ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ISABELLA CIPOLLA

I punti di Weierstrass sopra una curva algebrica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 10 (1908), exp. nº 1, p. 1-36
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1908_1_10__A1_0>

ISABELLA CIPOLLA

I PUNTI DI WEIERSTRASS

SOPRA

UNA CURVA ALGEBRICA

§ 1. Definizione dei punti di Weierstrass.

1. Si chiamano punti di Weierstrass sopra un ente algebrico semplicemente infinito di genere p ($p > 1$) quei punti che sono almeno p^{upli} per la serie canonica g_{2p-2}^{p-1} esistente sull'ente. Alla definizione dei punti in discorso si può dare un'altra forma [1]) e questa nuova maniera di definirli dà ragione del nome dei punti di W. perchè si basa sul celebre *Lukensatz* dell'insigne analista.

Il *Lukensatz* di Weierstrass, com'è ben noto, si enuncia geometricamente come segue: *Tra le serie lineari complete d' ordine m, che hanno in un punto di un ente algebrico semplicemente infinito di genere p un punto* m^{uplo}, *ve ne sono p e p solamente che hanno in quel punto un punto fisso.*

Chiamando *ordini mancanti* nel punto considerato gli ordini di questo p serie, dal teorema di riduzione riguardante le serie lineari complete con punto fisso che dice: « *Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie completa d' ordine n determinata da un gruppo di n punti abbia un punto P del gruppo per punto fisso, è che pei rimanenti punti del gruppo passino gruppi canonici* (uno almeno) *che non contengono P* » [2]) si trae, che in un punto

---

1) Haure, *Recherches sur les points de Weierstrass d'une courbe plane algébrique.* Annales de l'Ecole Normale Superieure A. 1896.

2) Per la dimostrazione geometrica dei teoremi di questo paragrafo v. ad esempio Segre, *Introduzione alla geometria ecc.*, Annali di mat. del R. Istituto Lombardo, T. XXII, pag. 89 e segg.

generico dell' ente i p ordini mancanti sono i numeri 1, 2, 3. . . , p, *mentre quei punti in cui gli ordini mancanti scritti in ordine crescente offrono una successione diversa da 1, 2, 3 . . . p sono tutti e soli i punti di Weierstrass.*

In altre parole, se ci riferiamo invece che agli ordini mancanti a quelli *esistenti* (ovviamente indicando con questo nome gli ordini delle g_m complete con punto m^{uplo} non fisso nel punto di W.) possiamo anche dire con il sig. Hurwitz [1], che in un punto generico dell'ente di genere p il minimo ordine esistente è $p+1$, *mentre in un punto di W. è certo minore di* $p+1$, *e questa è una proprietà caratteristica dei punti almeno* p^{upli} della serie canonica.

Ora noi vogliamo fare degli studî sulle proprietà dei sistemi di ordini mancanti in un punto di Weierstrass di una curva di dato genere, e sulla rappresentazione piana delle curve di genere p che posseggono un punto di W. con dati ordini mancanti. Premettiamo pertanto che chiameremo *punto di W. di specie determinata e a volte anche dato punto di W.*, un punto di W. che presenti una *data* successione di ordini mancanti.

§ 2. Enti iperellittici.

2. *Per gli enti iperellittici*, in cui la serie canonica è composta con la g_2^1 esistente sull'ente, *i punti di W. sono tutti e soli i* $2p+2$ *punti doppî della* g_2^1 *esistente sull'ente, e ognuno di essi ha come punto* p^{uplo} *della serie canonica la molteplicità* $\frac{p\,(p-1)}{2}$ (ossia conta nel numero complessivo dei punti di W. per $\frac{p\,(p-1)}{2}$ unità) [2]. Infatti:

Che ogni punto doppio della g_2^1 sia un punto di W. è evidente, pensando che p. e. esso è $(2p-2)^{uplo}$ per il gruppo canonico de-

[1] Hurwitz, *Ueber algebreische Getilde ecc.* Math. Annalen T. 41, Cap. 1°.

[2] V. Hurwitz, loc. cit.

terminato da esso stesso preso $(p-1)$ volte, è poi anche chiaro che ogni punto almeno p^{uplo} della serie canonica dev'essere un punto doppio della g_2^1, perchè se esso non fosse tale, quei gruppi canonici che lo contengono come p^{uplo} dovrebbero pure contenere come p^{uplo} quel punto (da esso distinto), che insieme con esso dà una coppia della g_2^1, il che è assurdo perchè i gruppi canonici constano di $2p-2$ punti soltanto. In quanto all'avere i punti in discorso come punti di W. la molteplicità $\frac{p\,(p-1)}{2}$, ciò discende immediatamente da un calcolo fatto da Segre nella sua *Introduzione ecc.*, già altrove citata, al § 44, per trovare in generale l'influenza che ha sul numero totale dei punti $(r+1)^{upli}$ di una g_n^r composta con un'involuzione, un punto doppio dell'involuzione stessa.

Per fare questo calcolo il Segre si basa su di una formula da lui dimostrata al § 43, la quale dà l'influenza che ha sul numero dei punti $(r+1)^{upli}$ di una g_n^r un punto i^{plo} (in generale) per gli ∞^{r-1} gruppi che lo contengono i_1^{plo} per ∞^{r-2} gruppi, i_2^{plo} per ∞^{r-3} ecc. i_{r-2}^{uplo} per ∞^1, i_{r-1}^{uplo} per uno solo.

Tale influenza viene espressa da:

$$\text{(A)} \qquad i + i_1 + i_2 + \,..\, + i_{r-1} - \frac{r\,(r+1)}{2}$$

Ora nel caso della g_n^r composta con un'involuzione, un punto doppio dell'involuzione stessa viene ad essere precisamente multiplo secondo $2, 4 \ldots 2\,(r-1), 2r$ per $\infty^{r-1}, \infty^{r-2} \ldots \infty^1, 1$ gruppi della g_n^r, epperò secondo la (A) la sua influenza sui punti $(r+1)^{upli}$ della serie è data da $\frac{r\,(r+1)}{2}$. Nel caso nostro particolare in cui si tratta della serie canonica che è ∞^{p-1}, la molteplicità come punto di W. di un punto doppio della g_2^1 è dunque, sostituendo in questa formula, $\frac{p\,(p-1)}{2}$ c. v. d.

È inoltre subito visto nel caso di un ente iperellittico qual'è la successione degli ordini mancanti in un punto di W. *Questa successione è data dai p numeri dispari* $1, 3, 5 \ldots 2p-1$ compresi fra 1 e $2p-2$. Il fatto che la serie canonica è composta con la g_2^1 e il teorema di riduzione danno immediatamente ragione dell'asserto.

§ 3. Enti non iperellittici.
Proprietà degli ordini mancanti ed esistenti in un punto di W.

3. Passiamo ora a trattare il caso generale di un punto di W. sopra una curva di genere p non iperellittica.

Come s'è fatto nel paragrafo precedente indichiamo con i, i_1, i_2, ... i_{p-3} i_{p-2} le molteplicità che il punto di W. ha rispettivamente per ∞^{p-2}, ∞^{p-3}... ∞^1, 1 gruppi canonici che lo contengono. Trattandosi di un ente non iperellittico i è sempre eguale all'unità, ossia un gruppo canonico generico pel punto di W. ha ivi un punto semplice.

Ma, secondo le notazioni adottate, se il gruppo canonico ha quel punto come punto doppio, lo ha necessariamente per punto i_1^{plo}, se l'ha $(i_1+1)^{uplo}$, l'ha necessariamente i_2^{plo} ecc.

Ora osserviamo che, poste queste notazioni, pel teorema di riduzione, gli ordini mancanti nel punto di W. sono l'unità e questi numeri i, i_1, i_2 ... i_{p-2} cresciuti ognuno di un'unità [1].

Pei valori dei numeri i si può, secondo il sig. Segre, [2] trovare una prima limitazione col seguente procedimento:

Avendosi in generale, sull'ente di genere p, m punti che offrano ai gruppi canonici $k+1$ condizioni, ($k < p-2$, $m > k+1$) questi m punti in ordine al teorema Riemann-Roch determinano una serie completa speciale d'ordine m e dimensione $r = m - k - 1$.

Ora è noto che per ogni serie speciale, che non sia quella canonica, sopra una curva non iperellittica, l'ordine supera sempre il doppio della dimensione almeno di un'unità *(teorema di Clifford)*, epperò presentando la serie menzionata di sopra, appunto tal caso, sarà $m \geq 2r+1$ e sostituendo ad r il suo valore, $m \leq 2k+1$. Applichiamo l'osservazione fatta al caso del punto di W., in cui si considerano gruppi di punti riuniti tutti nel punto stesso. Offrendo il punto considerato come punto i_1^{uplo} due condizioni ai gruppi

---

[1] V. Segre, *Introduzione ecc.* pag. 91.

[2] V. Segre, *Intorno ai punti di W. di una curva algebrica.* Rendiconti dei Lincei 1899.

canonici, come i_2^{uplo} tre, e in generale come i_k^{uplo}, $k+1$, per $k<p-2$ sarà:

$$\text{(C)} \qquad i_k \leq 2k+1 \ .$$

A queste limitazioni possiamo aggiungere quella riguardante i_{p-2},

$$i_{p-2} \leq 2p-2 \ ,$$

proveniente dal fatto che un punto può essere al massimo $(2p-2)^{uplo}$ per un gruppo canonico.

Fin qui il sig. Segre. Ma il Segre stesso nella nota in discorso osserva che si può forse, procedendo ad uno studio più accurato dei valori assumibili dai numeri i, abbassare di nuovo i loro limiti superiori (C), ed indica anzi la via da tenersi per procedere a questo studio. Egli nota infatti che, in corrispondenza a detti numeri i, si ha che sulla curva considerata devono esistere particolari serie di determinato ordine e determinata dimensione, senza punti fissi, e rileva come l'esistenza di queste serie può portare una limitazione pel genere della curva che si considera.

Ora seguendo questa via, si arriva effettivamente ad abbassare il limite superiore (C) della i_k per $p>6$ e $1<k<p-3$, ed ecco come: [1])

Supponiamo, s'è possibile, ch'esista un punto di W. sopra una curva non iperellittica di genere p, in cui una qualunque delle i per es. la i_k $(1<k<p-2)$ abbia il valore $2k+1$. Allora dovrà esistere sulla curva che si considera una g_{2k+1}^k senza punti fissi e con un punto $(2k+1)^{uplo}$ nel punto di W., *non composta.* Che esista la g_{2k+1}^k senza punti fissi segue dal fatto che, per quanto fu detto avanti, $i_k+1=2k+2$ è un ordine mancante nel punto di W., e $i_{k-1}+1 \leq 2k$ (per le (C)) è l'ordine mancante che immediatamente

---

[1]) Intorno all'argomento dei massimi valori assumibili dalle i_k e alla conseguente deduzione di un limite inferiore pel numero dei punti di W. fra loro distinti sopra una curva algebrica di genere p, fu pubblicata dall'autrice una nota speciale nei Rendiconti dell'accademia dei Lincei (anno 1905) sotto il titolo: *Sul numero dei punti di W. fra loro distinti di una curva algebrica di genere p.*

lo precede, onde $2k+1$ è certo un ordine esistente, che corrisponde a una serie lineare completa di dimemsione k pel teorema Riemann-Roch.

Che poi questa serie non possa essere composta si vede nel seguente modo: supponiamo dapprima che, essendo le altre i qualunque, sia però $i_{k-1} = 2k - 1$ (suo limite superiore secondo le (C)) per quanto fu detto sopra dovrà esistere allora una g_{2k-1}^{k-1} completa senza punti fissi con un punto $(2k-1)^{uplo}$ nel punto di W., ch'è il resto del punto di W. contato due volte rispetto alla g_{2k+1}^{k} menzionata di sopra; di qui segue che un gruppo *generico* di detta g_{2k+1}^{k} contenente il punto di W. lo contiene come punto doppio, d'onde si trae che la g_{2k+1}^{k} non potrebbe che essere composta con un'involuzione del 2.° ordine, il che è assurdo poichè $2k+1$ è un numero dispari. Se poi la i_{k-1} è inferiore a $2k-1$, il massimo ordine mancante nel punto di W. inferiore all'ordine esistente $2k+1$ è minore di $2k$ (essendo eguale a $i_{k-1}+1$), onde $2k$ è un ordine esistente corrispondente a una g_{2k}^{k-1} completa con un punto $2k^{uplo}$ nel punto di W. non fisso.

L'esistenza di questa g_{2k}^{k-1} indica che un gruppo *generico* della g_{2k+1}^{k} per il punto di W. lo contiene come punto semplice, d'onde segue che detta g_{2k+1}^{k} non può essere composta.

Possiamo dunque dire in generale:

L'ipotesi che nel punto di W. una della i_k $(k = 2, 3 \ldots p-3)$ *abbia il valore* $2k+1$ *trae seco di necessità l'esistenza sulla curva data di una serie completa* (speciale) *senza punti fissi d'ordine* $2k+1$ *e dimensione* k *con un punto* $(2k+1)^{uplo}$ *nel punto di* W., *che non può essere in nessun caso composta.* Ma allora essendo $k>1$ possiamo applicare a questa serie un teorema di Castelnuovo [1] riguardante il massimo genere di una curva contenenente una g_n^r $(r>1)$ qualunque, purchè non composta. Questa formula è, chiamando X la parte intera di $\frac{n-2}{r-1}$

$$p \leq X \left\{ n - r - \frac{X-1}{2}(r-1) \right\} \tag{D}$$

[1] G. Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare ecc.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1893.

Per la nostra g^k_{2k+1} è $\dfrac{n-2}{r-1} = \dfrac{2k-1}{k-1} = 2 + \dfrac{1}{k-1}$ e per $k > 2$ è $X = 2$ mentre per $k = 2$ è $X = 3$. Distinguiamo i due casi. Supponiamo dapprima $k > 2$, allora si ha $p \leq k+3$, ossia $k \geq p-3$, ovvero: *solo per* $k = p-3$ (chè k non va per ipotesi oltre questo numero) *si può supporre* $i_k = 2k+1$, *per valori di* k *maggiori di* 2 *e minori di* $p-3$ *deve essere* $i_k \neq 2k+1$, *ossia minore di questo numero* almeno di un' unità. Supponiamo ora $k = 2$, si ha allora $X = 3$ e la (D) diventa: $p \leq 6$, *onde per* $p > 6$, *non può essere* $i_2 = 5$, *ma dev' essere* $i_2 < 5$. Concludiamo dunque che *se* $p > 6$, pei numeri i_k da $k = 2$ a $k = p-4$ si hanno le seguenti limitazioni:

$$\text{(E)} \qquad i_k \leq 2k \quad \text{per} \quad k = 2, 3 \ldots p-4$$

mentre per $k = 1$ e $k = p-3$, $p-2$ rimangono le limitazioni del Segre

$$\text{(E')} \qquad \begin{aligned} i_1 &\leq 3 \\ i_{p-3} &\leq 2p-5 \\ i_{p-2} &\leq 2p-2 \,. \end{aligned}$$

Per $p \leq 6$, essendo $p-3 \leq 3$ le limitazioni (E) di sopra non valgono, e si hanno le limitazioni (C) del Segre per tutte le i.

Se ora indichiamo con $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_p$ gli ordini mancanti nel punto di W. scritti in ordine crescente, e ricordiamo quanto fu detto avanti che detti ordini sono 1, 2 e i numeri i_k cresciuti ognuno di una unità, vediamo, (osservando che il numero i corrispondente all'ordine mancante ρ_k è quello che ha l'indice k—2), che le limitazioni trovate per le i_k si trasformano nelle seguenti per le ρ:

$$\text{(F)} \qquad \text{per } p > 6 \quad \left\{ \begin{aligned} &\rho_1 = 1 \,, \quad \rho_2 = 2 \\ &\rho_3 \leq 4 \\ &\rho_k \leq 2k-3 \quad \text{per } k = 4 \ldots p-2 \\ &\rho_{p-1} \leq 2p-4 \\ &\rho_p \leq 2p-1 \end{aligned} \right.$$

$$\text{(G)} \qquad \text{per } p \leq 6 \quad \left\{ \begin{aligned} &\rho_1 = 1 \,, \quad \rho_2 = 2 \\ &\rho_k \leq 2k-2 \quad k = 3, \ldots p-1 \\ &\rho_p \leq 2p-1 \end{aligned} \right.$$

4. Osserviamo ora una proprietà degli ordini esistenti in un punto di W., la quale, notiamolo, vale per una curva qualunque anche iperellittica [1].

Se α *e* β *sono due ordini esistenti nel punto di W.* $\alpha+\beta$ *esiste anch' esso.* Per veder questo basta osservare che se g_α e g_β sono due serie complete che hanno nel punto considerato un punto rispettivamente α^{uplo} e β^{uplo} per entrambe non fisso, la serie completa $g_{\alpha+\beta}$ individuata da un gruppo $G_{\alpha+\beta} = G_\alpha + G_\beta$ somma di due qualunque gruppi G_α e G_β delle due serie in discorso, è una serie completa senza punti fissi, che contiene entrambe le due date e ha il punto considerato come punto $(\alpha+\beta)^{uplo}$.

Corollario di questo teorema è che: *se* ρ *è un ordine mancante e* φ *un ordine esistente nel punto di W.*, $\rho-\varphi$ *deve mancare.* Difatti se $\rho-\varphi$ esistesse dovrebbe esistere $\rho-\varphi+\varphi=\rho$ contro l'ipotesi.

Applicheremo in seguito le proprietà qui esposte per avere regole d'esclusione per le varie successioni d'ordini mancanti, che si possono pensare in un punto di W. di un ente algebrico di dato genere. Intanto però serviamocene per trovare un limite inferiore pel numero dei punti di W. fra loro distinti sopra una curva algebrica di dato genere.

§ 4. Numero dei punti di W. Molteplicità di un punto di W. con dati ordini mancanti. Limite inferiore pel numero dei punti di W. fra loro distinti.

5. Il numero dei punti di Weierstrass sopra una curva algebrica di genere p è dato da $(p-1)\,p\,(p+1)$. Questo numero si ottiene p. e. applicando alla serie canonica, la formula generale esprimente il numero dei punti $(r+1)^{upli}$ d'una g_n^r, formula di cui il Segre dà un'elegante dimostrazione geometrica nella sua *In-*

---

[1] V. Hurwitz, *Ueber algebreische Gebilde ecc.* Matematische Annalen T. 41. Ricordando quanto si disse al § 2 riguardo agli ordini mancanti in un punto di W. di un ente iperellittico, si vede appunto come in questo caso il teorema è verificato.

troduzione ecc. al § 11, pag. 45 [1]. Naturalmente però in questo numero un solo punto può figurare contato un certo numero di volte. Il numero di unità per cui conta un punto nel numero complessivo dei punti di W., l'abbiamo del resto già detto nel caso delle curve iperellittiche, la chiamiamo la *molteplicità* di detto punto come punto di W.

Se indichiamo al solito con $\rho_1\, \rho_2 \ldots \rho_p$ gli ordini mancanti in un punto di W. di una curva non iperellittica di genere p, e ricordiamo che questi numeri sono rispettivamente $1,\ i+1,\ i_1+1 \ldots$ $\ldots i_{p-2}+1$, dove le i hanno il significato loro attribuito nel § precedente, la formula (A) del Segre citata a pag. 5 ci dà che il considerato punto di W. avrà come p^{uplo} della serie canonica la molteplicità:

$$\text{(I)} \qquad W = \left(\sum_{i=1}^{i=p} \rho_i\right) - p - \frac{p\,(p-1)}{2} = \left(\sum_{i=1}^{i=p} \rho_i\right) - \frac{p\,(p+1)}{2}\ .$$

Supponiamo dapprima $p>6$. Ricordando allora le limitazioni (F) pei numeri ρ trovate nel § precedente, si ha:

$$(\Sigma\, \rho_i) \leq 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + \ldots + 2p - 7 + 2p - 4 + 2p - 1,$$

ovvero

$$(\Sigma\, \rho_i) \leq 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2p - 7 + 2p - 5 + 2p - 3 + 6,$$

ossia

$$(\Sigma\, \rho_i) \leq (p-1)^2 + 6\ .$$

Sostituendo nella (I) ne viene:

$$W \leq (p-1)^2 + 6 - \frac{p\,(p+1)}{2}$$

---

[1] La formula, nota il SEGRE, vale anche per le serie composte con un'involuzione quando si tenga conto dell'influenza che sui punti $(r+1)^{upli}$ della serie hanno i punti doppî dell' involuzione stessa. Questa influenza abbiamo già accennato nel caso iperellittico qual'è. In questo caso iperellittico abbiamo appunto visto che i punti almeno p^{upli} della serie canonica sono *tutti* e *soli* i $2p+2$ punti doppî della g^1_2 e ciascuno ha la molteplicità $\frac{p\,(p-1)}{2}$. Ora è infatti $\frac{(2p+2)\;p\;(p-1)}{2} = (p+1)\,p\,(p-1)$.

ossia semplificando:

$$\text{(H)} \qquad W \leq \frac{(p-3)\,(p-2)}{2} + 4 \text{ [1]}$$

S'è invece $p \leq 6$, valgono le formule (G), che son quelle del Segre, e da esse si deduce:

$$\text{(4)} \qquad W \leq \frac{(p-1)\,(p-2)}{2} + 1$$

Ma anche nel caso di $p = 6$ e $p = 5$ si può abbassare di una unità il limite (4) dato dal Segre per W, ricorrendo al teorema di Hurwitz, notato al n. 4 del paragrafo precedente. E per vero se supponiamo di dare, sia per $p = 5$ che per $p = 6$, alle ρ i valori massimi fornitici dalle (G), ne risulterebbe in entrambi i casi che 3 è un ordine esistente nel punto di W, mentre 6 manca. Ciò è sufficiente per concludere che una tale successione di valori delle ρ non è ammissibile.

Se ne deduce che una qualunque successione ammissibile è diversa da quella dei valori massimi dalle ρ, epperò che il limite superiore di W sia per $p = 5$ chè per $p = 6$, dev' essere diminuito almeno di un'unità, ossia ridotto a:

$$\frac{(p-1)\,(p-2)}{2}$$

Lo stesso criterio conduce poi ad abbassare di nuovo di una unità il limite superiore (H) di W., da noi trovato per $p > 6$, quanto sia $p > 7$. E infatti se $p > 7$, questo limite superiore (H) corrisponde alla successione d'ordini mancanti nel punto di W.:

1, 2, 4, 5, 7, 9 ..... la quale non è ammissibile risultando da essa esistente il 3 e mancante il 9.

Se ne trae con ragionamento affatto analogo a quello fatto sopra

---

[1] Confrontando le limitazioni (E) da noi trovate pei numeri i con le (C) del SEGRE, si vede come il limite superiore (H) di W per $p > 6$, che discende dalle (E), dev'essere inferiore a quello dato dal SEGRE di $p - 5$ unità. Ed effettivamente applicando le (C) il SEGRE trova $W \leq \frac{(p-1)\,(p-2)}{2} + 1$, ed è appunto $\frac{(p-1)\,(p-2)}{2} + 1 - \frac{(p-2)\,(p-3)}{2} - 4 = p - 5$.

per $p=6$ e $p=5$, che se $p>7$ si può affermare che sarà:

$$\mathrm{W} \leq \frac{(p-2\,(p-3)}{2}+3.$$

Per $p=3$ e $p=4$ invece la limitazione per W rimane quella data dal Segre, e si può anzi dimostrare, come vedremo più avanti (§ 8), che esistono effettivamente curve del genere 3 e 4, che posseggono punti di W. cui competono i valori massimi assumibili dalle ρ, secondo le limitazioni (C) del Segre.

Essendo, come abbiamo detto, il numero complessivo dei punti di W. sopra una curva di genere p espresso da $p\,(p^2-1)$, ne concludiamo che:

per $p>7$ *i punti di W. fra loro distinti sono almeno:*

$$\frac{2\,p\,(p^2-1)}{(p-2)\,(p-3)+6}$$

per $p=7$ *i punti di W.* fra loro *distinti sono almeno*:

$$\frac{2\,p\,(p^2-1)}{(p--2)\,(p-3)+8}=24$$

per $p=5,\ 6$ *i punti di W. fra loro distinti sono almeno:*

$$\frac{2\,p\,(p+1)}{p-2},$$

ossia rispettivamente 20 e 21.

Per $p=3,\ 4$ *i punti di W. fra loro distinti sono almeno:*

$$\frac{2\,p\,(p^2-1}{(p-1)\,(p-2)+2},$$

ossia rispettivamente 12 e 15.

§ 5. **Regole d' esclusione per le successioni d'ordini mancanti.**

6. Le proprietà osservate riguardo agli ordini mancanti ed esistenti in un punto di W. danno condizioni *necessarie* affinchè una certa successione di p numeri, scritti in ordine crescente, sia una successione di ordini mancanti in un punto di W. d' una curva di genere p.

Nulla ci dice però, notiamolo sin d'ora, che queste condizioni siano anche *sufficienti,* ossia nulla ci dice che, suppostele soddisfatte, esisterà effettivamente una curva di genere p con un punto di W. offrente la supposta successione di ordini mancanti.

Si possono però intanto stabilire facili regole mediante le quali per ogni valore del genere p, si vengono a formare *tutte* le successioni di p numeri disposti in ordine crescente, che soddisfano alle proprietà notate. Queste regole sono regole d'esclusione da applicarsi quando ci si proponga lo scopo di stabilire *tutte le possibili* successioni di ordini mancanti in un punto di W. di una curva di dato genere, perchè mediante esse si viene a scrivere un insieme di successioni fra cui sono certo comprese *tutte* quelle possibili, sì che basta estendere le ulteriori ricerche ai sistemi datici dalle regole in discorso, per esser certi d'aver considerato tutti i casi che si possono presentare.

Veniamo all'esposizione di queste regole:

Applicando le (F) o le (G) del § 3 a seconda che è $p>6$ o $p\leq 6$) si trovino i limiti superi che possono raggiungere gli ordini mancanti $\rho_3, \rho_4 \dots \rho_{p-1}\, \rho_p$. Allora si comincino a scrivere tutte le successioni che si ottengono ponendo per i primi $p-1$ ordini mancanti $1, 2, 3 \dots p-1$ e per l'ultimo, ρ_p, rispettivamente $p+1$, $p+2 \dots 2p-1$, ossia tutti i valori che può assumere l' ultimo ordine mancante in un punto di W. d'una curva di genere p. Poi presa una qualunque di queste successioni, si sostituisca al posto del penultimo ordine mancante $\rho_{p-1}=p-1$ tutti i valori maggiori di $p-1$, che, conformemente alle (F) o alle (G), un tal ordine può prendere (ρ_{p-1} tanto nelle (F) che nelle (G) ha per limite superiore $2p-4$) minori però del p^{simo} ordine ρ_p che nella successione stessa apparisce. Si ottengono così nuove successioni. In queste si faccia di nuovo la stessa operazione pel terz'ultimo ordine mancante, vale a dire si sostituisca in ognuna di esse a $\rho_{p-2}=p-2$ tutti i valori che può assumere ρ_{p-2} conformemente alle (F) o alle (G), (a seconda che si è nel caso di $p>6$ o nel caso di $p\leq 6$) minori però del ρ_{p-1} che nella successione stessa apparisce, e così via, sino al terzo ordine, mancante che così per $p>6$ come per $p\leq 6$ può solo variare fra i limiti 3 e 4. In questo modo è ben chiaro che si ottengono *tutte* e *sole* quelle successioni di p numeri che soddisfano le (F) se $p > 6$ o le (G) se $p \leq 6$, e sono costituite da numeri fra loro diversi e disposti in ordine crescente.

7. Alle successioni così trovate applichiamo ora una seconda regola d'esclusione per mezzo della quale verifichiamo se vengono da esse soddifatte le condizioni imposte dal teorema di Hurwitz, ricordato nel § 3, n. 4, escludendo poi quelle che a tali condizioni non soddisfano.

La verifica si fa nel modo seguente: per ciascuno dei sistemi trovati con la regola precedente, scriviamo i corrispondenti ordini esistenti, minori del più alto ordine mancante ρ_p, che apparisce nel sistema considerato, e formiamo tutte le differenze fra ogni ordine mancante e tutti gli ordini esistenti ad esso inferiori. Se queste differenze sono di nuovo ordini mancanti, la successione scelta soddisfa alla proprietà detta sopra, altrimenti no, e dobbiamo scartarla.

Il perchè di questa regola è ovvio.

8. L'effettivo calcolo numerico dei sistemi di numeri soddisfacenti alle proprietà esposte nel § 3 può venire abbreviato dalle osservazioni seguenti:

Una volta che si conoscano questi sistemi pel valore di $p = m$, sono subito scritti pel valore di $p = m+1$. E per vero supponiamo dapprima $m > 6$.

Allora le limitazioni per gli ordini mancanti sone le medesime (le (F)) sia per $p = m$ che per $p = m+1$ fino all'ordine mancante ρ_{m-2}. Riguardo agli ordini mancanti ρ_{m-1} e ρ_m nelle curve di genere $m+1$ le limitazioni (F) portano per loro limiti superiori due numeri inferiori di un'unità a quelli spettanti al ρ_{m-1} e al ρ_m nelle curve di genere m. Il criterio poi che le differenze fra uno qualunque di questi m ordini mancanti e quelli esistenti ad essi inferiori devono pure essere ordini mancanti, serve naturalmente tanto per l'un genere che per l'altro. Se ne trae che per avere tutti i sistemi da noi cercati riferentisi al genere $m+1$, basta prendere quelli calcolati pel genere m, aggiuntovi quello dato dai primi m numeri naturali

1, 2, 3 ... m, ed esclusi invece quelli che contengono come ultimo ordine mancante $2m-1$ o come penultimo ordine mancante $2m-4$, ed a ciascuno aggiungere successivamente tutti i valori assumibili da ρ_{m+1} in una curva di genere $m+1$ vale a dire i valori compresi fra $m+2$ e $2m+1$, maggiori però del ρ_m che comparisce nella successione considerata; ed applicare poi alle successioni così formate, la seconda regola d'esclusione soltanto per l'ultimo ordine mancante.

Se poi è $m=6$ e c'è da passare dalle successioni relative a $p=6$, a quelle relative a $p=7$, essendo le limitazioni pei due casi le seguenti:

$$(G) \quad \text{per } p=6 \begin{cases} \rho_1=1\,,\ \rho_2=2 \\ \rho_3 \leq 4 \\ \rho_4 \leq 6 \\ \rho_5 \leq 8 \\ \rho_6 \leq 11 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (F) \quad \text{per } p=7 \begin{cases} \rho_1=1\,,\ \rho_2=2 \\ \rho_3 \leq 4 \\ \rho_4 \leq 5 \\ \rho_5 \leq 7 \\ \rho_6 \leq 10 \\ \rho_7 \leq 13 \end{cases}$$

bisognerà tralasciare le successioni riferentisi a $p=6$ in cui uno dei tre ultimi ordini mancanti è 6, 8, 11, e sulle altre operare analogamente a quanto s'è detto sopra.

Se poi è $m<6$, le limitazioni per gli ordini mancanti sono in ambo i casi le (G), che danno il medesimo limite superiore pei primi $m-1$ ordini mancanti sia per $p=m$ che per $p=m+1$; il ρ_m invece nelle curve di genere m può raggiungere il valore $2m-1$, mentre in quelle di genere $m+1$ può arrivare solamente al valore $2m-2$. In questo caso dunque per trarre dalle successioni relative al genere m quelle relative al genere $m+1$, tralasceremo soltanto quelle successioni relative a $p=m$ in cui ρ_m eguaglia $2m-1$, e opereremo nel modo detto sulle rimanenti.

9. A titolo d'esempio, e perchè anche ce ne serviremo in seguito, vediamo le successioni che si ottengono per i due primi valori del genere $p=3$ e $p=4$.

$p=3$. Le (G) dànno: $\rho_1=1$, $\rho_2=2$, $\rho_3 \leq 5$ epperò le successioni che soddisfano le (G) stesse sono soltanto:

$$1,\ 2,\ 3 \mid \quad 1,\ 2,\ 4 \ —\ 1,\ 2,\ 5\,.$$

Ho separato la prima con una lineetta perchè ad essa non corrisponde un punto di W. ma un punto generico.

La seconda regola d'esclusione applicata alle altre due non dice che esse siano da escludersi.

$p=4$. Dalle (C) risulta $\rho_3 \leq 4$ $\rho_4 \leq 7$ e quindi si ottengono le successioni

$$\begin{array}{l|ll} 1,\ 2,\ 3,\ 4 & 1,\ 2,\ 3,\ 5, & 1,\ 2,\ 4,\ 5 \\ & 1,\ 2,\ 3,\ 6, & 1,\ 2,\ 4,\ 6 \\ & 1,\ 2,\ 3,\ 7, & 1,\ 2,\ 4,\ 7\,. \end{array}$$

La seconda regola, applicata all'ultimo ordine mancante che appare in queste successioni, ci dice che fra esse è da escludersi la seguente: 1, 2, 4, 6; infatti con essa si avrebbe che manca l'ordine 6 mentre 3 esiste.

Concludiamo che le successioni alle quali si devono limitare le nostre ricerche per $p=4$ sono:

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3,\ 5 \\ 1,\ 2,\ 3,\ 6 \\ 1,\ 2,\ 3,\ 7 \\ 1,\ 2,\ 4,\ 5 \\ 1,\ 2,\ 4,\ 7\,. \end{array}$$

§ 6. **Rappresentazione di una curva di genere p possedente un punto di W. di specie data mediante una curva piana C_{p+2}.**

10. Supponiamo ch'esista una curva di genere p possedente un punto di W. che offre la successione di ordini mancanti $\rho_1\, \rho_2 \ldots \rho_p$ (un tal punto possederanno allora tutte le curve della classe a cui appartiene quella considerata). Chiamato α il primo ordine esistente nel punto di W. sarà $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 2 \ldots \rho_{\alpha-1} = \alpha - 1$. È noto che ogni curva di genere p contenente una $g^1{}_\alpha$ $(\alpha \leq p+2)$ può trasformarsi

birazionalmente in una curva piana d'ordine $p+2$ con un punto $(p+2-\alpha)^{uplo}$ [1]. Quindi la nostra curva contenente la g^1_α con un punto α^{uplo} nel punto di W. si potrà trasformare in una C_{p+2} piana, con un punto $(p+2-\alpha)^{uplo}$ che indicheremo con P. Le rette pel punto P segneranno la g^1_α, talchè possedendo questa per ipotesi un punto α^{uplo}, da P dovrà uscire una retta che ha con la C_{p+2}, oltre le $(p+2-\alpha)$ intersezioni riunite in P, altre α intersezioni riunite in un punto W, e situate su di uno stesso ramo uscente da W.

Potendosi la rappresentazione far sempre in modo che W sia semplice per la C_{p+2}, diremo senz'altro che da P deve uscire una retta r la quale ha altrove, in un punto semplice W, un contatto α – punto con C_{p+2}. W sarà il punto di Weierstrass, cui devono competere i dati ordini mancanti. Oltre il punto multiplo indicato, P, la C_{p+2} dovrà poi avere tanti punti doppî, o punti multipli equivalenti, quanti ne occorrono perchè essa abbia il genere p. Il numero di questi punti doppî (o l'equivalente in punti doppî dei rimanenti multipli) sarà $\delta = \frac{p\,(p+1)}{2} - \frac{(p+2-\alpha)\,(p+1-\alpha)}{2} - p$.

I punti multipli della C_{p+2} potranno essere tutti fra loro distinti ovvero no, noi però per brevità di discorso supporremo che la C_{p+2} abbia oltre il punto $(p+2-\alpha)^{uplo}$ P, δ punti doppî, e che i suoi punti multipli *siano tutti fra loro distinti.* Questo, come risulterà dal corso del ragionamento, non infirma affatto la generalità di quanto diremo.

Ciò posto, notiamo che le curve che segnano la serie canonica sulla C_{p+2} saranno C_{p-1} con punto $(p+1-\alpha)^{uplo}$ in P e punti semplici nei δ punti doppî.

Essendo α $(<p+1)$ il primo ordine esistente in W, dovrà avvenire che se una C_{p-1} aggiunta ha in W $\alpha-1$ intersezioni con la C_{p+2}, ne ha necessariamente α; ora questo accade certamente, chè se la C_{p-1} ha in W α–1 intersezioni con C_{p+2} queste α–1 intersezioni

---

[1] (Teorema del SEGRE). Per la dimostrazione vedi ad esempio BERTINI, *La geometria delle serie lineari ecc.* n. 43, pag. 28. Annali di matematica, serie II, tomo XXII.

dovendosi trovare sulla retta r, la retta r stessa viene così a contenere p punti della C_{p-1}, talchè deve far parte della C_{p-1} medesima. Le p intersezioni in discorso vengono ad essere così distribuite: $p+1-\alpha$ nel punto P che dev'essere $(p+1-\alpha)^{uplo}$ per le curve aggiunte, e $(\alpha-1)$ in W.

Le C_{p-2} che con la retta r costituiscono le C_{p-1} aggiunte per α punti di C_{p+2} riuniti in W, dovranno avere in P un punto $(p-\alpha)^{uplo}$ (almeno). Ma allora può essere che non esista alcuna di tali C_{p-2} che abbia $\alpha-1$ intersezioni in W con la C_{p+2}, ma se ve ne sono esse ne hanno allora necessariamente α, perchè si devono necessariamente spezzare nella retta r e in una curva C_{p-3}. Questo conferma il fatto che 2α è un ordine esistente. E così via.

Passiamo ora a vedere quali condizioni impongono ai punti singolari di C_{p+2} gli ordini mancanti dati. Fu a suo tempo osservato che se ρ_k è il k^{simo} ordine mancante nel punto W, vi sono ∞^{p-k} gruppi canonici che contengono W come punto $(\rho_k-1)^{uplo}$, ma che tutti poi non lo contengono come ρ_k^{uplo} (§ 3 n. 3). Nel nostro caso della C_{p+2} piana esisteranno ∞^{p-k} C_{p-1} aggiunte che hanno in W ρ_k-1 intersezioni con la C_{p+2}, e non tutte poi ne hanno ρ_k.

Allora da quanto si è detto risulta evidente, che se è $\rho_k-1=$ $=\mu_k\,\alpha+q_k$, (dove μ_k è il quoziente intero della divisione di ρ_k-1 per α) queste ∞^{p-k} C_{p-1} aggiunte saranno costituite dalla retta r contata μ_k volte e da curve $C_{p-1-\mu_k}$ che passano pei δ punti doppî, hanno in P un punto $(p+1-\alpha-\mu_k)^{uplo}$, e hanno in W un contatto q_k- punto con la C_{p+2} (o con la retta r, il che è la stessa cosa essendo $q_k<\alpha$). Indicando con N_k il numero dei punti che individuano una $C_{p-1-\mu_k}$ piana, con ε_k il numero delle condizioni imposte dal fatto d'avere il punto P per punto $(p+1-\alpha-\mu_k)^{uplo}$, e osservando che, qualora tutte le condizioni a cui soddisfano le $C_{p-1-\mu_k}$ sopra nominate fossero tra loro indipendenti, la infinità di tali curve sarebbe $N_k-\varepsilon_k-\delta-q_k$, se ne trae che s'avrà certamente:

$$\text{(I)} \qquad N_k-p+k\geq 0$$

$$\text{(II)} \qquad N_k-\varepsilon_k-\delta-q_k\leq p-k\,.$$

Consideriamo la relazione (II). Se in essa si verifica il segno d'eguaglianza nulla v'è da dire in proposito, e l'esistenza delle ∞^{p-k} curve $C_{p-1-\mu_k}$ con le particolarità dette non porta alcuna relazione fra i punti singolari di C_{p+2} (ossia i punti multipli di C_{p+2} e W).

Ma supponiamo che si verifichi il segno *minore*. Questo indica evidentemente che le $C_{p-1-\mu_k}$ formano un sistema lineare ∞^{p-k}, determinato da $N_k - p + k$ delle $\delta + \varepsilon_k + q_k$ condizioni cui soddisfano; ossia che di queste condizioni ve ne sono $\delta + \varepsilon_k + q_k - N_k + p - k$ conseguenza delle altre. Questo si traduce nel fatto che vi sono $p - k + 1$ e solamente $p - k + 1$ $C_{p-1-\mu_k}$ *linearmente indipendenti* che soddisfano a tutte le $\delta + \varepsilon_k + q_k$ condizioni dette sopra. Ora il $(k+1)^{simo}$ ordine mancante ρ_{k+1} porta che di tali curve ne esistono certo $p-k$ linearmente indipendenti. E per vero da esso discende che deve esistere un sistema lineare ∞^{p-k-1} di $C_{p-1-\mu_{k-1}}$, aventi in P un punto $(p+1-\alpha-\mu_{k+1})^{uplo}$, passanti pei δ punti doppî, e aventi in W con C_{p+2} un contatto q_{k+1} punto.

Onde tra esse curve $C_{p-1-\mu_{k+1}}$ ve ne sono certamente $p-k$ linearmente indipendenti che unite alla retta r contata $\mu_{k+1} - \mu_k$) [1] volte, danno appunto $p-k$ curve $C_{p-1-\mu_k}$ di quelle richieste.

Per avere dunque le condizioni *nuove* imposte ai punti singolari di C_{p+2} dall'ordine mancante ρ_k, le condizioni cioè da aggiungersi a quelle portate dagli ordini mancanti $\rho_{k+1} \ldots \rho_p$, basta scrivere che *una sola* particolare curva (non spezzantesi nella retta r) tra le ∞^{p-k} curve $C_{p-1-\mu_k}$ determinate da $N_k - p + k$ delle $\varepsilon_k + \delta + q_k$ condizioni dette sopra, soddisfa anche alle rimanenti, ossia basta scrivere soltanto:

$$\delta + \varepsilon_k + q_k - N_k + p - k$$

relazioni, fra i punti singolari di C_{p+2}.

---

1) Si può osservare che sarà o $\mu_{k+1} = \mu_k$ (e allora $q_{k+1} > q_k$) ovvero $\mu_{k+1} = \mu_k + 1$. Infatti se la data successione di ordini mancanti è, come si suppone, ammissibile, essendo $\rho_{k+1} = \alpha\mu_{k+1} + q_{k+1}$ un ordine mancante, sarà anche $\rho_t = \rho_{k+1} - \alpha = \alpha(\mu_{k+1} - 1) + q_{k+1}$ un ordine mancante, onde ρ_k ordine mancante immediatamente inferiore a ρ_{k+1}, o sarà eguale a ρ_t o sarà ad esso maggiore, epperò sarà $\mu_k \geqq \mu_{k+1} - 1$.

Concludendo: *Quando nella* (II) *vale il segno minore, l' ordine, mancante* ρ_k *porta pei punti multipli e W* $\delta+\varepsilon_k+q_k-N_k+p-k$ *nuove condizioni indipendenti in generale da quelle portate da* $\rho_{k+1}, \rho_{k+2} \ldots \rho_p$. Dico *in generale* perchè nel fatto potrebbe darsi, che di nuovo queste relazioni non fossero indipendenti da quelle dovute a $\rho_{k+1} \ldots \rho_p$, ossia potrebbe darsi che l' esistenza della $C_{p-1-\mu_k}$ (non spezzantesi nella retta r) con le proprietà volute, fosse completa o parziale conseguenza dell' esistenza delle ∞^{p-k-1} $C_{p-1-\mu_{k-1}}$, vale a dire potrebbe avvenire che anche le $\delta+\varepsilon_k+q_k-$ $-N_k+p-k$ relazioni dette sopra fossero in tutte o in parte dipendenti da quelle dovute agli ordini mancanti $\rho_{k+1} \ldots \rho_p$. Di questo vedremo in seguito un esempio (§ 7) che chiarirà la cosa.

Avremo dunque, estendendo il ragionamento a tutti gli ordini mancanti dati, che ogniqualvolta in alcuna delle (II) si verifica il segno minore, esistono fra i punti multipli di C_{p+2} e W un certo numero di relazioni, dovute al fatto che W offre la supposta successione di ordini mancanti.

Queste relazioni, esistendo per ipotesi una curva di genere p con il dato punto di W., epperò anche una C_{p+2} piana irriducibile di genere p con le particolarità indicate, saranno certamente tra loro compatibili, compatibili inoltre colla irriducibilità della C_{p+2}, e tali da non portare per avventura col concorso del fatto che la C_{p+2} possiede gli accennati punti singolari, l'esistenza di altri punti multipli di C_{p+2}, oltre quelli indicati.

Concludendo dunque, vediamo che se esiste una qualunque curva di genere p possedente un punto di W. con la data successione di ordini mancanti, *deve esistere una curva piana d' ordine* $p+2$ che offre le seguenti particolarità:

1. *Possiede un punto* $(p+2-\alpha)^{uplo}$ *e, dovendo avere il genere* p, $\delta = \frac{p(p+1)}{2} - \frac{(p+2-\alpha)(p+1-\alpha)}{2} - p$ *punti doppî* (o altri punti multipli equivalenti a δ punti doppî), *e non più, e inoltre ha una tangente con contatto* α*—punto in un punto semplice* W, *la quale passa pel punto* $(p+2-\alpha)^{uplo}$.

2. *Quando nella disuguaglianza* (I) *che deve essere soddisfatta*

vale il segno minore, i δ punti doppî (o quelli multipli equivalenti a δ punti doppî), *il punto* $(p+2-\alpha)^{uplo}$ *e* W, *sono assoggettati a* $\delta+p-k+\varepsilon_k+q_k-N_k$ *relazioni traducentisi nel fatto geometrico che se una curva* $C_{p-1-\mu_k}$ *soddisfa ad* N_k-p+k *delle* $\delta+\varepsilon_k+q_k$ *condizioni seguenti: avere il carattere d' aggiunta nei δ punti doppî* (o nei multipli equivalenti), *avere nel punto* P *un punto* $(p+1-\alpha-\mu_k)^{uplo}$ *avere in* W *un contatto* q_k *— punto con* C_{p+2}, *essa soddisfa anche alle rimanenti* (senza aver poi *di necessità* in W un numero d'intersezioni con C_{p+2}, superiore a q_k).

Viceversa:

Se esiste una C_{p+2} *piana coi punti singolari indicati, offrenti le dette proprietà e senza altri punti multipli, la* C_{p+2} *è del genere* p, *e offre nel punto* W *la data successione di ordini mancanti.*

La cosa è evidente, chè allora le curve aggiunte C_{p-1}, segnanti sulla C_{p-2} la serie canonica, sono tali che ne esistono ∞^{p-k} passanti per ρ_k-1 punti di C_{p+2} riuniti in W, e non passanti poi tutte per ρ_k punti ivi coincidenti, epperò ρ_k è il k^{simo} ordine mancante in W [1].

11. Considerando le relazioni (I) e (II), che si presentano come *necessarie* per l'esistenza delle ∞^{p-k} $C_{p-1-\mu_k}$ soddisfacenti a tutte le condizioni dette sopra, sembrerebbe a prima vista, ch' esse dovessero portare *nuove* condizioni numeriche, (condizioni cioè da aggiungersi a quelle notate nel § 3) per una successione d'ordini mancanti in un punto di W. d' una curva di genere p.

Ma è subito visto come ciò non sia, perchè le diseguaglianze in discorso sono sempre verificate da quelle successioni di p numeri, che soddisfano alle condizioni esposte nel § 3. Ed effettiva-

---

[1] Osserviamo che la rappresentazione da noi data di una curva di genere p con un dato punto di W., mediante una curva piana C_{p+2}, vale anche nel caso iperellittico, e anzi conduce alla ben nota forma normale di una curva iperellittica di genere p, ossia a una curva piana d'ordine $p+2$ con un punto p^{uplo}. I punti di W. di questa curva (tutti della stessa specie) sono i $2p+2$ punti di contatto delle $2p+2$ tangenti (in punti semplici) alla C_{p+2} uscenti dal punto p^{uplo},

mente, per le (I) basta notare che N_k [1], $(k<p)$, assume il suo valore *minimo* nelle curve iperellittiche dov'è l'infinità delle curve piane d'ordine $p-k$; N_k è quindi sempre maggiore di $p-k$.

Riguardo alle (II), che si possono scrivere;

$$N_k - \varepsilon_k - \delta + k - q_k \leq p$$

si vede intanto che per $k=1$, essendo in ogni caso $\rho_1 = 1$, è *sempre*

$$N_1 - \varepsilon_1 - \delta + 1 = p$$

poichè il primo membro altro non è che il numero delle curve aggiunte d'ordine $p-1$ a una curva piana d'ordini $p+2$ e genere p, linearmente indipendenti. Per verificare l'asserto basterà dunque mostrare che, passando da ρ_k a ρ_{k+1}, l'espressione:

(III) $$N_k - \delta - \varepsilon_k - q_k + k$$

non può crescere.

E per vero, s'è $\mu_{k+1} = \mu_k$, essendo allora certamente $q_{k+1} > q_k$ (poichè è $\rho_{k+1} > \rho_k$), l'espressione (III), nel passaggio da ρ_k a ρ_{k+1} non può crescere chè $N - \varepsilon$ rimane lo stesso, e k cresce bensì di una unità, ma q cresce anch'esso *almeno* di un'unità.

S'è poi $\mu_{k+1} = \mu_k + 1$ (altri casi sappiamo non possono darsi, se la successione soddisfa alle condizioni *necessarie* esposte al § 3), allora passando da ρ_k a ρ_{k+1}, $N - \varepsilon$, com'è subito visto, diminuisce di $(\alpha - 1)$ unità, in quanto al termine q, anche se q_{k+1} fosse zero, da esso non può provenire nell'espressione (III) che un aumento di $\alpha - 2$ unità al massimo, poichè q_k, non essendo alcuna delle ρ multipla delle γ, non supera $\alpha - 2$, d'altra parte il termine k porta un aumento di un'unità, epperò in totale si ha al *massimo* un aumento di $\alpha - 1$ unità. Ossia nel caso più sfavorevole l'aumento eguaglia la diminuzione, altrimenti è inferiore. Resta così provato quanto si voleva.

Osserviamo da ultimo che le condizioni numeriche indicate al § 3 per una successione di p numeri, che siano gli ordini mancanti

---

[1] Si ricordi che nel caso iperellittico ρ_k ha il valore $2k-1$, e α il valore 2, mentre nel non iperellittico ρ_k non supera $2k-3$, o $2k-2$, e α è maggiore di 2.

in un punto di W. di una curva di genere p, si tradurranno nella rappresentazione da noi fatta in altrettante condizioni *necessarie* affinchè esista effettivamente una curva piana C_{p+2} coi punti multipli indicati, offrenti le dette proprietà.

Queste condizioni, cioè, influiranno in tutto o in parte sul fatto che le condizioni imposte ai punti multipli di C_{p+2} dagli ordini mancanti in W devono essere tra loro compatibili; non portare la inducibilità della C_{p+2}; non portare che le ∞^{p-k} $C_{p-1-\mu_k}$, soddisfacenti a tutte le condizioni esposte, abbiamo di necessità in W con la C_{p+2} più di q_k intersezioni, e non portare inoltre che la C_{p+2} abbia altri punti multipli oltre quelli che deve avere per essere del genere p.

A questo proposito notiamo infine che, giacchè data numericamente una successione di p numeri, che si suppone una successione di ordini mancanti in un punto di W. di una curva di genere p, si può a priori, conformemente a quanto s'è detto in questo capitolo, stabilire la natura delle relazioni che devono esistere fra i punti singolari della C_{p+2} piana, corrispondente a quella successione, ciò può forse offrire nuove regole d'esclusione. E per vero, potrebbe avvenire che si potesse senz'altro affermare che le relazioni stesse non sono fra loro compatibili, o traggono seco la riducibilità della C_{p+2}, o portano altre di quelle conseguenze che, come s'è detto sopra, non debbono portare.

Può darsi invece che si riesca a dimostrare che le condizioni imposte a questi punti singolari sono tra loro compatibili costruendo o mostrando la possibilità di costruire con opportuni artifici, sistemi di punti che effettivamente vi soddisfano. Con questo però, sarà bene notarlo ancora una volta, non avremo per nulla dimostrato l'effettiva esistenza della C_{p+2} con tutte le particolarità volute, ma avremo soltanto provato ch'è soddisfatta *una* delle tante condizioni che per quest'esistenza sono necessarie.

§ 7. Esempî della rappresentazione data al § 6.

12. In applicazione della teoria generale svolta, troviamo qui quali curve dovrebbero corrispondere alle due seguenti successioni

d'ordini mancanti (che sono tra quelle forniteci dalle regole del § 5 pel valore 7 di p) nell'ipotesi che tali successioni siano ammissibili, chè qualora non lo fossero, le C_{p+2} in discorso non esistono:

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 11 \qquad 1, 2, 4, 5, 7, 10, 13$$

$$1, 2, 3, 4, 6, 9, 11 \qquad \alpha = 5 \quad \delta = 15 .$$

Una C_9 *con un punto quadruplo e 15 punti doppî, e una tangente con contatto cinquipunto in* W, *passante pel punto quadruplo.*

I quindici punti doppi e il punto quadruplo sono sopra una medesima curva del 4.° ordine determinata da 14 di essi e che non passa per W

$$\rho_7 - 1 = 10 , \ \mu_7 = 2 , \ p - 1 - \mu_7 = 4 , \ p + 1 - \alpha - \mu_7 = 1 , \ q_7 = 0$$
$$\delta + p - 7 + \varepsilon_7 - N_7 = 2 ,$$

ossia fra i punti multipli di C_{p+2} passano 2 relazioni portate dall'ultimo ordine mancante, 11.

Il sistema semplicemente infinito di curve del 5.° ordine che passano pei 15 punti doppî e per W *e hanno nel punto quadruplo un punto doppio, è formato di curve, che tutte hanno in* W *un punto d'inflessione, e la tangente di flesso comune è la tangente in* W *alla* C_9

$$(\rho_6 - 1 = 8 , \ \mu_6 = 1 , \ q_6 = 3 , \ p - 1 - \mu_6 = 5 , \ p + 1 - \alpha - \mu_6 = 2$$
$$\delta + p - 6 + \varepsilon_6 + q_6 - N_6 = 2),$$

ossia fra i punti multipli e W devono esistere due altre relazioni, portate dal 6.° ordine mancante, 9.

Gli altri ordini mancanti non portano alcuna particolarità pei punti singolari della C_9.

Gli ordini mancanti dati portano dunque in totale fra i punti multipli di C_9 *e* W *quattro relazioni indipendenti.*

$$1, 2, 4, 5, 7, 10, 13 \qquad \alpha = 3 \quad \delta = 6 .$$

Una C_9 *con un punto sestuplo, una tangente di flesso in* W *pel punto sestuplo e 6 punti doppî.*

L'unico fatto che si deve verificare pei punti singolari della C_9 è il seguente: *i sei punti doppî e il punto sestuplo sono sopra una medesima conica.* (il che porta fra essi due relazioni) *che non passa per* W. Infatti questo è quanto segue dall'ultimo ordine mancante 13.

$$(\rho_7 - 1 = 12 \,,\ \mu_7 = 4 \,,\ p - 1 - \nu_7 = 2 \,,\ p + 1 - \mu_7 - 4 = 1$$
$$\delta + p - 7 - \varepsilon_7 - N_7 = 2)$$

L'ordine mancante 10 poi porterebbe:

Devono esistere ∞^1 curve del terz'ordine che passano pei 6 punti doppî e hanno nel punto sestuplo un punto doppio.

$$(\rho_6 - 1 = 9 \,,\ \mu_6 = 3 \,,\ p - 1 - \mu_6 = 3, \,,\ p + 1 - \alpha - \nu_6 = 2$$
$$\delta + p - 6 + \varepsilon_6 - N_6 = 1).$$

Ora parrebbe che questo imponesse ai punti multipli una nuova condizione, ma effettivamente non la impone, chè se il punto sestuplo e i sei punti doppî sono su di una stessa conica esistono senz'altro ∞^1 curve del terz'ordine che soddisfano alle condizioni volute, quelle costituite dalla conica e da una retta qualunque pel punto sestuplo.

Gli altri ordini mancati poi non traggono seco alcuna relazione fra i punti multipli. Quest'esempio vale a giustificare quanto fu detto a proposito dell'indipendenza o meno delle relazioni fra i punti singolari della C_{p+2}, portate dai varî ordini mancanti in W.

§ 8. **Applicazioni della rappresentazione data al § 6.**

13. Applichiamo il metodo da noi dato di rappresentazione di una curva qualsiasi di genere p con un punto di W. di specie determinata mediante una C_{p+2} piana, per fare, in quei casi dove ci sarà possibile applicar i metodi che esporremo, la verifica se una successione di p numeri fra quelle costruite al § 5 (il caso iperellittico lo escludiamo oramai avendo già accennato quali curve gli corrispondano), può essere una successione di ordini mancanti in un punto di W. di una curva di genere p. Che scopo si raggiunge in fine con la rappresentazione indicata? Quello di vedere quali pro-

prietà devono competere a una certa curva piana, imagine della curva qualunque supposta, affinchè questa curva piana (e quindi la supposta) abbia il voluto punto di W; proprietà che sono poi sufficienti per affermare che la curva in discorso (se esiste) possiede effettivamente il punto di W. di specie data. Se dunque riesciamo effettivamente a mostrare ch'esiste una curva piana con le proprietà volute, veniamo in tal modo a verificare ch'esiste un punto di W. della specie data.

Riduciamo dunque il *problema di verifica di una successione d'ordini mancanti* a quest'altro: *vedere s'esiste una certa curva piana, con certe singolarità, sottoposte a certe condizioni.*
Posto sotto questa forma il problema apparisce tutt'altro che facile anzi nella maggior parte dei casi, insolubile forse. Nulla ci permette infatti, in generale, d'affermare a priori l'esistenza di una C_{p+2} piana irriducibile con le singolarità richieste e solo con quelle (perchè abbia il genere p), che soddisfino alle condizioni esposte nel § 6, dipendenti dal fatto che la C_{p+2} deve possedere il dato punto di W., anche quando p. e. si sia potuto verificare che queste condizioni imposte ai punti singolari sono tra loro compatibili [1]. Bisognerebbe

[1] A questo proposito debbo notare che il metodo di verifica usato dal sig. HAURE nella sua memoria sui punti di Weierstrass già altrove citata, ha secondo me in tale punto una grave lacuna. Infatti anch'egli stabilisce, per via analitica, la curva rappresentativa di una curva di genere p con un dato punto di Weierstrass, e trova che questa curva deve avere nel punto di W. una certa singolarità, e deve possedere poi inoltre un certo numero di punti doppî (quanti ne occorrono perchè abbia il genere p) sottoposti a certe condizioni dovute all'esistenza del punto di W. Tradotta geometricamente, la rappresentazione dell'HAURE è anch'essa, come quella del SEGRE da noi usata un'applicazione del teorema:

Una curva contenente due serie $g^1{}_n$, $g^1{}_{n'}$ non aventi alcuna serie comune si può trasformare univocamente in una curva d'ordine $(n+n'-k)$ $(k \geq 1)$ con due punti, $(n-k)^{uplo}$ ed $(n'-k)^{uplo}$ centri di fasci di rette che segnano le serie trasformate $g^1{}_n\, g^1{}_{n'}$ (V. ad es. BERTINI loc. cit.) Le due g^1 usate dall'HAURE sono la $g^1{}_\alpha$ corrispondente al primo ordine esistente nel punto di W e una g'_{d_1} con punto $d_1{}^{plo}$ nel punto di W., dove d_1 è il più basso ordine esistente primo con α. Ovviamente d_1 è scelto primo con α perchè le due serie non abbiano con certezza alcuna serie comune. I due fasci poi scelti dall'HAURE per effettuare la rappresentazione sono quelli formati dalle rette parallele ai due assi coordinati. La dunque procedere in ogni caso all'effettiva costruzione, cioè alla ricerca dell'equazione, di una curva irriducibile di ordine $p+2$ e di genere p con le singolarità volute, soddisfacenti alle condizioni necessarie e sufficienti perchè la curva abbia il dato punto di W., cosa che, come ben si capisce, presenta in generale all'atto pratico difficoltà insormontabili.

Ma vi sono parecchi casi in cui, senza effettivamente trovare l'equazione di una curva con tutte le particolarità volute, possiamo affermare che una tal curva esiste valendoci di alcuni notevoli teoremi intorno ai sistemi lineari di curve piane. Supponiamo intanto di essere nel caso in cui ci sia possibile mostrare ch'esistono ef-

---

curva che così si ottiene è una curva d'ordine d_1 col punto di W. all'infinito nella direzione dell'asse coordinato appartenente al fascio che segna la g'_σ. Il punto di W. risulta in generale (quando $d_1 \neq \sigma+1$) un punto multiplo straordinario, talchè la verifica per via geometrica dell'esistenza delle curve ottenute in questo modo è ben più difficile di quella delle curve trovate da noi. Eppoi l' HAURE giunge alle sue conclusioni con lunghi procedimenti analitici, mentre quelli geometrici da noi usati sono assai brevi. Di più, come dicevo, una volta stabilita, a priori, la curva rappresentativa, l' HAURE per procedere alla verifica della sua effettiva esistenza usa un metodo che presenta delle lacune. Egli infatti per verificare l'esistenza della curva detta si contenta di vedere: 1.° Se la successione d'ordini mancanti considerata soddisfa alle condizioni numeriche imposte dal teorema di HURWITZ. 2.° Se le relazioni imposte ai punti doppî sono tra loro compatibili (per veder questo, a quanto sembra, costruisce sistemi di punti che soddisfano a quelle proprietà) e compatibili con l'irriducibilità della curva (come veda quest'ultima cosa, anzi non risulta ben chiaro). 3.° Se il numero dei coefficienti disponibili dell'equazione di detta curva (supposto che abbia le singolarità volute) non è superato dal numero delle relazioni *indipendenti* che devono esistere fra i suoi punti multipli perchè il punto di W. sia della specie data. Questo è almeno quanto apparisce dalle condizioni ch'egli dà nel cap. II n. 12 della sua memoria come necessarie e sufficienti perchè esista un punto di W. della specie data. Egli dice bensì dopo che bisogna in ogni caso condurre sino in fondo la formazione dell'equazione della curva rappresentativa, ma come faccia poi non si capisce, e del resto nell'esempio che dà per mostrare il modo in cui va eseguita la verifica, non fa poi questo. Con il suo metodo l' HAURE determina poi tutte le possibili successioni d'ordini mancanti che si possono avere in un punto di W. di una curva algebrica, pei valori del genere da 3 a 7. Ma è chiaro che una volta constatato che detto suo metodo non va, le tavole da lui fornite non servono.

fettivamente sistemi di punti, che siano tanti quanti devono essere i punti singolari della C_{p+2}, e soddisfino a tutte le condizioni a cui devono soddisfare i punti singolari stessi perchè la C_{p+2} abbia il voluto punto di W.

Allora, invece di lasciare indeterminate le singolarità della curva che si vuol costruire, possiamo ben pensare di fissarle in punti particolari del piano, possiamo pensare cioè di stabilire la posizione nel piano del punto $(p+2-\alpha)^{uplo}$ P, dei δ punti doppî e del punto W (nel quale la tangente alla C_{p+2}, dev'essere la retta che lo unisce col punto $(p+2-\alpha)^{uplo}$), in modo che siano soddisfatte per parte di questi punti tutte le condizioni richieste affinchè la C_{p+2} abbia in W il voluto punto di W. Veniamo così ad imporre ai coefficenti dell'equazione della curva da costruirsi un certo numero di condizioni *lineari*. Ora può avvenire che il numero di queste condizioni sia inferiore all'infinità delle curve piane d'ordine $p+2$. Se ciò accade esiste un sistema lineare di curve piane d'ordine $p+2$, le quali hanno nei punti *fissati* le molteplicità richieste e in W un contatto α - punto con la retta W P. Ora se c'è dato affermare, che questo sistema lineare non ha parti fisse, non è composto con un'involuzione in un fascio, non possiede altri punti multipli *base* oltre quelli fissati, e non ha in questi molteplicità superiori a quelle imposte, possiamo senz'altro dire ch'*esiste* una curva piana d'ordine $p+2$ e genere p con tutte le particolarità volute, ed è precisamente la curva *generica* del sistema lineare in discorso.

Infatti quando un sistema lineare di curve piane ha le proprietà che abbiamo esposte, la sua curva generica è *irriducibile,* e non possiede punti multipli fuori dei punti base [1], epperò la curva generica del sistema in discorso è precisamente una C_{p+2} irriducibile del genere p (non possedendo altri punti multipli fuori dei prefissati e avendo in questi la molteplicità data) i cui punti singolari soddisfano per ipotesi a tutte le proprietà volute perchè la curva abbia in W il dato punto di W.

---

[1]) V. Bertini, *Sui sistemi lineari* (rendiconti del R. Istituto lombardo 1882).

Ora disponendo, se del caso, opportunamente dei δ punti doppî, a cui possiamo sostituire dei punti di molteplicità superiore che ad essi equivalgano rispetto al genere (con che si viene a diminuire le condizioni imposte alla C_{p+2} quando i punti s'intendano fissati, chè p. e. per avere un punto triplo determinato l'equazione di una curva deve soddisfare a 6 condizioni, mentre per averne tre doppî, che nel computo del genere equivalgono a uno triplo, deve invece soddisfare a 9 condizioni) in modo però naturalmente che non ne risulti di *necessità* la riducibilità della C_{p+2}, si può in moltissimi casi, e forse in tutti, fare in modo che la C_{p+2} che deve avere nei punti fissati le fissate singolarità, sia un individuo di un sistema lineare infinito di curve d'ordine $p+2$, che tutte hanno le singolarità date.

Un esempio chiarirà meglio quanto si è detto. Per $p=5$, fra le altre successioni che ci vengono date dalle regole del § 5, vi è la seguente: 1, 2, 3, 4, 7. Applicando ad essa quanto fu detto nel § 6, vediamo che avendosi $\alpha=5$, se esiste una curva con un punto di W. offrente quella successione d'ordini mancanti, deve esistere una C_7 piana con un punto doppio, pel quale passa una tangente con contatto cinquipunto in W., e altri $\frac{6\,.\,5}{2}-5-1=9$ punti doppî o multipli equivalenti tali che la cubica da essi determinata, passi per W senz'esservi tangente alla C_7. Ora, supposto di prendere effettivamente una cubica generale C_3, sulla quale si fissino 10 punti generici, uno dei quali si scelga per punto W e gli altri 9 per punti doppï della C_7, e di fissare poi un altro punto P che non sia sulla tangente in W alla C_3, e debba essere l'ulteriore punto doppio della C_7 richiesta, sì che P W debba risultare la tangente in W alla C_7, avente ivi un contatto cinquipunto, si viene ad imporre alla C_7 35 condizioni, che debbonsi, a priori, ritenere come tra loro indipendenti. Essendo i parametri (non omogenei) che determinano una curva piana del 7.° ordine precisamente 35, non possiamo dunque dire, poste le cose in questo modo, che la richiesta C_7 appartenga a un sistema lineare infinito, determinato dai fissati passaggi pei punti fissati. Per cui l'ipotesi dei δ punti doppî tutti distinti non fa al caso nostro.

Ma supponiamo invece di sostituire a tre di essi un punto triplo. Allora si dovrà fissare W i 6 punti doppî e il punto triplo così: prendere una cubica con un punto doppio, e stabilire che il punto triplo debba essere in questo punto doppio, e W e i 6 punti doppî in altri 7 punti *generici* della cubica stessa. In quanto al punto P lo sceglieremo come prima, fuori della tangente in W alla C_3. Allora è chiaro che tutte le C_7 che soddisfano alle condizioni così imposte, sono almeno ∞^3, e ci troviamo nel caso in cui è possibile proseguire la verifica.

Rimarrà poi da vedere se il sistema lineare così determinato, ha tutte le proprietà richieste, cioè non ha parti fisse ecc.

Tre dunque sono le cose che si debbono fare per poter affermare ch'esiste effettivamente una C_{p+2} piana del genere p con le proprietà volute:

1. Vedere se si può considerare la curva che si vuol costruire come individuo d'un sistema lineare infinito determinato dai suoi punti multipli, e da W contato α volte sulla retta che lo congiunge al punto $(p+2-\alpha)^{uplo}$, come punti base.

2. Costruire, [1] se ci è possibile, uniformandosi alle ipotesi che si sono dovute fare fare avanti, perchè la C_{p+2} risultasse in individuo d'un sistema lineare infinito, determinato de' suoi punti singolari come punti base, un sistema di punti (quelli multipli e W) che soddisfano a tutte le condizioni loro imposte dal fatto, che la curva cercata deve possedere in W. il *dato* punto di W.

3. Verificare se il sistema lineare infinito, determinato da quei punti con le molteplicità assegnate, non ha parti fisse, non è composto con un'involuzione in un fascio, non possiede punti multipli base fuori dei prefissati (neanche infinitamente vicini ad essi) nè ha in questi molteplicità superiori a quelle stabilite.

Per fare quest'ultima verifica è chiaro che basterà procedere come segue: costruire due curve particolari (riducibili anche) del sistema in

---

[1] Intendiamoci bene sulla parola *costruire*. Qui vuol dire mostrare che quei punti si possono ottenere come intersezioni di curve note. In quanto a determinarne effettivamente le coordinate, questo naturalmente non occorre.

discorso che non abbiano parte comune, nè siano composte con lo stesso numero di curve d'un medesimo fascio (con che si viene a provare che la curva generica del sistema è irriducibile); non abbiano punti multipli *comuni* fuori di quelli prefissati, nè in questi abbiano entrambe molteplicità superiori a quelle imposte (con che si mostra che il sistema non ha altri punti base multipli fuori dei fissati, nè le sue curve hanno in questi molteplicità superiore alla data, onde la curva generica del sistema ha *tutti* e *soli quei* punti multipli, con *quelle* molteplicità).

14. Applichiamo le considerazioni svolte nel numero precedente, a verificare l'esistenza di curve possedenti punti di W. con le successioni d'ordini mancanti calcolate al § 5, pei primi valori del genere $p=3$ e $p=4$. Anzi per $p=3$ notiamo che, senza servirci del metodo generale, il quale ci darebbe curve piane del 5.° ordine, possiamo subito trovare altre curve piane d'ordine più basso, con punti di W. offrenti le due successioni d'ordini mancanti calcolate al § 5; 1, 2, 4; 1, 2, 5. E infatti una quartica piana generale nel suo ordine (priva cioè di punti multipli) è di genere 3, la serie canonica su di essa è la g_4^2 segnata dalle rette del piano, epperò i *flessi* della curva sono altrettanti suoi punti di W.; se si tratta di un flesso ordinario, nel quale cioè la tangente ha tre intersezioni e non quattro con la curva, si ha un punto di W. ordinario, ossia semplice, nel quale gli ordini mancanti sono precisamente 1, 2, 4; se invece si ha un flesso dove la tangente d'inflessione ha un contatto quadripunto con la curva, questo flesso costituisce un punto di W. che conta per due unità fra i punti p^{upli} della serie canonica, e offre la successione d'ordini mancanti 1, 2, 5 [1].

[1] La rappresentazione di una curva di genere 3 possedente un punto di W. con gli ordini mancanti 1, 2, 5, mediante una C_4 piana senza punti multipli e con una tangente a contatto quadripunto, si ottiene riferendo proiettivamente le rette del piano ai gruppi della $g^2{}_4$ completa ch'è sulla curva ed ha nel punto di W. un punto quadruplo. Questa $g^2{}_4$ è la *serie canonica* della curva stessa. Tale rappresentazione si può riguardare come un caso particolare della rappresentazione che può farsi in generale di una curva di genere qualunque p possedente un punto di W. di specie data, usando del 2.° ordine esistente nel punto di W. stesso, col riferire

Passiamo al caso di $p = 4$. Applicando il metodo generale esposto nel § 6 alle successioni dateci per questo valore del genere dalle regole del § 5, si ottiene per ogni successione la curva corrispondente. Noi scriveremo la successione, e accanto ad essa la curva che le corrisponde con le relative proprietà.

($\alpha = 4$) 1, 2, 3, 5. *Una* C_6 *con sei punti doppî e una tangente a contatto quadripunto in* W, *per uno di essi, P.*

1, 2, 3, 6. *La stessa* C_6, *solo che la conica passante pei punti doppi di* C_6, *escluso* P, *passa anche per* W.

1, 2, 3, 7. *La* C_6 *del caso precedente, solo che la conica detta è tangente in* W. *alla* C_6.

($\gamma = 3$) 1, 2, 4, 5. *Una* C_6 *con un punto triplo, una tangente d'inflessione che ha per punto di contatto* W *e passa pel punto triplo, e tre punti doppî.*

---

proiettivamente le rette del piano ai gruppi della $g^2{}_\beta$ completa avente in W un punto β^{uplo}. Questa rappresentazione però è valida solo quando si possa asserire che la $g^2{}_\beta$ in discorso non è composta con un' involuzione. Una simile asserzione si può fare p e. senz' altro quando la differenza tra il primo e il secondo ordine esistente nel punto di W. sia l'unità (a questo proposito si ricordi quanto fu detto al n. 3, parlando dell' abbassamento dei limiti superiori delle i_k dati dal Segre).

In questo caso dunque la rappresentazione detta è lecita e s' otterrà con essa una curva piana d'ordine β che avrà il punto di W. in un punto W semplice con tangente a contatto β punto, e possiederà inoltre un certo numero di punti doppî o mnltipli equivalenti. E il fatto che W presenta la data successione di ordini mancanti, porterà un certo numero di relazioni fra W e i punti multipli, la cui natura si potrà stabilire a priori conoscendo gli ordini mancanti in W. Una cosa affatto analoga insomma a quanto s'è detto nel § 6, solo che la curva rappresentativa è qui d'ordine più basso di $p+2$ e la verifica della sua effettiva esistenza può quindi forse riuscire più facile che quelle dell'esistenza della C_{p+2} che ci vien data dal metodo generale. La rappresentazione invece di una curva di genere 3, possedente un punto di W. con gli ordini mancanti 1, 2, 4 mediante una C_4 piana in cui il punto di W. è un punto di flesso ordinario della C_4 stessa, si ottiene ancora riferendo proiettivamente le rette del piano ai gruppi della serie canonica $g^2{}_4$ esistente sulla curva, ma tale serie canonica non corrisponde al secondo ordine esistente nel punto di W. il quale invece ci fornisce una $g^2{}_5$ con un punto quintuplo in W.

Onde quest'ultimo caso non rientra nella rappresentazione più generale detta sopra.

1, 2, 4, 7. *La stessa* C_6, *solo che i suoi tre punti doppî sono allineati.*

Si tratta ora di verificare se tutte queste curve esistono effettivamente.

Osserviamo intanto che per le C_6 corrispondenti alle successioni dove $\alpha = 4$, imaginando di fissare i sei punti doppî e W, si ha un sistema lineare almeno ∞^5 di C_6, che tutte hanno quei sei punti doppî, e segano in W la retta W P in quattro punti ivi coincidenti; analogamente per le C_6 corrispondenti ad $\alpha = 3$ fissato il punto triplo, i tre punti doppî a W, si viene a determinare un sistema lineare di C_6 almeno ∞^8. Talchè ci atterremo in entrambi i casi all'ipotesi che la C_6 abbia i suoi punti doppî distinti, e ci limiteremo poi ad esporre la verifica soltanto per una delle successioni corrispondenti ad $\alpha = 4$, ed una di quelle corrispondenti ad $\alpha = 3$, notando però ch'essa può farsi per tutte quelle cinque scritte di sopra, e conduce ad affermare che quelle cinque stesse sono tutte ammissibili.

Le due successioni che considereremo sono le seguenti:

1, 2, 3, 7   1, 2, 4, 5.

1, 2, 3, 7. Abbiamo già visto quale curva corrisponde a questa successione. Fissiamo dunque W e i cinque punti doppî, 1, 2, 3, 4, 5 sopra una conica e prendiamo P (sesto punto doppio) sulla tangente in W alla conica stessa. Due particolari C_6 che hanno quei punti doppî e toccano in 4 punti riuniti in W la retta W P sono le seguenti: I. la conica 1, 2, 3, 4, 5, W contata due volte più due rette qualunque per P; II. la conica 1, 2, 3, 4, P, più la retta P W più le rette 54, 51, 23.

Evidentemente queste due curve non hanno parti comuni, non sono composte con le curve di un fascio, non hanno punti multipli *comuni* oltre quelli fissati, nè quivi hanno multiplicità superiore alla data. Si può concludere dunque che la C_6 generica che ha in 1, 2, 3, 4, 5, P sei punti doppî e ha in W un contatto quadripunto con la retta W P, è irriducibile, non ha altri punti multipli fuori dei fissati, e ha quivi le molteplicità assegnate, talchè essa è del genere 4 *e ha in* W *un punto di Weierstrass offrente la successione di ordini mancanti* 1, 2, 3, 7.

1, 2, 4, 5. Fissiamo il punto triplo P, i tre punti doppî, 1, 2, 3 (non allineati) e W in punti qualunque del piano. Due particolari C_6 che abbiano in P un punto triplo, in 1, 2, 3 tre punti doppî, e in W un contatto tripunto con la retta P W sono le seguenti: I. la conica per 1, 2, 3 e tangente in W a W P, più la retta W 3 più le rette P 1, P 2, più una retta qualunque per P. II. la retta W P, più due coniche qualunque per 1, 2, 3, P, più una retta qualunque. Queste due curve non hanno chiaramente parte comune nè sono composte con le curve di un fascio, e neppure hanno punti multipli *comuni* fuori dei fissati, dove possiedono le multiplicità prestabilite. Se ne trae che la C_6 generica che ha un punto triplo in P, ha 1, 2, 3 per punti doppî e tocca la retta P W, in tre punti riuniti in W, è irriducibile e del genere 4, ed ha *in* W *un punto di* W *offrente la successione d'ordini mancanti* 1, 2, 4, 5.

Come si è già detto per tutti e 5 i sistemi fornitici dal § 5 pel valore 4 del genere, si può venire a conclusioni analoghe, talchè potremo dire senz'altro: *Sopra una curva non iperellittica di genere* 4 *un punto di* W *può offrire tutte e sole le seguenti successioni d'ordini mancanti:*

1, 2, 3, 5   1, 2, 3, 6   1, 2, 3, 7   1, 2, 4, 5   1, 2, 4, 7.

Quanto s'è fatto per $p = 4$ si potrebbe continuare anche pei valori superiori di p, 5, 6, 7 ecc., tentando per ognuna delle successioni date dalle regole del § 5, di verificare, coi metodi accennati, l'effettiva esistenza delle curve che secondo il § 6 devono ad essi corrispondere. Anzi per mostrare come effettivamente in taluni casi la verifica riesca bene, faremo vedere ch'esistono curve del genere 7 possedenti punti di W. con la successione d'ordini mancanti 1, 2, 4, 5, 7, 10, 13. In questa successione figurano i valori massimi delle ρ per $p = 7$, da noi stabiliti al § 5 n. 8, talchè a tale successione corrisponde quel punto di W. delle curve di genere 7 che ha la *massima* multiplicità.

Si è già visto al § 7 n. 12 quale curva dovrebbe corrispondere a detta successione: tale curva sarebbe una C_9 con un punto sestuplo, una tangente di flesso in W pel punto sestuplo e sei punti doppî che sono sopra una stessa conica col punto sestuplo. Fissiamo dunque il punto sestuplo P e i sei punti doppî sopra una conica, e sia W un altro punto qualunque del piano. Intanto le C_9 che hanno quei punti multipli e hanno in W un contatto tripunto con la retta W P sono almeno ∞^{12}.

Due particolari di esse sono le seguenti:

I. La conica per P e i sei punti doppî, più una conica qualunque per 1, 2, 3, 4, più la retta P W, più le rette P 5, P 6 più due rette qualunque per P.

II. La conica per 1, 2, 3, P, W, più la conica per 4, 5, 6, P, W, più una curva qualunque del terz'ordine con punto doppio in P, per W e per 5, 6, 4, 3, più le rette P 1, P 2. Evidentemente queste due particolari C_9 soddisfano a tutte le condizioni volute per concludere che la C_9 generica che ha le singolarità assegnate è irriducibile e del genere 7, *talchè essa possiede in* W *il voluto punto di* W.

Certo che, procedendo coi valori del genere, le condizioni imposte ai punti multipli della C_{p+2} e a W dal fatto che la C_{p+2} stessa deve possedere in W un punto di W. della specie data, diventano via via più complicate, (per $p = 4$ si tratta solo dell'esistenza di questi punti sopra una certa curva (conica o retta), ma procedendo coi valori del genere si hanno in generale condizioni riguardanti sistemi lineari con punti base nei punti stessi) e diventa quindi sempre più difficile il poter affermare a priori l'esistenza di sistemi di punti soddisfacenti a dette condizioni, e d'altra parte si complica anche la costruzione di curve particolari che abbiano nei punti prefissati le particolarità volute, talchè il metodo di verifica usato sopra in molti casi non può servire.

Ma noi del resto non abbiamo avuto la pretesa di dare un metodo generale per verificare se un sistema di p numeri, scelto fra quelli che ci danno le regole del § 5, è un sistema di ordini mancanti in un punto di W. d'una curva algebrica di genere p, ma solo abbiamo inteso di indicare criterî che sono applicabili in taluni casi, e costituiscono condizioni *sufficienti* per poter fare una tale affermazione.