica molto facilmente sulle formole effettive di trasformazione.

Possiamo dunque concludere che il nostro teorema è applicabile a tutte le quadriche dello spazio ellittico, fatta eccezione per le quadriche di CLIFFORD.

Notiamo di più che da quanto abbiamo ora detto risulta anche che ad ogni quadrica  $Q_0$  dello spazio ellittico diversa da una quadrica di CLIFFORD corrisponde almeno una quadrica coniugata in deformazione nello spazio ordinario. Dalle proprietà della *trasformazione H* nello spazio ordinario segue poi immediatamente che se la quadrica  $Q_0$  non è di rotazione, essa ha due coniugate in deformazione nello spazio ordinario, che sono due iperbooidi ad una falda, se  $Q_0$  è a punti iperbolici, un elissoide e un iperboloide a due falde se  $Q_0$  è a punti ellittici.

Noi diremo trasformazione *H* (delle superficie applicabili sulle quadriche dello spazio ellittico in superficie applicabili su quadriche dello spazio ordinario) il passaggio da una deformata ( $S$ ) di una quadrica  $Q_0$  dello spazio ellittico (diversa da una quadrica di CLIFFORD) alla deformata corrispondente ( $\bar{S}$ ) di una quadrica  $\bar{Q}_0$  coniugata in deformazione nello spazio ordinario a  $Q_0$ . Tale trasformazione godrà naturalmente di tutte le proprietà che valgono nel passaggio da una superficie ad una superficie coniugata in deformazione, ma di più, dopo quanto abbiamo dimostrato, avremo che vale il seguente

TEOREMA IV. — *Data una congruenza  $B_k$  dello spazio ellittico colle due falde focali ( $S$ ) ( $S'$ ) applicabili sopra una quadrica  $Q_0$ , la trasformazione *H* cambia tale congruenza  $B_k$  in una congruenza  $B_k$  dello spazio ordinario le cui due falde focali ( $\bar{S}$ ) ( $\bar{S}'$ ) sono le deformate corrispondenti ad ( $S$ ) ( $S'$ ) della quadrica  $\bar{Q}_0$  coniugata in deformazione a  $Q_0$  nello spazio ordinario.*

Osserviamo infine che, assegnata una deformata ( $S$ ) di una qua-



drica  $Q_0$  dello spazio ellittico e la deformata corrispondente  $(\bar{S})$  di una quadrica  $\bar{Q}_0$  coniugata in deformazione nello spazio ordinario, da ogni superficie trasformata di  $(\bar{S})$  mediante una  $B_{\bar{k}}$  dello spazio ordinario, si deduce in termini finiti una superficie trasformata di  $(S)$  mediante una  $B_k$  dello spazio ellittico. In tal modo si passa dalle superficie applicabili sull'iperboloide ad una falda dello spazio ordinario alle superficie applicabili sulle quadriche rigate dello spazio ellittico, e dalle superficie applicabili sull'elissoide o sull'iperboloide a due falde dello spazio ordinario, alle superficie applicabili sulle quadriche rigate dello spazio ellittico.

### § 11.

#### Applicazioni della trasformazione H.

Lo stretto legame posto dal teorema precedente tra le trasformazioni  $B_k$  dello spazio ellittico e dello spazio ordinario, può servire ad estendere molto facilmente allo spazio ellittico alcuni dei risultati che per tali trasformazioni si ottengono nello spazio ordinario.

Intanto abbiamo già osservato come dalle proprietà della trasformazione stessa si deduce che sulle due falde di una congruenza  $B_k$  si corrispondono le asintotiche.

Dopo ciò, ripetendo i ragionamenti del § 36 di (M), si arriva alla conclusione che, almeno per le congruenze  $B_k$  dello spazio ellittico relative a quadriche diverse da quadriche di CLIFFORD, valgono dei teoremi del tutto analoghi ai teoremi enunciati per le congruenze  $B_k$  dello spazio ordinario nei numeri VIII, IX dell'Introduzione di (M). Completando questi risultati coi risultati corrispondenti per le quadriche di CLIFFORD, che otterremo per altra via al § 20, giungiamo ai seguenti teoremi:

**TEOREMA V.** — *Se la superficie (S) si deforma intorno all'asintotica invariabile (a), la superficie trasformata (S') definita da un segmento iniziale invariabile [e da una legge d'applicabilità di (S) su  $Q_0$  pure invariabile] si deforma allo stesso modo intorno alla linea corrispondente a', che resta pure invariabile.*

TEOREMA VI. — *Sulle due falde focali (S) (S') di una delle nostre congruenze W consideriamo due linee asintotiche corrispondenti  $a, a'$ . Tiriamo poi pei punti di  $a$  le rette tangenti alle linee geodetiche  $g$  di (S) trasformate delle rette di un sistema di  $Q_0$  nell'applicabilità di (S) su  $Q_0$  che serve a definire la nostra congruenza, e pei punti di  $a'$  le rette tangenti alle geodetiche  $g'$  di (S') che corrispondono alle geodetiche  $g$  nell'applicabilità di (S') su (S) considerata nel teorema I. Le due superficie rigate  $R, R'$  così ottenute sono applicabili sulla quadrica  $Q_0$  e formano alla lor volta le due falde focali di una congruenza  $B_k$ .*

È immediato poi che dalla corrispondenza dei sistemi coniugati permanenti sulle due falde di una congruenza  $B_k$  dello spazio ordinario si deduce che vale il seguente

TEOREMA VII. — *Al sistema coniugato di (S) permanente nell'applicabilità di (S) su  $Q_0$  che definisce la congruenza  $B_k$  considerata, corrisponde il sistema coniugato di (S') permanente nell'applicabilità di (S') su  $Q_0$  considerata nel teorema I.*

Ciò del resto si può verificare con un calcolo del tutto analogo a quello che vale per dimostrare la proprietà corrispondente nello spazio ordinario.

Ricordiamo anche (V. (M) §§ 51-55) che nello spazio ordinario, data una quadrica generale a centro  $Q_0$ , esiste una proiezione che la trasforma in una quadrica a centro  $Q_0^{(1)}$  ad essa coniugata in deformazione e confocale, e di più trasforma la congruenza  $C_{\bar{k}}$  che si ottiene da una  $B_{\bar{k}}$  avente per una delle falde focali una deformata  $(\bar{S})$  di  $\bar{Q}_0$ , quando  $(\bar{S})$  si applica su  $\bar{Q}_0$  seco trascinando i raggi di  $B_{\bar{k}}$ , in una congruenza  $C_{\bar{k}}^{(1)}$ , una delle cui falde focali è  $Q_0^{(1)}$ , ed è tale che quando  $Q_0^{(1)}$  si deforma in modo da assumere la configurazione  $(\bar{S})^{(1)}$  corrispondente ad  $(\bar{S})$ , i suoi raggi vengono a formare una congruenza  $B_{\bar{k}}^{(1)}$  relativa ad  $(\bar{S})^{(1)}$ , la cui seconda falda focale è coniugata in deformazione alla seconda falda focale della congruenza primitiva.

Assumiamo allora un ellissoide immaginario della schiera confocale cui appartengono  $\bar{Q}_0, Q_0^{(1)}$  come assoluto di una metrica ellit-

tica: per i risultati del precedente paragrafo evidentemente le due quadriche  $\bar{Q}_0, \bar{Q}_0^{(1)}$  risulteranno coniugate in deformazione anche quando si considerino come appartenenti a tale metrica, e le due congruenze  $C_{\bar{k}}, C_{\bar{k}}^{(1)}$  si potranno considerare come provenienti da due delle nostre trasformazioni relative alle superficie (S), (S)<sup>(1)</sup> che sono le deformate di  $\bar{Q}_0, \bar{Q}_0^{(1)}$ , considerate come appartenenti alla metrica ellittica definita, coniugate in deformazione ad  $(\bar{S}), (\bar{S})^{(1)}$ .

Vediamo così che data una quadrica generale (a coefficienti reali) dello spazio ellittico, esiste sempre una proiettività che la trasforma in una seconda quadrica dello spazio ellittico ad essa confocale e coniugata in deformazione. Per analogia colle denominazioni dello spazio ordinario, diremo ancora trasformazione H (delle quadriche dello spazio ellittico in quadriche dello spazio ellittico) il passaggio da una deformata (S) di una quadrica  $Q_0$  dello spazio ellittico alla deformata corrispondente (S)<sup>(1)</sup> della quadrica  $Q_0^{(1)}$  coniugata in deformazione nello spazio ellittico. Da quanto precede possiamo dunque concludere che anche nello spazio ellittico la trasformazione H oltre che di tutte le proprietà che valgono nel passaggio da una superficie ad una superficie ad essa coniugata in deformazione, gode della seguente proprietà: *di cambiare una congruenza  $B_k$  colle due falde (S) (S)' applicabili sopra  $Q_0$ , in un'altra congruenza  $B_k^{(1)}$  le cui falde focali (S)<sup>(1)</sup> (S')<sup>(1)</sup> sono le deformate di  $Q_0^{(1)}$  corrispondenti ad (S) (S)'*.

Applichiamo infine la trasformazione H delle quadriche dello spazio ellittico in quadriche dello spazio ordinario, allo studio delle congruenze  $B_k$  dello spazio ellittico, in quanto riguarda la realtà o meno degli elementi geometrici in esse considerati.

Ciò si fa molto facilmente tenendo presente che la legge di corrispondenza tra una deformata (S) di una quadrica  $Q_0$  dello spazio ellittico e la deformata  $(\bar{S})$  corrispondente della quadrica  $\bar{Q}_0$  coniugata in deformazione nello spazio ordinario è data semplicemente dall'eguaglianza dei valori delle coordinate  $u, v$ .

Da ciò si deduce subito che le superficie (S),  $(\bar{S})$  saranno insieme applicabili realmente oppure idealmente sulle quadriche cor-

rispondenti. D'altra parte se  $(\bar{S})$  è reale esistono  $\infty^2$  congruenze  $B_{\bar{k}}$  dello spazio ordinario la cui prima falda è  $(\bar{S})$  e la seconda è applicabile realmente o idealmente su  $\bar{Q}_0$  secondochè  $\bar{Q}_0$  è a generatrici reali o immaginarie. Concludiamo di qui che:

*Ogni deformata (S) reale di una quadrica (a coefficienti reali) dello spazio ellittico, corrispondentemente ad ogni applicabilità sulla quadrica relativa, appartiene come prima falda focale a una doppia infinità di congruenze W reali le cui seconde falde focali (S') sono applicabili sulla stessa quadrica. L'applicabilità delle due superficie (S), (S') è reale per le quadriche a generatrici reali, ideale per le quadriche a generatrici immaginarie.*

Osserviamo infine che la considerazione fatta che la legge di corrispondenza tra (S), (S') è data semplicemente dall'eguaglianza dei valori delle coordinate  $u, v$  ci permette di asserire che, allo stesso modo che nello spazio ordinario le superficie applicabili idealmente sull'iperboloide ad una falda si decompongono in due classi, e una congruenza  $B_{\bar{k}}$  aventi per 1.<sup>a</sup> falda focale una di tali superficie ha per 2.<sup>a</sup> falda focale una superficie della stessa classe, così nello spazio ellittico le superficie applicabili idealmente sulle quadriche rigate si decompongono in due classi, e una congruenza  $B_k$  avente per prima falda focale una di tali superficie ha per seconda falda focale una superficie della stessa classe. Invece per le quadriche non rigate dello spazio ellittico non avremo che una sola classe di superficie reali applicabili su di esso idealmente; allo stesso modo che nello spazio ordinario si ha una sola classe di superficie applicabili idealmente sull'elissoide o sull'iperboloide a due falde. Infine per le quadriche immaginarie avremo, analogamente a quanto succede nello spazio ordinario per l'elissoide immaginario, più classi di superficie reali applicabili. Una di esse si ottiene assumendo  $u, v$ , immaginari coniugati: nel caso particolare che la quadrica immaginaria considerata sia una sfera, tale classe di superficie si riduce a una classe di superficie pseudosferiche reali, e le sue trasformazioni  $B_k$  divengono le trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie stesse (Cfr. § 14 e (M) § 70).

## § 12.

**Le trasformazioni  $B_k$  delle deformate rigate.**

Vogliamo ora applicare i risultati ottenuti nei §§ precedenti per la trasformazione  $B_k$  di una superficie (S) applicabile sopra una quadrica al caso che la (S) sia una rigata R. Otterremo così dei teoremi del tutto analoghi ai teoremi che valgono nello spazio ordinario per la trasformazione  $B_k$  delle rigate applicabili sulle quadriche, purchè si escludano dalle nostre considerazioni le trasformazioni  $B_k$  delle rigate a curvatura nulla che corrispondono ad applicabilità sopra una quadrica di CLIFFORD nelle quali le rette della rigata non si sovrappongono alle rette della quadrica.

Supponiamo dunque che sulla (S) ad es. le  $v = \text{cost}$  siano rette, e vediamo in primo luogo quale forma prendono le equazioni fondamentali (I). Supposto che (S), che d'ora innanzi indicheremo con R, provenga da  $Q_0$  per deformazione continua, troviamo subito per le equazioni di GAUSS e di CODAZZI, che i coefficienti della seconda forma fondamentale di R saranno dati da

$$D = 0 \quad D' = D'_0 \quad D'' = \frac{\varphi(v)}{R} H^2 \sqrt{EG - F^2}$$

ove  $\varphi(v)$  è una funzione arbitraria della  $v$  soltanto, che fissa la forma della rigata. Dopo ciò l'equazioni (I), tenendo conto del valore effettivo (20) di  $D'_0$ , assumono evidentemente la forma

$$(I)^* \quad \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \pm \frac{a' b' c'}{h} \varphi(v) V.$$

Dalla prima di queste equazioni ricaviamo che nel caso considerato  $\theta$  risulterà una funzione  $\theta(v)$  di  $v$  soltanto. Vuol dire che se R si deforma fino ad applicarsi su  $Q_0$ , seco trascinando i segmenti focali di una delle congruenze considerate, gli estremi dei segmenti corrispondenti ai punti di una linea  $v = \text{cost}$  di R a deformazione compiuta si disporranno sopra una stessa generatrice di  $Q_k$ . Ciò prova che la linea corrispondente ad una linea  $(v)$  di R sopra la

seconda falda focale di una delle congruenze considerate è una retta: precisamente se pensiamo di portare la quadrica  $Q_0$  ad avere in comune con  $R$  la generatrice ( $v$ ), in modo che lungo tal generatrice si sovrappongano i punti e i piani tangenti corrispondenti delle due superficie, la retta in questione verrà ad appartenere alla quadrica  $Q_k$ , supposta invariabilmente unita a  $Q_0$ . Dopo ciò possiamo evidentemente affermare che vale il seguente

TEOREMA VIII. — *Se una quadrica  $Q_0$  rotola sopra una sua deformata rigata  $R$ , trascinando la quadrica omofocale  $Q_k$ , le generatrici, (dell'uno o dell'altro sistema) di  $Q_k$  generano una congruenza  $\Gamma$ , che si decompone, in una maniera perfettamente determinata, in  $\infty^1$  rigate  $R'$ , ciascuna delle quali forma colla superficie primitiva  $R$  le due falde focali di una congruenza  $W$  e risulta trasformata asintotica di  $R$ . Le nuove superficie rigate  $R'$ , sono alla lor volta applicabili sulla quadrica  $Q_0$ , e danno le  $\infty^1$  superficie derivate da  $R$  per mezzo della trasformazione  $B_k$  che corrisponde alla quadrica omofocale  $Q_k$  [e all'applicabilità di  $R$  sopra  $Q_0$  in cui le generatrici di  $R$  si distendono sulle generatrici di un sistema di  $Q_0$ ].*

Il teorema seguita a sussistere anche nel caso che la quadrica omofocale  $Q_k$  si riduca ad una delle coniche focali: soltanto allora saranno le tangenti alla conica focale trascinata da  $Q_0$  nel suo rotolamento sopra  $R$  che descriveranno la congruenza  $\Gamma$  del teorema precedente.

Osserveremo anche che dalle (I)\* si deduce immediatamente il seguente teorema:

*Si stabilisca ad arbitrio una corrispondenza (continua e derivabile) tra una generatrice mobile  $g$  di  $Q_0$  e una generatrice mobile  $g'$  della quadrica omofocale  $Q_k$ . Esiste allora una ed una sola deformata di  $Q_0$  in una rigata  $R$ , tale che le generatrici  $g'$ , invariabilmente legate ciascuna alla corrispondente  $g$ , abbiano per luogo, a deformazione compiuta, una rigata  $R'$ , trasformata asintotica di  $R$  per una  $B_k$ .*

## § 13.

**Relazione reciproca tra (S) ed (S').**

Sia (S) una deformata qualunque di  $Q_0$ , (S') una superficie da essa derivata per una  $B^k$ . Vogliamo ora dimostrare che a sua volta (S) si può considerare come derivata da (S') mediante una trasformazione  $B_k$ , collo stesso valore del parametro  $k$ . A ciò arriveremo molto semplicemente basandoci sulle proprietà della trasformazione H delle quadriche dello spazio ellittico in quadriche dello spazio ordinario. Intanto basterà che dimostriamo la proprietà enunciata nel caso che (S) sia una rigata R [e la trasformazione  $B_k$  considerata corrisponda a un'applicabilità di R sopra  $Q_0$  in cui le generatrici di R si distendano su rette di  $Q_0$ ] ciò che porta che anche (S') sarà una rigata R'. Dopo questo dal teorema VI potremo subito dedurre che la proprietà enunciata vale in generale.

Supponiamo allora che  $Q_0$  non sia una quadrica di CLIFFORD e consideriamo le rigate  $\bar{R}, \bar{R}'$  coniugate in deformazione a R, R' nello spazio ordinario. Tali superficie si potranno porre in una tale posizione reciproca che  $\bar{R}'$  risulti da  $\bar{R}$  mediante una trasformazione  $B_{\bar{k}}$  dello spazio ordinario, e allora anche  $\bar{R}$  risulterà derivata da  $\bar{R}'$  mediante una  $B_{\bar{k}}$ . Di qui, ricordando le proprietà della trasformazione H, deduciamo subito che esisterà una trasformazione  $B_k$  dello spazio ellittico che da R' farà passare ad una rigata identica ad R, e che in tale trasformazione riusciranno punti corrispondenti i punti che riuscivano punti corrispondenti nella trasformazione di R in R': di più i segmenti che uniscono le coppie di punti corrispondenti saranno eguali nei due casi. Queste condizioni, come subito si vede, sono più che sufficienti per potere affermare che tali segmenti avranno nei due casi la stessa posizione rispetto ad R', e ciò prova (almeno se  $Q_0$  non è una quadrica di CLIFFORD) che se R' è una rigata derivata da una rigata R mediante una trasformazione  $B_k$ , anche R, fissa restando la posizione relativa di R, R', si può considerare come derivata da R' mediante una  $B_k$ .

Ora si vede subito che questo risultato equivale al seguente.

• Siano  $g_1 g_2$  due generatrici qualunque di  $Q_0$ , appartenenti allo stesso sistema o a sistemi opposti: e siano  $\bar{g}_1 \bar{g}_2$  le generatrici ad esse corrispondenti l'affinità d'IVORY sulla quadrica confocale  $Q_k$ . Stabiliamo una corrispondenza (proiettiva) tra i punti delle quattro rette, facendo corrispondere ad ogni punto  $M_1$  di  $g_1$  il punto  $\bar{M}_2$  di  $\bar{g}_2$ , ove questa retta incontra il piano tangente a  $Q_0$  in  $M_1$ , e i punti  $\bar{M}_1$  di  $\bar{g}_1$ ,  $M_2$  di  $g_2$  corrispondenti ad  $M_1$  ed  $\bar{M}_2$  nell'affinità d'IVORY tra  $Q_0, Q_k$ . *Esiste allora un movimento rigido o una simmetria che sovrappone la coppia di rette ( $g_1 \bar{g}_2$ ) caricata dei punti  $M_1$  ed  $\bar{M}_2$ , alla coppia ( $\bar{g}_1 g_2$ ) caricata dei punti corrispondenti  $\bar{M}_1$  ed  $M_2$ .*

D'altra parte questa proprietà, per la continuità degli elementi geometrici considerati, seguita a sussistere anche nel caso che  $Q_0$  sia una quadrica di CLIFFORD. Possiamo dunque affermare che il risultato precedente vale senza eccezioni, ed infine che *la relazione tra le due falde (S) (S') di una qualunque congruenza  $B_k$  è reciproca.*

Del resto l'esistenza di un movimento rigido o di una simmetria che goda della proprietà pocanzi considerata, si dimostra in modo del tutto rigoroso e senza eccezione nel modo seguente che ne fa conoscere anche l'espressione effettiva.

Supponiamo dapprima che  $g_1 g_2$  appartengano ad uno stesso sistema di  $Q_0$ , ad es. al 1°, e siano

$$g_1) \begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{a}{c} \operatorname{sen} \theta_1 x_3^{(1)} + a \cos \theta_1 x_0^{(1)} \\ x_2^{(1)} = -\frac{b}{c} \cos \theta_1 x_3^{(1)} + b \operatorname{sen} \theta_1 x_0^{(1)} \end{cases} \quad g_2) \begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{a}{c} \operatorname{sen} \theta_2 x_3^{(2)} + a \cos \theta_2 x_0^{(2)} \\ x_2^{(2)} = -\frac{b}{c} \cos \theta_2 x_3^{(2)} + b \operatorname{sen} \theta_2 x_0^{(2)} \end{cases}$$

le loro equazioni. Le generatrici  $\bar{g}_1 \bar{g}_2$  che loro corrispondono nell'affinità d'IVORY sulla quadrica omofocale  $Q_k$  avranno l'equazioni:

$$\bar{g}_1) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-k}} \bar{x}_1^{(1)} = \frac{a'}{c} \operatorname{sen} \theta_1 \bar{x}_3^{(1)} + a' \cos \theta_1 \bar{x}_0^{(1)} \\ \frac{1}{\sqrt{1-k}} \bar{x}_2^{(1)} = -\frac{b'}{c} \cos \theta_1 \bar{x}_3^{(1)} + b' \operatorname{sen} \theta_1 \bar{x}_0^{(1)} \\ \frac{1}{\sqrt{1-k}} \bar{x}_3^{(1)} = \frac{c'}{c} \bar{x}_3^{(1)} \\ \frac{1}{\sqrt{1-k}} \bar{x}_0^{(1)} = \bar{x}_0^{(1)} \end{cases} \quad \bar{g}_2) \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-k}} \bar{x}_1^{(2)} = \frac{a'}{c} \operatorname{sen} \theta_2 \bar{x}_3^{(2)} + a' \cos \theta_2 \bar{x}_0^{(2)} \\ \frac{1}{\sqrt{1-k}} \bar{x}_2^{(2)} = -\frac{b'}{c} \cos \theta_2 \bar{x}_3^{(2)} + b' \operatorname{sen} \theta_2 \bar{x}_0^{(2)} \\ \frac{1}{\sqrt{1-k}} \bar{x}_3^{(2)} = \frac{c'}{c} \bar{x}_3^{(2)} \\ \frac{1}{\sqrt{1-k}} \bar{x}_0^{(2)} = \bar{x}_0^{(2)} \end{cases}$$



ove  $x_3^{(1)}$ ,  $x_0^{(1)}$  e  $x_3^{(2)}$ ,  $x_0^{(2)}$  devono intendersi rispettivamente legati dalle relazioni

$$1 = \left( \frac{a^2}{c^2} \operatorname{sen}^2 \theta_1 + \frac{b^2}{c^2} \cos^2 \theta_1 + 1 \right) x_3^{(1)^2} + (a^2 \cos^2 \theta_1 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta_1 + 1) x_0^{(1)^2}$$

$$1 = \left( \frac{a^2}{c^2} \operatorname{sen}^2 \theta_2 + \frac{b^2}{c^2} \cos^2 \theta_2 + 1 \right) x_3^{(2)^2} + (a^2 \cos^2 \theta_2 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2 + 1) x_0^{(2)^2}.$$

Osserviamo subito che l'arbitrarietà nella scelta di  $x_3^{(1)}$ ,  $x_0^{(1)}$  nella prima di queste relazioni, o di  $x_3^{(2)}$ ,  $x_0^{(2)}$  nella seconda, è perfettamente equivalente a scegliere arbitrariamente il rapporto  $\frac{x_3^{(1)}}{x_0^{(1)}}$  nel primo caso, o il rapporto  $\frac{x_3^{(2)}}{x_0^{(2)}}$  nel secondo.

Supponiamo ora che esista un movimento rigido che soddisfi alle condizioni volute, e siano

$$\varepsilon_i = a_{i0} x_0 + a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \quad (i=0, 1, 2, 3)$$

le equazioni che lo definiscono. Tali equazioni dovranno esser soddisfatte identicamente per ogni valore di  $\frac{x_3^{(1)}}{x_0^{(1)}}$  quando si ponga

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0^{(1)} & x_1 &= x_1^{(1)} & x_2 &= x_2^{(1)} & x_3 &= x_3^{(1)} \\ \varepsilon_0 &= \bar{x}_0^{(1)} & \varepsilon_1 &= \bar{x}_1^{(1)} & \varepsilon_2 &= \bar{x}_2^{(1)} & \varepsilon_3 &= \bar{x}_3^{(1)} \end{aligned}$$

e anche dovranno esser soddisfatte identicamente per ogni valore del rapporto  $\frac{x_3^{(2)}}{x_0^{(2)}}$  quando si ponga

$$\begin{aligned} x_0 &= \bar{x}_0^{(2)} & x_1 &= \bar{x}_1^{(2)} & x_2 &= \bar{x}_2^{(2)} & x_3 &= \bar{x}_3^{(2)} \\ \varepsilon_0 &= x_0^{(2)} & \varepsilon_1 &= x_1^{(2)} & \varepsilon_2 &= x_2^{(2)} & \varepsilon_3 &= x_3^{(2)}. \end{aligned}$$

Queste condizioni ci danno per le  $a_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2, 3$ ) un sistema di 16 equazioni lineari, che risoluto, posto

$$\Delta = (acb' + a'c'b) \cos \theta_1 \cos \theta_2 + (ab'c' + a'bc) \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 - (abc' + a'b'c)$$

ci dà

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{00} = (1-k) \{ \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 ab'c' + \cos \theta_1 \cos \theta_2 a'bc' - a'b'c \} + \\ + \{ a'bc \text{ sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 + ab'c \cos \theta_1 \cos \theta_2 - abc' \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{01} = k \{ bc' \cos \theta_1 - b'c \cos \theta_2 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{02} = k \{ ac' \text{ sen } \theta_1 - a'c \text{ sen } \theta_2 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{03} = k \{ ab' \text{ sen } \theta_1 \cos \theta_2 - a'b \cos \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{10} = k \{ bc' \cos \theta_2 - b'c \cos \theta_1 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{11} = (1-k) \{ \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 a'b'c' + \cos \theta_1 \cos \theta_2 a'b'c - a'c'b \} + \\ + \{ abc \text{ sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 + abc' \cos \theta_1 \cos \theta_2 - ab'c \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{12} = k \{ c \cos \theta_1 \text{ sen } \theta_2 - c' \text{ sen } \theta_1 \cos \theta_2 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{13} = k \{ b \text{ sen } \theta_2 - b' \text{ sen } \theta_1 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{20} = k \{ ac' \text{ sen } \theta_2 - a'c \text{ sen } \theta_1 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{21} = k \{ c \text{ sen } \theta_1 \cos \theta_2 - c' \cos \theta_1 \text{ sen } \theta_2 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{22} = (1-k) \{ \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 a'b'c + \cos \theta_1 \cos \theta_2 abc - ab'c' \} + \\ + \{ abc' \text{ sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 + abc \cos \theta_1 \cos \theta_2 - a'bc \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{23} = k \{ a' \cos \theta_1 - a \cos \theta_1 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{30} = k \{ ab' \text{ sen } \theta_2 \cos \theta_1 - a'b \cos \theta_2 \text{ sen } \theta_1 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{31} = k \{ b \text{ sen } \theta_1 - b' \text{ sen } \theta_2 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{32} = k \{ a' \cos \theta_2 - a \cos \theta_1 \}$$

$$\sqrt{1-k} \Delta a_{33} = (1-k) \{ \text{sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 a'bc' + \cos \theta_1 \cos \theta_2 ab'c' - a'b'c' \} + \\ + \{ ab'c \text{ sen } \theta_1 \text{ sen } \theta_2 + a'bc \cos \theta_1 \cos \theta_2 - abc \}.$$

Si verifica facilmente che i valori così determinati pei coefficienti  $a_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2, 3$ ) rendono la sostituzione

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{03} & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

*ortogonale destrorsa*. Si tratta dunque effettivamente d'un movimento rigido c. d. d.

Queste formole riguardano il caso che  $g_1, g_2$  appartengano allo stesso sistema delle rette di  $Q_0$ .

Un calcolo del tutto analogo nell'altro caso dimostra che la sostituzione corrispondente è *ortogonale sinistrorsa*. In questo 2° caso il movimento rigido è dunque sostituito da una simmetria.

#### § 14.

### **Le trasformazioni $B_k$ per le quadriche di rotazione e le superficie pseudosferiche.**

Prima di procedere oltre applichiamo i risultati ottenuti a due classi importanti di superficie applicabili sopra quadriche dello spazio ellittico, cioè alle superficie applicabili sulle quadriche di rotazione e sulle superficie pseudosferiche.

Cominciando dalle prime, osserviamo che dallo sviluppo della nostra teoria risulta che per l'esistenza delle trasformazioni  $B_k$  per le deformate di una quadrica assegnata è essenziale che nel sistema confocale determinato dalla quadrica stessa esistano delle quadriche rigate.

Ora nel caso delle quadriche di rotazione, nello spazio ordinario ciò accade soltanto per le quadriche ottenute dalla rotazione di una conica intorno all'asse non focale. D'altra parte, secondo la trasformazione  $H$  a quadriche di rotazione dello spazio ordinario corrispondono quadriche di rotazione dello spazio ellittico e viceversa; di più nell'omografia che fa passare da  $Q_0$  a  $Q_0$  si corrispondono i fuochi delle coniche meridiane. Possiamo di qui immediatamente concludere che anche nel caso delle deformate delle quadriche di rotazione dello spazio ellittico le trasformazioni  $B_k$  esisteranno o no secondo che la quadrica fondamentale è stata ottenuta colla rotazione di una conica intorno all'asse non focale, o all'asse focale. Le  $\infty^2$  trasformazioni reali  $B_k$  esisteranno dunque soltanto per le quadriche di rotazione rigate, e per le quadriche di rotazione non

rigate per le quali  $a^2 = b^2 > c^2$ : invece per le quadriche di rotazione non rigate per le quali  $a^2 > b^2 = c^2$  le trasformazioni  $B_k$  spariscono o piuttosto si riducono all'unica trasformazione complementare rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani della superficie primitiva.

Osserviamo infine che da quanto abbiamo detto in generale sulle trasformazioni delle deformate rigate delle quadriche si deduce immediatamente che: *Se una quadrica rigata di rotazione rotola sopra una sua deformata rigata, il suo asse durante il rotolamento stesso genera la superficie complementare della rigata assegnata rispetto alle geodetiche deformate dei meridiani della quadrica data.*

Passiamo ora a parlare delle congruenze  $B_k$  relative alle superficie pseudosferiche a curvatura assoluta *non nulla*, cioè delle superficie dello spazio ellittico applicabili sopra una sfera, reale o immaginaria. Valendoci del teorema IV (V. § 10) possiamo facilmente riconoscere che le trasformazioni  $B_k$  in tal caso si riducono alle trasformazioni di BÄCKLUND che, del resto, come è noto, seguitano a sussistere colle stesse proprietà che nel caso generale, anche per le superficie pseudosferiche a curvatura assoluta nulla.

Prendiamo a considerare nello spazio ordinario un sistema di sfere di centro comune C. Se definiamo una metrica ellittica assumendo come assoluto una sfera immaginaria di tal sistema, il sistema stesso considerato anche come appartenente a tale metrica sarà certamente un sistema di quadriche omofocali. Ma possiamo subito vedere che tali quadriche saranno sfere dello spazio ellittico aventi tutte il centro nel punto C. Ciò risulta immediatamente dall'osservare che un movimento dello spazio ordinario che lasci fermo C è pure un movimento dello spazio ellittico considerato, lasciando fermo l'assoluto.

Da questa semplice osservazione deduciamo subito non solo che la quadrica coniugata in deformazione nello spazio ellittico ad una sfera dello spazio ordinario è una sfera, ma anche, pel teorema IV, che i segmenti focali delle congruenze  $B_k$  dello spazio ellittico relative alle superficie pseudosferiche hanno lunghezza costante. Siccome poi la relazione di RIBAUCOUR tra le curvature delle due falde

focali di una congruenza dello spazio ellittico, l'angolo dei piani focali, e la lunghezza del segmento focale, ci permette di dedurre di qui immediatamente che nelle congruenze considerate è costante anche l'angolo dei piani focali, vediamo proprio che le congruenze  $B_k$  relative alle superficie pseudosferiche dello spazio ellittico godono delle proprietà caratteristiche delle congruenze pseudosferiche.

In questo caso particolare, analogamente a quanto accade nello spazio ordinario, alcune delle proprietà delle trasformazioni  $B_k$  acquistano un significato speciale. Ci limiteremo ad osservare che il sistema coniugato permanente di ogni superficie applicabile sopra una sfera essendo dato anche in geometria ellittica dalle linee di curvatura, la proprietà generale dimostrata al § 16 si riduce alla seguente ben nota per le trasformazioni di BÄCKLUND delle superficie pseudosferiche: *Sulle due falde focali di una congruenza pseudosferica si corrispondono le linee di curvatura.*

### § 15.

#### **Il teorema di permutabilità per le deformate rigate.**

Per dimostrare completamente che la trasformazione  $B_k$  gode nello spazio ellittico di tutte le proprietà delle quali gode nello spazio ordinario, non ci resta ormai da far vedere altro che seguita a sussistere anche nello spazio ellittico il *teorema di permutabilità* (V. (M) Introd. n. V).

Per le superficie applicabili sopra una quadrica che non sia una quadrica di CLIFFORD, il teorema stesso si deduce immediatamente dal teorema analogo nello spazio ordinario, coll'aiuto delle proprietà della trasformazione H: ma per vedere chiaramente che il teorema enunciato seguita a sussistere anche nel caso per ora escluso delle deformate delle superficie di CLIFFORD, cercheremo di dimostrarlo in generale, seguendo la stessa via che si tiene nella dimostrazione del teorema analogo nello spazio ordinario. Vedremo che con tal metodo il teorema stesso risulterà stabilito rigorosamente in ogni caso e senza difficoltà: anzi delle semplici considerazioni geometriche ci permetteranno di dedurre i risultati analitici che formano

la base della dimostrazione, immediatamente dai risultati corrispondenti nello spazio ordinario.

Sia  $\bar{Q}_0$  una quadrica qualunque dello spazio ordinario,  $\bar{Q}, \bar{Q}', \bar{Q}''$  due quadriche ad essa confocali,  $g, g', g''$  tre generatrici di  $\bar{Q}, \bar{Q}', \bar{Q}''$ , che supporremo per semplicità tutte appartenenti ad uno stesso sistema, ad es. al 1°,  $\bar{g}, \bar{g}''$  le generatrici di  $\bar{Q}'', \bar{Q}'$  corrispondenti rispettivamente a  $g', g''$ , nell'affinità d'IVORY tra le quadriche  $\bar{Q}', \bar{Q}''$ .

Sappiamo allora che le tre rette  $g, g', g''$  determinano una quadrica  $q$  che ha in comune con  $\bar{Q}_0$  la sola generatrice  $g$ , e che se assoggettiamo tale quadrica  $q$  al movimento invariabile  $\bar{m}$  dello spazio ordinario che sovrappone la coppia  $(g', g'')$  alla coppia  $(\bar{g}, \bar{g}'')$  ed insieme ogni punto  $M'$  di  $g'$  al punto  $\bar{M}'$  di  $\bar{g}'$  che gli corrisponde nell'affinità d'IVORY tra  $\bar{Q}', \bar{Q}''$ , e ogni punto  $M''$  di  $g''$  al punto  $\bar{M}''$  di  $\bar{g}''$  ad esso corrispondente nella stessa affinità, dopo tale movimento la quadrica  $q$  taglierà ancora la quadrica  $\bar{Q}_0$  in una sola generatrice  $g_1$ .

Supposto allora che  $\bar{Q}_0$  e quindi  $\bar{Q}', \bar{Q}''$  siano quadriche a centro, se

$$\frac{\bar{x}_1^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{\bar{b}^2} + \frac{\bar{x}_3^2}{\bar{c}^2} = \bar{x}_0^2$$

è l'equazione di  $\bar{Q}_0$ , ove secondo il solito supporremo che i coefficienti  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  possano essere reali o puramente immaginari: se  $\bar{k}, \bar{k}''$  sono i valori del solito parametro che individua le quadriche confocali a  $\bar{Q}_0$  corrispondenti a  $\bar{Q}', \bar{Q}''$ : se  $\theta, \theta', \theta'', \theta_1$  sono i valori del parametro usato per individuare le singole generatrici dell'uno o dell'altro sistema di una quadrica corrispondenti a  $g, g', g'', g_1$ : posto

$$v = \frac{1 - \text{sen } \theta}{\cos \theta} \quad v' = \frac{1 - \text{sen } \theta'}{\cos \theta'} \quad v'' = \frac{1 - \text{sen } \theta''}{\cos \theta''} \quad v_1 = \frac{1 - \text{sen } \theta_1}{\cos \theta_1}$$

$$\bar{a}' = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{k}'} \quad \bar{b}' = \sqrt{\bar{b}^2 + \bar{k}'} \quad \bar{c}' = \sqrt{\bar{c}^2 - \bar{k}'}$$

$$\bar{a}'' = \sqrt{\bar{a}^2 + \bar{k}''} \quad \bar{b}'' = \sqrt{\bar{b}^2 + \bar{k}''} \quad \bar{c}'' = \sqrt{\bar{c}^2 - \bar{k}''}$$

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}' &= \bar{a}'\bar{b}'\bar{c}' + \bar{a}\bar{b}'\bar{c}' & \bar{\alpha}'' &= \bar{a}''\bar{b}''\bar{c}'' + \bar{a}\bar{b}''\bar{c}'' \\ \bar{\beta}' &= \bar{a}\bar{b}'\bar{c}'' + \bar{a}'\bar{b}\bar{c}' & \bar{\beta}'' &= \bar{a}\bar{b}''\bar{c}'' + \bar{a}''\bar{b}\bar{c}' \\ \bar{\gamma}' &= \bar{a}\bar{b}\bar{c}' + \bar{a}'\bar{b}'\bar{c} & \bar{\gamma}'' &= \bar{a}\bar{b}\bar{c}'' + \bar{a}'\bar{b}''\bar{c}''\end{aligned}$$

avremo per determinare  $\theta^1$  la seguente relazione

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} & [\bar{k}''^2 (\bar{\gamma}'' - \bar{\alpha}'')^2 - \bar{k}''^2 (\bar{\gamma}' - \bar{\alpha}')^2] [v v_1 v' v'' + 1] + \\ & + \frac{\bar{k}'}{\bar{k}''} \frac{\bar{\gamma}'' + \bar{\alpha}''}{\bar{\gamma}' - \bar{\alpha}'}, [\bar{k}''^2 (\bar{\gamma}'' - \bar{\alpha}'')^2 - \bar{k}''^2 (\bar{\gamma}' - \bar{\alpha}')^2] [v v_1 + v' v''] + \\ & + 2 \bar{k}'' [\bar{\gamma}' - \bar{\alpha}'] [\bar{k}' \bar{\beta}'' + \bar{k}'' \bar{\beta}'] [v v' + v_1 v''] - \\ & - 2 \bar{k}' [\bar{\gamma}'' - \bar{\alpha}''] [\bar{k}' \bar{\beta} + \bar{k}'' \bar{\beta}'] [v v'' + v' v_1] = 0. \end{aligned} \right.$$

Possiamo subito vedere che un risultato del tutto analogo a quello incluso nella formola (91) che è fondamentale per la dimostrazione del teorema di permutabilità nello spazio ordinario, vale nello spazio ellittico.

Consideriamo infatti la metrica ellittica ottenuta assumendo come assoluto un'elissoide immaginario confocale a  $\bar{Q}_0$ . Le quadriche confocali a  $\bar{Q}_0$  nello spazio ordinario risulteranno allora confocali a  $\bar{Q}_0$  anche considerate come appartenenti a tale metrica e le loro traiettorie ortogonali nei due casi risulteranno le stesse. Inoltre per quanto abbiamo dimostrato nel § 10 esisterà un movimento rigido  $\mathfrak{m}$  dello spazio ellittico che sovrapporrà la coppia  $(g'g'')$  alla coppia  $(\bar{g}'\bar{g}'')$  ed anzi, allo stesso modo che il movimento  $\mathfrak{m}$  dello spazio ordinario precedentemente considerato, sovrapporrà i punti  $M', M''$  di  $g', g''$  ai punti  $\bar{M}', \bar{M}''$  ad essi corrispondenti su  $\bar{g}', \bar{g}''$  nell'affinità d'Ivory tra le quadriche  $\bar{Q}', \bar{Q}''$ . Ora la quadrica  $q \equiv (g, g', g'')$  si può evidentemente considerare come il luogo di una semplice infinità di rette appoggiate a  $g', g''$ : siccome per quanto abbiamo ora osservato tanto il movimento  $\mathfrak{m}$  quanto il movimento  $\bar{\mathfrak{m}}$  trasportano i punti d'appoggio di una qualunque di tali rette su  $g', g''$  negli

stessi punti di  $\bar{g}'$ ,  $\bar{g}''$ , ognuna di tali rette sia dopo il movimento  $\mathbf{m}$  che dopo il movimento  $\overline{\mathbf{m}}$  verrà ad assumere la stessa posizione. Quindi la quadrica  $q \equiv (g, g', g'')$  anche dopo il movimento  $\overline{\mathbf{m}}$  segnerà  $\overline{Q}_0$  in una sola generatrice, che sarà precisamente la generatrice  $g_1$  in cui  $\overline{Q}_0$  è segata da  $q$  dopo il movimento  $\overline{\mathbf{m}}$ .

Possiamo di qui immediatamente concludere che se  $Q_0$  è una quadrica dello spazio ellittico, che per ora dobbiamo supporre diversa da una quadrica di CLIFFORD; se  $Q', Q''$  sono due quadriche ad essa confocali;  $g, g', g''$  tre generatrici di  $Q, Q', Q''$  appartenenti tutte ad uno stesso sistema, ad es. al primo;  $\bar{g}', \bar{g}''$  le generatrici di  $Q'', Q'$  corrispondenti rispettivamente a  $g', g''$  nell'affinità d'IVORY tra  $Q', Q''$ : le tre rette  $g, g', g''$  individueranno una quadrica  $q$  che ha in comune con  $Q_0$  la sola generatrice  $g$  ed assoggettata al movimento invariabile  $\mathbf{m}$  che sovrappone la coppia  $(g'g'')$  alla coppia  $(\bar{g}'\bar{g}'')$ , dopo il movimento taglia ancora  $Q_0$  in una sola generatrice  $g_1$ .

Tenendo presenti le formole (74)-(84) del § 9 dalla formola (91) deduciamo inoltre che, supposta l'equazione dell'assoluto ridotta alla solita forma

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

se

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = \frac{x_3^2}{c^2} + x_0^2$$

è l'equazione della quadrica  $Q_0$ , ove al solito supponiamo indifferentemente che  $a, b, c$  siano reali o puramente immaginari, se  $k', k''$  sono i valori del parametro che individua le quadriche confocali a  $Q_0$  corrispondenti a  $Q', Q''$ , se  $\theta, \theta', \theta'', \theta_1$  sono i valori del solito parametro usato per individuare le singole generatrici dell'uno o dell'altro sistema di una quadrica, corrispondenti a  $g, g', g'', g_1$ : posto

$$v = \frac{1 - \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \quad v' = \frac{1 - \operatorname{sen} \theta'}{\cos \theta'} \quad v'' = \frac{1 - \operatorname{sen} \theta''}{\cos \theta''} \quad v_1 = \frac{1 - \operatorname{sen} \theta_1}{\cos \theta_1}$$

$$a' = \sqrt{\frac{a^2 + k'}{1 - k'}} \quad b' = \sqrt{\frac{b^2 + k'}{1 - k'}} \quad c' = \sqrt{\frac{c^2 - k'}{1 - k'}}$$

$$a'' = \sqrt{\frac{a^2 + k''}{1 - k''}} \quad b'' = \sqrt{\frac{b^2 + k''}{1 - k''}} \quad c'' = \sqrt{\frac{c^2 - k''}{1 - k''}}$$



$$\begin{aligned}
 \alpha' &= a'bc + ab'c' & \alpha'' &= a''bc + ab''c'' \\
 \beta' &= ab'c + a'bc' & \beta'' &= ab''c + a''bc'' \\
 \gamma' &= abc' + a'b'c & \gamma'' &= abc'' + a''b''c \\
 h' &= \frac{k'}{1-k'} & h'' &= \frac{k''}{1-k''}
 \end{aligned}$$

avremo per determinare  $v_1$ , cioè  $\theta_1$ , la seguente equazione

$$(92) \quad \left\{ \begin{aligned}
 & [h'^2(\gamma'' - \alpha'')^2 - h''^2(\gamma' - \alpha')^2] [vv_1v'v'' + 1] + \\
 & + \frac{h'\gamma'' + \alpha''}{h''\gamma' - \alpha'} [h'^2(\gamma'' - \alpha'') - h''^2(\gamma' - \alpha')] [vv_1 + v'v''] + \\
 & + 2h''[\gamma' - \alpha'] [h'\beta'' + h''\beta'] [vv' + v_1v''] - \\
 & - 2h'[\gamma'' - \alpha''] [h'\beta'' + h''\beta'] [vv'' + v_1v'] = 0.
 \end{aligned} \right.$$

Osserviamo ora che questa formola per  $a=b$ ,  $c=1$ , non presenta nessuna singolarità e seguita a determinare univocamente  $v_1$  cioè  $\theta_1$ . Per la continuità degli elementi geometrici considerati possiamo allora di qui immediatamente concludere che la proprietà inclusa nella formola (92) vale anche se  $Q_0$  è una quadrica di CLIFFORD, cioè vale indistintamente per qualunque quadrica dello spazio ellittico.

Dopo questo basta che ripetiamo le considerazioni dei §§ 24, 25 di (M) per giungere alla conclusione che il teorema di permutabilità vale effettivamente per le trasformazioni  $B_k$  delle deformate rigate di  $Q_0$  [corrispondenti ad applicabilità su  $Q_0$  in cui le rette delle rigate considerate si distendono sulle rette di  $Q_0$ ].

## § 16.

### Il teorema di permutabilità in generale.

Per dimostrare che il teorema di permutabilità vale in generale per le trasformazioni  $B_k$  di deformate qualunque di quadriche dello spazio ellittico, cominciamo dal far vedere che nel caso delle deformate rigate la 4.<sup>a</sup> superficie del teorema stesso si deduce dalle

prime tre con una semplice costruzione geometrica del tutto analoga a quella che vale per lo stesso scopo nello spazio ordinario.

Supponiamo dapprima che la quadrica fondamentale  $Q_0$  non sia una quadrica di CLIFFORD, e in tale ipotesi consideriamo la quadrica  $\bar{Q}_0$  dello spazio ordinario ad essa coniugata in deformazione. Se assumiamo come assoluto della nostra metrica ellittica un elissoide immaginario confocale a  $\bar{Q}_0$ , la quadrica  $\bar{Q}_0$  stessa, considerata come appartenente allo spazio ellittico, risulterà identica a  $Q_0$ .

Ciò premesso sia  $R$  una rigata applicabile sopra  $Q_0$ ,  $R_1, R_2$  due sue derivate mediante le due trasformazioni  $B_{k_1}, B_{k_2}$ ,  $R'$  la quarta superficie del teorema di permutabilità; siano inoltre  $F, F_1, F_2, F'$  quattro punti corrispondenti sopra  $R, R_1, R_2, R'$ , ed  $r, r_1, r_2, r'$  le generatrici di tali rigate passanti rispettivamente per  $F, F_1, F_2, F'$ . Siccome i due piani tangenti in  $F_1, F_2$  ad  $R_1, R_2$  si incontrano lungo la retta  $FF'$ , tale retta si appoggerà ad  $r_1, r_2$  in due punti  $N_1, N_2$ : analogamente la retta  $F_1 F_2$  si appoggerà ad  $r, r'$  in due punti  $F, F'$ . Indicheremo poi con  $M, M_1, M_2$  i punti di  $Q_0, Q_{k_1}, Q_{k_2}$  sui quali vanno a sovrapporsi rispettivamente  $F, F_1, F_2$  quando la  $R$  si applica sopra  $Q_0$  seco trascinando invariabilmente uniti i segmenti  $\overline{FF_1}$ , ed  $\overline{FF_2}$ : ed analogamente con  $M', M'_1, M'_2$  i punti di  $Q_0, Q_{k_2}, Q_{k_1}$  sui quali vanno a sovrapporsi rispettivamente  $F', F'_1, F'_2$  quando  $R$  si applica sopra  $Q_0$  seco trascinando invariabilmente uniti i segmenti  $\overline{F'F'_1}$ ,  $\overline{F'F'_2}$ . Infine diremo  $g, g'$  le generatrici di  $Q_0$  per  $M, M'$  ed  $L, L'$  i punti in cui esse incontrano rispettivamente le rette  $M_1 M_2$  ed  $M'_1 M'_2$ .

Indicheremo poi con un soprassegno gli elementi che corrispondono ai precedenti nel passaggio da  $Q_0, R, R_1, R_2, R'$  alle superficie  $\bar{Q}_0, \bar{R}, \bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}'$  coniugate in deformazione nello spazio ordinario.

Intanto pel teorema IV sarà evidentemente

$$\bar{M} \equiv M \quad \bar{M}' \equiv M' \quad \bar{M}_1 \equiv M_1 \quad \bar{M}_2 \equiv M_2 \quad \bar{M}'_1 \equiv M'_1 \quad \bar{M}'_2 \equiv M'_2$$

$$g \equiv \bar{g} \quad g' \equiv \bar{g}' \quad L \equiv \bar{L} \quad L' \equiv \bar{L}'$$

inoltre la formola (21) del § 17 ci darà

$$k' = \frac{\bar{k}'}{k_1 + \bar{k}'} \quad k'' = \frac{\bar{k}''}{k_1 + \bar{k}''} \quad \frac{\bar{k}'}{\bar{k}''} = \frac{h'}{h''}$$

Ora pel teorema corrispondente nello spazio ordinario a quello che vogliamo dimostrare nello spazio ellittico (V. (M) § 26) si ha

$$(\overline{F} \overline{F}' \overline{N}_1 \overline{N}_2) = \frac{\overline{k}'}{\overline{k}''} = \frac{h'}{h''}.$$

D'altra parte evidentemente

$$(\overline{F} \overline{F}' \overline{N}_1 \overline{N}_2) = \frac{\overline{F}_1 \overline{N}}{\overline{F}_2 \overline{N}} : \frac{\overline{F}_1 \overline{N}'}{\overline{F}_2 \overline{N}'}.$$

Siccome poi il rapporto secondo cui un punto ne divide altri due con esso allineati, non si altera in un movimento dello spazio ordinario, potremo concludere di qui che si ha

$$\frac{\overline{M}_1 \overline{L}}{\overline{M}_2 \overline{L}} : \frac{\overline{M}'_1 \overline{L}'}{\overline{M}'_2 \overline{L}'} = \frac{h'}{h''}$$

cioè

$$(93) \quad \frac{M_1 L}{M_2 L} : \frac{M'_1 L'}{M'_2 L'} = \frac{h'}{h''}.$$

Ora il rapporto secondo cui un punto ne divide altri due con esso allineati non si altera neppure in un movimento dello spazio ellittico, quindi avremo

$$\frac{M_1 L}{M_2 L} : \frac{M'_1 L'}{M'_2 L'} = \frac{F_1 N}{F_2 N} : \frac{F_1 N'}{F_2 N'} = (F_1 F_2 NN')$$

ed infine

$$(94) \quad (F_1 F_2 NN') = \frac{h'}{h''}.$$

Questo risultato vale certamente nel caso che  $Q_0$  non sia una quadrica di CLIFFORD. Però, per la continuità degli elementi geometrici considerati, la formola (93) e con essa la (94) vale certamente anche nel caso ora escluso: quindi possiamo concludere che la quarta rigata  $R'$  del teorema di permutabilità si deduce dalle prime tre colla semplice costruzione seguente:

*Siano  $FF_1F_2$  tre punti corrispondenti di  $RR_1R_2$ . Se per  $F$  si tira la retta  $r$  appoggiata alle generatrici  $t_1t_2$  di  $R_1R_2$  per  $F_1F_2$ , e si prende su  $r$  un punto  $F'$  tale che la retta  $r$  sia divisa in  $F, F'$*

e dalle due rette  $t_1 t_2$  nel rapporto anarmonico costante  $\frac{h_1}{h_2}$ , il punto  $F'$  descriverà al variare di  $F$  su  $R$  la quarta superficie  $R'$  del teorema di permutabilità.

Dopo questo, le considerazioni del § 42 di (M) risultano evidentemente applicabili anche alle congruenze  $B_k$  dello spazio ellittico, senza alcuna modificazione, onde possiamo concludere che il teorema di permutabilità vale in generale. Tenendo conto anche delle diverse classi di trasformazioni  $B_k$  che si hanno per una deformata (S) di  $Q_0$ , quando  $Q_0$  è una quadrica di CLIFFORD, corrispondentemente alle varie applicabilità di (S) su  $Q_0$ , possiamo affermare che vale il seguente

TEOREMA IX. *Se, partendo da una superficie (S) applicabile sopra una quadrica  $Q_0$ , se ne sono dedotte due superficie derivate  $(S_1) (S_2)$  mediante due trasformazioni  $B^{k_1}, B^{k_2}$  [corrispondenti alla medesima applicabilità di (S) sopra  $Q_0$ ] esiste una quarta deformata  $(S')$  di  $Q_0$ , perfettamente determinata di forma e di posizione, che si trova legata alle stesse superficie  $(S_1) (S_2)$  da due trasformazioni  $B'^{k_2} B'^{k_1}$  colle stesse costanti permutate [e corrispondenti alla stessa applicabilità di  $(S')$  sopra  $Q_0$ ].*

### § 17.

#### Le congruenze polari delle congruenze $B_k$ .

Abbiamo già asserito nell'introduzione che applicando la legge di dualità, che nello spazio ellittico ha valore sia grafico che metrico, alla nostra teoria delle trasformazioni  $B_k$ , si ottiene una teoria del tutto analoga per la trasformazione degli involuipi applicabili sugli involuipi quadrici, o, ciò che è lo stesso, per la trasformazione delle superficie aventi la 3.<sup>a</sup> forma fondamentale equivalente alla 3.<sup>a</sup> forma fondamentale di una stessa quadrica.

Ora vogliamo appunto enunciare i principali dei risultati che così si ottengono, interpretandoli comè proprietà delle congruenze polari delle congruenze  $B_k$ .

Ogni congruenza  $B$ , polare di una congruenza  $B_k$ , è una con-

gruenza  $W$ , i cui involuppi focali  $(I)$   $(I')$  sono applicabili sopra l'involuppo aderente alla quadrica  $Q_0^{(p)}$ , polare della quadrica  $Q_0$ , su cui risultano applicabili le due falde della congruenza  $B_k$  considerata. Se l'involuppo  $(I)$  si deforma fino ad applicarsi sull'involuppo aderente a  $Q_0^{(p)}$ , seco trascinando invariabilmente uniti i segmenti focali della congruenza  $B_j$ , e i singoli piani del secondo involuppo focale, dopo la deformazione gli estremi dei segmenti focali si disporranno sulla quadrica  $Q_k^{(p)}$  polare di  $Q_k$  ed omociclica a  $Q_0^{(p)}$ , e i piani del 2.<sup>o</sup> involuppo focale risulteranno i piani tangenti della quadrica.

Se dunque consideriamo le  $\infty^1$  congruenze  $B_j$  polari delle  $\infty^1$  congruenze ottenute da una superficie  $(S)$  mediante la trasformazione  $B_k$ , il luogo degli  $\infty^1$  punti corrispondenti sulle singole superficie derivate ad uno stesso punto della superficie  $(S)^{(p)}$  polare di  $(S)$ , che sarà prima falda focale comune di tali congruenze, sarà una conica  $C^{(p)}$ , e precisamente la conica in cui il piano tangente nel punto considerato di  $(S)^{(p)}$ , viene a tagliare la quadrica  $Q_k^{(p)}$  quando l'involuppo aderente ad  $(S)^{(p)}$  si deforma fino ad applicarsi sull'involuppo aderente a  $Q_0^{(p)}$ . Analogamente il luogo degli  $\infty^1$  piani tangenti alle superficie derivate nei punti corrispondenti ad uno stesso punto di  $(S)^{(p)}$  sarà un cono quadrico, e precisamente il cono che, quando  $(S)^{(p)}$  si applica su  $Q_0^{(p)}$ , diviene il cono circoscritto a  $Q_k^{(p)}$  dal punto di  $Q_0^{(p)}$  corrispondente al punto considerato su  $(S)^{(p)}$ .

La legge di applicabilità tra i due involuppi focali di una delle nostre congruenze  $W$  sarà data dall'affinità d'IVORY tra i due involuppi aderenti a  $Q_0^{(p)}$   $Q_k^{(p)}$ . Siccome poi in ogni punto di una superficie dello spazio ellittico di raggio  $R$  il prodotto delle curvature relative della 1.<sup>a</sup> e 3.<sup>a</sup> forma fondamentale è dato da  $\frac{1}{R^2}$ , di qui possiamo dedurre che l'affinità d'IVORY tra gli involuppi aderenti alle due quadriche  $Q_0^{(p)}$   $Q_k^{(p)}$  stabilisce tra i punti delle due falde focali di una delle nostre congruenze  $B_j$ , una legge di corrispondenza tale che in punti corrispondenti la curvatura delle superficie stesse è eguale.

Infine nel caso che  $(S)^{(p)}$  sia rigata le sue trasformate o almeno

una classe di esse saranno pure rigate, e le loro rette apparterranno alla congruenza generata dall'uno o dall'altro sistema dell'inviluppo aderente a  $Q_k^{(p)}$ , quando tale inviluppo rotola sull'inviluppo applicabile aderente alla superficie  $(S)^{(p)}$ .

Vogliamo ora vedere per quali quadriche accada che le congruenze  $B_j$  polari delle congruenze  $B_k$  ad esse relative si possano tutte considerare come congruenze  $B_k$ , relative ad una medesima quadrica.

Supporremo per semplicità la curvatura dello spazio = 1. Allora, il prodotto della curvatura relativa in un punto di una superficie per la curvatura della superficie polare nel punto corrispondente essendo sempre l'unità, se  $Q_0$  è a curvatura costante, anche le falde focali delle congruenze  $B_j$  relative a  $Q_0$  saranno a curvatura costante, e precisamente la curvatura avrà su di esse il valore inverso di quello che ha sopra  $Q_0$ . In particolare se  $Q_0$  è una quadrica di CLIFFORD anche le falde focali delle congruenze  $B_j$  ad essa relative saranno a curvatura assoluta nulla. Inoltre se  $Q_0$  è una sfera, anche la sua polare è una sfera, se  $Q_0$  è una superficie di CLIFFORD anche la sua polare è una superficie di CLIFFORD: nell'uno e nell'altro caso poi, le quadriche omocicliche a  $Q_0^{(p)}$  saranno anche ad essa omofocali.

Dopo questo possiamo evidentemente asserire che le congruenze polari delle congruenze pseudosferiche sono ancora congruenze pseudosferiche, e le congruenze polari delle congruenze  $B_k$  relative ad una superficie di CLIFFORD sono ancora congruenze  $B_k$ , relative ad una stessa superficie di CLIFFORD.

D'altra parte se le congruenze  $B_j$  relative ad una quadrica  $Q_0$  sono tutte congruenze  $B_k$ , relative ad una stessa quadrica  $Q'_0$ , dovranno in particolare esser tali le congruenze  $B_j$  singolari che si ottengono quando una delle falde focali (I) dell'inviluppo focale si riduce alla quadrica  $Q_0^{(p)}$  polare di  $Q_0$ , nel qual caso la seconda falda (I') dell'inviluppo si riduce ad una generatrice di una delle quadriche omocicliche a  $Q_0^{(p)}$ .

Questo basta a dimostrare che nella nostra ipotesi  $Q'_0$  non potrà differire da  $Q_0^{(p)}$ , e di più che le quadriche omocicliche a  $Q_0^{(p)}$ , cioè

a  $Q'_0$ , dovranno risultare anche omofocali. Ora, come si verifica subito, soltanto per le quadriche a curvatura costante (sfere e quadriche di CLIFFORD) si verifica che le quadriche ad esse omocicliche sono anche omofocali, quindi vediamo che  $Q'_0$  deve essere a curvatura costante. Del resto a questo risultato si arriva subito anche osservando che allora e allora soltanto che una superficie è a curvatura costante accade che le polari delle sue deformate risultino tutte applicabili l'una sull'altra.

Possiamo dunque concludere che: *Allora e allora soltanto che la quadrica  $Q_0$  sia a curvatura costante (cioè sia una sfera o una superficie di CLIFFORD) accadrà che le congruenze  $B_j$  polari delle congruenze  $B_k$  relative a  $Q_0$  siano ancora congruenze  $B_k$ , relative ad una stessa quadrica (la polare di  $Q_0$ ).*

### § 18.

#### **Le congruenze $B_k$ relative alle superficie a curvatura nulla.**

Vogliamo ora studiare in particolare le congruenze  $B_k$  relative ad una superficie a curvatura nulla collo scopo di dimostrare rigorosamente la loro esistenza e alcune proprietà per esse enunciate nei §§ precedenti. Tali congruenze si otterranno considerando le superficie a curvatura nulla come applicabili sulle quadriche di CLIFFORD. Però, come abbiamo già osservato (V. § 19) anche in questo caso esistono le congruenze pseudosferiche colle stesse proprietà che hanno per le altre classi di superficie pseudosferiche. Siccome d'altra parte per le superficie pseudosferiche a curvatura assoluta non nulla le congruenze pseudosferiche coincidono colle congruenze  $B_k$  relative alle superficie stesse, diremo *congruenze  $B_k$  anche le congruenze pseudosferiche relative alle superficie a curvatura nulla*, quantunque non esista propriamente una sfera dello spazio ellittico sulla quale le superficie a curvatura nulla siano da dirsi applicabili.

Dopo ciò per le superficie a curvatura nulla avremo due classi di congruenze  $B_k$ , secondochè le superficie stesse si considerano come applicabili sulle quadriche di CLIFFORD o come superficie pseudosferiche generiche.

Possiamo subito provare che nelle congruenze della 1.<sup>a</sup> specie il segmento focale non risulta in generale costante, ciò che basta a provare che le due specie di congruenze sono effettivamente distinte. Intanto le coniche secondo le quali i piani tangenti ad una quadrica di CLIFFORD segano una quadrica confocale, non sono generalmente dei cerchi: quindi se nelle congruenze considerate il segmento focale restasse costante da punto a punto, dovrebbe aversi, colle solite notazioni

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{\partial p}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v} = 0$$

con  $\frac{\partial p}{\partial \theta} \neq 0$ . Ora, come è noto, in una superficie di CLIFFORD le generatrici di ognuno dei due sistemi sono parallele tra loro e alle generatrici del sistema corrispondente di una qualunque delle quadriche confocali. Quindi uno scorrimento della quadrica fondamentale secondo una sua generatrice è un movimento della superficie in sè, che muta in sè stesse anche le quadriche confocali: anzi risulta uno scorrimento di ognuna di esse secondo uno dei suoi sistemi di generatrici.

Se dunque le congruenze considerate sono ad es. relative al 1.<sup>o</sup> sistema di generatrici delle quadriche confocali, cioè se le generatrici ( $v$ ) della quadrica fondamentale riescono parallele al sistema di generatrici ( $\theta$ ) considerato sulle quadriche confocali, si avrà

$$\frac{\partial p}{\partial u} = 0$$

e la seconda delle (34) ci darà, essendo  $\frac{\partial p}{\partial \theta} \neq 0$

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = 0$$

cioè

$$(D' - D'_0) l + D'' m = 0.$$

La nostra ipotesi ci porterebbe dunque ad ammettere che tra i coefficienti della seconda forma fondamentale di una qualunque deformata della quadrica fondamentale sussistesse questa relazione.



Siccome ciò non può verificarsi, vediamo dunque che effettivamente le due specie di congruenze  $B_k$  relative alle superficie a curvatura nulla sono distinte.

Ciò premesso, per arrivare a dimostrare rigorosamente l'esistenza delle congruenze  $B_k$  relative alle superficie a curvatura nulla considerate come applicabili sulle quadriche di CLIFFORD, e le loro proprietà già enunciate nei §§ precedenti, procederemo così. Prenderemo a considerare in generale le congruenze  $W$  a falde di egual curvatura relative alle superficie a curvatura nulla, e cercheremo, imponendo a tali congruenze le stesse condizioni delle quali ci siamo valse in generale per determinare le congruenze  $B_k$ , se tra di esse esistano congruenze della specie voluta. Vedremo così che effettivamente per ogni superficie a curvatura nulla ne esistono  $\infty^4$ : precisamente, fissata la quadrica di CLIFFORD sulla quale la superficie assegnata si considera applicabile, e l'applicabilità sulla quadrica stessa, a meno di un movimento della quadrica in sè, per determinarne una potremo fissare arbitrariamente in un punto iniziale il segmento focale in ampiezza ed orientazione. Con ciò evidentemente resterà anche dimostrato che tutte le possibili congruenze  $B_k$  relative alle superficie a curvatura nulla sono congruenze  $W$ . Riprendendo poi in generale lo studio delle congruenze  $W$  a falde di egual curvatura relative alle superficie a curvatura nulla, arriveremo a stabilire le altre proprietà già enunciate per le congruenze in questione.

Supporremo per semplicità la curvatura dello spazio eguale a +1: supporremo inoltre che la superficie  $S$  considerata sia riferita alle sue asintotiche  $(u, v)$ . Allora il suo elemento lineare avrà la forma

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega du dv + dv^2$$

ove possiamo porre

$$\omega = 2(U + V)$$

con  $U$  funzione della sola  $u$ , e  $V$  funzione della sola  $v$ . Per la seconda forma fondamentale della superficie data avremo poi

$$D = D'' = 0 \quad D' = \text{sen } \omega.$$

Servendoci delle usuali notazioni, indicheremo con  $x_0 x_1 x_2 x_3$  le coordinate di WEIERSTRASS di un punto  $F$  mobile sulla superficie considerata  $S$ , con  $\xi_0 \xi_1 \xi_2 \xi_3$  le coordinate del piano tangente, con  $\eta_0 \eta_1 \eta_2 \eta_3$  e  $\zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3$  rispettivamente i coseni di direzione delle tangenti alle linee di curvatura

$$\alpha = u + v = \text{cost} \quad \beta = v - u = \text{cost}$$

nel punto  $F$ . Definiremo poi la nostra congruenza per mezzo dell'angolo  $\varphi$  che in  $F$  il segmento focale forma colla linea  $\alpha = \text{cost}$  pel punto stesso. Indicando allora con  $\tau$  l'ampiezza del segmento focale  $\overline{FF'}$  e con  $\sigma$  l'ampiezza dell'angolo dei piani focali, cioè dell'angolo dei due piani tangenti in  $F, F'$  alle due falde della superficie focale, se  $x'_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) sono le coordinate di WEIERSTRASS del secondo fuoco  $F'$  e  $\xi'_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) i coseni di direzione della normale in  $F'$  alla seconda falda focale  $S'$  nel punto stesso  $F'$ , avremo le formole

$$(95) \quad \begin{cases} x' = x \cos \tau + (\eta \cos \varphi + \zeta \sin \varphi) \sin \tau \\ \xi' = \xi \cos \sigma + (\eta \sin \varphi - \zeta \cos \varphi) \sin \sigma . \end{cases}$$

Ora in base alla teoria generale delle congruenze  $W$  a falde di egual curvatura nello spazio ellittico <sup>1)</sup>, la curvatura relativa delle due falde essendo nel nostro caso costante ed eguale a  $-1$ , si vede subito che dovrà risultare

$$\begin{aligned} \sigma &= \tau \\ \frac{\partial}{\partial u} \left( \varphi - \frac{\omega}{2} \right) &= -2 \cot \tau \cos \left( \varphi + \frac{\omega}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \varphi + \frac{\omega}{2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial \tau}{\partial v} &= \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

e che viceversa, fissata arbitrariamente una funzione  $\tau(u)$  di  $u$ , le

<sup>1)</sup> V. BIANCHI. *Sopra alcune classi di congruenze rettilinee negli spazi a curvatura costante*. Annali di Matematica, serie III, tomo X, § 17.

equazioni

$$(95') \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} \left( \varphi - \frac{\omega}{2} \right) = -2 \cot \tau \cos \left( \varphi + \frac{\omega}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \varphi + \frac{\omega}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

che formano evidentemente un sistema illimitatamente integrabile, definiscono una funzione  $\varphi(u, v)$  dipendente da una costante arbitraria, tale che le formole

$$(96) \quad \begin{aligned} x' &= x \cos \tau + (\eta \cos \varphi + \zeta \sin \varphi) \sin \tau \\ \xi' &= \xi \cos \tau + (\eta \sin \varphi - \zeta \cos \varphi) \sin \tau \end{aligned}$$

danno le coordinate dei punti e dei piani tangenti della seconda falda focale di una congruenza  $W$  a falde di egual curvatura avente per prima falda focale la superficie  $S$  considerata.

Di qui deduciamo subito che: *In tutte le congruenze  $B_k$  relative ad una superficie a curvatura nulla, l'angolo dei piani focali è eguale all'ampiezza del segmento focale.*

Questo risultato è in perfetto accordo coll'ultimo risultato del § precedente: anzi da esso si può nuovamente dedurre che la congruenza polare di una congruenza  $B_k$  relativa ad una superficie a curvatura nulla è ancora una congruenza  $B_k$ , relativa ad una superficie a curvatura nulla, e pseudosferica o no, secondochè lo è o non lo è la congruenza primitiva.

## § 19.

### **Le congruenze $B_k$ relative alle superficie a curvatura nulla considerate come applicabili sulle superficie di Clifford.**

Tra tutte le congruenze  $W$  a falde di egual curvatura relative ad una superficie a curvatura nulla, le congruenze pseudosferiche sono evidentemente caratterizzate dall'essere  $\tau = \tau = \text{cost.}$  Vogliamo, ora vedere se è possibile determinare la funzione  $\tau(u)$  in modo che le congruenze corrispondenti risultino congruenze  $B_k$  relative alle

superficie a curvatura nulla considerate come applicabili sulle superficie di CLIFFORD.

Consideriamo la quadrica di CLIFFORD  $Q_0$  di equazione

$$\frac{x_{10}^2}{a^2} + \frac{x_{20}^2}{a^2} = x_{30}^2 + x_{00}^2 :$$

dalle formole del § 2 si deduce immediatamente che, suppostala riferita alle asintotiche, potremo scegliere su di esse i parametri  $u'_0 v'_0$  in modo che le coordinate di WEIERSTRASS dei suoi punti risultino date dalle formole

$$(97) \quad \begin{cases} x_{00} = \frac{u'_0 + v'_0}{H_0} & x_{10} = a \frac{1 + u'_0 v'_0}{H_0} & x_{20} = a \frac{u'_0 - v'_0}{H_0} & x_{30} = \frac{1 - u'_0 v'_0}{H_0} \\ \xi_{00} = -a \frac{u'_0 + v'_0}{H_0} & \xi_{10} = -\frac{1 + u'_0 v'_0}{H_0} & \xi_{20} = -\frac{u'_0 - v'_0}{H_0} & \xi_{30} = a \frac{1 - u'_0 v'_0}{H_0} \end{cases}$$

ove

$$H_0^2 = (1 + a^2) (1 + u_0'^2) (1 + v_0'^2).$$

Poniamo

$$u'_0 = tg u_0 \quad v'_0 = tg v_0 :$$

sarà allora

$$(98) \quad \begin{cases} x_{00} = \frac{\text{sen}(u_0 + v_0)}{\sqrt{1 + a^2}} & x_{10} = a \frac{\cos(u_0 - v_0)}{\sqrt{1 + a^2}} & x_{20} = a \frac{\text{sen}(u_0 - v_0)}{\sqrt{1 + a^2}} & x_{30} = \frac{\cos(u_0 + v_0)}{\sqrt{1 + a^2}} \\ \xi_{00} = a \frac{\text{sen}(u_0 + v_0)}{\sqrt{1 + a^2}} & \xi_{10} = -\frac{\cos(u_0 - v_0)}{\sqrt{1 + a^2}} & \xi_{20} = -\frac{\text{sen}(u_0 - v_0)}{\sqrt{1 + a^2}} & \xi_{30} = a \frac{\cos(u_0 + v_0)}{\sqrt{1 + a^2}} \end{cases}$$

e di più il  $ds_0^2$  della superficie data nelle nuove coordinate, posto

$$\cos 2\sigma = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} \quad \text{sen } 2\sigma = \frac{2a}{1 + a^2}$$

cioè

$$tg \sigma = a$$

prenderà la forma

$$ds_0^2 = du_0^2 + 2 du_0 dv_0 \cos 2\sigma + dv_0^2 .$$

Assumiamo infine come linee coordinate le linee di curvatura,

ponendo

$$\sigma_0 = u_0 + v_0 \quad \beta_0 = v_0 - u_0 ;$$

nelle nuove coordinate avremo

$$ds_0^2 = \cos^2 \tau d\alpha_0^2 + \sin^2 \tau d\beta_0^2$$

$$x_{00} = \sin \sigma_0 \cos \tau \cdot x_{10} = \cos \beta_0 \sin \tau \quad x_{20} = -\sin \beta_0 \sin \tau \quad x_{30} = \cos \alpha_0 \cos \tau$$

$$\xi_{00} = \sin \sigma_0 \sin \tau \cdot \xi_{10} = -\cos \beta_0 \cos \tau \quad \xi_{20} = \sin \beta_0 \cos \tau \quad \xi_{30} = \cos \alpha_0 \sin \tau.$$

Ciò premesso, sia  $S$  una superficie a curvatura nulla che riferita alle asintotiche abbia per prima forma fondamentale

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos 2(U + V) du dv + dv^2$$

ove  $U, V$  sono rispettivamente funzioni della sola  $u$  e della sola  $v$  <sup>1)</sup>. Allora se assumiamo a linee coordinate le sue linee di curvatura, ponendo

$$\alpha = u + v \quad \beta = v - u ,$$

avremo

$$ds^2 = d\alpha^2 \cos^2(U + V) + d\beta^2 \sin^2(U + V)$$

e le (36) del § precedente prenderanno la forma

$$(100) \quad \begin{cases} x' = \xi \cos \tau + \sin \tau \left\{ \frac{\cos(U + V)}{\cos \varphi} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\sin \varphi}{\sin(U + V)} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\} \\ \xi' = \xi \cos \tau + \sin \tau \left\{ \frac{\sin \varphi}{\cos(U + V)} \frac{\partial x}{\partial \alpha} - \frac{\cos \varphi}{\sin(U + V)} \frac{\partial x}{\partial \beta} \right\}. \end{cases}$$

Per la proprietà stessa delle congruenze  $B_k$  che abbiamo assunta come loro definizione, affinché  $\tau$  sia tale che la congruenza delle rette  $\overline{FF'}$  sia una congruenza  $B_k$ , sarà necessario e sufficiente che quando  $S$  si applica sulla quadrica fondamentale  $Q_0$  seco trascinando i segmenti focali  $\overline{FF'}$  e i singoli piani  $\pi'$  tangenti alla seconda falda focale  $S'$  della congruenza, a deformazione compiuta

<sup>1)</sup> Come è noto la 1.<sup>a</sup> forma fondamentale di una superficie a curvatura nulla qualunque riferita alle asintotiche, si può sempre ridurre a questa forma assumendo convenientemente i parametri sulle linee coordinate (V. *Lezioni I*, § 219).

1.° il luogo dei punti  $F'$  sia una quadrica  $Q_k$  confocale a  $Q_0$

2.° il luogo dei piani  $\pi'$  sia l'involuppo aderente a tal quadrica.

Ognuna di queste condizioni è sufficiente a determinare  $\tau$ , ma ciò non porta incompatibilità perchè ad es. la 2.ª condizione non è altro che la 1.ª riferita alla congruenza polare della congruenza delle rette  $FF'$ , e, come si è già dimostrato, una congruenza  $B_k$  relativa ad una superficie a curvatura nulla in quanto si considera come applicabile sopra una quadrica di CLIFFORD, ha per congruenza polare una congruenza della medesima specie. Del resto col calcolo effettivo si vede subito che le due equazioni ottenute imponendo a  $\tau$  l'una o l'altra delle condizioni enunciate coincidono.

Siano  $x_{i0}, x'_{i0}$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) le coordinate delle posizioni finali di  $F, F'$ : tenendo conto della 1.ª condizione enunciata dovremo avere

$$(x_{10}^2 + x_{20}^2)(1-k) - (x_{00}^2 + x_{30}^2)(a^2 - k) = 0$$

cioè

$$(101) \quad k = x_{10}^2 + x_{20}^2 - a^2(x_{00}^2 + x_{30}^2).$$

Ora, evidentemente

$$(102) \quad x'_{i0} = x_{i0} \cos \tau + \operatorname{sen} \tau \left\{ \frac{\cos \varphi}{\cos(U+V)} \frac{\partial x_{i0}}{\partial \alpha} + \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}(U+V)} \frac{\partial x_{i0}}{\partial \beta} \right\}$$

quindi, avendosi

$$(103) \quad \begin{cases} x_{10}^2 + x_{20}^2 - a^2(x_{00}^2 + x_{30}^2) = 0 \\ x_{10} \frac{\partial x_{10}}{\partial \alpha} + x_{20} \frac{\partial x_{20}}{\partial \alpha} - a^2 x_{30} \frac{\partial x_{30}}{\partial \alpha} - a^2 x_{00} \frac{\partial x_{00}}{\partial \alpha} = 0 \\ x_{10} \frac{\partial x_{10}}{\partial \beta} + x_{20} \frac{\partial x_{20}}{\partial \beta} - a^2 x_{30} \frac{\partial x_{30}}{\partial \beta} - a^2 x_{00} \frac{\partial x_{00}}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$$

potremo scrivere la (101) nella forma

$$(104) \quad \left\{ \begin{aligned} k = \operatorname{sen}^2 \tau & \left[ \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2(U+V)} \left\{ \left( \frac{\partial x_{10}}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{20}}{\partial \alpha} \right)^2 - a^2 \left( \frac{\partial x_{30}}{\partial \alpha} \right)^2 - a^2 \left( \frac{\partial x_{00}}{\partial \alpha} \right)^2 \right\} + \right. \\ & + \frac{2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{\cos(U+V) \operatorname{sen}(U+V)} \left\{ \frac{\partial x_{10}}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{10}}{\partial \beta} + \frac{\partial x_{20}}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{20}}{\partial \beta} - a^2 \frac{\partial x_{30}}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{30}}{\partial \beta} - a^2 \frac{\partial x_{00}}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{00}}{\partial \beta} \right\} + \\ & \left. + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{\operatorname{sen}^2(U+V)} \left\{ \left( \frac{\partial x_{10}}{\partial \beta} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_{20}}{\partial \beta} \right)^2 - a^2 \left( \frac{\partial x_{30}}{\partial \beta} \right)^2 - a^2 \left( \frac{\partial x_{00}}{\partial \beta} \right)^2 \right\} \right] \end{aligned} \right\}.$$

D'altra parte, tenendo presenti le (39). si verificano subito le seguenti identità

$$\left(\frac{\partial x_{10}}{\partial \alpha_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_{20}}{\partial \alpha_0}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial x_{30}}{\partial \alpha_0}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial x_{00}}{\partial \alpha_0}\right)^2 = -a^2 \cos^2 \sigma$$

$$\frac{\partial x_{10}}{\partial \alpha_0} \frac{\partial x_{10}}{\partial \beta_0} + \frac{\partial x_{20}}{\partial \alpha_0} \frac{\partial x_{20}}{\partial \beta_0} - a^2 \frac{\partial x_{30}}{\partial \alpha_0} \frac{\partial x_{30}}{\partial \beta_0} - a^2 \frac{\partial x_{00}}{\partial \alpha_0} \frac{\partial x_{00}}{\partial \beta_0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial x_{10}}{\partial \beta_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_{20}}{\partial \beta_0}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial x_{30}}{\partial \beta_0}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial x_{00}}{\partial \beta_0}\right)^2 = \sin^2 \sigma$$

e quindi le altre

$$\left(\frac{\partial x_{10}}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_{20}}{\partial \alpha}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial x_{30}}{\partial \alpha}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial x_{00}}{\partial \alpha}\right)^2 = \sin^2 \sigma \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha}\right)^2 - a^2 \cos^2 \sigma \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \alpha}\right)^2$$

$$\frac{\partial x_{10}}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{10}}{\partial \beta} + \frac{\partial x_{20}}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{20}}{\partial \beta} - a^2 \frac{\partial x_{30}}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{30}}{\partial \beta} - a^2 \frac{\partial x_{00}}{\partial \alpha} \frac{\partial x_{00}}{\partial \beta} = \sin^2 \sigma \frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha} \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta} - a^2 \cos^2 \sigma \frac{\partial \alpha_0}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta}$$

$$\left(\frac{\partial x_{10}}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_{20}}{\partial \beta}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial x_{30}}{\partial \beta}\right)^2 - a^2 \left(\frac{\partial x_{00}}{\partial \beta}\right)^2 = \sin^2 \sigma \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial \beta}\right)^2 - a^2 \cos^2 \sigma \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta}\right)^2.$$

L'equazione trovata per  $\tau$  dopo ciò si può scrivere

$$(107) \left\{ \begin{aligned} k &= \sin^2 \tau \left[ \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 (U+V)} \left\{ \sin^2 \sigma \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha}\right)^2 - a^2 \cos^2 \sigma \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \alpha}\right)^2 \right\} + \right. \\ &+ \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\cos (U+V) \sin (U+V)} \left\{ \sin^2 \sigma \frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha} \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta} - a^2 \cos^2 \sigma \frac{\partial \alpha_0}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta} \right\} + \\ &\left. + \frac{\sin^2 \varphi}{(\sin^2 U+V)} \left\{ \sin^2 \sigma \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial \beta}\right)^2 - a^2 \cos^2 \sigma \left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta}\right)^2 \right\} \right]. \end{aligned} \right.$$

Per calcolare le espressioni di  $\frac{\partial \alpha_0}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta}$ ,  $\frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial \beta_0}{\partial \beta}$  per  $\alpha, \beta$ , basterà che determiniamo le formole di applicabilità di S sopra  $Q_0$  e questo facciamo nel modo più semplice confrontando tra loro le formole che servono a ridurre il  $ds_0^2$  di  $Q_0$  e il  $ds^2$  di S al  $d\bar{s}^2$  del piano euclideo

$$d\bar{s}^2 = dx^2 + dy^2.$$

Tali formole sono rispettivamente (V. *Lezioni* I, § 219) pel il  $ds_0^2$

$$\begin{aligned} x &= \text{sen}(\sigma + h_0) u_0 - \text{sen}(\sigma - h_0) v_0 + a_0 \\ y &= \text{cos}(\sigma + h_0) u_0 + \text{cos}(\sigma - h_0) v_0 + b_0 : \end{aligned}$$

per il  $ds^2$

$$(107)^* \left\{ \begin{aligned} x &= \int_0^u \text{sen}(2U + h) du - \int_0^v \text{sen}(2V - h) dv + a \\ y &= \int_0^u \text{cos}(2U + h) du + \int_0^v \text{cos}(2V - h) dv + b \end{aligned} \right.$$

ove  $a_0, b_0, h_0$ , ed  $a, b, h$ , sono costanti arbitrarie.

Tutte le applicabilità differenti di S su  $Q_0$  saranno dunque date dalle formole

$$\begin{aligned} (v_0 - u_0) \text{sen} \sigma &= - \int_0^u \text{sen}(2U + h) du + \int_0^v \text{sen}(2V - h) dv - a \\ (v_0 + u_0) \text{cos} \sigma &= \int_0^0 \text{cos}(2U + h) du + \int_0^v \text{cos}(2V - h) dv + b \end{aligned}$$

ovvero

$$(108) \left\{ \begin{aligned} \alpha_0 \text{cos} \sigma &= \int_0^u \text{cos}(2U + h) du + \int_0^v \text{cos}(2V - h) dv + b \\ \beta_0 \text{sen} \sigma &= - \int_0^u \text{sen}(2U + h) du + \int_0^v \text{sen}(2V - h) dv - a \end{aligned} \right.$$

ove s'intenda, eseguite le integrazioni, di porre per  $u, \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ ,  
per  $v, \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ .

Osserviamo subito che disponendo delle costanti  $a, b$ , si potrà applicare un punto qualunque di S sopra un punto qualunque di  $Q_0$ : disponendo ulteriormente della costante  $h$  si possono portare a coin-



cidere due direzioni rispettivamente di  $Q_0$  e di  $S$  uscenti dai punti portati a coincidere. Vediamo dunque che due applicabilità di  $S$  su  $Q_0$  corrispondenti allo stesso valore di  $h$ , non differiscono altro che per un *movimento* della quadrica in se: mentre ciò non è più vero per due applicabilità corrispondenti a valori differenti di  $h$ .

Dalle (108) deduciamo subito

$$(109) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \sigma \frac{\partial \alpha_0}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \cos(2U + h) + \frac{1}{2} \cos(2V - h) \\ \cos \sigma \frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta} = -\frac{1}{2} \cos(2U + h) + \frac{1}{2} \cos(2V + h) \\ \sin \sigma \frac{\partial \beta_0}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \sin(2U + h) + \frac{1}{2} \sin(2V - h) \\ \sin \sigma \frac{\partial \beta_0}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \sin(2U + h) + \frac{1}{2} \sin(2V - h). \end{array} \right.$$

Dopo ciò, sostituendo nella (107) otteniamo subito

$$k = \sin^2 \tau \left[ \{ \sin \varphi \cos(U - V + h) - \cos \varphi \sin(U - V + h) \}^2 - \right. \\ \left. - a^2 \{ \sin \varphi \sin(U - V + h) + \cos \varphi \cos(U - V + h) \}^2 \right]$$

cioè

$$(110) \quad k = \sin^2 \tau \left[ \sin^2(U - V + h - \varphi) - a^2 \cos^2(U - V + h - \varphi) \right].$$

Questa equazione, insieme alle equazioni differenziali (95')

$$(111) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial(U + V)}{\partial u} = -2 \cot \tau \cos(\varphi + U + V) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial(U + V)}{\partial v} = 0 \end{array} \right.$$

definisce perfettamente le trasformazioni  $B_h$  delle superficie a curvatura nulla considerate come applicabili sulle quadriche di CLIFFORD. Da queste equazioni otteniamo  $\varphi$  e  $\tau$  come funzioni di  $u, v, k, a, h$

e di una nuova costante arbitraria  $\varphi_0$  atta a fissare il valore (arbitrario) di  $\varphi$  in un punto iniziale.

Per ogni superficie a curvatura nulla le trasformazioni considerate dipendono dunque da quattro costanti arbitrarie: per individuarne una dovremo fissare l'ampiezza e l'orientazione del segmento focale in un punto iniziale, la costante  $a$ , cioè la quadrica di CLIFFORD sulla quale la superficie data si considera applicabile, e infine la costante  $h$ , cioè l'applicabilità della superficie  $S$  sulla quadrica considerata a meno di un movimento della quadrica in sè.

Con ciò resta perfettamente giustificato quanto abbiamo avvertito fin dall'*Introduzione* riguardo alle varie classi di trasformazioni  $B_k$  che corrispondono ad una superficie applicabile sopra una quadrica a seconda del modo di applicarla sulla quadrica stessa.

## § 20.

### Le congruenze $W$ a falde di egual curvatura relative alle superficie a curvatura nulla.

Termineremo il presente lavoro con qualche osservazione sopra le congruenze  $W$  a falde di egual curvatura  $= -1$ , congruenze che, come abbiamo detto, includono come casi particolari le congruenze  $B_k$  relative alle superficie a curvatura (assoluta) nulla.

Tali congruenze dipendono per una superficie a curvatura nulla  $S$  fissata come prima falda focale, da una funzione arbitraria di una variabile, ed hanno tutte in comune la proprietà di avere l'angolo dei piani focali eguale all'ampiezza del segmento focale. Esse si dividono in due classi corrispondentemente ai due sistemi di asintotiche della superficie: fissatone uno come sistema  $(u)$ , come abbiamo già detto, la più generale di esse si ottiene assumendo nelle (96) del § 18  $\varphi$  e  $\tau$  legati dalle relazioni

$$(112) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} \left( \varphi - \frac{\omega}{2} \right) = -2 \cot \tau \cos \left( \varphi + \frac{\omega}{2} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} \left( \varphi + \frac{\omega}{2} \right) = 0, \end{cases}$$

ciò che porta, come abbiamo già osservato, che  $\tau$  deve risultare una funzione della sola  $u$ .

Osserviamo inoltre che la seconda delle equazioni scritte ci dice che pure  $\varphi + \frac{\omega}{2}$  risulterà una funzione  $\theta(u)$  della sola  $u$ : siccome d'altra parte  $\varphi + \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2}$  ci dà evidentemente l'angolo che in ogni punto della S il segmento focale forma colla linea  $v = \text{cost}$  che passa pel punto stesso, possiamo concludere che nelle congruenze considerate, lungo una linea  $u = \text{cost}$  sarà costante non solo l'ampiezza del segmento focale, ma anche l'angolo che tal segmento forma nel primo fuoco colla linea  $v = \text{cost}$  pel punto stesso.

Inoltre ricordando che si ha

$$\frac{\omega}{2} = U + V$$

la prima delle (52) ci dà subito

$$(113) \quad \theta'(u) - 2U' = -2 \cot \tau \cos \theta.$$

Otterremo dunque una qualunque delle congruenze considerate assumendo per  $\tau$  e per  $\theta$  (cioè per  $\varphi + \frac{\omega}{2} - \frac{\pi}{2}$ ), due funzioni della sola  $u$  legate da questa relazione. Ciò ci dimostra che per definire una delle nostre congruenze possiamo assumere arbitrariamente la funzione  $\tau(u)$  e il valore iniziale di  $\theta(u)$ , oppure la funzione  $\theta(u)$ . Ora, come è noto <sup>1)</sup>, la più generale superficie a curvatura nulla si ottiene scegliendo ad arbitrio due curve  $C, C'$ , la prima a torsione  $= +1$ , la seconda a torsione  $= -1$ , collocandole in guisa che escano da un medesimo punto e ivi abbiano a comune il piano osculatore (ma tangenti distinte) e dando a  $C$  lungo  $C'$  (a  $C'$  lungo  $C$ ) uno scorrimento sinistrorso (destrorso). Dopo quanto abbiamo premesso possiamo dunque affermare che si ha la proprietà seguente:

---

<sup>1)</sup> BIANCHI. *Sulle superficie a curvatura nulla nello spazio ellittico*. § 10. *Annali di Matematica*, 1895.

Fissata una curva  $C$  a torsione costante  $= 1$  ( $= -1$ ) consideriamo una rigata qualunque  $R$  che l'abbia per asintotica: scegliamo poi una seconda curva  $C'$  a torsione  $= -1$  ( $= +1$ ) e collochiamola in guisa che abbia un punto in comune con  $C$  e nel punto stesso i piani osculatori delle due curve coincidano. Se diamo a  $C$  uno scorrimento sinistrorso (destrorso) lungo  $C'$ , la rigata  $R$  trascinata da  $C$  nello scorrimento, descrive la più generale congruenza  $W$  a falde di egual curvatura  $= -1$ .

Da questo risultato appare manifesto che la seconda falda focale di una congruenza  $B_k$  relativa ad una superficie a curvatura nulla considerata come applicabile sopra una quadrica di CLIFFORD, non è sempre rigata. Infatti se la seconda falda di una congruenza  $B_k$  relativa ad una superficie a curvatura nulla è rigata, la rigata  $R$  considerata nell'enunciato del risultato ora ottenuto sarà necessariamente una quadrica, e fissato in un punto di una linea  $v = \text{cost}$  il segmento focale iniziale, la sua scelta dipenderà evidentemente da una sola costante arbitraria, mentre invece le trasformazioni considerate di una rigata a curvatura nulla, fissato il segmento focale iniziale in un punto arbitrario, dipendono da due costanti arbitrarie. Ciò basta per potere affermare che le trasformazioni  $B_k$  di una rigata a curvatura nulla considerata come applicabile sopra una quadrica di CLIFFORD, e corrispondenti ad applicabilità della rigata data sulla quadrica fondamentale in cui le rette della rigata non si sovrappongono a un sistema di generatrici della quadrica stessa, non fanno in generale passare dalla rigata data ad una nuova rigata.

Osserviamo inoltre che i raggi della congruenza uscenti dai punti di una linea  $u = \text{cost}$  risulteranno paralleli nel senso di CLIFFORD e quindi la rigata luogo dei raggi stessi risulterà a curvatura nulla: di qui deduciamo subito che le curve  $u = \text{cost}$  della superficie  $S$  sono congruenti alle curve  $u = \text{cost}$  delle seconde falde focali delle congruenze considerate relative ad  $S$ , e che le curve  $u = \text{cost}$  delle due falde focali si corrispondono ad eguaglianza d'archi.

A questo risultato si giunge immediatamente anche applicando al caso nostro le formole (F) della memoria già citata al § 18. BIANCHI. *Sopra alcune classi di congruenze ecc.* Le stesse formole di-

mostrano che le linee  $v$  sulle due falde focali si corrispondono per archi eguali allora e allora soltanto che sia

$$(\alpha) \quad \tau = \text{cost}$$

oppure

$$(\beta) \quad \tau' + 2 \operatorname{sen} \left( \varphi + \frac{\omega}{2} \right) = 0,$$

nei quali due casi, e allora soltanto, sulle due falde focali si corrispondono anche le linee di curvatura. Le congruenze della specie  $(\gamma)$  sono evidentemente le congruenze pseudosferiche: le congruenze della specie  $(\beta)$  sono le congruenze che si ottengono dando uno scorrimento ortogonale qualunque alla polare di  $S$  e congiungendo ogni punto di  $S$  col punto in cui dopo tale scorrimento viene trasportato il polo del pian tangente in esso alla  $S$  (Cfr. memoria citata § 11).

Osserviamo infine che la (113) non dipende dalla funzione  $V$  che compare nel  $ds^2$  della  $S$  riferita alle asintotiche, ma soltanto dalla  $U'$ : e di più che la funzione  $U'$  resta invariata se la  $S$  si flette intorno ad una sua asintotica  $v = \text{cost}$  mantenuta rigida. D'altra parte dalle formole d'applicabilità di due superficie a curvatura nulla qualunque, che si deducono immediatamente dalle (107)\*, segue subito che se due tali superficie hanno in comune un'asintotica, si possono sempre applicare l'una sull'altra in modo che i punti dell'asintotica corrispondano a sè stessi nell'applicabilità. Possiamo dunque concludere che:

*Se una superficie  $S$  a curvatura nulla si deforma intorno ad un'asintotica  $v = \text{cost}$  rigida  $\mathbf{a}$ , la seconda falda focale di una delle nostre congruenze  $W$ , corrispondente ad una rigata  $R$  per  $\mathbf{a}$  prefissata, si deforma pure intorno alla linea asintotica  $\mathbf{a}_1$ , corrispondente ad  $\mathbf{a}$ , che resta anch'essa invariabile.*

Fra le deformazioni della superficie  $S$  intorno ad un'asintotica rigida ve ne sono  $\infty^1$  che la cambiano in una superficie rigata. Il  $ds^2$  di una qualunque di esse riferita alle asintotiche è dato da

$$ds^2 = du^2 + 2 du dv \cos (2U + C) + dv^2$$

ove  $C$  è una costante arbitraria: geometricamente tali rigate si ottengono, secondo il teorema di CHIEFFI, conducendo le tangenti nei punti di  $a$  ad uno qualunque dei sistemi di linee geodetiche di  $S$  che in un'applicabilità di  $S$  sopra una quadrica di CLIFFORD si distendono sull'uno o sull'altro sistema di generatrici della quadrica stessa.

D'altra parte se le linee  $(u)$  di  $S$  sono rette, lo stesso accade delle linee  $(u)$  di  $S'$ , tutte le rigate a curvatura nulla determinate dalle coppie di curve corrispondenti  $(u)$  riducendosi allora a rigate di CLIFFORD. Possiamo dunque affermare che si ha:

*Siano  $\mathbf{a}, \mathbf{a}'$  due linee asintotiche  $v = \text{cost}$  corrispondenti sulle due falde focali  $S, S'$  di una delle nostre congruenze  $W$ , e consideriamo le rigate circoscritte secondo il teorema di CHIEFFI ed  $S$  lungo  $\mathbf{a}$ , e ad  $S'$  lungo  $\mathbf{a}'$ . Tali  $\infty^1$  rigate si distribuiscono in coppie che formano di nuovo le due falde focali di una delle nostre congruenze.*

È appena necessario avvertire che i teoremi V, VI riferiti alle quadriche di CLIFFORD, risultano un caso particolare dei teoremi ora dimostrati.

---

# NOTA

---

## **Sopra un caso limite delle trasformazioni $B_k$ per le deformate delle quadriche nello spazio ellittico**

---

### § 1. Considerazioni generali.

Nella teoria delle trasformazioni  $B_k$  delle superficie applicabili sulle quadriche esposta nel presente lavoro, abbiamo sempre supposto che la quadrica fondamentale  $Q_0$  sia una quadrica generica della schiera confocale cui appartiene. Vogliamo ora dimostrare che, analogamente a quanto accade nello spazio ordinario <sup>1)</sup>, le proprietà essenziali delle trasformazioni  $B_k$  si conservano ancora nel caso limite in cui la quadrica  $Q_0$  diventa una delle quadriche singolari della schiera confocale, degenerando in una delle coniche focali, le cui tangenti vengono allora a rappresentare i due sistemi coincidenti di generatrici.

Dimostrato questo, non avremo che ad applicare ai risultati ottenuti la legge di dualità, per poter concludere che anche la teoria della trasformazione degli involuipi applicabili sopra un involuppo quadrico, che, come abbiamo avvertito, si può dedurre dalla nostra teoria delle trasformazioni  $B_k$ , sussiste ancora nelle sue proprietà essenziali nel caso limite che la superficie aderente all'involuppo fondamentale degeneri in un cono del fascio omociclico, le cui generatrici vengono allora a rappresentare i due sistemi di rette (coincidenti) dell'involuppo.

Vediamo prima di tutto come dobbiamo interpretare i teoremi ottenuti per le trasformazioni  $B_k$  relative ad una quadrica  $Q$  non

---

<sup>1)</sup> V. BIANCHI. *Rendiconti de' Lincei*, febbraio, 1909.

degenerare nel caso limite considerato: cercheremo poi di dimostrare che le proprietà così enunciate sussistono effettivamente.

Premettiamo che diremo *conica distorta dello spazio ellittico* ogni curva che si ottiene da una conica ordinaria dello spazio ellittico riguardandola come flessibile ed inestendibile, e torcendola comunque senza alterarne la flessione. Una conica distorta  $\Gamma$  così dedotta da una conica  $C$  la diremo anche una *deformata* di  $C$ . Il più semplice esempio di curve di questa classe si ha nelle deformate del circolo, ossia nelle curve a flessione costante.

Ciò premesso, supponiamo che nel teorema VIII (V. p. 61) la quadrica  $Q_0$  si riduca alla sviluppabile delle tangenti alla conica focale  $C$ . Intanto la  $R$  nel nostro caso dovrà risultare una sviluppabile: di più dovrà risultare applicabile sopra  $Q_0$  in guisa che *le generatrici si corrispondano*, e ciò porta come conseguenza che lo spigolo di regresso  $\Gamma$  sarà una conica distorta  $\Gamma$ , deformata di  $C$  nel senso stabilito <sup>1)</sup>. Nel rotolamento di  $Q_0$  sopra  $R$ , la conica  $C$  rotola sulla sua deformata  $\Gamma$  in guisa che il piano di  $C$  si porta successivamente a coincidere coi piani osculatori di  $\Gamma$ .

Consideriamo ora una quadrica  $Q_k$  del sistema confocale (avente dunque  $C$  pel conica focale) e sia  $C_k$  la conica, confocale a  $C$ , sezione principale di  $Q_k$  nel piano di  $C$ . Questa conica  $C_k$  trascinata nel rotolamento, descrive una superficie modanata, che indicheremo con  $\Sigma$ , involupata lungo le coniche  $C_k$  dalle varie posizioni della quadrica  $Q_k$  <sup>2)</sup>. Le generatrici (dell'uno o dell'altro sistema) di  $Q_k$  descrivono una congruenza per la quale le sviluppabili di un si-

<sup>1)</sup> Infatti se una sviluppabile si deforma conservando rettilinee le generatrici, la curva deformata del primitivo spigolo di regresso sarà lo spigolo di regresso della sviluppabile trasformata: quindi in ogni suo punto la flessione risulterà eguale alla flessione della curva primitiva nel punto corrispondente.

<sup>2)</sup> Anche nello spazio ellittico un profilo piano, invariabile di forma, il cui piano rotoli senza strisciare sopra una superficie sviluppabile, genera una superficie con un sistema di linee di curvatura geodetiche (superficie modanata). La dimostrazione geometrica della proprietà corrispondente nello spazio ordinario, data nel § 317 delle *Lezioni* si trasporta immediatamente allo spazio ellittico.



stema hanno gli spigoli di regresso  $\Gamma'$  sulla superficie modanata  $\Sigma$ , e sono precisamente quelle curve che in ogni loro punto riescono tangenti a quella generatrice di  $Q_k$  che passa pel punto stesso.

Se il teorema VIII rimane vero anche al limite, queste svilup-pabili, che vengono evidentemente a corrispondere alle  $\infty'$  rigate  $R'$  in cui nel caso generale consideravamo decomposta la congruenza generata dall'uno o dall'altro sistema di rette di  $Q_k$ , quando  $Q_0$  rotolava sulla sua deformata  $R$ , seco trascinando  $Q_k$ , queste svilup-pabili cogli spigoli di regresso  $\Gamma'$  saranno distendibili sopra  $Q_0$ , le generatrici applicandosi sulle tangenti alla conica  $C$ , cioè le curve  $\Gamma'$  saranno coniche distorte deformate della fondamentale  $C$  come  $Q_0$ . Avremo dunque il seguente teorema:

*Se la quadrica  $Q_k$  viene trascinata da una sua conica confocale  $C$  nel rotolamento di questa curva sopra una sua deformata  $\Gamma$ , le rette (dell'uno o dell'altro sistema) di  $Q_k$  generano una congruenza, le cui sviluppabili di un sistema hanno per spigoli di regresso altrettante nuove coniche distorte  $\Gamma'$  deformate della medesima  $C$ .*

Ci proponiamo ora appunto di dimostrare questo teorema, col quale le trasformazioni  $B_k$  delle deformate delle quadriche si cambiano, nel caso limite considerato, in trasformazioni delle coniche distorte.

In questa ricerca potremmo seguire un metodo del tutto analogo a quello che vale per la ricerca corrispondente nello spazio ordinario, ma arriveremo più semplicemente a stabilire il teorema enunciato applicando il metodo seguente, che corrisponde perfettamente a quello tenuto per stabilire le nostre trasformazioni nel caso delle deformate generali delle quadriche.

Consideriamo una deformata qualunque  $\Gamma$  della conica fondamentale  $C$ . Indicheremo con  $u$  un parametro che fissi la posizione del punto mobile sopra  $\Gamma$ , e riterremo per  $\Gamma$  le notazioni del § 201 delle *Lezioni*.

Indicheremo poi con  $v$  un parametro che individui la posizione di un punto mobile sulla conica  $C_k$  confocale a  $C$ . Quando la conica  $C$ , rotolando sopra  $\Gamma$ , viene con essa a contatto in un punto  $F \equiv (x_i)$  corrispondente al valore  $u$  del parametro, le coordinate  $x'_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ )

di un punto qualunque  $F'$  di  $C_k$  corrispondente al valore  $v$  del parametro, e le coordinate  $\lambda'_i$  del piano  $\pi'_i$  passante per  $F'$  e per la generatrice (dell'uno o dell'altro sistema) di  $Q_k$  per  $F'$ , saranno funzioni di  $u, v$  rispettivamente della forma

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad x'_i &= p \frac{x_i}{X} + \sigma_i \frac{l}{X} + \xi_i \frac{m}{X} \\ (2) \quad \lambda'_i &= \sigma_i \frac{\bar{l}}{\Lambda} + \xi_i \frac{\bar{m}}{\Lambda} + \lambda_i \frac{\bar{n}}{\Lambda} \end{aligned} \right\} (i=0, 1, 2, 3)$$

ove  $p, l, m, X$  e  $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}, \Lambda$  sono funzioni di  $u, v$ , indipendenti dall'indice  $i$ , e che restano le stesse comunque si deformi la conica  $\Gamma$ .

Evidentemente se nelle (1) lasciamo  $u, v$  variabili indipendenti, esse ci danno la superficie modanata  $\Sigma$  precedentemente considerata.

Cercheremo ora di determinare  $v$  in funzione  $v(u)$  di  $u$  in modo che le curve definite dall'equazione  $v = v(u)$  sulla superficie  $\Sigma$  vengano ad avere in ogni loro punto per piano osculatore il piano  $\pi'$  che passa pel punto stesso. Vedremo che effettivamente esistono su  $\Sigma$  curve che soddisfano a questa condizione, e tali curve sono appunto le curve  $\Gamma'$  deformate della conica  $C$ , considerate nell'enunciato del nostro teorema.

### § 2. Formole preliminari.

Sia, al solito,

$$x_{00}^2 + x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2 = 0$$

l'equazione dell'assoluto, e supponiamo che la conica  $C$  giaccia nel piano  $x_{30} = 0$ . Allora, come è noto, l'equazione di  $C$  potrà sempre ridursi alla forma

$$(3) \quad \frac{x_{10}^2}{a^2} + \frac{x_{20}^2}{b^2} = x_{00}^2. \quad (a \geq b)$$

Sia poi

$$\frac{x_{10}^2}{a^2} + \frac{x_{20}^2}{b^2} - \frac{x_{30}^2}{h} = x_{00}^2$$

l'equazione di una quadrica *rigata*  $Q_k$  che abbia  $C$  per conica fo-

cale. Allora l'equazione

$$\frac{x_{10}'^2}{a'^2 + h} + \frac{x_{20}'^2}{b'^2 + h} = \frac{x_{00}'^2}{1 - h}$$

dovrà coincidere con quella della conica data, cioè dovrà essere

$$a^2 = \frac{a'^2 + h}{1 - h} \quad b^2 = \frac{b'^2 + h}{1 - h}.$$

Posto

$$(4) \quad h = \frac{k}{k + 1}$$

l'equazione della conica  $C_k$  confocale a  $C$ , sezione di  $Q_k$  col piano  $x_{30} = 0$ , sarà dunque data da

$$\frac{x_{10}'^2}{a'^2} + \frac{x_{20}'^2}{b'^2} = x_{00}'^2$$

ove

$$(5) \quad a'^2 = \frac{a^2 - k}{1 + k} \quad b'^2 = \frac{b^2 - k}{1 + k}:$$

di più le condizioni

$$a'^2 > 0 \quad b'^2 > 0 \quad h > 0,$$

danno subito

$$(5)^* \quad 0 < k < b^2.$$

Per determinare un punto mobile sulla conica  $C$  e un punto mobile sulla conica  $C_k$  assumeremo i parametri  $u, v$  definiti rispettivamente dalle formole

$$(6) \quad x_{10} = \frac{a \cos u}{H} \quad x_{20} = \frac{b \sin u}{H} \quad x_{00} = \frac{1}{H} \quad \text{ove } H^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + 1$$

e dalle analoghe

$$(7) \quad x'_{10} = \frac{a' \cos v}{H'} \quad x'_{20} = \frac{b' \sin v}{H'} \quad x'_{00} = \frac{1}{H'} \quad \text{ove } H'^2 = a'^2 \cos^2 v + b'^2 \sin^2 v + 1.$$

Possiamo subito osservare che, posto

$$(8) \quad \bar{H}^2 = a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v + 1$$

si ha

$$(8)^* \quad H'^2 = \frac{\bar{H}'^2}{1+k}$$

e quindi anche

$$(9) \quad x'_{10} = \frac{a'}{a} x_{10} \sqrt{1+k} \quad x'_{20} = \frac{b'}{b} x_{20} \sqrt{1+k} \quad x'_{00} = x_{00} \sqrt{1+k}$$

ciò che mostra che i punti di  $C$ ,  $C_k$ , corrispondenti ad eguali valori dei parametri  $u, v$  si corrispondono nell'affinità d'IVORY tra le due coniche.

Supposto per semplicità che la curvatura dello spazio sia  $= +1$ , avremo poi

$$(10) \quad ds = \frac{S}{H^2} du$$

ove

$$(11) \quad S = a^2 b^2 + a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u :$$

inoltre calcolando si trova

$$(12) \quad \rho = \frac{S^3}{abH^3}.$$

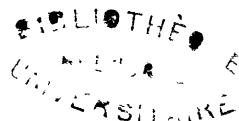
Questa espressione del raggio di prima curvatura aggiunta a quella (perfettamente arbitraria) del raggio di 2.<sup>a</sup> curvatura

$$T = \varphi(u)$$

serve a definire intrinsecamente ogni conica distorta deformata di  $C$ . La forma della funzione  $\varphi(u)$  serve appunto a fissare la conica distorta che si considera.

Ciò premesso cerchiamo di calcolare le espressioni di  $\frac{p}{X}, \frac{l}{X}, \frac{m}{X}$  e  $\frac{\bar{l}}{\Lambda}, \frac{\bar{m}}{\Lambda}, \frac{\bar{n}}{\Lambda}$  nelle formole (1) (2). Per calcolarne i valori basterà assumere  $\Gamma$  nella forma stessa della conica  $C$ .

Intanto in tale ipotesi i valori delle  $x_i, x'_i$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) saranno i valori  $x_{i0}, x'_{i0}$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) dati dalle (6) (7): di più calcolando



si trova che i coseni di direzione del triedro principale della curva C sono dati da

$$(13) \left\{ \begin{array}{lll} \sigma_{10} = -\frac{a \operatorname{sen} u (1+b^2)}{HS} & \sigma_{20} = \frac{b \cos u (1+a^2)}{HS} & \sigma_{30} = 0 \quad \sigma_{00} = \frac{(a^2-b^2) \operatorname{sen} u \cos u}{HS} \\ \xi_{10} = -\frac{b \cos u}{S} & \xi_{20} = -\frac{a \operatorname{sen} u}{S} & \xi_{30} = 0 \quad \xi_{00} = \frac{ab}{S} \\ \lambda_{10} = 0 & \lambda_{20} = 0 & \lambda_{30} = 1 \quad \lambda_{00} = 0. \end{array} \right.$$

Ora dalle (1) si ha

$$\frac{p}{X} = \sum_0^3 x_{i0} x'_{i0} \quad \frac{l}{X} = \sum_0^3 \sigma_{i0} x'_{i0} \quad \frac{m}{X} = \sum_0^3 \xi_{i0} x'_{i0}$$

quindi potremo assumere

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} p = S(1 + aa' \cos u \cos v + bb' \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v) \\ l = (a^2 - b^2) \cos u \operatorname{sen} u - aa' \operatorname{sen} u \cos v (1+b^2) + bb' \cos u \operatorname{sen} v (1+a^2) \\ m = H(ab - ab' \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v - a'b \cos u \cos v) \\ X = HH'S. \end{array} \right.$$

Per calcolare le espressioni di  $\frac{\bar{l}}{\Lambda}$ ,  $\frac{\bar{m}}{\Lambda}$ ,  $\frac{\bar{n}}{\Lambda}$  nelle (2), cominciamo dall'osservare che le equazioni della quadrica rigata  $Q_n$  in coordinate di piani  $\lambda'_{i0}$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) sono

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \lambda'_{10} = \mp \frac{\sqrt{\bar{h}}}{a'} \sin v \lambda'_{30} - \frac{1}{a'} \cos v \lambda'_{00} \\ \lambda'_{20} = \pm \frac{\sqrt{\bar{h}}}{b'} \cos v \lambda'_{30} - \frac{1}{b'} \sin v \lambda'_{00}. \end{array} \right.$$

Se per le  $\lambda'_{i0}$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) in queste due equazioni sostituiamo le (2) e teniamo conto che deve essere

$$\bar{l}^2 + \bar{m}^2 + \bar{n}^2 = \Lambda^2$$

troviamo facilmente che si può assumere:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{l} = \mp \sqrt{k} m \\ \bar{m} = \pm \sqrt{k} l \\ \bar{n} = (a'b' - a'b \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v - ab' \cos u \cos v) \sqrt{1+k} S \\ \Lambda = (ab - ab' \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v - a'b \cos u \cos v) S. \end{array} \right.$$

Osserviamo subito che in queste formole si passa dal caso dei segni superiori al caso dei segni inferiori cambiando  $\sqrt{k}$  in  $-\sqrt{k}$ : quindi scriveremo le formole seguenti soltanto nel caso dei segni superiori, le formole relative all'altro caso deducendosi immediatamente da esse col cambiamento indicato.

Le formole (14) (16) bastano per procedere alla ricerca delle equazioni differenziali delle nostre trasformazioni; ma a tale ricerca premetteremo alcune formole che ci saranno utili in seguito.

In una posizione qualunque di  $C$  nel suo rotolamento sopra  $\Gamma$ , consideriamo la generatrice  $g'$ , ad es. del 1.º sistema, di  $Q_k$  per  $F'$ , e la normale  $n'$  a tale generatrice nel piano condotto per la generatrice stessa e il punto  $F'$ ; detti  $\alpha'_i, \xi'_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) i coseni di direzione rispettivamente di  $g'$  e di  $n'$  nel punto  $F'$ , avremo al solito che  $\alpha', \xi'$  risulteranno funzioni di  $u, v$ , della forma

$$(17) \quad \alpha' = Px + Lx + M\xi + N\lambda$$

$$(18) \quad \xi' = \bar{P}x + \bar{L}x + \bar{M}\xi + \bar{N}\lambda$$

ove i coefficienti di  $x, \alpha, \xi, \lambda$  sono funzioni di  $u, v$  indipendenti dalla deformata  $\Gamma$  che consideriamo.

Per calcolare i coefficienti delle (17) cominciamo dall'osservare che le equazioni in coordinate di punti  $x'_{i0}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) delle generatrici della quadrica  $Q'_k$  essendo date da

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_{10} = \pm \frac{a'}{\sqrt{h}} \sin v x'_{30} + a' \cos v x'_{00} \\ x'_{20} = \mp \frac{b'}{\sqrt{h}} \cos v x'_{30} + b' \operatorname{sen} v x'_{00} \end{array} \right.$$

avremo, nella posizione iniziale, limitandoci al caso dei segni superiori

$$\alpha'_{00} : \alpha'_{10} : \alpha'_{20} : \alpha'_{30} :: 1 :: \frac{a'}{\sqrt{h}} \sin v \frac{\partial x'_{30}}{\partial x'_{00}} + \\ + a' \cos v : - \frac{b'}{\sqrt{h}} \cos v \frac{\partial x'_{30}}{\partial x'_{00}} + b' \sin v : \frac{\partial x'_{30}}{\partial x'_{00}}.$$

D'altra parte nella posizione iniziale del punto F' si ha  $x'_{30} = 0$  e quindi

$$x'_{00} + x'_{10} \frac{\partial x'_{10}}{\partial x'_{00}} + x'_{20} \frac{\partial x'_{20}}{\partial x'_{00}} = 0$$

ed anche per la (19)

$$(20) \quad \frac{\partial x'_{30}}{\partial x'_{00}} = - \frac{\sqrt{h} H^2}{(a'^2 - b'^2) \cos v \sin v} :$$

avremo dunque

$$\alpha'_{00} : \alpha'_{10} : \alpha'_{20} : \alpha'_{30} :: (a'^2 - b'^2) \cos v \sin v : \\ : - a' \sin v (1 + b'^2) : b' \cos v (1 + a'^2) : - \sqrt{h} H^2$$

e infine, posto

$$\bar{S}^2 = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v + a^2 b^2 \\ (21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'_{00} = \frac{(a'^2 - b'^2) \cos v \sin v}{(1-h) H' \bar{S}'} \quad \alpha'_{10} = - \frac{a' \sin v (1 + b'^2)}{(1-h) H' \bar{S}'} \\ \alpha'_{20} = \frac{b' \cos v (1 + a'^2)}{(1-h) H' \bar{S}'} \quad \alpha'_{30} = - \frac{\sqrt{h} H^2}{(1-h) H' \bar{S}'} \end{array} \right.$$

Calcolati così i valori delle  $\alpha'_{i0}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) abbiamo subito i valori di P, L, M, N dalle formole

$$P = \sum \alpha'_{i0} x_{i0} \quad L = \sum \alpha'_{i0} \nu_{i0} \quad M = \sum \alpha'_{i0} \xi_{i0} \quad N = \sum \alpha'_{i0} \lambda_{i0}.$$

Calcolando i secondi membri di queste formole mediante le (13)

(21) otteniamo

$$(22) \left\{ \begin{aligned} P &= S \frac{(a^2 - b^2) \sin v \cos v}{(1-h) HH' SS'} - \\ &\quad - \frac{aa' \cos u \sin v (1+b^2) - bb' \cos v \sin u (1+a^2)}{(1-h) HH' SS'} \\ L &= \frac{(a^2 - b^2) (a^2 - b^2) \cos u \sin u \cos v \sin v}{(1-h) HH' SS'} + \\ &\quad + \frac{aa' \sin u \sin v (1+b^2) (1+b^2) + bb' \cos u \cos v (1+a^2) (1+a^2)}{(1-h) HH' SS'} \\ M &= H \frac{ab (a^2 - b^2) \sin v \cos v}{(1-h) HH' SS'} + \\ &\quad + \frac{a'b \sin v \cos u (1+b^2) - ab' \sin u \cos v (1+a^2)}{(1-h) HH' SS'} \\ N &= -\sqrt{h} \frac{HSH'^2}{(1-h) HH' SS'}. \end{aligned} \right.$$

Dopo ciò, per ottenere i coefficienti della (18) basta che teniamo conto del fatto che deve essere

$$S \xi' x' = 0 \quad S \xi' \alpha' = 0 \quad S \xi' \lambda' = 0$$

e inoltre

$$\bar{P}^2 + \bar{L}^2 + \bar{M}^2 + \bar{N}^2 = 1.$$

Eseguito i calcoli si ottiene

$$(23) \left\{ \begin{aligned} \bar{P} &= \frac{\bar{S}^2}{H' ab} \left\{ \frac{\bar{S}'}{H'^2} p + \frac{\partial P}{\partial v} \right\} \\ \bar{L} &= \frac{\bar{S}^2}{H' ab} \left\{ \frac{\bar{S}'}{H'^2} l + \frac{\partial L}{\partial v} \right\} \\ \bar{M} &= \frac{\bar{S}^2}{H' ab} \left\{ \frac{\bar{S}'}{H'^2} m + \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{N \sqrt{h}}{MH'} \right\} \\ \bar{N} &= \frac{\bar{S}^2}{H' ab} \left\{ \frac{\partial N}{\partial v} - \frac{M \sqrt{h}}{MH'} \right\}. \end{aligned} \right.$$



## § 3.

**Le trasformazioni  $B_k$  delle coniche distorte.**

Premesse queste formole veniamo a stabilire l'equazione differenziale delle nostre trasformazioni.

Determiniamo  $v$  in funzione  $v(u)$  in modo che la tangente alle curve  $\Gamma'$  definite su  $\Sigma$  dall'equazione  $v = v(u)$  in ogni loro punto  $F'$  giaccia nel piano corrispondente  $\pi'$ . Verificheremo subito che il piano  $\pi'$  passa anche per la normale principale, cioè risulta il piano osculatore in  $F'$  alla curva  $\Gamma$  per  $F'$ .

La condizione indicata si esprime evidentemente mediante l'equazione

$$\mathfrak{S} \lambda'_i \frac{dx'_i}{ds'} = 0$$

ove  $s'$  è l'arco di  $\Gamma'$ , o anche mediante l'altra

$$(24) \quad \mathfrak{S} \lambda'_i \left( \frac{\partial x'_i}{\partial u} + \frac{\partial x'_i}{\partial v} \frac{dv}{du} \right) = 0.$$

Una prima semplificazione di questa equazione si ha osservando che, essendo

$$\mathfrak{S} \lambda'_i x'_i = 0$$

nel far lo sviluppo del primo membro della (24), non solo nei coefficienti di  $\sigma, \xi, \lambda$  nelle (2), ma anche nei coefficienti di  $x, \sigma, \xi$  nelle (1), risulta inutile conservare i denominatori. Dopo ciò la nostra equazione si può scrivere

$$(25) \quad \left\{ \mathfrak{S} [\bar{l}\alpha_i + \bar{m}\xi_i + \bar{n}\lambda_i] \left[ x_i \left( \frac{\partial p}{\partial u} - l \frac{ds}{du} \right) + \alpha_i \left( \frac{\partial l}{\partial u} - m \frac{ds}{du} + p \right) + \xi_i \left( \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{l ds}{\rho du} \right) - \frac{m\lambda_i}{T} \frac{ds}{du} + \frac{dv}{du} \left\{ \frac{\partial p}{\partial v} x_i + \frac{\partial l}{\partial v} \alpha_i + \frac{\partial m}{\partial v} \xi_i \right\} \right] \right\} = 0.$$

Osserviamo ora che quando  $\Gamma$  coincide con  $C$  le  $x'_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ )

si riducono alle  $x'_{i,0}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) e risultano indipendenti da  $u$ , ciò che dà

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u} - l \frac{ds}{du}\right) x'_{i,0} + \left(\frac{\partial l}{\partial u} + p - m \frac{ds}{du}\right) \sigma_{i,0} + \left(\frac{\partial m}{\partial u} + \frac{l}{\rho} \frac{ds}{du}\right) \xi_{i,0} = 0$$

( $i = 0, 1, 2, 3$ )

e quindi anche

$$(26) \quad \frac{\partial p}{\partial u} - l \frac{ds}{du} = 0 \quad \frac{\partial l}{\partial u} + p - \frac{ds}{du} m = 0 \quad \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{l}{\rho} \frac{ds}{du} = 0.$$

Per questa osservazione la (25) si induce subito alla forma

$$S [\bar{l} \sigma_i + \bar{m} \xi_i + \bar{n} \lambda_i] \left[ -\frac{m \lambda_i}{T} \frac{ds}{du} + \frac{dv}{du} \left\{ \frac{dp}{dv} x_i + \frac{\partial l}{\partial v} \sigma_i + \frac{\partial m}{\partial v} \xi_i \right\} \right] = 0$$

ovvero, per la (10),

$$\bar{n} \frac{m}{T} \frac{S}{H^2} = \frac{dv}{du} \left\{ \frac{\partial l}{\partial v} \bar{l} + \frac{\partial m}{\partial v} \bar{m} \right\}.$$

Ora sulle (14) (16) molto facilmente si verifica l'identità

$$(27) \quad \bar{l} \frac{\partial l}{\partial v} + \bar{m} \frac{\partial m}{\partial v} = \sqrt{\bar{h}} \bar{n} H S$$

quindi possiamo concludere che l'equazione cercata si può scrivere

$$(I) \quad \frac{dv}{du} = \frac{ab - ab' \sin u \sin v - a'b \cos u \cos v}{\sqrt{\bar{h}} T (1 + a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)}.$$

Possiamo ora subito verificare che le curve  $\Gamma'$  definite sulla superficie  $\Sigma$  da quest'equazione differenziale hanno in ogni loro punto  $F'$  per piano osculatore il piano  $\pi'$  corrispondente.

I coseni della normale principale in  $F'$  essendo dati dalle espressioni

$$(28) \quad \rho \left( \frac{d^2 x'_i}{ds'^2} - x'_i \right) \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

basterà per questo evidentemente verificare che in conseguenza della

(I) si ha

$$\mathcal{S} \lambda'_i \cdot \frac{d^2 x'_i}{ds'^2} = 0$$

ovvero

$$(28)^* \quad \mathcal{S} \frac{d \lambda'_i}{ds'} \cdot \frac{dx'_i}{ds'} = 0.$$

Tenendo presente che si ha

$$\mathcal{S} \lambda'_i x'_i = 0 \quad \mathcal{S} \lambda'_i \frac{dx'_i}{ds'} = 0 \quad \mathcal{S} \frac{d \lambda'_i}{ds'} x'_i = 0$$

è immediato che nello sviluppare il primo membro di quest'equazione è inutile tener conto dei denominatori  $X, \Lambda$  dei coefficienti delle (1) (2): dopo ciò, tenendo conto anche delle (25), la (28) si può scrivere

$$\mathcal{S} \left[ \frac{dv}{du} \left( \frac{\partial p}{\partial v} x_i + \frac{\partial l}{\partial v} \alpha_i + \frac{\partial m}{\partial v} \xi_i \right) - \frac{m \lambda_i}{T} \frac{ds}{du} \right] \left[ \frac{dv}{du} \left( \frac{\partial \bar{l}}{\partial v} \alpha_i + \frac{\partial \bar{m}}{\partial v} \xi_i + \frac{\partial \bar{n}}{\partial v} \lambda_i \right) - x_i \bar{l} \frac{ds}{du} + \right. \\ \left. + \alpha_i \left( \frac{\partial \bar{l}}{\partial u} - \frac{\bar{m} ds}{\rho du} \right) + \xi_i \left( \frac{\partial \bar{m}}{\partial u} + \frac{\bar{l} ds}{\rho du} + \frac{\bar{n} ds}{T du} \right) + \lambda_i \left( \frac{\partial \bar{n}}{\partial u} \lambda - \frac{\bar{m} ds}{T du} \right) \right] = 0$$

Ora tenendo presente le (14) (16) e la (I) facilmente si verificano le formole seguenti:

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial l}{\partial v} \frac{\partial \bar{l}}{\partial v} + \frac{\partial m}{\partial v} \frac{\partial \bar{m}}{\partial v} = 0 \\ - \bar{l} \frac{ds}{du} \frac{\partial p}{\partial v} \frac{dv}{du} + \left( \frac{\partial \bar{l}}{\partial u} - \frac{\bar{m} ds}{\rho du} \right) \frac{\partial l}{\partial v} \frac{dv}{du} + \left( \frac{\partial \bar{m}}{\partial u} + \frac{\bar{l} ds}{\rho du} \right) \frac{\partial m}{\partial v} \frac{dv}{du} - \frac{\bar{m} ds}{T du} \frac{\partial \bar{n}}{\partial u} = 0 \\ \frac{m \bar{m} ds}{T du} - m \frac{dv}{du} \frac{\partial \bar{n}}{\partial v} + \bar{n} \frac{dv}{du} \frac{\partial m}{\partial v} = 0 \end{array} \right.$$

e questo prova che la (28)\*, cioè la (28) è una conseguenza dell'equazione (I).

Dopo questo possiamo concludere che l'equazione differenziale (I) definisce sopra  $\Sigma$  una semplice infinità di curve  $\Gamma'$  che in ogni loro punto hanno per piano osculatore il piano  $\pi'$  corrispondente.

Dimostreremo ora che queste curve  $\Gamma'$  soddisfanno a tutte le condizioni enunciate nel §. 1.

Intanto dal fatto che il piano osculatore in un punto qualunque  $F'$  di  $\Gamma'$  è il piano  $\pi'$  passante per il punto corrispondente  $F$  di  $\Gamma$  e la generatrice  $g'$  di  $Q_k$  (dell'uno o dell'altro sistema) per  $F'$ , segue immediatamente che tal generatrice sarà la tangente in  $F'$  a  $\Gamma'$ . Questo fatto ci dimostra che le curve  $I'$  saranno le curve  $\Sigma$  che in ogni loro punto hanno la direzione della generatrice di  $Q_k$  che passa pel punto stesso, cioè le curve  $I'$  saranno proprio le curve che siano portati a considerare quando vogliamo interpretare l'enunciato del *teorema I* nel caso limite delle trasformazioni delle coniche distorte.

Dall'osservazione fatta segue che si dovrà avere

$$\frac{dx'_i}{ds'} = \alpha'_i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

e quindi, per le (26),

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{p}{X} \right) x_i + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{l}{X} \right) \sigma_i + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{m}{X} \right) \xi_i \right] \frac{dv}{ds'} - \frac{m \lambda_i}{XT} \frac{ds}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{ds'} = \\ = P x_i + L \sigma_i + M \xi_i + N \lambda_i \quad (i = 0, 2, 3) \end{aligned}$$

cioè

$$(30) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{p}{X} \right) \frac{dv}{ds'} = P; \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{l}{X} \right) \frac{dv}{ds'} = L; \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{m}{X} \right) \frac{dv}{ds'} = M; \quad - \frac{m}{TX} \frac{ds}{du} \frac{du}{dv} \frac{dv}{ds'} = N.$$

Ora sulle (14) (22) si verificano subito le formole

$$(31) \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{p}{X} \right) = \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} P; \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{l}{X} \right) = \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} L; \quad \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{m}{X} \right) = \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} M; \quad - \frac{m}{T} \frac{ds}{du} \frac{du}{dv} = \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} N;$$

quindi le (30) danno concordemente

$$(32) \quad \frac{dv}{ds'} = \frac{\bar{H}^2}{\bar{S}'}$$

Vediamo dunque che se si fa corrispondere ad ogni punto di  $\Gamma'$  col valore  $v$  del parametro, quello di  $\Gamma$  ove il valore del para-

metro è il medesimo, le curve si corrispondono per archi eguali. Si noti che per l'osservazione fatta al § 1 di questa « Nota », questa legge di corrispondenza tra i punti di  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  è data semplicemente dall'affinità d'IVORY tra le coniche confocali  $C'$  e  $C_k$ .

Dopo questo per dimostrare che  $\Gamma'$  è una conica distorta deformata di  $C'$ , basterà provare che il suo raggio di curvatura  $\rho'$  è dato dalla (12) cambiatovi  $u$  in  $v$ , cioè da

$$(32) \quad \rho' = \frac{\bar{S}^3}{ab \bar{H}^3}.$$

Osserviamo per questo che la normale principale in  $\Gamma'$  a  $\Gamma$  sarà la retta  $n'$ , e quindi i suoi coseni di direzione saranno dati dalle (18) ove per  $\bar{P}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\bar{M}$ ,  $\bar{N}$  si pongano i loro valori tratti dalle (23). D'altra parte secondo le formole generali di FRENET in geometria ellittica, si avrà (V. *Lezioni* § 201)

$$(33) \quad \left( \frac{\xi'_i}{\rho'} - x'_i \right) = \frac{dx'_i}{ds'} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

quindi sarà

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{ds'}{dv} \left[ \frac{1}{\rho'} \{ \bar{P}x + \bar{L}z + \bar{M}\xi + \bar{N}\lambda \} - (px + lz + m\xi) \right] = \left[ \left( \frac{\partial P}{\partial u} - L \frac{ds}{du} \right) x + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial L}{\partial u} + P \frac{ds}{du} - \frac{M}{\rho} \frac{ds}{du} \right) z + \left( \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{L}{T} \frac{ds}{du} + \frac{N}{T} \frac{ds}{du} \right) \xi + \left( \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{M}{T} \frac{ds}{du} \right) \lambda \right] \frac{du}{dv} + \\ & \left. + \frac{\partial P}{\partial v} x + \frac{\partial L}{\partial v} z + \frac{\partial M}{\partial v} \xi + \frac{\partial N}{\partial v} \lambda. \right. \end{aligned} \right.$$

Ora le espressioni

$$Px_i + Lz_i + M\xi_i + N\lambda_i, \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

quando  $\Gamma$  coincide con  $C$  risultano indipendenti da  $u$ : da ciò deduciamo subito che sussistono le identità

$$\frac{\partial P}{\partial u} - L \frac{ds}{ds} = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial u} + P \frac{ds}{du} - \frac{M}{\rho} \frac{ds}{du} = 0 \quad \frac{\partial M}{\partial u} + \frac{L}{\rho} \frac{ds}{du} = 0.$$

Siccome poi dall'ultima delle (22) segue subito

$$\frac{\partial N}{\partial u} = 0$$

potremo concludere di qui che le (34) si possono anche scrivere, tenendo conto della (32)

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} \left[ \frac{1}{\rho'} \left( \bar{P}x + \bar{L}\alpha + \bar{M}\xi + \bar{N}\lambda \right) \right] = \left( p \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} + \frac{\partial P}{\partial v} \right) x + \\ & + \left( l \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} + \frac{\partial L}{\partial v} \right) \alpha + \left( m \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} + \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{N\sqrt{h}}{MH'} \right) \xi + \left( \frac{\partial N}{\partial v} - \frac{M\sqrt{h}}{MH'} \right) \lambda. \end{aligned}$$

Di qui deduciamo subito che dovrà essere

$$\begin{aligned} \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} \frac{1}{\rho'} \bar{P} &= p \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} + \frac{\partial P}{\partial v}; \quad \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} \frac{1}{\rho'} \bar{L} = l \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} + \frac{\partial L}{\partial v}; \\ \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} \frac{1}{\rho'} \bar{M} &= m \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} + \frac{\partial M}{\partial v} + \frac{N\sqrt{h}}{MH'}; \quad \frac{\bar{S}'}{\bar{H}^2} \frac{1}{\rho'} \bar{N} = \frac{\partial N}{\partial v} - \frac{M\sqrt{h}}{MH'} \end{aligned}$$

e queste quattro relazioni per le (23) danno concordemente

$$\rho' = \frac{\bar{S}^3}{ab\bar{H}^3}.$$

Con ciò resta provato che le curve  $\Gamma'$  sono coniche distorte applicabili su  $C'$ , e quindi il teorema enunciato resta completamente dimostrato.

Osserviamo anche che l'equazione (I) riducendosi alla forma di RICCATI quando si ponga  $tv = \lambda$ , sussiste il teorema:

*Sulla superficie modanata  $\Sigma$  le  $\infty'$  coniche distorte  $\Gamma'$ , trasformate di  $\Gamma$  per mezzo di una  $B_k$ , segano proiettivamente le coniche  $C_k$ , che sono i profili di  $\Sigma$ .*

Osserviamo inoltre che se invece di fissare la forma della funzione  $T(u)$  diamo arbitrariamente  $v$  in funzione di  $u$ , ne risulta determinata univocamente e in termini finiti  $T(u)$ : verrà così determinata una configurazione della conica di storta  $\Gamma$ . L'interpre-

tazione geometrica di questo fatto si ha evidentemente nel teorema seguente:

*Si stabilisca una corrispondenza qualunque (continua e derivabile) di punto a punto tra le due coniche confocali  $C'$  e  $C_k$  e si considerino i segmenti  $\overline{FF'}$  congiungenti le coppie di punti corrispondenti come invariabilmente uniti per torsione alla conica  $C$ . Esiste allora una ed una sola configurazione di  $C$  in una conica distorta  $\Gamma$ , tale che i termini  $F'$  dei segmenti abbiano per luogo dopo la deformazione una seconda conica distorta  $\Gamma'$  applicabile sopra  $C'$  e trasformata di  $\Gamma$  per una  $B_k$ .*

Osserviamo infine che dovendosi avere per le formole di FRENET.

$$\frac{d\lambda'}{ds'} = \frac{\xi'}{T'}$$

ove  $T'$  è la torsione di  $\Gamma'$ , sarà

$$\begin{aligned} \frac{\overline{H}^2}{\overline{S}'} \left[ \frac{du}{dv} \right] - x \frac{\bar{l}}{\Lambda} \frac{ds}{du} + \alpha \left( \frac{\partial \bar{l}}{\partial u} \frac{1}{\Lambda} - \frac{\bar{m}}{\Lambda} \frac{1}{\rho} \right) + \xi \left( \frac{\partial \bar{m}}{\partial u} \frac{1}{\Lambda} + \frac{\bar{l}}{\Lambda} \frac{1}{\rho} + \frac{\bar{n}}{\Lambda} \frac{1}{T} \right) + \\ + \lambda \left( \frac{\partial \bar{n}}{\partial u} \frac{1}{\Lambda} - \frac{\bar{m}}{\Lambda} \frac{1}{T} \right) \left\{ + \frac{\partial \bar{l}}{\partial v} \alpha + \frac{\partial \bar{m}}{\partial v} G + \frac{\partial \bar{n}}{\partial v} \lambda \right\} = \\ = \frac{1}{T'} \left\{ \overline{P}x + \overline{L}\alpha + \overline{M}G + \overline{N}\lambda \right\}. \end{aligned}$$

Confrontando i coefficienti di  $x$  nei due membri otteniamo subito

$$kTT' = \overline{P} \frac{S'(ab - ab' \sin u \sin v - a'b \cos u \cos v)}{H\overline{H}^2} (1 + k).$$

D'altra parte sulle (14) (23<sub>1</sub>) si verifica facilmente l'identità

$$\frac{S^2 m^2}{\overline{H}X^2} = \overline{P} \frac{S'(ab - ab' \sin u \sin v - a'b \cos u \cos v)}{\overline{H}^2} (1 + k).$$

sarà dunque

$$(35) \quad kTT' = \frac{S^2 m^2}{\overline{H}^2 X^2}.$$

Notiamo infine che i secondi membri delle (2) non contengono

termini in  $x$ , ciò che mostra che i piani osculatori a  $\Gamma, \Gamma'$  in due punti corrispondenti si tagliano secondo la congiungente dei punti stessi, o, ciò che è lo stesso, le due coniche distorte  $FF'$  sono asintotiche della rigata luogo delle rette  $FF'$ . In vista di questa proprietà, estendendo una denominazione dello spazio ordinario, diremo che le due curve sono *trasformate asintotiche* l'una dell'altra (V. BIANCHI. *Sulle configurazioni mobili di MÖBIUS nelle trasformazioni asintotiche delle curve e delle superficie*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. T. XXV, 1908).

§ 4.

**La trasformazione H.**

I risultati dei §§ precedenti hanno dimostrato come le proprietà fondamentali delle trasformazioni  $B_k$  per le deformate delle quadriche dello spazio ellittico, si conservino anche nel caso limite delle deformate delle coniche.

Vogliamo ora ulteriormente dimostrare che anche le proprietà della trasformazione H delle quadriche dello spazio ellittico in quadriche dello spazio ordinario sussistono anche al limite traducendosi in proprietà di deformazioni coniugate di coniche dello spazio ellittico e di coniche dello spazio ordinario convenientemente accoppiate.

Sia

$$\frac{\bar{x}_{10}^2}{\bar{a}^2} + \frac{\bar{x}_{20}^2}{\bar{b}^2} = \bar{x}_{00}^2 \quad (\bar{a}^2 \geq \bar{b}^2)$$

l'equazione di un'ellisse  $\bar{C}$  dello spazio ordinario giacente nel piano  $\bar{x}_{30} = 0$ , e assumiamo come assoluto di una metrica ellittica, che per semplicità supporremo di raggio = 1, un elissoide immaginario

$$\frac{\bar{x}_{10}^2}{k_1 - \bar{a}^2} + \frac{\bar{x}_{20}^2}{k_1 - \bar{b}^2} + \frac{\bar{x}_{30}^2}{k_1} + \bar{x}_{00}^2 = 0 \quad (k_1 > \bar{a}^2)$$

ad essa confocale. Evidentemente le quadriche confocali a  $\bar{C}$ , considerata come appartenente allo spazio ordinario, risulteranno con-



focali a  $\bar{C}$  anche considerata come appartenente allo spazio ellittico. Vediamo dunque che se una conica distorta  $\bar{\Gamma}$  deformata di  $\bar{C}$ , considerata come appartenente allo spazio ordinario, si applica su  $\bar{C}$  seco trascinando i segmenti  $\bar{F}\bar{F}'$  che uniscono i punti di  $\bar{\Gamma}$  ai punti corrispondenti di una conica distorta  $\Gamma'$  derivata da essa mediante una  $B_{\bar{k}}$  dello spazio ordinario, se  $\bar{M}, \bar{M}'$  sono le posizioni finali di  $\bar{F}, \bar{F}'$ , i punti  $\bar{M}'$  avranno per luogo una conica  $\bar{C}_{\bar{k}}$  che è confocale a  $\bar{C}$  anche considerata come appartenente allo spazio ellittico.

Dimostriamo ora che se la conica  $\bar{C}$  si deforma in una conveniente conica distorta dello spazio ellittico, seco trascinando i segmenti  $\bar{M}\bar{M}'$ , se  $F$  ed  $F'$  sono le posizioni finali di  $\bar{M}, \bar{M}'$ , a deformazione compiuta il luogo dei punti  $\bar{M}'$  sarà una conica distorta  $\bar{\Gamma}'$  applicabile su  $\Gamma$ , e i punti  $F, F'$  risulteranno corrispondenti in una trasformazione  $B_k$  che fa derivare  $\Gamma'$  da  $\Gamma$ .

Per potere applicare senz'altro le formole stabilite per le trasformazioni  $B_k$  delle coniche dello spazio ellittico, cominciamo dal ridurre con una trasformazione omografica l'equazione dell'assoluto alla forma solita

$$x_{00}^2 + x_{10}^2 + x_{20}^2 + x_{30}^2 = 0.$$

Un'omografia che serve al nostro scopo sarà evidentemente data dalle formole

$$(36) \quad \frac{\bar{x}_{10}}{\bar{a}_1} = \bar{x}_{10} \quad \frac{\bar{x}_{20}}{\bar{b}_1} = \bar{x}_{20} \quad \frac{\bar{x}_{30}}{\sqrt{k_1}} = x_{20} \quad \bar{x}_{00} = x_{00}$$

ove

$$(37) \quad \bar{a}_1^2 = k_1 - \bar{a}^2 \quad \bar{b}_1^2 = k_1 - \bar{b}^2$$

e per essa la conica  $\bar{C}$  si trasformerà in una conica  $C$  d'equazione

$$\frac{x_{10}^2}{a^2} + \frac{x_{20}^2}{b^2} = x_{00}^2$$

ove

$$(38) \quad a^2 = \frac{\bar{a}^2}{\bar{a}_1^2} \quad b^2 = \frac{\bar{b}^2}{\bar{b}_1^2}.$$

Di più ad una quadrica  $Q_{\bar{k}}$  confocale a  $\bar{C}$

$$\frac{\bar{x}_{10}^2}{\bar{a}^2 - \bar{k}} + \frac{\bar{x}_{20}^2}{\bar{b}^2 - \bar{k}} - \frac{\bar{x}_{30}^2}{\bar{k}} = \bar{x}_{00}^2$$

verrà a corrispondere una quadrica  $Q_k$  confocale a  $C$  d'equazione

$$\frac{x_{10}^2}{a^2 - k} + \frac{x_{20}^2}{b^2 - k} - \frac{x_{30}^2}{k} = \frac{x_{00}^2}{1 + k}$$

ove

$$(39) \quad k = \frac{\bar{k}}{\bar{k}_1 - \bar{k}}.$$

Infine ai punti  $\bar{M}, \bar{M}'$  di  $\bar{C}, \bar{C}_{\bar{k}}$  corrisponderanno su  $C, C_k$  i punti  $M, M'$  tali che sia rispettivamente

$$\bar{a} \cos \bar{u} : \bar{b} \sin \bar{u} : 1 = \bar{a}_1 a \cos u : b_1 b \sin u : 1$$

e

$$\bar{a}' \cos \bar{v} : \bar{b}' \sin \bar{v} : 1 = \bar{a}_1 a' \cos v : \bar{b}_1 b' \sin v : 1$$

ove

$$(40) \quad \bar{a}'^2 = \bar{a}^2 - \bar{k} \quad \bar{b}'^2 = \bar{b}^2 - \bar{k}$$

$$(41) \quad a'^2 = \frac{a^2 - k}{1 + k} \quad b'^2 = \frac{b^2 - k}{1 + k}.$$

quindi sarà

$$(42) \quad u = \bar{u} \quad v = \bar{v}.$$

Premesso questo dimostriamo subito la proprietà in vista osservando che, siccome l'ampiezza e la posizione dei segmenti  $\overline{MM'}$  non dipende altro che dalla relazione che lega  $u$  a  $v$ , basterà per il nostro asserto che facciamo vedere che l'equazione differenziale delle trasformazioni  $B_k$  relative ad una conveniente deformata  $\Gamma$  di  $C$ , coincide coll'equazione differenziale corrispondente alla trasformazione  $B_{\bar{k}}$  che da  $\bar{\Gamma}$  fa passare a  $\bar{\Gamma}'$ .

Ricordando allora i risultati dello spazio ordinario, siamo ridotti a dimostrare che, ponendo le torsioni  $T, \bar{T}$  di  $\Gamma, \bar{\Gamma}$  in una conveniente relazione, si ha identicamente

$$3) \frac{\bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{b}' \sin u \sin v - \bar{a}'\bar{b} \cos u \cos v}{\bar{T} \sqrt{\bar{k}}} = \frac{ab - ab' \sin u \sin v - a'b \cos u \cos v}{\sqrt{h} T (1 + a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)}$$

avendo posto al solito  $h = \frac{k}{1+k}$ . Tenendo presenti le relazioni tra  $a, b, k$  e  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{k}$  risulta subito che basterà prendere  $T$  in modo che sia

$$(44) \quad \bar{T} = \frac{\bar{a}_1 \bar{b}_1}{\sqrt{\bar{k}_1}} T (1 + a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)$$

perchè l'eguaglianza ora scritta sia identicamente verificata.

Ponendo tra le torsioni di  $\Gamma, \bar{\Gamma}$  questa relazione, l'equazioni differenziali delle trasformazioni  $B_k, B_{\bar{k}}$  vengono dunque a coincidere, ciò che prova la proprietà enunciata.

Consideriamo di più le rispettive curve trasformate  $\Gamma', \bar{\Gamma}'$  per le cui torsioni abbiamo le formole

$$k \bar{T} \bar{T}' = (\bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{b}' \sin u \sin v - \bar{b}\bar{a}' \cos u \cos v)^2$$

$$k T T' = \frac{(ab - ab' \sin u \sin v - a'b \cos u \cos v)^2}{(1 + a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u)(1 + a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)}$$

Da queste formole deduciamo, tenendo presente le (39) (44)

$$\frac{k_1 - \bar{k}}{\sqrt{\bar{k}_1}} \frac{\bar{T}'}{T'} = a_1 b_1 (1 + a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) = \frac{a_1 b_1}{1+k} (1 + a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)$$

e poichè

$$(1+k)(k_1 - \bar{k}) = k_1$$

sarà anche

$$\bar{T}' = \frac{a_1 b_1}{\sqrt{\bar{k}_1}} T' (1 + a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v)$$

ciò che mostra che la relazione che passa tra le torsioni di  $\Gamma, \bar{\Gamma}$  sussiste anche tra le torsioni di  $\Gamma', \bar{\Gamma}'$ .

Vediamo dunque che il passaggio da  $\Gamma$  a  $\bar{\Gamma}$  corrisponde perfettamente per le sue proprietà rispetto alla trasformazione  $B_k$ , alla trasformazione  $H$  delle deformate delle quadriche dello spazio ellittico in deformate di quadriche dello spazio ordinario.

In vista di questo noi denomineremo ancora *trasformazione H delle coniche distorte dello spazio ellittico in coniche distorte dello*

spazio ordinario il passaggio da  $\Gamma$  a  $\bar{\Gamma}$  e di più diremo che le due coniche  $C, \bar{C}$  sono *coniugate in deformazione* e che due deformate  $\Gamma, \bar{\Gamma}$  di  $C, \bar{C}$  tra le quali sussista la relazione (44) sono *deformate corrispondenti o coniugate* delle due coniche.

Evidentemente ogni conica reale dello spazio ellittico ha certamente una coniugata in deformazione nello spazio ordinario. Infatti se in un sistema di quadriche confocali dello spazio ellittico c'è una conica focale  $C$  propria reale, ce n'è anche una immaginaria  $C^*$  pure propria e quindi potremo sempre portare con un'omografia reale tale sistema in un sistema di quadriche confocali dello spazio ordinario.

Basterà per questo scegliere l'omografia in modo che la conica immaginaria  $C^*$  si trasformi nell'assoluto dello spazio ordinario. Ciò del resto si verifica subito anche sulle formole che stabiliscono la relazione  $C, \bar{C}$ . Si osservi infine che dai risultati della « Nota » citata segue subito che se  $C$  è un cerchio, prescindendo dalle curve omotetiche, ha una sola conica coniugata in deformazione nello spazio ordinario, che sarà pure un cerchio: se  $C$  non è un cerchio, ha invece due coniche coniugate in deformazione nello spazio ordinario, e precisamente un'ellisse e un'iperbole focali l'una dell'altra.

Colle denominazioni introdotte possiamo enunciare i risultati ottenuti nel modo seguente: *Siano  $\Gamma, \Gamma'$  due deformate di una conica  $C$  qualunque dello spazio ellittico derivate l'una dall'altra per una trasformazione  $B_k$ , e  $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}'$  le deformate corrispondenti di una conica  $\bar{C}$  coniugata in deformazione a  $C$  nello spazio ordinario. Potremo sempre collocare  $\bar{\Gamma}'$  in una tale posizione rispetto a  $\bar{\Gamma}$ , che  $\bar{\Gamma}'$  risulti derivata da  $\bar{\Gamma}$  mediante una  $B_{\bar{k}}$  e anzi sopra  $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}'$  siano punti corrispondenti i punti delle due curve che nella trasformazione  $H$  di  $\bar{\Gamma}$  in  $\Gamma$ , e  $\bar{\Gamma}'$  in  $\Gamma'$  vanno in punti corrispondenti nella trasformazione  $B_k$  di  $\Gamma$  in  $\Gamma'$ .*

## § 5.

**Applicazioni della trasformazione H.**

Abbiamo visto che le proprietà della trasformazione H delle quadriche dello spazio ellittico in quadriche dello spazio ordinario sussistono anche al limite traducendosi in proprietà di una trasformazione che noi abbiamo ancora denominato trasformazione H delle coniche distorte dello spazio ellittico in coniche distorte dello spazio ordinario.

Tale fatto pone uno stretto legame tra le trasformazioni  $B_k$  nello spazio ellittico e le trasformazioni  $B_k$  nello spazio ordinario, e noi ora ce ne varremo per estendere allo spazio ellittico gli altri risultati sulla trasformazione delle coniche distorte ottenuti dal prof. BIANCHI nella « Nota » citata.

Cominciamo da dimostrare che la relazione tra due coniche distorte  $\Gamma, \Gamma'$  derivate l'una dall'altra mediante una  $B_k$  è reciproca.

Per questo consideriamo le coniche distorte  $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}'$  coniugate in deformazione nello spazio ordinario.

Tali curve si potranno porre in una tale relazione reciproca che  $\bar{\Gamma}'$  risulti derivata da  $\bar{\Gamma}$  mediante una  $B_{\bar{k}}$ , e allora anche  $\bar{\Gamma}$  risulterà derivata da  $\bar{\Gamma}'$  mediante una  $B_{\bar{k}}$ . Di qui coll'aiuto dei risultati del § precedente si deduce subito che esisterà una  $B_k$  che fa passare da  $\Gamma'$  ad una curva identica a  $\Gamma$  e che in tale trasformazione riescono punti corrispondenti i punti che riuscivano corrispondenti nella trasformazione di  $\Gamma$  in  $\Gamma'$ : anzi i segmenti che uniscono le coppie di punti corrispondenti sono eguali nei due casi. Possiamo di più osservare che tali segmenti giaceranno ciascuno nel piano osculatore di  $\Gamma$  nel punto corrispondente. Queste condizioni, come subito si vede, sono più che sufficienti per potere affermare che tali segmenti avranno rispetto a  $\Gamma$  la stessa posizione che nella trasformazione di  $\Gamma$  in  $\Gamma'$  primitivamente considerata, e ciò prova quanto volevamo, cioè che: *Se  $\Gamma'$  è una conica distorta derivata da  $\Gamma$  mediante una  $B_k$ , anche  $\Gamma$ , fissa restando la posizione relativa di  $\Gamma, \Gamma'$  si può considerare come derivata da  $\Gamma'$  mediante una  $B_k$ .*

Dalle proprietà della trasformazione  $H$  e dai risultati dello spazio ordinario si deduce pure immediatamente che le deformazioni di due coniche  $C, C'$  focali l'una dell'altra si possono sempre porre in una tale corrispondenza, stabilendo una conveniente relazione tra le loro torsioni, che date due deformate corrispondenti si possa sempre mediante due trasformazioni  $B_k, B_{k'}$ , le cui costanti  $k, k'$  sono legate da una relazione dipendente solo dalle coniche scelte, trasformarle ancora in due derivate di  $C, C'$  corrispondenti. Precisamente si ottiene il risultato seguente del tutto analogo al risultato corrispondente nello spazio ordinario: *Siano  $\Gamma, \Gamma'$  due deformate della conica  $C$ , che supponiamo ora diversa da un cerchio, trasformate l'una dell'altra per una  $B_k$ , e consideriamo i segmenti  $\overline{FF'}$  che uniscono i punti corrispondenti. Quando la curva  $\Gamma$  si applica sulla conica  $C$  seco trasportando i segmenti  $\overline{FF'}$ , questi si disporranno coi loro estremi sopra una conica  $C_k$  confocale a  $C$ . Trasformiamo ora, come sempre si può fare essendosi escluso che  $C$  sia un cerchio, mediante un'omografia  $C$  e  $C_k$  rispettivamente nella conica  $C_1$  focale di  $C$ , e in una conica  $C_{1/k_1}$  confocale a  $C_1$ ; e diciamo  $F_1 F'_1$  i punti corrispondenti in tale omografia rispettivamente ad  $F, F'$ . Se deformiamo la conica  $C_1$  nella conica distorta  $\Gamma_1$  coniugata in deformazione a  $\Gamma$ , i segmenti  $F_1 F'_1$  trascinati nella deformazione si disporranno coi loro estremi  $F'_1$  sulla conica distorta  $\Gamma'_1$  coniugata in deformazione a  $\Gamma$ .*

Come si vede queste proprietà delle coppie di coniche focali corrispondono perfettamente a quelle delle coppie di quadriche coniugate in deformazione: il passaggio da una conica data alla sua conica focale equivale dunque alla trasformazione  $H$  di una quadrica in una quadrica coniugata in deformazione.

Vogliamo infine dimostrare come anche per le trasformazioni  $B_k$  delle coniche distorte dello spazio ellittico sussiste un teorema del tutto analogo al teorema di permutabilità delle trasformazioni  $B_{\bar{k}}$  delle coniche distorte nello spazio ordinario, cioè si ha:

*Se  $F_1, F_2$  sono due coniche distorte contigue per due trasformazioni  $B_{k_1}, B_{k_2}$  alla conica distorta  $\Gamma$ , esiste una quarta conica distorta  $\Gamma'$  perfettamente fissata di forma e di posizione, legata*

alle medesime  $\Gamma_1, \Gamma_2$  da due trasformazioni  $B'_{k_2} B'_{k_1}$  colle stesse costanti  $k_1 k_2$  permutate.

Intanto dalle proprietà della trasformazione H delle coniche distorte dello spazio ellittico in coniche distorte dello spazio ordinario e dal teorema corrispondente nello spazio ordinario, si deduce subito che esiste una curva  $\Gamma'$  da cui si può derivare  $\Gamma_2$  mediante una  $B'_{k_1}$  e  $\Gamma_1$  mediante una  $B'_{k_2}$ . Per dimostrare il teorema basterà dunque far vedere che la posizione relativa di  $\Gamma_1 \Gamma_2$  come trasformate di  $\Gamma'$  mediante  $B'_{k_2} B'_{k_1}$  e come trasformate di  $\Gamma$  mediante  $B_{k_1} B_{k_2}$  è la stessa. Sia F un punto qualunque di  $\Gamma$ ,  $F_1 F_2$  i punti che gli corrispondono su  $\Gamma_1 \Gamma_2$  rispettivamente nelle trasformazioni  $B_{k_1} B_{k_2}$ ,  $F'_1 F'_2$  gli stessi punti di  $\Gamma_1 \Gamma_2$  quando si considerino queste curve come derivate da  $\Gamma'$  per una  $B'_{k_2}$  e una  $B'_{k_1}$ , F' il punto di  $\Gamma'$  che corrisponde a  $F'_1 F'_2$ . Dalla dimostrazione del teorema di permutabilità nello spazio ordinario segue che se applichiamo  $\Gamma$  su C i punti  $F_1, F_2$  andranno rispettivamente in punti delle coniche  $C_{k_1}, C_{k_2}$  confocali a C, tali che se applichiamo anche  $\Gamma'$  su C corrisponderanno rispettivamente alle posizioni finali di  $F'_1 F'_2$  nell'affinità d'Ivory tra le due coniche  $C_{k_1}, C_{k_2}$ . Per una proprietà elementare dell'affinità d'Ivory segue di qui immediatamente che i segmenti  $\overline{F_1 F_2}, \overline{F'_1 F'_2}$  sono eguali e ciò basta a provare quanto volevamo.

Osserveremo infine senza fermarci a dimostrarlo, che anche la seconda parte del teorema di permutabilità delle trasformazioni  $B_k$  delle deformate delle quadriche, seguita a sussistere anche nel caso limite delle trasformazioni  $B_k$  delle coniche distorte. Da essa segue la seguente costruzione della quarta curva del teorema di permutabilità: *Se per ogni punto F di  $\Gamma$  si tira la retta r che si appoggia in  $N_1 N_2$  alle due tangenti di  $\Gamma_1 \Gamma_2$  nei punti  $F_1 F_2$  corrispondenti ad F, e si prende su r un punto F' tale che sia*

$$(N_1 N_2 F F') = \frac{h_1}{h_2} \quad \left( h_1 = \frac{k_1}{1-k_1} \quad h_2 = \frac{k_2}{1-k_2} \right)$$

*il punto F' al variare di F su  $\Gamma$  descrive la quarta curva del teorema di permutabilità.*

Osserviamo anche che nel caso che C sia un cerchio, esisterà una

sola conica dello spazio ordinario ad essa coniugata in deformazione che sarà pure un cerchio e la relazione (44) diverrà in questo caso

$$\bar{T} = \sqrt{k_1} T$$

conformemente al fatto che fissata la conica C, il variare la costante  $k_1$  fa passare da una conica  $\bar{C}$  coniugata in deformazione nello spazio ordinario a C, ad una conica omotetica.

Siccome poi le (38) danno subito

$$\bar{a}^2 = \frac{a^2}{1+a^2} k_1$$

possiamo concludere che: *Data una curva dello spazio ellittico a flessione costante  $= \frac{1}{a}$ , se T è la sua torsione e c una costante arbitraria, la curva dello spazio ordinario a flessione costante  $\sqrt{\frac{ca}{1+a^2}}$  e di torsione  $\bar{T} = cT$  è ad essa coniugata in deformazione.*

### § 6.

#### **Le trasformazioni $B_j$ dei coni quadrici distorti.**

Come abbiamo già avvertito, applicando la legge di dualità ai risultati ottenuti in questa «Nota», dalla nostra teoria delle trasformazioni  $B_j$  delle coniche distorte si deduce una teoria analoga delle trasformazioni  $B_k$  delle sviluppabili che hanno per curva polare una conica distorta, sviluppabili che, per analogia colle locuzioni già introdotte, chiameremo *coni quadrici distorti*, riguardandole come deformate dell'involuppo aderente al cono polare della conica sulla quale risultano applicabili le curve polari delle sviluppabili stesse.

Noi non staremo a sviluppare questa teoria. Avvertiremo soltanto che dai risultati ottenuti si deduce subito che gli spigoli di regresso di due sviluppabili derivate l'una dall'altra per una trasformazione  $B_j$  si possono porre in una tale corrispondenza che si



ha al tempo stesso, coi soliti simboli

$$\frac{ds}{T} = \frac{ds'}{T'} \quad \frac{ds}{\rho} = \frac{ds'}{\rho'}$$

equivalendo queste due relazioni all'avere le curve polari delle svilup-pabili assegnate ad eguaglianza d'arco eguale flessione. Di più i piani osculatori ai due spigoli di regresso nei punti omologhi in tale corrispondenza, s'incontreranno lungo la congiungente dei punti stessi, cioè tali curve risulteranno trasformate asintotiche l'una dell'altra.

Come le trasformazioni  $B_k$  delle coniche distorte, così anche le trasformazioni  $B_j$  di un cono quadrico distorto  $\Gamma_{(p)}$  dipendono da due costanti arbitrarie: per una di queste costanti potremo assumere la costante  $j$  che fissa le singole quadriche omocicliche al cono fondamentale. Fissato  $j$ , se consideriamo gli  $\infty^1$  coni quadrici distorti  $\Gamma'_{(p)}$  derivati da  $\Gamma_{(p)}$  mediante le trasformazioni  $B_j$ , il luogo degli  $\infty^1$  punti degli spigoli di regresso dei  $\Gamma'_{(p)}$ , corrispondenti ad uno stesso punto di  $\Gamma_{(p)}$ , sarà una conica  $K$  e precisamente la conica in cui il piano osculatore dello spigolo di regresso di  $\Gamma_{(p)}$  viene a tagliare la quadrica  $Q_j^{(\rho)}$  del fascio omociclico determinato dal cono fondamentale  $C^{(p)}$ , quando tal cono, seco trascinando la quadrica in questione, si colloca col vertice nel punto considerato dello spigolo di regresso di  $\Gamma^{(p)}$ , in modo che la generatrice di  $\Gamma^{(p)}$  e il piano tangente a  $\Gamma^{(p)}$  pel punto stesso, coincidano colla generatrice e il piano tangente di  $C^{(p)}$  ad essi corrispondenti nell'applicabilità di  $\Gamma^{(p)}$  su  $C^{(p)}$ . Sulla superficie luogo delle coniche  $K$ , che lungo le coniche stesse è involupata dalle singole posizioni della quadrica  $Q_j^{(\rho)}$ , gli spigoli di regresso dei  $\Gamma'_{(p)}$  sono caratterizzati dall'avere in ogni punto la direzione della generatrice di  $Q_j^{(\rho)}$  (dell'uno o dell'altro sistema) pel punto stesso.

Applicando questi risultati al caso particolare che il cono fondamentale sia di rotazione, siccome in tal caso per ognuno dei coni quadrici distorti su di esso applicabili il rapporto della flessione alla torsione ha un valore costante eguale per tutti, otteniamo il seguente metodo di trasformazione delle curve dello spazio ellittico in cui è costante il rapporto della flessione alla torsione:

Data una curva  $C$  dello spazio ellittico in cui il rapporto  $\frac{1}{\rho} : \frac{1}{T}$  della flessione alla torsione sia costante  $= \frac{1}{a}$ , consideriamo il cono quadrico d'equazione

$$a^2 (x_{10}^2 + x_{20}^2) = x_{00}^2.$$

Se questo cono seco trascinando una quadrica omociclica  $Q_j$  rotola sulla sviluppabile delle tangenti alla curva  $C$ , e al tempo stesso striscia in modo che il suo vertice si mantenga sempre su  $C$ , il luogo delle sezioni dei piani osculatori di  $C$  colle singole posizioni della quadrica  $Q_j$  è una superficie  $S$ , involupata secondo le coniche stesse dalle  $\infty^1$  posizioni della quadrica. Le curve di questa superficie che in ogni loro punto hanno la direzione della generatrice (dell'uno o dell'altro sistema) della quadrica considerata che passa pel punto stesso, sono nuove curve  $C'$  in cui il rapporto  $\frac{1}{\rho'} : \frac{1}{T'}$  della flessione alla torsione è costante  $= \frac{1}{a}$ .

---



# INDICE

---

INTRODUZIONE . . . . .	pag. 3
§ 1. — Alcune formole fondamentali . . . . .	» 7
2. — Prime formole relative alle quadriche rigate . . . . .	» 10
3. — Descrizione del metodo per la ricerca delle trasformazioni . . . . .	» 16
4. — Le equazioni differenziali per $\theta(u, v)$ . . . . .	» 18
5. — Calcolo dell'elemento lineare delle superficie trasformate (S') . . . . .	» 25
6. — Formole d'applicabilità dedotte dall'affinità d'IVORY . . . . .	» 33
7. — Applicabilità delle superficie (S') su $Q_0$ . . . . .	» 37
8. — Dimostrazione delle identità (69) (70) (71) . . . . .	» 40
9. — La trasformazione H . . . . .	» 46
10. — Corrispondenza delle asintotiche su (S) (S'). Dimostrazione della proprietà $\beta$ ) . . . . .	» 53
11. — Applicazioni della trasformazione H . . . . .	» 56
12. — Le trasformazioni $B_k$ delle deformate rigate . . . . .	» 60
13. — Relazione reciproca tra (S) ed (S') . . . . .	» 62
14. — Le trasformazioni $B_k$ per le quadriche di rotazione e le superficie pseudosferiche . . . . .	» 66
15. — Il teorema di permutabilità per le deformate rigate . . . . .	» 68
16. — Il teorema di permutabilità in generale . . . . .	» 72
17. — Le congruenze polari delle congruenze $B_k$ . . . . .	» 75
18. — Le congruenze $B_k$ relative alle superficie a curvatura nulla . . . . .	» 78
19. — Le congruenze $B_k$ relative alle superficie a curvatura nulla considerate come applicabili sulle superficie di CLIFFORD . . . . .	» 82
20. — Le congruenze W a falde di egual curvatura relative alle superficie a curvatura nulla . . . . .	» 89

NOTA. — **Sopra un caso limite delle trasformazioni  $B_k$   
per le deformate delle quadriche nello spazio ellittico.**

§ 1. — Considerazioni generali . . . . .	pag. 94
2. — Formole preliminari . . . . .	» 97
3. — Le trasformazioni $B_k$ delle coniche distorte . . . . .	» 104
4. — La trasformazione H . . . . .	» 111
5. — Applicazioni della trasformazione H . . . . .	» 116
6. — Le trasformazioni $B_j$ dei coni quadrici distorti . . . . .	» 119

---