

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

UGO GRASSI

Studdi d'idrodinamica. Parte I. Movimento di un liquido in cui sia immerso un ellissoide in spostamento omografico. - Ellissoide pulsante. Parte II. Le forze idrodinamiche a distanza

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1^{re} série, tome 9 (1904), exp. n° 3, p. 1-84

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1904_1_9__A3_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UGO GRASSI

STUDII D'IDRODINAMICA

PARTE I.

**Movimento di un liquido in cui sia immerso un ellissoide
in spostamento omografico. — Ellissoide pulsante.**

PARTE II.

Le forze idrodinamiche a distanza.

INTRODUZIONE

È noto come il problema del movimento di un fluido incompressibile, nella ipotesi che esista una funzione delle forze acceleratrici dei punti del liquido e che ad un dato istante esista una funzione delle velocità venga senz'altro ricondotto alla teoria delle funzioni armoniche potenziali. Esisterà infatti ad ogni istante una funzione delle velocità, data da una funzione potenziale armonica che sul contorno del liquido ha una derivata normale uguale alla componente secondo la normale stessa della velocità, del punto del contorno che abbiamo preso a considerare.

Il primo e più semplice problema di tale natura fu trattato da Dirichlet e fu quello relativo al movimento di un liquido in cui siano immerse una o più sfere rigide mobili. Il problema più generale del movimento di un liquido in cui sia immerso un ellissoide rigido fu posto da Dirichlet ma risolto nella sua generalità da Clebsch e da Scëring; Bjerknæs generalizzò poi questo problema per uno spazio a più dimensioni.

PARTE PRIMA

§. 1. - *Ellissoide omografico.* — Nella prima parte del presente lavoro è trattato il caso in cui nel liquido sia immersa una membrana ellissoidica che si deforma in modo omografico. La funzione delle velocità si presenta come una combinazione lineare della funzione delle velocità relativa ad un atto di movimento rigido, della funzione potenziale di un ellissoide omogeneo, di quella di

una crosta ellissoidica, ed infine di una funzione potenziale che si ottiene da quest'ultima con la derivazione rispetto ad un parametro. La questione è così completamente risolta nel §. 1.

§. 2. - *Ellissoide pulsante*. — Nel §. 2 della parte prima è considerato più particolarmente un caso notevole della questione generale posta e risolta nel precedente paragrafo. Il caso cioè in cui la membrana ellissoidica si deforma passando per conformazioni simili rispetto al loro comune centro fisso.

La funzione delle velocità è allora data, a meno di una funzione del tempo, dal noto integrale

$$\int_{\infty}^u \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

dove u è la coordinata ellittica del punto considerato.

Viene in seguito studiata la distribuzione della pressione esercitata dal liquido sulla membrana e si trova che le linee di uguale pressione non sono altro che le note quartiche, conosciute in Fisica Matematica (movimento di Poincot) col nome di *polodie*. In seguito si procede alla integrazione delle equazioni del movimento, riconducendo il problema alle quadrature e dando un integrale sotto forma finita. Un risultato interessante che scaturisce quasi immediatamente da una delle forme assunte dal sistema di equazioni differenziali è il seguente:

“ La posizione di una determinata molecola di fluido ad un istante dipende solo dalla grandezza della membrana ellissoidica e niente affatto dalla rapidità con cui l'ellissoide è passato dalla conformazione iniziale alla finale „. — La prima parte del lavoro si chiude poi con alcune considerazioni sugli integrali trovati.

PARTE SECONDA

Non era certamente questa la prima volta in cui venisse trattato un problema di movimento di un liquido nella ipotesi che le su-

perficie limiti anzichè rigide fossero membrane flessibili. Già dal 1868 ¹⁾ Bjerknès aveva trattato il caso delle sfere pulsanti, ossia di membrane sferiche il cui raggio è una funzione nota del tempo. I risultati ottenuti dal Bjerknès erano molto interessanti inquantochè tra le sfere si esercitavano delle azioni che sembravano riprodurre con molta fedeltà le circostanze delle azioni a distanza osservate nella fisica, ed alla cui spiegazione non si invocava allora generalmente la ipotesi di un *medium*. È da notare che anche Dirichlet nel caso di sfere rigide mobili aveva trovato alcunchè di simile ma non sembra che egli influisse molto a dirigere le ricerche di Bjerknès ²⁾ allo scopo fisico cui veramente questi tendeva.

Nella seconda parte di questo lavoro mi ero dapprima proposto di trattare in via approssimativa il problema che si presentava come la naturale estensione del caso trattato da Bjerknès, quello cioè degli ellissoidi pulsanti.

Trattando questo problema mi accorsi che, nella ipotesi che il centro degli ellissoidi rimanesse fisso, sussistevano gli stessi risultati del Bjerknès riguardanti le mutue attrazioni e repulsioni delle sfere pulsanti. Per arrivare ai risultati finali io dovevo soltanto fare uso di proprietà generali e molto semplici delle funzioni potenziali e più che tutto della simmetria che ha una figura ellissoidica rispetto al suo centro. Generalizzai allora le considerazioni e presi in esame il caso di più corpi pulsanti intorno a centri di simmetria fissi, ossia corpi che si deformano in modo però da presentare ad ogni istante ognuno un centro di simmetria fisso. I processi analitici che si tengono in queste ricerche non presentano in se stessi alcuna difficoltà; si applica sempre il teorema di Green, lo sviluppo in serie di Taylor ed infine il teorema di Hamilton da cui scaturiscono le formule date dal Neumann nel §. 12 delle *Hydrodynamische Untersuchungen*.

¹⁾ *Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte* nach C. A. BJERKNES. Theorie, pag. 234, 235.

²⁾ *Ibid.*, pag. 232.

§. 1. — Per stabilire con tutto rigore i risultati che formano lo scopo delle ricerche contenute in questa seconda parte ho enunciato e dimostrato un teorema relativo al massimo di una funzione potenziale armonica, relativamente ai valori della sua derivata normale al contorno; questo teorema mi porta poi incidentalmente a dimostrare un caso assai esteso di convergenza della serie che serve al calcolo, col noto metodo delle approssimazioni successive, di una funzione potenziale armonica esistente all'esterno di due corpi, note che siano tutte le funzioni potenziali esistenti nello spazio esterno a ciascuno di essi.

§. 2. — Nel secondo paragrafo si svolgono altre semplici considerazioni necessarie allo scopo finale.

§. 3. - *Resultante delle pressioni esercitate su di un corpo pulsante:* Nel terzo sono estesi i risultati ottenuti dal Bjerknes nella ipotesi che i corpi pulsino intorno a centri fissi.

§. 4. - *Momento delle pressioni esercitate su di un corpo pulsante:* Nel quarto paragrafo mi sono proposto la ricerca del sistema di pressioni in un caso notevole. Per condurre a termine questa indagine ho dovuto introdurre il concetto di un nuovo elemento, di una terna di assi che ha la seguente definizione:

Dato un corpo consideriamo la superficie materiale che coincide con il contorno del corpo, che in ogni suo punto ha una densità (positiva o negativa) uguale alla componente secondo la normale, della velocità del punto considerato. Di essa consideriamo la terna degli assi principali d'inerzia che chiamiamo per brevità *terna principale*. Io mi sono dunque proposto questa ricerca:

Nella ipotesi che il corpo abbia un centro di pulsazione ed una terna principale fissa quali saranno i momenti del sistema di pressioni esercitate dal fluido sul corpo?

Le formule che risolvono questo problema si presentano molto semplici; infatti se $A B C$ sono i momenti di inerzia, della superficie materiale introdotta, secondo gli assi principali $x_1, y_1, z_1,$

ed M è la sua massa ed R è la direzione della congiungente i centri dei due corpi pulsanti

$$M_{x_1} = \frac{3 M_2 \cdot (C - B) \cos R y_1 \cdot \cos R z_1}{4 \pi R^3}$$

.

$$M_{z_1} = \frac{3 M_2 \cdot (B - A) \cos R x_1 \cdot \cos R y_1}{4 \pi R^3} .$$

Il caso trattato in questo paragrafo è assai generale e si presterebbe assai bene ad una riprova per via sperimentale.

§. 5. - *Corpi con sei piani di simmetria pulsanti intorno a centri mobili.* — Il paragrafo 3 dà come abbiamo detto la generalizzazione dei teoremi di Bjerknæs nel solo caso in cui il centro di pulsazione sia fisso. Molto interessanti sono ancora i risultati che riguardano i sistemi di sfere pulsanti intorno a centri mobili giacchè in tale caso si trova veramente esplicito il concetto che ha guidato Bjerknæs nelle sue ricerche. La estensione di essi ad un caso più generale si opera nel §. 5 della seconda parte; il caso cui accenniamo è quello in cui i corpi pulsanti ammettono ad ogni istante sei piani di simmetria ortogonale formati dai piani di un triedro trirettangolo e dai piani bisettori dei suoi angoli diedri.

E si ottengono i seguenti risultati:

1. Si può definire per ogni corpo un numero *positivo e costante* che si chiama *massa*.
2. Il prodotto della massa per l'accelerazione del centro si dice *forza*.
3. Il centro di un corpo isolato prosegue con moto rettilineo ed uniforme il suo cammino.
4. La forza che agisce su di un corpo è la somma delle forze che agirebbero su di esso ove fosse isolato con ciascuno degli altri.
5. La forza che agisce su di un corpo per la presenza di uno o più altri dipende soltanto dal moto dei corpi con cui è isolato e niente affatto dal suo moto.

6. La forza che agisce su di un corpo dipende oltre che dal movimento dei corpi con cui è isolato anche dalla relativa loro posizione, ma da nessun altro elemento.

7. Le forze che agiscono su di un corpo per la presenza di uno o più altri ammettono funzioni delle forze.

8. Valgono nei rapporti tra *massa*, *forza*, *accelerazione* quei teoremi della meccanica dei punti materiali che sono una pura conseguenza della definizione di questi tre elementi, ossia:

$$\text{massa} = \text{cost.} , \quad \text{accel.} = \frac{d}{dt} \text{velocità} , \quad \text{forza} = \text{mass.} \times \text{accel.}$$

Riguardo poi alle applicazioni di questi concetti al campo fisico ricordiamo che furono applicati dal Bjerknæs alla teoria delle azioni newtoniane a distanza ed a quella della costituzione della materia, ad una rappresentazione della meccanica di Hertz ed infine ai fenomeni elettrici e magnetici. Riguardo a questi ultimi è però da notare che i fenomeni appaiono precisamente invertiti nel senso che cariche dello stesso segno si attrarrebbero e cariche di nome contrario si respingerebbero.

Questi sono i risultati ultimi e più generali che mi è sembrato si potessero sviluppare intorno alla idea originaria del matematico norvegese.

PARTE PRIMA

§. 1.

Enunciato del problema. — Scopo delle indagini che seguono è la ricerca della funzione delle velocità Φ di un liquido che si estende all'infinito ed ivi riposa, nel quale sia immerso un ellissoide la cui superficie possiede un atto di movimento omografico. — Ciò equivale a cercare una funzione Φ che nel campo del fluido e sul contorno è regolare e soddisfa alle condizioni seguenti:

1. $\Delta_2 \Phi = 0$.
2. Essa e le sue derivate I.^e lungo qualsiasi direzione tendono a zero nel modo noto con l'allontanarsi all'infinito del punto in cui si calcolano.
3. La sua derivata normale in ogni punto dell'ellissoide ha la espressione:

$$(a) \quad (w+a_1 x+a_2 y+a_3 z) \cos nx + (v+b_1 x+b_2 y+b_3 z) \cos ny + \\ + (w+c_1 x+c_2 y+c_3 z) \cos nz.$$

Premesse. — Richiamiamo brevemente alcune formole alle quali dovremo spesso riferirci nel corso di questo paragrafo.

È noto come il potenziale delle forze esercitate da un ellissoide di densità uguale ad uno e la cui superficie ha per equazione

$$(b) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

riceva nei punti esterni all'agente la espressione

$$(1) \quad \Omega_1 = \pi abc \int_u^\infty \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} d\lambda.$$

Come pure è notissimo che posto

$$(2) \quad A = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \quad B = \dots, \\ C = abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

si avrà sulla superficie dell'ellissoide

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x^2} = -2\pi Ax, \quad \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial y^2} = -2\pi By, \quad \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial z^2} = -2\pi Cz$$

ed indicando con n la normale interna al fluido

$$(4) \quad \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial n \partial x} = 2\pi(2-A)\cos nx, \quad \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial n \partial y} = 2\pi(2-B)\cos ny, \\ \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial n \partial z} = 2\pi(2-C)\cos nz.$$

Posto ancora

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi(2-A)} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \dots, \quad \varphi_3 = \frac{1}{2\pi(2-C)} \frac{\partial \Omega_2}{\partial z} \\ (5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \frac{a^2-b^2}{2\pi(2(a^2-b^2)+(A-B)(a^2+b^2))} \left(x \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \right) \\ \Psi_2 = \dots \\ \Psi_3 = \frac{c^2-a^2}{2\pi(2(c^2-a^2)+(C-A)(c^2+a^2))} \left(z \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} - x \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} \right) \end{array} \right.$$

si avrà

$$(5^*) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \cos nx, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= \cos ny, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial n} &= \cos nz \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} &= x \cos ny - y \cos nx, & \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} &= \dots, & \frac{\partial \Psi_3}{\partial n} &= z \cos nx - x \cos nz \end{aligned} \right.$$

e la funzione delle velocità nella ipotesi di un atto di movimento rigido generale ci vien data da una combinazione lineare delle funzioni elementari $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \Psi_1 \Psi_2 \Psi_3$.

Un'altra funzione che si presenterà notevolmente interessante nelle nostre ricerche è la nota funzione

$$(6) \quad \Omega_2 = \pi abc \int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}$$

che dà al tempo stesso il potenziale di una carica elettrica in equilibrio sulla superficie ellissoidica ed ancora (a meno di un coefficiente, il parametro termometrico del sistema isoterma degli ellissoidi omofocali al dato. — La derivata normale poi di Ω_2 alla superficie dell'ellissoide è data da

$$(7) \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} = 2\pi (x \cos nx + y \cos ny + z \cos nz).$$

Semplificazione del problema. — “ Note le funzioni φ_i, Ψ_i , “ possiamo nella risoluzione del problema limitarci alla ricerca di “ una funzione potenziale armonica Γ esistente nel campo occupato “ dal liquido e la cui derivata normale ha la espressione

$$“ k_1 x \cos nx + k_2 y \cos ny + k_3 z \cos nz$$

“ con $k_1 k_2 k_3$ costanti arbitrarie „

Infatti, tenendo conto che sulla superficie ellissoidica si ha

$$\cos nx = \frac{x}{a^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \dots, \cos nz = \frac{z}{c^2 \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}$$

potremo scrivere la formula (α) pag. 9 nel modo seguente:

$$\begin{aligned} u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz + \left(b_1 + a_2 \frac{b^2}{a^2} \right) x \cos ny + \\ + \left(c_2 + b_3 \frac{c^2}{b^2} \right) y \cos nz + \left(a_3 + c_1 \frac{a^2}{c^2} \right) z \cos nx \\ + a_1 x \cos nx + b_2 y \cos ny + c_3 z \cos nz \end{aligned}$$

e le (5*)

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial n} = \left(1 - \frac{b^2}{a^2} \right) x \cos ny, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} = \left(1 - \frac{c^2}{b^2} \right) y \cos nz, \quad \frac{\partial \Psi_3}{\partial n} = \left(1 - \frac{a^2}{c^2} \right) z \cos nx.$$

E quindi, escluso dapprima il caso che l'ellissoide sia di rotazione, la funzione delle velocità, la cui ricerca è scopo del problema, sarà data da

$$\Phi = u \varphi_1 + v \varphi_2 + w \varphi_3 + \frac{a^2 b_1 + a_2 b^2}{a^2 - b^2} \Psi_1 + \frac{b^2 c_2 + b_3 c^2}{b^2 - c^2} \Psi_2 + \frac{c^2 a_3 + c_1 a^2}{c^2 - a^2} \Psi_3 + \Gamma.$$

Se poi l'ellissoide fosse di rotazione ($a=b$) in luogo della Ψ_1 consideriamo la $\frac{a^2}{a^2 - b^2} \Psi_1$ che chiameremo Ψ'_1 . Essa quando $a \neq b$ dà

$$\frac{\partial \Psi'_1}{\partial n} = x \cos ny.$$

Fatto questa semplice osservazione viene naturale il sospetto che la funzione cercata (armonica e la cui derivata normale sia $x \cos ny$) si debba trovare, nel caso dell'ellissoide di rotazione, nella funzione limite verso cui converge Ψ'_1 al tendere di a e b al valore comune. Allora è già tracciata la via da seguirsi. Infatti da una nota formula dei limiti si avrà

$$\lim_{a \rightarrow b} \Psi'_1 = \frac{1}{2\pi \left(1 + \lim_{a \rightarrow b} \frac{A-B}{a^2 - b^2} (a^2 + b^2) \right)} a^2 \frac{\partial}{\partial a^2} \left(x \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \right).$$

Ora siccome

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{A-B}{a^2-b^2} = -a^2 c \left(\frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^3 (c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^3 (c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}} \right) =$$

$$= -a^2 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^3 (c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial a^2} \left(x \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} - y \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \right) = -2 \pi a^2 c x y \left(\int_u^\infty \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda) ()^3 ()}} - \int_u^\infty \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{()^2 () ()}} \right) =$$

$$= -2 \pi a^2 c x y \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^3 (c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}},$$

si ha

$$\lim \Psi'_1 = - \frac{a^4 c}{1 - 2 a^4 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^3 (c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}}} \cdot x y \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^3 (c^2+\lambda)^{\frac{1}{2}}};$$

e questa funzione risolve certamente la questione; perchè

- 1.° È armonica (per il modo con cui fu dedotta);
- 2.° Al contorno dà

$$\frac{\partial}{\partial n} = - \frac{a^4 c}{1 - 2 a^4 c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{()^3 ()^{\frac{1}{2}}}} \left\{ (x \cos n y + y \cos n x) \int_0^\infty \frac{d\lambda}{()^3 ()^{\frac{1}{2}}} - \right.$$

$$\left. - \frac{x y}{a^6 c} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos n x + \frac{\partial u}{\partial y} \cos n y + \frac{\partial u}{\partial z} \cos n z \right) \right\} = x \cos n y.$$

La funzione risolutiva Γ . — È evidente che se, oltre alle funzioni Ω_1, Ω_2 le quali sono potenziali armoniche nel noto campo ed al contorno danno

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial n} = -2 \pi (A x \cos n x + B y \cos n y + C z \cos n z)$$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial n} = 2 \pi (x \cos n x + y \cos n y + z \cos n z)$$

noi potremo trovare una terza funzione Ω_3 che soddisfaccia alle solite condizioni generali delle funzioni potenziali armoniche, nel solito campo; e tale che al contorno dia

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial n} = A' x \cos nx + B' y \cos ny + C' z \cos nz$$

avendosi inoltre

$$(\gamma) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} \neq 0,$$

la funzione cercata Γ sarebbe allora fornita da una combinazione lineare delle tre $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

Orbene noi troveremo tre distinte funzioni che, in generale potranno prendersi per la Ω_3 .

Infatti, giacchè a^2, b^2, c^2 entrano nelle Ω_1, Ω_2 come parametri, noi potremo derivare queste funzioni rispetto ai parametri ed otterremo nuove funzioni potenziali armoniche.

Consideriamo in particolare la

$$\Omega_a = \frac{\partial}{\partial a^2} \int_{\infty}^u \frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} d\lambda$$

avremo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_a}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x} = 2x \frac{\partial}{\partial a^2} \int_{\infty}^u \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} = \\ &= 2x \frac{\frac{\partial u}{\partial a^2}}{(a^2+u) \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} + 2x \int_{\infty}^u \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda) \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \\ \frac{\partial \Omega_a}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial y} = 2y \frac{\frac{\partial u}{\partial a^2}}{(b^2+u) \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} + \\ &+ 2y \int_{\infty}^u \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda) \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Omega_a}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{\partial \Omega_1}{\partial z} = 2z \frac{\frac{\partial u}{\partial a^2}}{(c^2+u) \sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} +$$

$$+ 2z \int_{\infty}^u \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda) \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

D'altra parte derivando rispetto ad a^2 la equazione

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} - 1 = 0$$

che definisce la coordinata ellittica u si ottiene

$$\frac{\partial u}{\partial a^2} = - \frac{\frac{x^2}{(a^2+u)^2}}{\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}};$$

sostituendo quindi questa espressione nelle precedenti e tenuto conto che per note formule si verifica la relazione:

$$\frac{x}{a^2+u} \cos nx + \frac{y}{b^2+u} \cos ny + \frac{z}{c^2+u} \cos nz = \sqrt{\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}};$$

potremo porre la $\frac{\partial \Omega_a}{\partial n} = \frac{\partial \Omega_a}{\partial x} \cos nx + \frac{\partial \Omega_a}{\partial y} \cos ny + \frac{\partial \Omega_a}{\partial z} \cos nz$ sotto la forma seguente

$$\frac{\partial \Omega_a}{\partial n} = 2x \cos nx \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)^3 (b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} +$$

$$+ 2y \cos ny \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^3 (c^2+\lambda)}} + 2z \cos nz \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)^3}} -$$

$$- 2 \frac{x \cos nx}{a^3 b c}.$$

In modo analogo otterremo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_b}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \Omega_1}{\partial b^2} = 2x \cos nx \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial b^2} \frac{1}{\sqrt{(\)^3 (\) (\)}} d\lambda + \\ &+ 2y \cos ny \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial b^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\) (\)^3 (\)}} + 2z \cos nz \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial b^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\) (\) (\)^3}} - \frac{2y \cos ny}{ab^3c} \\ \frac{\partial \Omega_c}{\partial n} &= \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \Omega_1}{\partial c^2} = 2x \cos nx \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial c^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\)^3 (\) (\)}} + \\ &+ 2y \cos ny \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial c^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\) (\)^3 (\)}} + 2z \cos nz \int_{\infty}^0 \frac{\partial}{\partial c^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\) (\) (\)^3}} - \frac{2z \cos nz}{abc^3} \end{aligned}$$

Le formule qui poste mostrano chiaramente come ognuna delle tre funzioni $\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c$ possano essere scelte come funzione Ω_3 purchè sia ancora soddisfatta la ulteriore condizione espressa da (γ) .

Supponiamo che per $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_a$ la (γ) non sia soddisfatta (come effettivamente succede se $b=c$); allora esisterà una relazione identica della forma

$$\rho_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial n} + \rho_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial n} + \rho_3 \frac{\partial \Omega_a}{\partial n} = 0.$$

Per ciò la funzione armonica

$$\rho_1 \Omega_1 + \rho_2 \Omega_2 + \rho_3 \Omega_3$$

avrà una derivata normale nulla al contorno e quindi sarà una costante. Da ciò scaturisce l'assurdo; difatti se fosse una costante derivando, ad esempio rispetto ad x tenendo conto dei valori di $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_a$ si avrebbe

$$\begin{aligned} 2\rho_1 x \int_{\infty}^u \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)^3 (b^2+\lambda) (c^2+\lambda)}} + \rho_2 \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{(a^2+u) (b^2+u) (c^2+u)}} + \\ + 2\rho_3 \frac{x \frac{\partial u}{\partial a^2}}{\sqrt{(a^2+u)^3 (b^2+u) (c^2+u)}} + 2\rho_3 x \int_{\infty}^u \frac{\partial}{\partial a^2} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)^3 (b^2+\lambda) (c^2+\lambda)}} = 0 \end{aligned}$$

e ponendo $u=0$ si avrebbe una relazione della forma

$$Mx + N \frac{x}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} + P \frac{x^3}{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = 0$$

ossia

$$M \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) + P x^2 + N = 0$$

e questa non è compatibile con l'equazione dell'ellissoide che nel solo caso in cui $b=c$. Escluso perciò il caso della sfera siamo sicuri che almeno una delle $\Omega_a, \Omega_b, \Omega_c$ soddisfa a tutte le condizioni cui doveva soddisfare la Ω_3 .

Nel caso poi della sfera si possono prendere per funzioni elementari le

$$\varphi_1 = -R^5 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} - \frac{1}{3} \frac{R^5}{r}, \quad \varphi_2 = \dots, \quad \varphi_3 = -R^5 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} - \frac{1}{3} \frac{R^5}{r}$$

le cui derivate normali sono rispettivamente

$$x \cos nx, \quad y \cos ny, \quad z \cos nz.$$

Così il problema è in ogni caso risoluto.

§. 2.

Ellissoide pulsante. — “ *Ellissoide pulsante* è un ellissoide la cui equazione, rispetto ad una terna fissa, è all'istante t

$$(\alpha) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = h^2(t) ”.$$

Da ciò segue, derivando rispetto al tempo

$$\frac{x}{a^2} u + \frac{y}{b^2} v + \frac{z}{c^2} w = h \dot{h}$$

ossia

$$\frac{\frac{x}{a^2} u + \frac{y}{b^2} v + \frac{z}{c^2} w}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{x \frac{x}{a^2 h^2} + y \frac{y}{b^2 h^2} + z \frac{z}{c^2 h^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} h \dot{h}$$

per cui la componente normale dei punti posti alla superficie dell'ellissoide è:

$$(\beta) \quad \frac{\dot{h}(t)}{h(t)} (x \cos nx + y \cos ny + z \cos nz).$$

Enunciato del problema. — In questo paragrafo ci proponiamo di trattare il problema dell'ellissoide pulsante immerso in un liquido che si estende all'infinito ed ivi riposa; dando la espressione della funzione delle velocità, della pressione superficiale, e integrando infine la equazione delle traiettorie.

Funzione delle velocità. — La ricerca della sua espressione non è che un caso particolare di quella trattata nel §. 1; anzi poichè evidentemente la funzione elementare Ω_2 risolve la questione possiamo senz'altro dire che la funzione Φ delle velocità è fornita da

$$(1) \quad \Phi = -h^2 \dot{h} \cdot \frac{abc}{2} \cdot \int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 h^2 + \lambda)(b^2 h^2 + \lambda)(c^2 h^2 + \lambda)}}.$$

(Le coordinate ellittiche che compariscono d'ora in poi s'intendono definite da $\frac{x^2}{a^2 h^2 + \rho} + \frac{y^2}{b^2 h^2 + \rho} + \frac{z^2}{c^2 h^2 + \rho} = 1$; e perciò sono variabili col tempo).

Pressione specifica. — Ricordiamo innanzi tutto che prese u, v, w come coordinate ellittiche di uno spazio si hanno le seguenti formule che del resto valgono anche in un caso più generale. Posto

$$U^2 = \sum_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \sum_x \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2}, \dots, W^2 = \sum_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \sum_x \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial w} \right)^2}$$

Per avere $\frac{\partial u}{\partial t}$ basta pensare che ad ogni istante si verifica la

$$\frac{x^2}{a^2 h^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 h^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 h^2 + u} = 1$$

da cui derivando rispetto al tempo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2 \dot{h} \frac{a^2 \frac{x^2}{(a^2 h^2 + u)^2} + b^2 \frac{y^2}{(b^2 h^2 + u)^2} + c^2 \frac{z^2}{(c^2 h^2 + u)^2}}{\frac{x^2}{(a^2 h^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 h^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 h^2 + u)^2}}$$

e tenendo conto che in $u=0$ si ha $\frac{x^2}{h^2 a^2} + \frac{y^2}{h^2 b^2} + \frac{z^2}{h^2 c^2} = 1$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{u=0} = -2 \frac{\dot{h}}{h} \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2 h^2)^2} + \frac{y^2}{(b^2 h^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2 h^2)^2}}.$$

Ed ora con la semplice sostituzione in (3) si ha

$$(4) \quad p = V + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{h}}{h}\right)^2 \frac{1}{\frac{x^2}{(a^2 h^2)^2} + \frac{y^2}{(b^2 h^2)^2} + \frac{z^2}{(c^2 h^2)^2}} + A(t)$$

avendo posto

$$A(t) = -\frac{a b c}{2} \left\{ \frac{\partial h^2 \dot{h}}{\partial t} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(\quad)(\quad)(\quad)}} + h^2 \dot{h} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\quad)(\quad)(\quad)}} \right\} + C(t).$$

Venendo a ipotesi particolari riguardo al potenziale V col supporre che sull'ellissoide $u=0$ sia unicamente funzione del tempo deduciamo da (4) che la pressione specifica p non può avere ad un certo tempo t un valore costante altro che nei due casi in cui o $\dot{h}=0$, oppure nello stesso istante è costante sull'ellissoide la $\frac{1}{\frac{x^2}{(a^2 h^2)^2} + \dots + \frac{z^2}{(c^2 h^2)^2}}$. — Nel primo caso la superficie dell'ellissoide è fissa, oppure passa per un massimo o un minimo di dilatazione; nell'altro l'ellissoide si riduce ad una sfera.

Sempre nella ipotesi di V funzione solo del tempo cerchiamo le linee di egual pressione. Esse sono evidentemente date dalle intersezioni dell'ellissoide in questione con quello definito da

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \text{cost.}$$

Osserviamo poi che supposto, in particolare, il movimento superficiale dell'ellissoide pulsante definito da

$$x = h(t) x_0, \quad y = h(t) y_0, \quad z = h(t) z_0$$

(x_0, y_0, z_0 coordinate iniziali) la equazione delle linee di egual pressione in coordinate iniziali è

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \\ \frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4} = \text{cost.} \end{array} \right.$$

onde è da concludere che una quartica di egual pressione si mantiene nel movimento quartica di egual pressione.

Per rappresentare geometricamente, con un segmento, la grandezza di p possiamo procedere a questa maniera.

Posto

$$\xi = \frac{x}{a^2 h^2}, \quad \eta = \frac{y}{b^2 h^2}, \quad \zeta = \frac{z}{c^2 h^2}$$

nella ipotesi che il punto (x, y, z) sia sulla superficie ellissoidica $u = 0$ si avrà

$$(\delta) \quad a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 = \frac{1}{h^2}.$$

Da ciò risulta che l'estremo del raggio vettore (ξ, η, ζ) applicato nell'origine si muove sull'ellissoide (δ) ; osservando poi che (ξ, η, ζ) ha la direzione della normale all'ellissoide $u = 0$ nel punto considerato, e che inoltre $p = \frac{1}{2} \frac{\dot{h}^2}{h^2} \frac{1}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \text{cost.}$ si ha che: " spiccando " dalla origine un raggio vettore parallelo alla normale nel punto

“ dell’ellissoide che consideriamo, l’inversa del quadrato del segmento compreso tra la origine e l’ellissoide (δ) è proporzionale alla pressione specifica nel punto, a meno del fattore $\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{h}}{h}\right)^2$ e di una costante additiva. „

Per completare lo studio della pressione cerchiamo le componenti secondo i tre assi della risultante del sistema delle pressioni stesse ed il momento rispetto ad un punto dello spazio. — Si vede immediatamente che, associando ad ogni elemento di superficie dell’ellissoide il suo simmetrico rispetto alla origine, il sistema può considerarsi come composto di altrettante coppie elementari perciò: *La risultante è nulla ed il momento indipendente dal polo.*

Orbene calcoliamo questo momento rispetto al centro dell’ellissoide (origine degli assi) come polo; si ha, indicando con L, M, N le sue tre componenti,

$$L = P(t) \int \frac{y \cos nz}{\frac{x^2}{a^4 h^4} + \frac{y^2}{b^4 h^4} + \frac{z^2}{c^4 h^4}} d\sigma - P(t) \int \frac{z \cos ny}{\frac{x^2}{a^4 h^4} + \dots + \frac{z^2}{c^4 h^4}} d\sigma + R \int y \cos nz d\sigma - R \int z \cos ny d\sigma.$$

$$M = \dots \dots \dots$$

$$N = \dots \dots \dots$$

Per ragioni di pura simmetria ci si persuade facilmente che gli integrali del secondo membro sono tutti nulli e quindi:

Il momento del sistema delle pressioni specifiche è nullo.

Forza viva del liquido. — È noto come per avere la forza viva T del liquido dobbiamo per definizione considerare l’integrale $\frac{1}{2} \int \int \int \nabla(\varphi \varphi) . d\tau$ esteso allo spazio racchiuso tra la membrana mobile ed una sfera ideale grandissima. E facendo la trasfor-

mazione dell' integrale di volume in quello di superficie si può porre

$$2T = - \int \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - \int \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma,$$

essendo come è naturale φ la funzione armonica potenziale che ci fornisce la funzione delle velocità, ed estendendo il primo integrale alla membrana ed il secondo alla sfera. E siccome per definizione la funzione armonica potenziale φ tende a zero all' infinito insieme alle derivate nel modo noto, il secondo integrale è nullo e resta semplicemente

$$2T = - \int \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

(esteso alla membrana).

Nel caso nostro abbiamo

$$2T = h^2 \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(\alpha^2 h^2 + \lambda)(b^2 h^2 + \lambda)(c^2 h^2 + \lambda)}} \cdot \int (x \cos nx + y \cos ny + z \cos nz) d\sigma$$

ossia con semplici trasformazioni:

$$T = \alpha^2 b^2 c^2 h^3 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(\alpha^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}.$$

Integrazione delle equazioni per le traiettorie. — Una volta nota la funzione Φ delle velocità, il problema delle traiettorie si riduce alla integrazione del sistema differenziale

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Nel caso particolare nostro questo sistema assume evidentemente la forma

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = H \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{dy}{dt} = H \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{dz}{dt} = H \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right. ; \quad \left(H = h^2 \frac{abc}{2 \sqrt{(\alpha^2 h^2 + u)(b^2 h^2 + u)(c^2 h^2 + u)}} \right).$$

Questo sistema di equazioni differenziali del primo ordine si presenta in forma piuttosto complicata per il fatto che il tempo entra implicitamente nelle u e perchè le $\frac{\partial u}{\partial x} \dots$ non si esprimono razionalmente nè per le sole xyz nè per la u . Ma non ci riuscirà difficile il porlo in forma più opportuna.

Per ora intanto osserviamo che, moltiplicando ordinatamente le (1) per xyz , e tenendo conto che per le formule (2) del §. 2:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} = U^2 \frac{\partial x}{\partial u} = U^2 \frac{x}{2(\alpha^2 h^2 + u)} \right):$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 2 U^2,$$

si ha

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt} = 2 H U^2$$

ossia

$$\frac{dr^2}{dt} = 4 H U^2.$$

Ne concludiamo quindi che per tutti i punti che si trovano su di una quartica $U = \text{cost.}$, $u = \text{cost.}$ la $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ subisce uguali incrementi nel tempo infinitesimo dt . Quadrando poi e sommando le equazioni date oppure sostituendo a $\frac{dr}{dt}$ il suo valore $\cos \theta \frac{ds}{dt}$, essendo θ l'angolo compreso tra r e la normale all'ellissoide confocale al dato e passante per il punto preso a considerare, si ha che, siccome $r \cos \theta = \frac{1}{2} U$, le stesse quartiche sono linee di molecole aventi uguale velocità.

Venendo ora alla integrazione del sistema (1) moltiplichiamone le equazioni ordinatamente una volta per $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, quindi per $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, ed infine per $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$, e teniamo conto delle formule (2) §. 2 che definiscono la U^2 e delle relazioni che

si verificano tra le coordinate u, v, w di un sistema triplo ortogonale e le coordinate cartesiane x, y, z :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (u \ v \ w).$$

Avremo

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} U^2 H = \frac{du}{dt} - \frac{\partial u}{\partial t} \\ 0 = -\frac{\partial v}{\partial u} + \frac{dv}{dt} \\ 0 = \frac{dw}{dt} - \frac{\partial w}{\partial t} \end{array} \right.$$

dove il simbolo $\frac{\partial}{\partial t}$ indica la derivata parziale considerate le u, v, w come funzioni di x, y, z e di t .

Ci è necessario perciò calcolare queste derivate parziali.

Dalla equazione $\frac{x^2}{a^2 h^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 h^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 h^2 + \lambda} = 1$ che definisce le u, v, w si ottiene con semplice derivazione parziale

$$\frac{x^2}{(a^2 h^2 + \lambda)^2} \left(2 a^2 h \dot{h} + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) + \dots + \frac{z^2}{(c^2 h^2 + \lambda)^2} \left(2 h \dot{h} c^2 + \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) = 0$$

ossia

$$2 \frac{\dot{h}}{h} \left(\frac{x^2}{a^2 h^2 + \lambda} + \dots + \frac{z^2}{c^2 h^2 + \lambda} \right) + 4 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} - 2 \frac{\dot{h}}{h} \lambda \right) \left(\frac{x^2}{(2(a^2 h^2 + \lambda))^2} + \frac{y^2}{(2(b^2 h^2 + \lambda))^2} + \frac{z^2}{(2(c^2 h^2 + \lambda))^2} \right) = 0$$

e ponendo per λ successivamente u, v, w si hanno le formule

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} (4u - U^2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} (4v - V^2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} (4w - W^2)$$

che introdotte nel sistema (2) lo riducono alla forma

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} (4u - U^2) + HU^2 \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} (4v - V^2) \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} (4w - W^2). \end{aligned} \right.$$

Operiamo ora il cambiamento di variabili definito da

$$\begin{aligned} u &= h^2 \alpha \\ v &= h^2 \beta \\ w &= h^2 \gamma \end{aligned}$$

che porta (tenuto conto delle espressioni di U^2, V^2, W^2 . Vedasi KIRCHHOFF, *Mech. sieb. Vorl.*)

$$\begin{aligned} U^2 &= h^2 \frac{(a^2 + \alpha)(b^2 + \alpha)(c^2 + \alpha)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \\ &\dots \dots \dots \\ W^2 &= h^2 \frac{(a^2 + \gamma)(b^2 + \gamma)(c^2 + \gamma)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \\ \frac{du}{dt} &= 2h \dot{h} \alpha + h^2 \frac{d\alpha}{dt} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{dw}{dt} &= 2h \dot{h} \gamma + h^2 \frac{d\gamma}{dt} \\ H &= \frac{\dot{h}}{h} \frac{abc}{2\sqrt{(a^2 + \alpha)(b^2 + \alpha)(c^2 + \alpha)}} \end{aligned}$$

e questi valori sostituiti nel sistema (3) gli danno la forma

$$\begin{aligned} 2\dot{h}h\alpha + \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} \left(4h^2\alpha - h^2 \frac{(a^2 + \alpha)(b^2 + \alpha)(c^2 + \alpha)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \right) + \\ &+ \frac{\dot{h}}{h} \frac{abc}{2\sqrt{(a^2 + \alpha)(b^2 + \alpha)(c^2 + \alpha)}} h^2 \frac{(a^2 + \alpha)(b^2 + \alpha)(c^2 + \alpha)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} \\ &\dots \dots \dots \\ 2\dot{h}h\gamma + \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} \left(4h^2\gamma - h^2 \frac{(a^2 + \gamma)(b^2 + \gamma)(c^2 + \gamma)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} \right) \end{aligned}$$

ossia con riduzioni ovvie

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\dot{h}}{2h} \frac{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\dot{h}}{2h} \frac{(a^2+\gamma)(b^2+\gamma)(c^2+\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

Per avere un sistema ancora più facilmente integrabile operiamo il cambiamento di variabile definito da

$$\frac{1}{2} \log h = s$$

che porta

$$2 ds = \frac{\dot{h}}{h} dt$$

ed il sistema precedente si ridurrà a

$$(3^*) \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \frac{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{-(a^2+\gamma)(b^2+\gamma)(c^2+\gamma)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \end{aligned} \right.$$

che scriveremo

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \frac{-1}{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} \cdot \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{-1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \\ \frac{1}{(a^2+\beta)(b^2+\beta)(c^2+\beta)} \cdot \frac{d\beta}{ds} &= \frac{-1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} \\ \frac{1}{(a^2+\gamma)(b^2+\gamma)(c^2+\gamma)} \cdot \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{-1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \end{aligned} \right.$$

Osserviamo intanto che gli integrali di questo sistema si avranno sotto la forma

$$E_i (\alpha \beta \gamma s c_1 c_2 c_3) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

dove $c_1 c_2 c_3$ dipendono dai valori iniziali di $\alpha \beta \gamma$ ossia dalla molecola del liquido e dalla grandezza iniziale dell'ellissoide. D'altronde questi integrali scritti sotto la forma

$$E_i \left(h^2 u, h^2 v, h^2 w, \frac{1}{2} \log h, c_1 c_2 c_3 \right) = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

mostrano chiaramente come *lo spostamento di ogni punto del liquido dipende unicamente dai valori iniziale e finale di h , ossia dalla grandezza iniziale e finale dell'ellissoide e niente affatto dal modo più o meno rapido con il quale l'ellissoide si è deformato.*

Per venire ora alla integrazione del sistema (4) cominciamo con lo stabilire le tre seguenti identità algebriche che sussistono tra le tre variabili α, β, γ e che in molti modi si possono verificare

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{1}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)} &= 0 \\ \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)} &= 0 \\ \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^2}{(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)} &= 1. \end{aligned}$$

Tenuto conto di queste, sommando una prima volta a membro le equazioni (4), una seconda volta sommando pure a membro a membro le stesse equazioni dopo averle moltiplicate ordinatamente per α, β, γ , ed infine moltiplicando per $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$, si ottiene il sistema differenziale

$$\begin{aligned} \frac{-1}{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} \frac{d\alpha}{ds} + \\ + \frac{1}{(\alpha^2+\beta)(b^2+\beta)(c^2+\beta)} \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{(\alpha^2+\gamma)(b^2+\gamma)(c^2+\gamma)} \frac{d\gamma}{ds} &= 0 \\ \frac{-\alpha}{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} \frac{d\alpha}{ds} + \\ + \frac{\beta}{(\alpha^2+\beta)(b^2+\beta)(c^2+\beta)} \frac{d\beta}{ds} + \frac{1}{(\alpha^2+\gamma)(b^2+\gamma)(c^2+\gamma)} \frac{d\gamma}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{-\alpha^2}{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} \frac{d\alpha}{ds} +$$

$$+ \frac{\beta^2}{(a^2+\beta)(b^2+\beta)(c^2+\beta)} \frac{d\beta}{ds} + \frac{\gamma^2}{(a^2+\gamma)(b^2+\gamma)(c^2+\gamma)} \frac{d\gamma}{ds} = -1$$

e questo sistema è immediatamente ricondotto alle quadrature con il sistema equivalente:

$$-\int \frac{d\alpha}{abc \sqrt{(\) (\) (\)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} + \int \frac{d\beta}{(a^2+\beta)(b^2+\beta)(c^2+\beta)} +$$

$$+ \int \frac{d\gamma}{(a^2+\gamma)(b^2+\gamma)(c^2+\gamma)} = c_1$$

$$-\int \frac{\alpha d\alpha}{abc \sqrt{(\) (\) (\)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} + \int \frac{\beta d\beta}{(a^2+\beta)(b^2+\beta)(c^2+\beta)} +$$

$$+ \int \frac{\gamma d\gamma}{(a^2+\gamma)(b^2+\gamma)(c^2+\gamma)} = c_2$$

$$-\int \frac{\alpha^2 d\alpha}{abc \sqrt{(\) (\) (\)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} + \int \frac{\beta^2 d\beta}{(a^2+\beta)(b^2+\beta)(c^2+\beta)} +$$

$$+ \int \frac{\gamma d\gamma}{(a^2+\gamma)(b^2+\gamma)(c^2+\gamma)} = -\frac{1}{2} \log h + c_3.$$

Eseguendo le due ultime quadrature dei primi membri delle equazioni del sistema precedente con le note regole delle funzioni razionali si ha che, posto

$$\Delta = a^4 (b^2 - c^2) + b^4 (c^2 - a^2) + c^4 (a^2 - b^2)$$

$$A_1 = \frac{b^2 - c^2}{\Delta}, \quad A_2 = \frac{c^2 - a^2}{\Delta}, \quad A_3 = \frac{a^2 - b^2}{\Delta}$$

$$B_1 = \frac{a^2 (b^2 - c^2)}{\Delta}, \quad B_2 = \frac{b^2 (c^2 - a^2)}{\Delta}, \quad B_3 = \frac{c^2 (a^2 - b^2)}{\Delta}$$

$$C_1 = \frac{a^4 (b^2 - c^2)}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{b^4 (c^2 - a^2)}{\Delta}, \quad C_3 = \frac{c^4 (a^2 - b^2)}{\Delta}$$

il sistema stesso diventa

$$A_1 \lg (a^{2+\beta}) (a^{2+\gamma}) + A_2 \lg (b^{2+\beta}) (b^{2+\gamma}) + A_3 \lg (c^{2+\beta}) (c^{2+\gamma}) = \\ = c_1 + \int \frac{d\alpha}{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)}$$

$$B_1 \lg (a^{2+\beta}) (a^{2+\gamma}) + B_2 \lg (b^{2+\beta}) (b^{2+\gamma}) + B_3 \lg (c^{2+\beta}) (c^{2+\gamma}) = \\ = c_2 + \int \frac{\alpha d\alpha}{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)}$$

$$C_1 \lg (a^{2+\beta}) (a^{2+\gamma}) + C_2 \lg (b^{2+\beta}) (b^{2+\gamma}) + C_3 \lg (c^{2+\beta}) (c^{2+\gamma}) = \\ = c_3 + \int \frac{\alpha^2 d\alpha}{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - \frac{1}{2} \lg h$$

e passando dai logaritmi ai numeri

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \{a^{2+\beta} (a^{2+\gamma})\}^{A_1} \{b^{2+\beta} (b^{2+\gamma})\}^{A_2} \{c^{2+\beta} (c^{2+\gamma})\}^{A_3} = \\ = k_1 e^{\int \frac{d\alpha}{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)}} \\ \{a^{2+\beta} (a^{2+\gamma})\}^{B_1} \{b^{2+\beta} (b^{2+\gamma})\}^{B_2} \{c^{2+\beta} (c^{2+\gamma})\}^{B_3} = \\ = k_2 e^{\int \frac{\alpha d\alpha}{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)}} \\ h^{\frac{1}{2}} \cdot \{a^{2+\beta} (a^{2+\gamma})\}^{C_1} \{b^{2+\beta} (b^{2+\gamma})\}^{C_2} \{c^{2+\beta} (c^{2+\gamma})\}^{C_3} = \\ = k_3 e^{\int \frac{\alpha^2 d\alpha}{abc \sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} - (a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)}} \end{array} \right.$$

È interessante vedere come ad uno almeno dei precedenti integrali se ne possa sostituire un altro libero dal segno integrale. Ed infatti posto

$$\sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} = z$$

si ha

$$\{3\alpha^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)\alpha + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\} d\alpha = 2\sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)} \cdot dz$$

e quindi moltiplicando ordinatamente ambo i membri delle equazioni del sistema (5) per

$$\frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{k_1}, \quad 2 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{k_2}, \quad \frac{3}{k_3}$$

e sommando si ha

$$\begin{aligned} e^2 \int \frac{dz}{abc-z} &= (abc - \sqrt{a^2+\alpha} \sqrt{(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)})^{-2} = \\ &= \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{k_1} \{(a^2+\beta)(a^2+\gamma)\}^{A_1} \{(b^2+\beta)(b^2+\gamma)\}^{A_2} \{(c^2+\beta)(c^2+\gamma)\}^{A_3} + \\ &+ 2 \frac{a^2 + b^2 + c^2}{k_2} \{(a^2+\beta)(a^2+\gamma)\}^{B_1} \{(b^2+\beta)(b^2+\gamma)\}^{B_2} \{(c^2+\beta)(c^2+\gamma)\}^{B_3} + \\ &+ \frac{3}{k_3} h^{\frac{1}{2}} \{(a^2+\beta)(a^2+\gamma)\}^{C_1} \{(b^2+\beta)(b^2+\gamma)\}^{C_2} \{(c^2+\beta)(c^2+\gamma)\}^{C_3}. \end{aligned}$$

Singularità del sistema degli integrali. — Le singularità possono presentarsi o perchè qualcuno degli integrali diviene infinito, o perchè il determinante funzionale rispetto ad α, β, γ si annulla o diventa infinito. Ricordando che per la definizione di coordinate ellittiche

$$\infty \geq \alpha \geq -c^2 \geq \beta \geq -b^2 \geq \gamma \geq -a^2$$

si ha che il primo caso si può verificare se

$$\alpha = -c^2, \quad \beta = \begin{cases} -c^2 \\ -b^2 \end{cases}, \quad \gamma = \begin{cases} -b^2 \\ -a^2 \end{cases}.$$

Il determinante funzionale poi, secondo la forma data a pag. 28 al sistema, è dato dal determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix}$$

moltiplicato per

1

$$\sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)}(abc\sqrt{(a^2+\alpha)(b^2+\alpha)(c^2+\alpha)})(a^2+\beta)(b^2+\beta)(c^2+\beta)(a^2+\gamma)(b^2+\gamma)(c^2+\gamma)$$

Esso ha singolarità se

$$(I) \quad \alpha = -c^2, \quad \beta = \begin{cases} -c^2 \\ -b^2 \end{cases}, \quad \gamma = \begin{cases} -b^2 \\ a-c^2 \end{cases}$$

e zeri se

$$(II) \quad \alpha = \beta = -c^2, \quad \beta = \gamma = b^2.$$

Delle relazioni (I) la prima è assurda perchè si verifica solo per punti interni all'ellissoide. Le altre due possono verificarsi per tutti i punti dello spazio se l'ellissoide è di rotazione, o, nel caso generale, per i punti dei piani coordinati.

Trattiamo il primo caso supponendo $a = b$:

Il sistema (3*) diventa allora

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{b^2 c \sqrt{c^2 + \alpha} - (c^2 + \alpha)(b^2 + \alpha)}{\alpha - \beta}$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{-(b^2 + \beta)(c^2 + \beta)}{\beta - \alpha}$$

poichè la terza riesce identicamente soddisfatta da $\gamma = -b^2$.

Da questo sistema tenendo conto delle due identità

$$\frac{1}{\alpha - \beta} - \frac{1}{\alpha - \beta} = 0, \quad \frac{\alpha}{\alpha - \beta} - \frac{\beta}{\alpha - \beta} = 1$$

si ricava il sistema integrale

$$\int \frac{d\alpha}{b^2 c \sqrt{c^2 + \alpha} - (c^2 + \alpha)(b^2 + \alpha)} - \int \frac{d\beta}{(b^2 + \beta)(c^2 + \beta)} = c_1$$

$$\int \frac{\alpha d\alpha}{b^2 c \sqrt{c^2 + \alpha} - (c^2 + \alpha)(b^2 + \alpha)} - \int \frac{\beta d\beta}{(b^2 + \beta)(c^2 + \beta)} = c_2 + \frac{1}{2} \lg h(t)$$

che con processi notissimi può liberarsi dal segno integrale.

Venendo al caso dei piani coordinati suppongasi di studiare il movimento nel piano xy . Si consideri perciò il sistema ellittico

$$\frac{x^2}{a^2 \hbar^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 \hbar^2 + \lambda} = 1$$

e si indichino con u e w le coordinate definite da esso, i cui valori coincideranno nei punti del liquido (esterni all'ellissoide) con le u e w dello spazio a tre dimensioni.

Il sistema fondamentale (1) diventa allora col nuovo significato delle u e w

$$\frac{dx}{dt} = H \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{dy}{dt} = H \frac{\partial u}{\partial y}$$

e ripetendo ragionamenti analoghi a quelli tenuti nel caso generale si arriva ad un sistema

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{\hbar}}{\hbar} (4u - U^2) + H U^2 = \frac{du}{dt}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\dot{\hbar}}{\hbar} (4w - W^2) = \frac{dw}{dt}$$

e da allora in poi la integrazione procede come nel caso dell'ellissoide di rotazione.

In modo analogo si opererebbe per il piano (yz).

Nel mentre infine nel piano (zx) si hanno le seguenti particolarità. Fino a che il punto si trova nella regione in cui $w = -b^2$ il sistema integrale si ottiene integrando

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\hbar}}{\hbar} (4u - U^2) + H U^2$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\hbar}}{\hbar} (4v - V^2)$$

quando il punto è entrato nella regione $v = -b^2$ allora il sistema

integrale si ottiene integrando •

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} (4u - U^2) + H U^2$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\dot{h}}{h} (4w - W^2)$$

essendo in questi due ultimi sistemi le u, v, w simboli di coordinate ellittiche tridimensionali. Dimodochè nel sistema generale degli integrali il ramo iperbolico $w = -b^2, v = -c^2$ funge quasi da linea di diramazione o di congiungimento. — Così possiamo considerare come esaurita la questione della integrazione delle equazioni per le traiettorie che ci eravamo proposta.

PARTE SECONDA

§. 1.

In queste ricerche preliminari abbiamo per iscopo lo studio di alcune proprietà generali delle funzioni armoniche potenziali, delle quali abbiamo bisogno per stabilire con rigore i risultati di questa seconda parte. Scopo principale è la ricerca di un limite superiore dei valori della funzione armonica potenziale, dipendentemente dai valori della derivata normale al contorno.

Allo scopo di togliere qualsiasi ambiguità ricordiamo che con l'espressione *funzione armonica potenziale nel campo infinito C* noi intendiamo una funzione:

1. finita continua insieme alle sue derivate prime in tutto il campo C compreso il contorno
2. avente derivate seconde in ogni punto interno a C.
3. soddisfacenti alla equazione

$$\Delta_2 = 0.$$

4. il cui valore e quello delle derivate prime, seconde . . . , converge a zero all'infinito come $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^2}$ ecc.

A) Ammessa l'esistenza di una tale funzione noi dimostriamo che: Se sul contorno del campo posto a distanza finita la sua derivata normale è diversa da zero e di segno invariabile, la funzione stessa ha un segno invariabile in tutto il campo.

Infatti se V_s sono i valori della funzione al contorno e se V_n sono i valori della funzione stessa sulla normale al contorno nel

punto considerato avremo per la definizione di derivata

$$\lim \frac{V_{\sigma} - V_n}{\delta n} = \frac{\partial V}{\partial n}$$

e poichè $\delta n > 0$, e per ipotesi $\frac{\partial V}{\partial n} \neq 0$ e di segno invariabile, così la differenza $V_{\sigma} - V_n$ (con δn sufficientemente piccolo) deve finire per avere un segno invariabile.

Ora se la funzione in c cambiasse segno avremmo un massimo *positivo* ed un minimo *negativo* diversi ambedue dallo zero, e che perciò dovrebbero trovarsi sul contorno posto a distanza finita. Ma allora $V_{\sigma} - V_n$ calcolata nel punto di massimo e di minimo finirebbe per avere segni opposti e quindi anche la $\frac{\partial V}{\partial n}$ assumerebbe segni opposti in due punti del contorno; e ciò sarebbe contrario alle ipotesi. — È evidente poi che, siccome

$$\int V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = - \int \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right) dx$$

è certamente negativo, la V nelle ipotesi per cui si verifica la proprietà dimostrata superiormente, ha segno contrario a $\frac{\partial V}{\partial n}$.

B) Secondo la nota formola di Green si ha che se V è una funzione armonica potenziale

$$(1) \quad V = \frac{1}{4\pi} \int V \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$$

essendo le integrazioni superficiali estese al contorno finito del campo. Supponiamo che il contorno sia formato dalle superficie di un sistema di corpi $c_1 c_2 \dots c_r$, e che la derivata normale sia come precedentemente di segno invariabile (per fissare le idee supponiamo) negativo.

La funzione V avrà allora segno costantemente positivo e quindi un massimo M positivo sul contorno di uno dei corpi, ad es. c_1 .

La (1) si potrà allora scrivere

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{c_1} V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_{c_2+c_3+\dots+c_r} V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$$

dalla quale separando nei due primi integrali gli elementi per i

quali $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} > 0$ da quelli in cui $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} < 0$ e tenendo conto della in-

variabilità di segno della V e che $\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 0$ si ha

$$|V| \leq \frac{1}{8\pi} \int_{c_1} M \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| d\sigma + \frac{1}{8\pi} \int_{c_2+c_3+\dots+c_r} M \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| d\sigma + \frac{1}{4\pi} \left| \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right|;$$

facendo poi convergere il punto in cui la V è calcolata al punto di C_1 in cui essa acquista il valore massimo M si avrà

$$|M| \leq \frac{1}{8\pi} M \lim \int_{c_1} \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| d\sigma + \frac{M}{8\pi} \lim \int_{c_2+c_3+\dots+c_r} \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| d\sigma + \frac{1}{4\pi} \left| \lim \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right|$$

da cui

$$(2) \quad M \left(1 - \frac{1}{8\pi} \lim \int_{c_1} \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| d\sigma - \frac{1}{8\pi} \lim \int_{c_2+c_3+\dots+c_r} \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| d\sigma \right) \leq \left| \lim \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right|.$$

Supponiamo ora che la configurazione del sistema muti in maniera che la distanza minima R tra due corpi divenga grandissima, e contemporaneamente la derivata normale della V dipenda oltre che dai punti del contorno anche dalla configurazione del sistema così che essa al contorno abbia un segno invariato e sia diversa da zero, ed il suo massimo sia una certa funzione $\epsilon(\alpha, \beta, \gamma \dots)$ dei

parametri $\alpha, \beta, \gamma \dots$ del sistema. Si domanda come varierà il limite superiore di valori della V . — Evidentemente nella (2) il secondo integrale del primo membro col crescere di R finisce per divenire e restare piccolo quanto si vuole e se ammettiamo che

$$\frac{1}{8\pi} \lim \int_{c_1} \left| \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \right| d\sigma < 1 \text{ (la quale ipotesi si verifica certamente se } c_1$$

è convesso) il fattore di M finirà per divenire e restare discosto dallo zero più di una quantità finita nel mentre il secondo membro finirà per divenire inferiore a

$$Q \cdot \varepsilon (\alpha \beta \gamma \dots)$$

essendo Q finito ed inferiore ad un termine finito. Perciò possiamo dire che

$$M \leq Q' \varepsilon (\alpha \beta \gamma \dots)$$

con Q' finito ed inferiore ad un termine finito; ossia se il massimo ε della derivata normale tende a zero anche il massimo M della funzione tende a zero in modo che

$$\frac{M}{\varepsilon}$$

resta finito ed inferiore ad un termine finito.

Tutto questo è dimostrato nella ipotesi che $\frac{\partial V}{\partial n}$ sia diversa da zero e di segno costante. Ma anche se tale ipotesi non si verifica la formula (2) e quindi anche le conseguenze finali seguitano a sussistere.

Infatti se, in conseguenza del supposto cambiamento di segno della $\frac{\partial V}{\partial n}$, la V cambia di segno consideriamola come una somma di due funzioni armoniche V_1, V_2 tali che

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial n} &= \frac{\partial V}{\partial n} + k^2 & \text{dove } \frac{\partial V}{\partial n} > 0 & & \frac{\partial V_1}{\partial n} = k^2 & & \text{dove } \frac{\partial V}{\partial n} < 0 \\ \frac{\partial V_2}{\partial n} &= -k^2 & \text{dove } \frac{\partial V}{\partial n} > 0 & & \frac{\partial V_2}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial n} - k^2 & & \text{dove } \frac{\partial V}{\partial n} < 0 \end{aligned}$$

con k^2 piccolo ad arbitrio.

Evidentemente V_1 e V_2 hanno in primo luogo segni invariabili nel campo d'esistenza, ed in secondo luogo l'una ha segno contrario a quello dell'altra (Ved. (A)). Per la prima particolarità a ciascuna d'esse è applicabile la (2); per la seconda particolarità il massimo valore assoluto di $V_1 + V_2 = V$ è inferiore al maggiore dei massimi delle V_1 e V_2 considerate separatamente. Perciò, tenuto conto che k^2 è piccolo a piacere, riesce evidente che la (2) è *a fortiori* applicabile; e possiamo generalmente concludere:

Se la configurazione del sistema dei corpi $c_1 c_2 \dots c_r$ formanti il contorno muta in modo che la minima distanza R tra due corpi divenga grande quanto si vuole ed al tempo stesso la derivata normale $\frac{\partial V}{\partial n}$ sia una variabile dipendente dalla configurazione del contorno in modo tale che

$$R^m \frac{\partial V}{\partial n}$$

si serbi finito ed inferiore ad una quantità finita anche

$$R^m V$$

si serberà finito ed inferiore ad una quantità finita ¹⁾.

C) Il problema ci si presenterà nel seguito in questa forma:

“ Dato l'atto di movimento di un sistema di corpi immersi in

¹⁾ Della formula (2) così generalizzata possiamo fare anche la seguente applicazione:

È noto come avendo due corpi $\tau_1 \tau_2$ e dovendo costruire una funzione armonica potenziale W esistente nel campo ad essi esterno e verificante le relazioni limiti

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{\tau_1} = f_1 \quad \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_{\tau_2} = f_2$$

si possa ricorrere ad un processo d'approssimazione successiva nel modo seguente.

Sia U_r una funzione armonica potenziale esistente all'esterno di τ_1 e V_r una funzione armonica potenziale esistente all'esterno di τ_2 ; e le condizioni

un fluido incompressibile che riposa all'infinito determinare la forza viva del liquido. „

Esso, come è noto, equivale alla ricerca di una funzione armonica potenziale φ ed al calcolo di un integrale di superficie

$$\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma.$$

Ora noi in luogo della φ (la cui costruzione presenta in generale enormi difficoltà) conosceremo una funzione armonica Ψ il cui campo d'esistenza coincide con quello di φ e la cui derivata normale al contorno differisce da quella di φ per una funzione il cui valore assoluto sia $< \varepsilon$; e questo ε col tendere della minima distanza R

al contorno siano legate agli indici r in modo che

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_{\tau_1} = f_1 \quad \left(\frac{\partial V_1}{\partial n}\right)_{\tau_2} = \left(\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)_{\tau_2} \quad \left(\frac{\partial U_r}{\partial n}\right)_{\tau_1} = \left(\frac{\partial V_{r-1}}{\partial n}\right)_{\tau_1} \quad \left(\frac{\partial U_{r-1}}{\partial n}\right)_{\tau_2} = \left(\frac{\partial V_r}{\partial n}\right)_{\tau_2}.$$

Allora se la serie

$$\Sigma = U_1 - V_1 + U_2 - V_2 + \dots + U_r - V_r + \dots$$

è convergente in egual grado per tutti i punti del campo di W essa rappresenterà, in esso, la funzione W. — Orbene la (2) ci fornisce un caso molto ampio di convergenza della serie Σ .

Indicando con A un limite superiore del $\left| \lim \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} d\sigma \right|$ che compare nella formula (2), posto ancora che si tratti di un unico corpo convesso c_1 si ha

$$(2^*) \quad M \leq 2 A \varepsilon.$$

Posto questo cerchiamo un limite superiore per la derivata lungo una direzione $(\alpha \beta \gamma) \equiv \rho$ in un punto xyz , di una funzione armonica potenziale nella ipotesi che nessun punto del contorno disti da xyz meno di R e che la derivata normale al contorno si serbi in valore assoluto inferiore ad ε .

La formula di Green mi dà

$$V = \frac{-1}{4\pi} \int V ((\alpha-x) \cos nx + (b-y) \cos ny + (c-z) \cos nz) \frac{d\sigma}{r^3} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma$$

all'infinito sarà un evanescente tale che

$$R^n \varepsilon$$

si conserverà finito. Orbene potremo noi asserire che anche l'integrale

$$\int \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

differisca dall'integrale

$$\int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma$$

che dà la forza viva del liquido per un evanescente dello stesso ordine?

Ciò risulta come è evidente dalle conclusioni alle quali siamo arrivati in (B); e perciò quando non ci interessi tener conto degli

e quindi

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi} \int V \cos(n\rho) \frac{d\sigma}{r^3} + \frac{3}{4\pi} \int V \cos(rn) \cos(r\rho) \frac{d\sigma}{r^3} + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial V}{\partial n} \cos(r\rho) \frac{d\sigma}{r^2}$$

da cui applicando la (2*) e tenendo conto che il coseno ha un valore assoluto minore di 1 si ha, ponendo S uguale alla superficie del corpo formante il contorno,

$$(3^*) \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} \leq \frac{2}{4\pi R^3} S A \varepsilon + \frac{6}{4\pi R^3} S A \varepsilon + \frac{1}{4\pi R^2} S \varepsilon \leq \frac{\varepsilon S}{4\pi R^2} \left(\frac{8A}{R} + 1 \right).$$

Ora applicando la (2*) e (3*) ottengo le seguenti disuguaglianze

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial U_1}{\partial n} \right|_{\tau_2} &\leq \varepsilon \xi_1 & \left| \frac{\partial V_1}{\partial n} \right|_{\tau_1} &\leq \varepsilon \xi_1 \xi_2 & \left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{S_1}{4\pi R^2} \left(\frac{8A_1}{R} + 1 \right) \\ \xi_2 &= \frac{S_2}{4\pi R^2} \left(\frac{8A_2}{R} + 1 \right) \end{aligned} \right. \\ \left| \frac{\partial U_r}{\partial n} \right|_{\tau_2} &\leq \varepsilon \xi_1^r \xi_2^{r-1} & \left| \frac{\partial V_r}{\partial n} \right|_{\tau_1} &\leq \varepsilon \xi_1^r \xi_2^r \end{aligned}$$

da cui

$$U_r \leq 2 A_1 \varepsilon \xi_1^{r-1} \xi_2^{r-1} \quad V_r \leq 2 A_2 \varepsilon \xi_1^r \xi_2^{r-1}$$

ossia la serie Σ è paragonabile con la serie

$$1 + \xi_1 + \xi_1 \xi_2 + \xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_1^2 \xi_2^2 + \dots$$

che converge certamente se $\xi_1 \xi_2 \leq 1$.

evanescenti di quell'ordine potremo per calcolare la forza viva far uso della funzione armonica potenziale Ψ approssimata.

§. 2.

Nel corso di questa seconda parte dovremo assai spesso ricorrere alle proprietà semplicissime che enunciamo riunite in questo paragrafo.

Considereremo una superficie σ chiusa e semplicemente connessa le coordinate dei cui punti indicheremo con (a, b, c) in confronto di quelle x, y, z di un punto corrente dello spazio

Proprietà I.^a — Se σ è simmetrica rispetto alla origine, e la funzione armonica potenziale φ esistente all'esterno di σ è tale che

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{abc} = \pm \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{-a,-b,-c}$$

allora

$$\varphi(x, y, z) = \pm \varphi(-x, -y, -z).$$

Infatti le due funzioni $\varphi(x, y, z)$ e $\pm\varphi(-x, -y, -z)$ hanno la medesima derivata normale.

Proprietà II.^a — Se σ è simmetrica ortogonalmente rispetto ad un piano coordinato, ad esempio il piano (xy) , e la funzione armonica potenziale φ esistente all'esterno di σ è tale che

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{abc} = \pm \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_{a,b,-c}$$

allora

$$\varphi(x, y, z) = \pm \varphi(x, y, -z).$$

Proprietà III.^a — Se σ è simmetrica rispetto ad un punto (o rispetto ad un piano) e la $f(a, b, c)$ è una tale funzione che nel passaggio da un punto al suo simmetrico rispetto al punto centro di simmetria (o rispetto al piano di simmetria) il suo valore muti soltanto di segno allora

$$\int_{\sigma} f d\sigma = 0.$$

Si può assumere come funzione f il prodotto della funzione armonica φ della specie I.^a (della specie II.^a) moltiplicata per una Ψ che goda della proprietà che: $\Psi (a, b, c) = \mp \Psi (a, -b, -c)$; (della proprietà che: $\Psi (a, b, c) = \mp \Psi (a, b, -c)$).

Proprietà IV.^a — Se $r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$ con $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ estremamente grande in confronto di $a^2 + b^2 + c^2$ si hanno gli sviluppi approssimati (a meno di evanescenti come $\frac{1}{R^4}$)

$$r = \frac{1}{R} + \frac{1}{R^3} (ca + yb + zc) + \frac{3}{2R^5} (x^2 a^2 + y^2 b^2 + z^2 c^2 + 2xyab + 2yzbc + 2zxca) +$$

$$- \frac{1}{2R^3} (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{x}{R^3} + \left(\frac{a}{R^3} - \frac{3x}{R^5} (xa + yb + zc) \right), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{z}{R^3} + \left(\frac{c}{R^3} - \frac{3z}{R^5} (xa + yb + zc) \right); \end{array} \right.$$

e questi sostituiti nella formula di Green ci danno con la stessa approssimazione lo sviluppo di una funzione armonica φ esistente all'esterno di σ :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \varphi \left[\left(-\frac{x}{R^3} + \left(\frac{a}{R^3} - \frac{3x}{R^5} (xa + yb + zc) \right) \right) \cos nx + \dots \dots \right. \\ \left. + \left(-\frac{z}{R^3} + \left(\frac{c}{R^3} - \frac{3z}{R^5} (xa + yb + zc) \right) \right) \cos nz \right] . d\tau \\ - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{R^3} (xa + yb + zc) + \right. \\ \left. + \frac{3}{2R^5} (x^2 a^2 + y^2 b^2 + z^2 c^2 + 2xyab + 2yzbc + 2zxca) - \frac{1}{2R^3} (a^2 + b^2 + c^2) \right] . d\tau. \end{array} \right.$$

Se il contorno σ ammette come centro di simmetria l'origine delle coordinate e la $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ non muta nè segno nè valore assoluto nel pas-

saggio dal punto (a, b, c) al punto simmetrico $(-a, -b, -c)$ la (1) diventa, in causa della proprietà III^a:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4 \pi R^3} \int_{\sigma} \varphi \left[\left(a - \frac{3x}{R^2} (xa + yb + zc) \right) \cos nx + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(c - \frac{3z}{R^2} (xa + yb + zc) \right) \cos nz \right] \cdot d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{4 \pi R^3} \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \left[\frac{3}{2 R^2} (x^2 a^2 + y^2 b^2 + z^2 c^2 + 2xyab + 2yzbc + 2zxca) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) \right] \cdot d\sigma - \frac{1}{4 \pi R} \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Se il contorno σ ammette come centro di simmetria l'origine delle coordinate e la $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ muta segno senza mutare grandezza nel passaggio da (a, b, c) al punto simmetrico $(-a, -b, -c)$ la (1) diviene:

$$(3) \quad \varphi = \frac{-1}{4 \pi R^3} \int_{\sigma} \varphi (x \cos nx + y \cos ny + z \cos nz) \cdot d\sigma + \\ - \frac{1}{4 \pi R^3} \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} (xa + yb + zc) \cdot d\sigma.$$

Proprietà V.^a — Se una funzione armonica potenziale ha una derivata normale soddisfacente alla condizione

$$\int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0$$

allora non solo $R\varphi$ ma anche $R^2\varphi$ si conserva finito al convergere di R all'infinito.

Proprietà VI.^a — Se una funzione armonica potenziale φ ha una derivata normale soddisfacente a

$$\int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0$$

allora non solo $R^2\varphi$ si conserva finita, ma si conservano finite ancora

$$R^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \dots R^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \dots \dots \dots$$

Le proprietà V.^a e VI.^a sono diretta conseguenza della formula (1) della osservazione IV.^a

Proprietà VII.^a — In un campo finito posto a distanza grandissima dalla origine una funzione armonica potenziale soddisfacente alle condizioni di validità delle proprietà V.^a e VI.^a si può considerare come costante, a meno di evanescenti come $\frac{1}{R^3}$.

Questa è una conseguenza dello sviluppo di Taylor e delle proprietà V.^a e VI.^a

§. 3.

Movimento pulsatorio intorno a un punto. — Diciamo che un corpo il quale possiede un centro di simmetria, si trova in movimento pulsatorio attorno ad esso se ad ogni istante è conservata la supposta simmetria.

Se nell'intorno di $(a \ b \ c)$ la equazione del contorno del corpo, relativa ad una terna cartesiana con l'origine nel centro di simmetria è

$$(\alpha) \quad F(x \ y \ z \ t) = 0$$

nell'intorno del punto simmetrico $(-a \ -b \ -c)$ sarà

$$(\alpha^*) \quad F(-x \ -y \ -z \ t) = 0.$$

Atto di movimento pulsatorio. — Diciamo atto di movimento pulsatorio rispetto a un punto, quell'atto di movimento più generale conciliabile con un movimento pulsatorio attorno ad esso.

La componente secondo la normale al contorno di un punto $(a\ b\ c)$ è data secondo (α) da

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial F(xyz)}{dt} \\ & \frac{\quad}{\sqrt{\left(\frac{\partial F(xyz)}{\partial x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F(xyz)}{\partial z}\right)^2}} = \\ & = \frac{\frac{\partial F(xyz)}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F(xyz)}{\partial x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F(xyz)}{\partial z}\right)^2}} \frac{dx}{dt} + \dots + \\ & + \frac{\frac{\partial F(xyz)}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F(xyz)}{\partial x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F(xyz)}{\partial z}\right)^2}} \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

e in $(-a\ -b\ -c)$ dalla espressione analoga

$$\frac{-\frac{\partial F(-x-y-z)}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F(-x-y-z)}{\partial x}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F(-x-y-z)}{\partial z}\right)^2}}.$$

Da ciò possiamo concludere che la componente normale non muta grandezza nè segno nel passaggio da un punto $(a\ b\ c)$ al simmetrico $(-a\ -b\ -c)$ e sarà quindi valida la proprietà II.^a §. 2.

Enunciato del problema. — In questo paragrafo ci proponiamo il seguente problema: In un liquido che si estende all'infinito ed ivi riposa e sulle cui molecole si esercita forza nulla, siano immersi due corpi pulsanti intorno a centri fissi. Supposta la distanza R dei centri così grande che riescano trascurabili rispetto agli altri elementi gli evanescenti come $\frac{1}{R^4}$, quale sarà la risultante del sistema delle pressioni esercitate dal liquido sui corpi pulsanti?

Cenno sul metodo di risoluzione. — Siano τ_1 e τ_2 i due corpi ed i loro centri abbiano, rispetto ad una terna fissa ($\xi \eta \zeta$) rispettivamente, le coordinate $\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, $\xi_2 \eta_2 \zeta_2$. Siano poi δ, ϵ, \dots gli altri parametri indipendenti capaci di determinare col concorso di $\xi_1 \eta_1 \zeta_1 \xi_2 \eta_2 \zeta_2$ la posizione nello spazio di ogni singolo punto del contorno di τ_1 e τ_2 . Se T è la forza viva che compete alla massa liquida all'istante t per un movimento

$$\xi_1 = \xi_1(t), \dots, \xi_2 = \xi_2(t), \dots, \delta = \delta(t) \dots$$

dei corpi, in forza delle formole 20 §. 13 delle *Hydrodynamische Untersuchungen* di C. Neumann sussistono le relazioni

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial \xi_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_1} \right) = L_{\xi_1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial T}{\partial \zeta_1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}_1} \right) = L_{\zeta_1} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

essendo le L che compariscono nei secondi membri ricavate a questa maniera: Si calcoli il lavoro elementare δL della pressione, relativo ad un incremento $\delta \xi_1$ del parametro ξ_1 e ad incrementi nulli degli altri parametri e si avrà

$$\delta L = L_{\xi_1} \delta \xi_1 ;$$

analogamente per $L_{\eta_1} L_{\zeta_1} \dots$ Nel caso attuale nostro abbiamo

$$\begin{aligned} L_{\xi_1} &= \int_{\sigma_1} p \cos . n \xi \, d\sigma , \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ L_{\zeta_1} &= \int_{\sigma_1} p \cos . n \zeta \, d\sigma , \end{aligned}$$

e perciò le tre prime delle (1) ci forniranno le tre componenti della risultante del sistema di pressioni esercitate su τ_1 in causa del mo-

vimento supposto di τ_1 e τ_2 . Per risolvere il problema dobbiamo perciò prima cercare la forza viva corrispondente ad un movimento composto di uno traslatorio e di un pulsatorio, in seguito applicare le (1) e porre nelle formule finali

$$\dot{\xi}_1 = \dot{\eta}_1 = \dot{\zeta}_1 = \dot{\xi}_2 = \dot{\eta}_2 = \dot{\zeta}_2 = 0$$

Notazioni. — Adottiamo ora e manterremo poi in tutto il seguito queste notazioni:

I. Essendo Φ una qualunque funzione dei punti dello spazio col simbolo:

$$\Phi x^r y^s z^t$$

intenderemo dinotare la

$$\frac{\partial^{r+s+t} \Phi}{\partial x^r \partial y^s \partial z^t}$$

II. Essendo Φ una qualunque funzione dei punti dello spazio con

$$(\Phi)_i$$

intenderemo dinotare i valori della Φ al contorno di τ_i in confronto del simbolo

$$|\Phi|_i$$

che adoteremo per denotare il valore della Φ nel centro di τ_i

Funzione delle velocità per un atto pulsatorio. — Insieme alla terna fissa $\xi \eta \zeta$ consideriamo due terne $x_1 y_1 z_1$ $x_2 y_2 z_2$ aventi le origini rispettivamente nei centri di τ_1 e τ_2 ed orientazioni per ora indeterminate.

La funzione delle velocità Φ_1 che si avrebbe ove nel liquido fosse immerso il solo τ_1 con l'atto pulsatorio che ad esso attribuiamo si potrà considerare ad un dato istante come funzione di $x_2 y_2 z_2$ e con l'approssimazione fissata (a meno di evanescenti come $\frac{1}{R^4}$)

avremo

$$(2) \quad (\Phi_1)_2 = |\Phi_1|_2 + |\Phi_1^{x_2}|_2 a_2 + |\Phi_1^{y_2}|_2 b_2 + |\Phi_1^{z_2}|_2 c_2 + \\ + \frac{1}{2} \left(|\Phi_1^{x_2 x_2}|_2 a_2^2 + |\Phi_1^{y_2 y_2}|_2 b_2^2 + |\Phi_1^{z_2 z_2}|_2 c_2^2 + \right. \\ \left. 2 |\Phi_1^{x_2 y_2}|_2 a_2 b_2 + 2 |\Phi_1^{y_2 z_2}|_2 b_2 c_2 + 2 |\Phi_1^{z_2 x_2}|_2 c_2 a_2 \right)$$

$$(2^*) \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right)_2 = |\Phi_1^{x_2}|_2 \cos n x_2 + |\Phi_1^{y_2}|_2 \cos n y_2 + |\Phi_1^{z_2}|_2 \cos n z_2 + \\ + \left(|\Phi_1^{x_2 x_2}|_2 a_2 + \dots + |\Phi_1^{x_2 z_2}|_2 c_2 \right) \cos n x_2 + \dots + \\ + \left(|\Phi_1^{z_2 x_2}|_2 a_2 + \dots + |\Phi_1^{z_2 z_2}|_2 c_2 \right) \cos n z_2 ;$$

dove si sono indicate con $a_1 b_1 c_1$, come si farà in tutto il seguito, le coordinate $x_1 y_1 z_1$ dei punti superficiali di τ_1 .

Queste formule si stabiliscono facilmente sviluppando in serie di Taylor e trascurando i termini che, contenendo in fattore le derivate terze della funzione armonica Φ_1 , portano evanescenti almeno dell'ordine di $\frac{1}{R^4}$. — Scambiando gli indici 1, 2 si ottengono le formule per la funzione analoga Φ_2 relativa a τ_2 ,

Siano ora φ_1 e φ_2 due funzioni armoniche potenziali esistenti la prima nel campo esterno a τ_1 e la seconda nel campo esterno a τ_2 e soddisfacenti sui relativi contorni alle condizioni

$$(3) \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right)_1 = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right)_1 \quad \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right)_2 = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right)_2$$

Io dico adunque che

$$\Phi_1 - \varphi_1 + \Phi_2 - \varphi_2$$

nei limiti d'approssimazione fissati si può assumere come la funzione delle velocità corrispondente ad un atto pulsatorio dei corpi $\tau_1 \tau_2$; ossia dico che (vedi §. 1) la sua derivata normale differisce dalla componente della velocità secondo la normale per evanescenti trascurabili.

Se noi dimostreremo che

$$(4) \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)_2 = 0 \quad \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right)_1 = 0$$

il nostro scopo sarà raggiunto perchè allora per la (3) avremo

$$\left(\frac{\partial(\Phi_1 - \varphi_1 + \Phi_2 - \varphi_2)}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right)_1 \quad \left(\frac{\partial(\Phi_1 - \varphi_1 + \Phi_2 - \varphi_2)}{\partial n}\right)_2 = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n}\right)_2$$

Per dimostrare ad esempio la seconda delle (4) procediamo adunque a questo modo:

Se φ'_1 φ''_1 sono due funzioni potenziali armoniche esistenti nel campo esterno a τ_1 e soddisfacenti rispettivamente alle condizioni

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi'_2}{\partial n}\right)_2 &= |\Phi_1^{x_2}|_2 \cos nx_2 + |\Phi_1^{y_2}|_2 \cos ny_2 + |\Phi_1^{z_2}|_2 \cos nz_2 \\ \left(\frac{\partial \varphi''_2}{\partial n}\right)_2 &= \left(|\Phi_1^{x_2 x_2}|_2 a_2 + \dots + |\Phi_1^{x_2 z_2}|_2 c_2\right) \cos nx_2 + \dots + \\ &\quad + \left(|\Phi_1^{z_2 x_2}|_2 a_2 + \dots + |\Phi_1^{z_2 z_2}|_2 c_2\right) \cos nz_2 \end{aligned}$$

si avrà per le (2*) (3)

$$\varphi_2 = \varphi'_2 + \varphi''_2 .$$

Ora tenendo conto dei due fatti: che ogni termine di $\frac{\partial \varphi'_2}{\partial n}$ ha per coefficiente una derivata prima di Φ_1 (evanescente come $\frac{1}{R^2}$ in base alle proprietà generali delle funzioni armoniche) e che per essere

$$\int_2 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial n} d\tau_2 = 0$$

si verificano le proprietà IV V §. 2, si ha che

$$(5) \quad (\varphi'_2)_1 = \left(\frac{\partial \varphi'_2}{\partial x_1}\right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi'_2}{\partial y_1}\right)_1 = \dots = 0 ;$$

e tenendo conto che ogni termine di $\frac{\partial \varphi''_2}{\partial n}$ ha per coefficiente una derivata seconda di Φ_1 (evanescente come $\frac{1}{R^3}$ in base alle proprietà generali delle funzioni armoniche) e che all'infinito ogni funzione armonica tende a zero come $\frac{1}{R}$ si avrà che anche per φ''_2 si verificano le

$$(5^*) \quad (\varphi''_2)_1 = \left(\frac{\partial \varphi''_2}{\partial x_1}\right)_1 = \left(\frac{\partial \varphi''_2}{\partial y_1}\right)_1 = \dots = 0$$

e con ciò viene del tutto dimostrata la seconda delle (4). In modo identico si opererebbe per la prima.

Funzione delle velocità per un atto traslatorio. — Il processo per costruire la funzione delle velocità approssimata sarebbe identico al precedente.

Se Λ_1 è una funzione armonica potenziale esistente all'esterno di τ_1 e soddisfacente sul contorno del campo alla condizione

$$\left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial n}\right)_1 = \cos nx_1$$

e se λ_2 è una funzione potenziale armonica esistente all'esterno di τ_2 e soddisfacente alle condizioni limiti

$$\left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial n}\right)_2 = \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial n}\right)_2$$

la funzione

$$\Lambda_1 - \lambda_2$$

ci darà la funzione delle velocità corrispondenti ad un atto traslatorio del corpo τ_1 secondo la direzione dell'asse x_1 con velocità uguale ad uno.

Verificandosi poi la relazione

$$\int_1 \frac{\partial \Lambda_1}{\partial n} d\sigma_1 = 0$$

valgono le proprietà IV e V e con la nostra approssimazione potremo quindi scrivere

$$(\Lambda_1)_2 = |\Lambda_1|_2 + |\Lambda_1^{x_2}|_2 a_2 + |\Lambda_1^{y_2}|_2 b_2 + |\Lambda_1^{z_2}|_2 c_2$$

$$\left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial n}\right) = |\Lambda_1^{x_2}|_2 \cos nx_2 + |\Lambda_1^{y_2}|_2 \cos ny_2 + |\Lambda_1^{z_2}|_2 \cos nz_2 .$$

Le (5), (5*) interpretate per il caso attuale ci danno poi

$$(\lambda_2) = (\lambda_2^{x_2})_1 = (\lambda_2^{y_2})_1 = \dots = 0$$

Forza viva del liquido. — Se gli assi $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2$ hanno uguale orientazione degli assi fissi $\xi \eta \vartheta$, la funzione delle velocità relativa ad un atto composto di uno pulsatorio simultaneo, e di uno traslatorio del corpo τ_1 secondo l'asse ξ sarà adunque

$$\Phi_1 - \varphi_1 + \Phi_2 - \varphi_2 + \dot{\xi}_1 (\Lambda_1 - \lambda_2)$$

e la forza viva T del liquido sarà come è noto da calcolarsi con la formula

$$T = -\frac{1}{2} \int_1 \left(\Phi_1 - \varphi_1 + \Phi_2 - \varphi_2 + \dot{\xi}_1 (\Lambda_1 - \lambda_2) \right) \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \dot{\xi}_1 \cos nx_1 \right) d\tau_1$$

$$- \frac{1}{2} \int_2 \left(\Phi_1 - \varphi_1 + \Phi_2 - \varphi_2 + \dot{\xi}_1 (\Lambda_1 - \lambda_2) \right) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\tau_2$$

Per questo osserviamo in primo luogo che

$$(6) \int_2 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\tau_2 = |\Phi_1|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\tau_2 + \frac{1}{2} |\Phi_1^{x_2}|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} a_2^2 d\tau_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} |\Phi_1^{y_2}|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} b_2^2 d\tau_2 + \frac{1}{2} |\Phi_1^{z_2}|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} c_2^2 d\tau_2$$

$$+ |\Phi_1^{x_2 y_2}|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} a_2 b_2 d\tau_2 + |\Phi_1^{y_2 z_2}|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} b_2 c_2 d\tau_2 +$$

$$+ |\Phi_1^{z_2 x_2}|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} c_2 a_2 d\tau_2$$

$$(6) \quad \int_2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 = |\Phi_2|_1 \int_1 \frac{\partial \Phi^2}{\partial n} d\sigma_1 +$$

$$\frac{1}{2} |\Phi_1^{x_2 x_1}|_1 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} a_1^2 d\sigma_1 + \dots + |\Phi_1^{x_2 y_1}|_1 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} a_1 b_1 d\sigma_1 + \dots$$

come si ricava dagli sviluppi di $(\Phi_1)_2$ $(\Phi_2)_1$ tenendo conto che i termini come $|\Phi_1^{x_2}|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} a_2 d\sigma_2$ sono nulli in forza della proprietà II §. 2 che può essere applicata, come abbiamo rilevato fin dal principio del paragrafo.

Analogamente dallo sviluppo di $\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial n}\right)_1$ e da quello di $\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\right)_2 = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right)_2$ tenendo conto che i termini come $|\Phi_1^{x_2}|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \cos nx_2 d\sigma_2$ si annullano come superiormente, si ricavano le:

$$(6^*) \quad \int_2 \varphi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 = \int_2 \Phi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} d\sigma_2 = \int_2 \Phi_2 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}\right)_2 d\sigma_2 =$$

$$|\Phi_1^{x_2 x_2}|_2 \int_2 \Phi_2 a_2 \cos nx_2 d\sigma_2 + \dots + |\Phi_1^{x_2 z_2}|_2 \int_2 \Phi_2 c_2 \cos nx_2 d\sigma_2 +$$

$$+ |\Phi_1^{y_2 x_2}|_2 \int_2 \Phi_2 a_2 \cos ny_2 d\sigma_2 + \dots + |\Phi_1^{y_2 z_2}|_2 \int_2 \Phi_2 c_2 \cos ny_2 d\sigma_2 +$$

$$+ |\Phi_1^{z_2 x_2}|_2 \int_2 \Phi_2 a_2 \cos nz_2 d\sigma_2 + \dots + |\Phi_1^{z_2 z_2}|_2 \int_2 \Phi_2 c_2 \cos nz_2 d\sigma_2$$

$$\int_1 \varphi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 = |\Phi_2^{x_1 x_1}|_1 \int_1 \Phi_1 a_1 \cos nx_1 d\sigma_1 \dots +$$

$$+ \dots +$$

$$+ \dots + |\Phi_2^{z_1 z_1}|_1 \int_1 \Phi_1 c_1 \cos nz_1 d\sigma_1$$

Ciò stabilito noi possiamo evidentemente scrivere

$$\begin{aligned}
 (7) \quad T = & -\frac{1}{2} \left[\int_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_1 + \int_2 \Phi_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 \right] + \\
 & -\frac{1}{2} \left[|\Phi_{1|2} \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 + |\Phi_{2|1} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma + \dots \dots \dots \right] + \\
 & -\frac{1}{2} \dot{\xi}_1 \left[\int_1 (\Phi_1 - \varphi_1 + \Phi_2 - \varphi_2) \cos nx_1 d\sigma_1 + \int_1 (\Lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 + \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \int_2 (\Lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 \right] + \\
 & -\frac{1}{2} \dot{\xi}_2 \left[\int_1 (\Lambda_1 - \lambda_2) \cos nx_1 d\sigma_1 \right]
 \end{aligned}$$

e notiamo che nella prima parentesi abbiamo raccolto quei termini che sono indipendenti sia da $\dot{\xi}_1$ sia da $\dot{\xi}_2$; nella seconda i termini dati da

$$-\frac{1}{2} \int_1 (\Phi_2 - \varphi_1) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 - \frac{1}{2} \int_2 (\Phi_1 - \varphi_2) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2$$

che dipendono evidentemente da $\dot{\xi}_1$ e non da $\dot{\xi}_2$, ponendo in evidenza solo quei termini che non contenevano derivate seconde delle funzioni armoniche Φ_1 e Φ_2 ; nella terza abbiamo posto quei termini che contengono in fattore $\dot{\xi}_1$; ed infine nell'ultima quelli che hanno come fattore $\dot{\xi}_2$.

Movimento pulsatorio periodico. — Con questa espressione intendiamo indicare ogni movimento pulsatorio il cui in corpo riacquisti al tempo t_1 il contorno che possedeva ad un tempo t_0 definito dalla relazione $2n\tau = t_1 + t_0$. Evidentemente se l'atto pulsatorio dei due corpi è periodico e di egual periodo per entrambi e se i

centri dei corpi sono fissi, la espressione racchiusa nella terza parentesi della (7) è una funzione periodica con periodo uguale a quello della pulsazione dei corpi e la sua derivata totale rispetto al tempo in ogni periodo assumerà tante volte un dato valore quante il valore di segno opposto; e se il periodo della pulsazione è estremamente piccolo, in ogni intervallo di tempo finito muterà segno senza mutare grandezza un numero estremamente grande di volte.

Risoluzione. — Conformemente alle regole date costruiamo la $\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_1}$.

La prima parentesi della (7) non ci dà evidentemente nulla.

La seconda ci dà

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_1} |\Phi_2|_1 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_1} |\Phi_1|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2$$

giacchè il contributo portato dagli altri termini è trascurabile in ordine alle proprietà generali delle funzioni armoniche.

La terza e quarta ci danno termini che contengono in fattore $\dot{\xi}_1$ che va poi supposto uguale a zero.

Riguardo alla $\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}$ la prima e seconda parentesi ci danno zero;

la terza mi dà quella funzione periodica di cui abbiamo parlato precedentemente. Il suo contributo nella componente secondo l'asse delle ξ della risultante delle pressioni è quello di una forza che in due istanti t_1 e t_0 definiti da

$$t_1 + t_0 = 2 n \tau$$

ha grandezze uguali ma opposta direzione; e se supponiamo che il periodo sia estremamente piccolo la sua azione sarà sensibilmente nulla.

La quarta parentesi ci dà infine quantità che hanno per coefficiente $\dot{\xi}_1$.

Ci resta adunque, per risolvere il problema che ci siamo proposti, da dare forma esplicita alle $\frac{\partial |\Phi_{2|1}}{\partial \xi_1}$, $\frac{\partial |\Phi_{1|2}}{\partial \xi_1}$ o, ciò che per la scelta fatta degli assi $x_1 y_1 z_1$ $x_2 y_2 z_2$ è lo stesso, quella delle $\frac{\partial |\Phi_{2|1}}{\partial x_2}$, $-\frac{\partial |\Phi_{1|2}}{\partial x_1}$. giacchè

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_2 - \xi_1 & y_1 &= \eta_2 - \eta_1 & z_1 &= \vartheta_2 - \vartheta_1 \\ x_2 &= \xi_1 - \xi_2 & y_2 &= \eta_1 - \eta_2 & z_2 &= \vartheta_1 - \vartheta_2 . \end{aligned}$$

Assumendo ora la formula (2) della proprietà VIII §. 2 eseguendo le derivazioni rispetto a x_1 e a x_2 e trascurando il contributo portato dai due primi integrali del secondo membro, che a derivazione eseguita viene evanescente come $\frac{1}{R^4}$, si avrà:

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\Phi_{2|1}}{\partial x_2} &= + \frac{x_2}{4 \pi R^3} \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 \\ \frac{\partial |\Phi_{1|2}}{\partial x_1} &= + \frac{x_1}{4 \pi R^3} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 \end{aligned}$$

e perciò indicata con R la direzione che va dal centro di τ_1 al centro di τ_2 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\Phi_{2|1}}{\partial x_2} &= - \frac{\cos R x_2}{4 \pi R^2} \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 \\ \frac{\partial |\Phi_{1|2}}{\partial x_1} &= \frac{\cos R x_1}{4 \pi R^2} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 \end{aligned}$$

e perciò la componente della risultante del sistema di pressioni secondo l'asse ξ avrà la espressione

$$\Xi_1 = \frac{1}{4 \pi R^2} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 \cdot \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 \cdot \cos R \xi$$

Conclusione. — Scambiando la ξ successivamente con la η e con la ζ otteniamo le espressioni delle tre componenti della risultante del sistema di pressioni sotto la forma seguente

$$E_1 = \frac{1}{4\pi R_2} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 \cdot \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 \cdot \cos R\xi$$

$$H_1 = \frac{1}{4\pi R_2} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 \cdot \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 \cdot \cos R\eta$$

$$Z_1 = \frac{1}{4\pi B_2} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 \cdot \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 \cdot \cos R\zeta$$

e da queste formule possiamo evidentemente concludere:

Quando due corpi che hanno un centro di simmetria sono immersi in un liquido inerte e pulsano periodicamente intorno ai due centri fissi, agisce tra essi un sistema di forze la cui risultante ha la direzione della congiungente i centri ed è inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza; ed è una attrazione o una repulsione secondochè al tempo considerato simultaneamente aumentano il loro volume, oppure mentre l'uno l'aumenta l'altro lo diminuisce.

§. (4).

Manteniamo le definizioni di *movimento pulsatorio di atto di movimento pulsatorio* e le notazioni che abbiamo già introdotte nel precedente paragrafo.

Terna principale relativa ad un atto pulsatorio. — Dato un corpo la cui superficie σ possiede un atto di movimento pulsatorio si consideri una superficie σ' fittizia, coincidente con σ ed avente in ogni punto una densità uguale alla componente della velocità secondo la normale; di essa consideriamo l'ellissoide d'inerzia. Diremo *terna principale relativa all'atto pulsatorio* la terna degli assi principali dell'ellissoide.

Enunciato del problema. — In questo paragrafo ci proponiamo il seguente problema: In un liquido inerte che si estende all'infinito ed ivi riposa siano immersi due corpi τ_1 , τ_2 pulsanti periodicamente intorno a due centri fissi. Supposta la distanza R dei centri così grande che riescano trascurabili rispetto agli altri elementi gli evanescenti come $\frac{1}{R^4}$, quali saranno i momenti secondo gli assi della terna principale relativa all'atto pulsatorio di uno dei corpi, del sistema di pressioni esercitate su esso dal liquido, nella ipotesi che la terna principale abbia orientazione invariabile?

Parametri. — Noi potremo, quando ci piaccia, supporre che la terna principale dell'atto pulsatorio sia mobile; salvo poi immobilizzarla nei risultati finali che otterremo. Assumeremo quindi come parametri definenti la posizione di ogni punto del corpo considerato i sei parametri della sua terna rispetto ad una terna fissa, insieme a quelli ulteriori parametri che fissano la posizione di ogni suo punto relativamente alla terna principale. Indicando dunque con $\xi \eta \zeta$ gli assi della terna fissa e con $x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2$ rispettivamente quelli della terna principale di τ_1 e di τ_2 sia:

f l'angolo compreso tra due semipiani terminati all'asse z_1 e contenenti il primo l'asse x_1 e il secondo la direzione positiva di ξ ,

φ sia l'angolo compreso tra due semipiani terminati all'asse ζ e paralleli il primo all'asse ξ ed il secondo all'asse z_1

θ sia infine l'angolo dei due assi ζ e z_1 .

Metodo di risoluzione. - Per una variazione δf del parametro f (rimanendo fissi i valori di tutti gli altri) si ha una rotazione di τ_1 attorno all'asse z_1 dell'angolo $-\delta f$ ed il lavoro elementare δL della pressione esercitata dal liquido su τ_1 sarà

$$\delta L = -\delta f \cdot \int_1 p (x_1 \cos ny_1 - y_1 \cos nx_1) d\sigma_1$$

perciò le formole (1) del paragrafo 3 ci danno

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{f}} \right) - \frac{\partial T}{\partial f} = - \int_1 p (x_1 \cos ny_1 - y_1 \cos nx_1) d\sigma_1 ;$$

ed il secondo membro di questa relazione è precisamente il momento secondo l'asse z_1 del sistema delle pressioni esercitate su τ_1 . Ponendo in questa formula $f = \text{cost.}$ $\dot{f} = 0$ e permutando in seguito circolarmente (x_1, y_1, z_1) otterremo le espressioni dei momenti che formano l'oggetto di queste ricerche.

Supporremo adunque che la posizione di τ_1 rispetto alla terna (x_1, y_1, z_1) sia quella che ad ogni istante ha il corpo τ_1 nel movimento pulsatorio effettivo che noi vogliamo considerare, e che la terna (x_1, y_1, z_1) possenga a sua volta un movimento rotatorio attorno a z_1 ; con ciò l'atto di movimento assoluto sarà ad ogni istante la somma dell'atto rotatorio competente alla terna (x_1, y_1, z_1) e dell'atto pulsatorio le cui componenti rispetto agli assi x_1, y_1, z_1 sono quelle che all'istante considerato competerebbero a τ_1 in forza dell'effettivo movimento pulsatorio considerato. Perciò la terna principale relativa a quest'ultimo sarà la terna x_1, y_1, z_1 nella sua posizione all'istante considerato. Con tali avvertenze sarà adunque da costruire la funzione delle velocità.

Funzione delle velocità. — Evidentemente le $\Phi_1 - \varphi_1$ e $\varphi_2 - \varphi_2$ costruite nel precedente paragrafo per un atto pulsatorio soddisfano anche al caso attuale, salvo avvertire quelle semplificazioni che può portare nelle formole, l'aver supposto che l'atto pulsatorio di τ_1 abbia per terna principale x_1, y_1, z_1 . Così pure se in luogo di porre la condizione

$$\left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial n} \right)_1 = \cos nx_1$$

si ponesse l'altra

$$\left(\frac{\partial \Lambda_1}{\partial n} \right)_1 = a_1 \cos ny_1 - b_1 \cos nx_1$$

resterebbero valide tutte le altre considerazioni svolte nel §. 3 relativamente alla funzione delle velocità per un atto traslatorio, e si concluderebbe che la funzione

$$\Lambda_1 - \lambda_2$$

è la funzione, approssimata, delle velocità dei punti del liquido in causa di un atto rotatorio di τ_1 attorno all'asse z_1 con la velocità angolare uno. Così nel caso attuale la funzione delle velocità sarà

$$\Phi_1 - \varphi_1 + \Phi_2 - \varphi_2 - \dot{f}(\Lambda_1 - \lambda_2)$$

e con essa dovremo calcolare la forza viva T del liquido.

Forza viva del liquido. — La formula per la forza viva rimane formalmente identica a quella data nel paragrafo 3. Dobbiamo però notare che poichè la terna $x_1 y_1 z_1$ è per ipotesi la terna principale relativa all'atto pulsatorio di τ_1 , ossia la terna principale dell'ellissoide d'inerzia di una superficie coincidente con il contorno di τ_1 ed avente in ogni punto una densità uguale a $\frac{\partial \Phi_1}{\partial n}$ si avrà

$$(2) \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} a_1 b_1 d\tau_1 = \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} b_1 c_1 d\tau_1 = \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} c_1 a_1 d\tau_1 = 0.$$

Dimostreremo ancora in una nota posta alla fine di questo paragrafo, e per ora semplicemente ammettiamo, che le formule (2) precedenti portano come conseguenza le altre

$$(2^*) \int_1 \Phi_1 (a_1 \cos ny_1 + b_1 \cos nx_1) d\tau_1 = \int_1 \Phi_1 (b_1 \cos nz_1 + c_1 \cos my_1) d\tau_1 = \\ = \int_1 (c_1 \cos nx_1 + a_1 \cos nz_1) d\tau_1 = 0 ;$$

Introdotte perciò le relative semplificazioni nelle formule (6) (6*) §. 3 la formula per la forza viva rimane

$$\begin{aligned}
 T = & -\frac{1}{2} \left[\int_1 \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 + \int \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 \right] \\
 & -\frac{1}{2} \left[|\Phi_2|_1 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 + \right. \\
 & \frac{1}{2} |\Phi_2^{x_1 z_1}|_1 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} a_1^2 d\sigma_1 + \dots + \frac{1}{2} |\Phi_2^{z_1 z_1}|_1 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} c_1^2 d\sigma_1 + \\
 & \left. - |\Phi_2^{x_1 x_1}|_1 \int_1 \Phi_1 a_1 \cos nx_1 d\sigma_1 - \dots - |\Phi_2^{z_1 z_1}|_1 \int \Phi_1 c_1 \cos nz_1 d\sigma + \right. \\
 (3) & \left. + |\Phi_1|_2 \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \dots \right] + \\
 & -\frac{1}{2} \dot{f} \left[\int_1 (\Phi_1 - \varphi_1 + \Phi_2 - \varphi_2) (a_1 \cos ny_1 - b_1 \cos nx_1) d\sigma_1 + \right. \\
 & \left. + \int_1 (\Lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 + \int_2 (\Lambda_1 - \lambda_2) \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 \right] + \\
 & \left. -\frac{1}{2} \dot{f}^2 \int_1 (\Lambda_1 - \lambda_2) (a_1 \cos ny_1 - b_1 \cos nx_1) d\sigma_1 \right] ;
 \end{aligned}$$

e notiamo che nella prima parentesi abbiamo raccolto quei termini che sono indipendenti da f e da \dot{f} nella seconda quelli che dipendono da f e non da \dot{f} , trascurando di porre in evidenza quelli che contenevano derivate seconde di Φ_1 rispetto $x_2 y_2 z_2$; nella terza abbiamo posto i termini che hanno in fattore \dot{f} e nell'ultima quelli che hanno in fattore \dot{f}^2 .

Formule ausiliarie. — Mediante le relazioni che danno il passaggio dal sistema $(\xi \eta \zeta)$ fisso, al sistema $(x_1 y_1 z_1)$ in funzione degli angoli di Kirchhoff $f \varphi \theta$ (Vedi KIRCHHOFF, *Mechanik fünfte Vorlesung*)

si ha che considerando la $x_1 y_1 z_1$ riferite ad un medesimo punto fisso dello spazio

$$(I^e) \quad \frac{\partial x_1}{\partial f} = -y_1 \quad \frac{\partial y_1}{\partial f} = x_1 \quad \frac{\partial z_1}{\partial f} = 0 ;$$

è evidente poi che considerando le $x_2 y_2 z_2$ riferite ad un punto fisso dello spazio

$$(I^e) \quad \frac{\partial x_2}{\partial f} = 0 \quad \frac{\partial y_2}{\partial f} = 0 \quad \frac{\partial z_2}{\partial f} = 0 .$$

Riprendiamo ora la (2) §. 2 e notiamo come ad ogni derivazione d'ambo i membri rispetto ad $x y z$ s'aumenta di una unità l'infinitesimo dei termini; derivando perciò due volte il secondo membro il solo termine

$$- \frac{1}{4 \pi R} \int \frac{\partial p}{\partial n} d\sigma ,$$

che è l'unico di primo ordine, darà evanescenti non trascurabili nel nostro ordine di approssimazione.

Indicando adunque con $A_2 B_2 C_2$ le coordinate del centro di τ_1 nel sistema $x_2 y_2 z_2$ e con $A_1 B_1 C_1$ le coordinate del centro di τ_2 nel sistema $x_1 y_1 z_1$ avremo

$$(II^e) \quad \left\{ \begin{array}{l} |\Phi_2^{x_1 z_1}|_1 = -\frac{3A_1^2}{4\pi R^5} \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2, \quad |\Phi_2^{y_1 y_1}|_1 = -\frac{3B_1^2}{4\pi R^5} \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2, \\ \quad \quad \quad |\Phi_2^{z_1 z_1}|_1 = -\frac{3C_1^2}{4\pi R^5} \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2 \\ |\Phi_1^{x_2 z_2}|_2 = -\frac{3A_2^2}{4\pi R^5} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1, \quad |\Phi_1^{y_1 y_1}|_2 = -\frac{3B_2^2}{6\pi R^5} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 \\ \quad \quad \quad |\Phi_1^{z_1 z_1}|_2 = -\frac{3C_2^2}{4\pi R^5} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} d\sigma_1 \end{array} \right.$$

Applicando ora le formole I^e e derivando con la regola delle

funzioni composte si ha $\frac{\partial f(x_1, x_1, z_1)}{\partial f} = -y_1 \frac{\partial f}{\partial x} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}$; per cui otteniamo dalle II^e

$$\frac{\partial}{\partial f} |\Phi_1^{x_1, x_1}|_1 = \frac{+6A_1 B_1}{4\pi R^3} \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2, \quad \frac{\partial}{\partial f} |\Phi_2^{y_1, y_1}|_1 = \frac{-6A_1 B_1}{4\pi R^3} \int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial f} |\Phi_2^{z_1, z_1}|_1 = 0$$

alle quali si possono aggiungere le

$$(III^e) \quad \frac{\partial}{\partial f} |\Phi_1^{x_2, x_2}|_2 = 0 \dots \frac{\partial}{\partial f} |\Phi_1^{y_2, y_2}|_2 = 0 \dots \frac{\partial}{\partial f} |\Phi_1^{z_2, z_2}|_2 = 0 \dots$$

a causa della indipendenza da f delle funzioni derivate.

Riprendendo ancora la (2) §. 2 notiamo che per la scelta speciale degli assi x_1, y_1, z_1 essa ci dà in causa delle (2) (2*) del presente paragrafo

$$|\Phi_1|_2 = \frac{1}{4\pi R^3} \int_1 \Phi_1 \left[(a_1 \cos nx_1 - \frac{3A_1^2}{R^2} a_1 \cos nx_1) + \dots + \right. \\ \left. + (c_1 \cos nz_1 - \frac{3C_1^2}{R^2} c_1 \cos nz_1) \right] d\sigma_1 + \\ - \frac{1}{4\pi R^3} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \left[\frac{3}{2R^2} (a_1^2 A_1^2 + b_1^2 B_1^2 + c_1^2 C_1^2) - \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \right] \cdot d\sigma_1 + \\ - \frac{1}{4\pi R} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \partial \sigma_1$$

Da cui derivando con la formula $\frac{\partial}{\partial f} = -y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial y_1}$ si ha

$$\frac{\partial |\Phi_1|_2}{\partial f} = \frac{6}{4\pi R^3} \int_1 \Phi_1 \left[\frac{A_1 B_1}{R^2} a_1 \cos nx_1 - \frac{A_1 B_1}{R^2} b_1 \cos ny_1 \right] d\sigma_1 + \\ - \frac{3}{4\pi R^3} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \frac{A_1 B_1}{R^2} (b_1^2 - a_1^2) d\sigma_1$$

insieme a cui tenendo conto che $|\Phi_{2,1}|$ non dipende da f si ha

$$\text{IV}^e \quad \frac{\partial |\Phi_{2,1}|}{\partial f} = 0$$

Risoluzione del problema. — Mantenendo la definizione data al §. 3 del movimento pulsatorio periodico, si dimostra con ragionamenti del tutto identici a quelli tenuti allora che nella espressione del momento la $\frac{\partial T}{\partial f}$ porta un contributo sensibilmente nullo se il periodo di pulsazione è estremamente piccolo; riguardo a $\frac{\partial T}{\partial f}$ concludiamo come allora che gli unici termini non nulli identicamente ci sono forniti dalla seconda parentesi della data espressione di T giacchè gli altri o non dipendono da f (prima parentesi) o contengono in fattore \dot{f} , il quale va poi supposto nullo. Eseguendo adunque la derivazione rispetto ad f , della seconda parentesi con le formule ausiliarie III^e IV^e recentemente stabilite si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial f} = & -\frac{1}{2} \frac{A_1 B_1}{4\pi R^5} \left[3 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} a_1^2 d\tau_1 - 3 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} b_1^2 d\tau_1 + \right. \\ & - 6 \int_1 \Phi_1 a_1 \cos nx_1 d\tau_1 + 6 \int_1 \Phi_1 b_1 \cos ny_1 d\tau_1 + 3 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} a_1^2 d\tau_1 - \\ & \left. - 3 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} b_1^2 d\tau_1 + 6 \int_1 \Phi_1 a_1 \cos nx_1 d\tau_1 - 6 \int_1 \Phi_1 b_1 \cos ny_1 d\tau_1 \right] = \\ & = 3 \frac{-A_1 B_1}{4\pi R^5} \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} (a_1^2 - b_1^2) d\tau_1 \end{aligned}$$

Adunque posto

$$K_{x_1} = 3 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} (c_1^2 - b_1^2) d\tau_1$$

$$K_{y_1} = 3 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} (a_1^2 - c_1^2) d\tau_1$$

$$K_{z_1} = 3 \int_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} (b_1^2 - a_1^2) d\tau_1$$

le espressioni dei momenti assumeranno la forma concisa

$$M_{x_1} = K_{x_1} \cdot \frac{\int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2}{4\pi R^3} \cdot \cos Ry_1 \cdot \cos Rz_1$$

$$M_{y_1} = K_{y_1} \cdot \frac{\int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2}{4\pi R^3} \cdot \cos Rz_1 \cdot \cos Rx_1$$

$$M_{z_1} = K_{z_1} \cdot \frac{\int_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} d\sigma_2}{4\pi R^3} \cdot \cos Rx_1 \cdot \cos Ry_1$$

e queste sono le formule definitive che in ogni caso risolvono il problema che ci eravamo proposto.

Conclusioni. — *Se in un liquido inerte che si estende all'infinito ed ivi, riposa, sono immersi due corpi $\tau_1 \tau_2$ pulsanti periodicamente intorno a centri fissi, e la distanza R dei centri è così grande che riescano trascurabili gli evanescenti come $\frac{1}{R^4}$, e la terna principale di τ_1 ha una orientazione fissa nello spazio il momento del sistema di pressioni esercitate dal liquido su τ_1 relativamente ad un asse della terna è a parità di pulsazione, proporzionale al prodotto dei coseni che la congiungente i centri forma con gli altri due assi, ed inversamente proporzionale al cubo di R.*

Nota al §. 4.

Se φ è una funzione armonica esistente all'esterno di una superficie σ e una delle due espressioni

$$\int_{\sigma} \varphi (a \cos ny + b \cos nx) d\sigma, \quad \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ab d\sigma$$

è nulla lo è necessariamente anche l'altra.

Infatti giacchè $\Delta_2 xy = 0$ $\Delta_2 \varphi = 0$ in ogni campo C per quanto esteso (purchè compreso nel campo d'esistenza di φ) avremo

$$(1) \quad \int_{\epsilon} \left(\varphi \cdot \frac{\partial xy}{\partial n} - xy \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\epsilon = 0$$

essendo l'integrazione estesa a tutto il contorno ϵ di C. Assumiamo per contorno di C la superficie σ insieme ad una sfera Σ grandissima di raggio R. La formula (1) §. 2 ci dà a meno di evanescenti come $\frac{1}{R^4}$ il valore di φ su Σ ; e le formule che derivano da essa mediante la derivazione rispetto $xy z$ daranno le $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Sostituendo queste espressioni nell'integrale

$$\int_{\Sigma} \left(\frac{\partial xy}{\partial n} \varphi - xy \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Sigma$$

avremo il suo valore a meno di quantità evanescenti coll'ingrandire del raggio R. Calcolando l'integrale

$$\int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial xy}{\partial n} d\Sigma$$

avvertiamo che per la forma simmetrica della sfera i termini dello sviluppo di φ che sono di grado zero in x, y, z non danno alcun contributo, così pure i termini lineari in x, y, z e così pure anche i termini di 2° grado che non contengono il prodotto xy , giacchè possiamo accoppiare gli elementi dell'integrale in modo che scambievolmente si distruggano. Operate le riduzioni ovvie resta quindi

$$(2) \quad \int_{\Sigma} \varphi \frac{\partial xy}{\partial R} d\Sigma = \frac{-3}{4\pi R^5} \left[\int_{\sigma} \varphi \frac{\partial ab}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma} a b \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] \cdot \int_{\Sigma} xy \frac{\partial xy}{\partial R} d\Sigma .$$

Nell'eseguire un integrale

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot xy \cos Rx \cdot d\Sigma$$

avvertiamo che i termini di $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ di grado zero in x, y, z non danno

nulla, i termini lineari danno qualche cosa solo se contengono y , i termini di 2° grado non danno nulla, infine dei termini di 3° grado portano un contributo non nullo solo quelli in cui le variabili x , y , z compaiono nelle forme: x^2y , z^2y , y^3 .

Fatte adunque le riduzioni abbiamo

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x} xy \cos Rx \cdot d\Sigma = \frac{3}{4\pi R^5} \left[\int_{\sigma} \varphi (b \cos na + a \cos nb) d\sigma \right] \times$$

$$\times \left[- \int_{\Sigma} y^2 x \cos Rx \cdot d\Sigma + 5 \int_{\Sigma} y^2 x^3 \cos Rx \cdot d\Sigma \right] +$$

$$+ \frac{3}{4\pi R^5} \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ab d\sigma \cdot \left[- \int_{\Sigma} y^2 x \cos Rx \cdot d\Sigma + 5 \int_{\Sigma} y^2 x^3 \cos Rx \cdot d\Sigma \right].$$

Analogamente si avrebbe

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial y} xy \cos Ry \cdot d\Sigma = \frac{3}{4\pi R^5} \left[\int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ab d\sigma + \int_{\sigma} \varphi (b \cos na + a \cos nb) d\sigma \right] \times$$

$$\times \left[- \int_{\Sigma} y x^2 \cos Ry \cdot d\Sigma + 5 \int_{\Sigma} y^3 x^2 \cos Ry \cdot d\Sigma \right].$$

E con analoghi ragionamenti possiamo porre sotto una forma analoga anche l'integrale: $\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial z} xy \cos Rz \cdot d\Sigma$.

Da tutte queste relazioni esatte a meno di un evanescente concludiamo

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial R} xy d\Sigma = K_1 \left[\int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ab d\sigma + \int_{\sigma} \varphi \frac{\partial ab}{\partial n} d\sigma \right]$$

e la (1) ci dà quindi insieme alla (2)

$$\int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ab d\sigma - \int_{\sigma} \frac{\partial ab}{\partial n} \varphi d\sigma = K_2 \int_{\sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} ab d\sigma + K_2 \int_{\sigma} \varphi \frac{\partial ab}{\partial n} d\sigma + \alpha$$

S

con K_2 avente un limite finito ed α invece evanescente coll'ingrandire di R . E da ciò facilmente discende la enunciata proprietà.

§. 5.

Enunciato del Problema. — In questo paragrafo ci proponiamo la soluzione del seguente problema: Siano in un liquido inerte immersi più corpi $\tau_1 \tau_2 \dots \tau_r$; il contorno di ciascuno d'essi sia ad ogni istante tale, da presentare sei piani di simmetria ortogonale, di cui tre formino un triedro trirettangolo e gli altri tre bisechino gli angoli diedri di esso; dato il movimento di ciascun corpo quale sarà adunque la resultante del sistema di pressioni esercitate dal liquido su ognuno dei corpi nella ipotesi che la minima distanza R dei centri di due corpi, sia così grande che rispetto agli altri elementi siano trascurabili gli evanescenti come $\frac{1}{R^4}$?

Coordinate. — Assumeremo per il corpo τ_s generico i tre piani di simmetria formanti il triedro trirettangolo, come piani coordinati di un sistema cartesiano $(s_1 s_2 s_3)$ insieme ad un sistema cartesiano fisso $\xi \eta \zeta$. Scriveremo adunque il solito quadro dei coseni di direzione

$$\begin{array}{c} \bullet s_1 \quad s_2 \quad s_3 \\ \xi \left| \begin{array}{c|c|c} \alpha_{s_1} & \sigma_{s_2} & \alpha_{s_3} \\ \beta_{s_1} & \beta_{s_2} & \beta_{s_3} \\ \gamma_{s_1} & \gamma_{s_2} & \gamma_{s_3} \end{array} \right. \\ \eta \\ \zeta \end{array}$$

ed assumeremo come parametri del corpo τ_s quelli che individuano la posizione del suo triedro trirettangolo, insieme a quelli che danno la sua posizione relativa al triedro stesso.

Atto di movimento. — L'atto di movimento del contorno di ciascuno dei corpi si può ad ogni istante considerare come composto di un atto di movimento rigido e dell'atto di movimento che gli compete nel movimento relativo alla terna $(s_1 s_2 s_3)$; quest'ultimo

che, per analogia con le precedenti ricerche, chiameremo *pulsatorio*, è tale che la componente della velocità di un punto secondo la normale non muta passando dal punto ad uno qualunque dei suoi simmetrici rispetto ai sei piani di simmetria. Perciò la funzione della velocità corrispondente ad un tale atto di movimento non muterà valore nel passaggio da un punto ad uno qualunque dei suoi simmetrici.

Notazioni. — Manteniamo le convenzioni introdotte nel paragrafo 3° relativamente al significato dei simboli

$$\Phi^{x^r y^s z^t} \quad (\Phi)_i \quad |\Phi|_i ;$$

Inoltre conveniamo che col simbolo sommatorio

$$\sum_{r=i}$$

s'intenda che la somma deva estendersi a tutti i valori che può assumere l'indice r escluso il valore i . Quando un indice si riferisce ai diversi corpi del problema sarà indicato con lettere latine $r, s, g \dots$. Quando si riferisce alle diverse coordinate 1, 2, 3 si indicherà con lettere greche $\lambda, \mu \dots$

Funzione delle velocità per un atto pulsatorio. — Il processo per la sua costruzione è analogo a quello tenuto nei §. 3, 4.

Sia Φ_s una funzione delle velocità esistente all'esterno di τ_s e tale che sul contorno abbia una derivata normale uguale alla componente normale della velocità nell'atto pulsatorio considerato. Restano valide per il caso attuale le formule (2) (2*) §. 2 che con le notazioni ora adottate si scrivono

$$\left. \begin{aligned} (2) \quad (\Phi_g)_s &= |\Phi_g|_s + \sum_{\lambda} \left| \frac{\partial \Phi_g}{\partial s_{\lambda}} \right|_s s_{\lambda} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda \mu} \left| \frac{\partial^2 \Phi_g}{\partial s_{\lambda} \partial s_{\mu}} \right|_s s_{\lambda} s_{\mu} \\ (2*) \quad \left(\frac{\partial \Phi_g}{\partial n} \right)_s &= \sum_{\lambda} \left(\left| \frac{\partial \Phi_g}{\partial s_{\lambda}} \right|_s + \sum_{\mu} \left| \frac{\partial^2 \Phi_g}{\partial s_{\lambda} \partial s_{\mu}} \right|_s s_{\mu} \right) \cos n s_{\lambda} \end{aligned} \right\} g \neq s$$

sia poi φ_s una funzione delle velocità definita in tutto l'esterno di

τ_s e tale che sul contorno soddisfi alla condizione

$$(3) \quad \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial n} \right)_s = \sum_{g \neq s} \left(\frac{\partial \Phi_g}{\partial n} \right)_s ;$$

Allora evidentemente la funzione

$$\sum_s (\Phi_s - \varphi_s)$$

è la funzione delle velocità relative all'atto pulsatorio simultaneo di tutti i corpi. Restano naturalmente valide le formule (5) (5*) §. 3 ossia le loro conseguenze

$$(4) \quad (\varphi_s) = (\varphi_s^{\xi})_g = \dots = 0 \quad g \neq s$$

Funzione delle velocità per un atto traslatorio. — Indichiamo con $X_{s\lambda}$ una funzione delle velocità la quale sia definita, secondo il solito, all'esterno del corpo τ_s e tale che

$$\left(\frac{\partial X_{s\lambda}}{\partial n} \right)_s = \cos ns_\lambda .$$

Come al §. 3 noi ricaveremo

$$(5) \quad (X_{g\lambda})_s = |X_{g\lambda}|_s + \sum_{\mu} \left| \frac{\partial \Phi_{g\lambda}}{\partial s_{\mu}} \right|_s s_{\mu} ; \quad s \neq g$$

Indichiamo poi con $X'_{s\lambda}$ una funzione definita all'esterno di τ_s e tale che

$$\left(\frac{\partial X'_{s\lambda}}{\partial n} \right)_s = \sum_{g \neq s} x_{g\lambda} \left(\frac{\partial X_{g\lambda}}{\partial n} \right)_s = \sum_{g \neq s} x_{g\lambda} \sum_{\mu} \left| \frac{\partial X_{g\lambda}}{\partial s_{\mu}} \right| \cos ns_{\mu} ;$$

dove abbiamo indicato con $x_{g\lambda}$ la componente secondo l'asse G_{λ} delle velocità del corpo τ_g nell'atto traslatorio considerato.

Evidentemente avremo che

$$\sum_{s, \lambda} (x_{s\lambda} X_{s\lambda} - X'_{s\lambda})$$

è la funzione delle velocità per un atto di movimento per cui il singolo atto di ciascun corpo sia traslatorio.

Evidentemente poi avremo

$$X'_{s_\lambda} = \dots = 0.$$

1.° Notiamo che per la simmetria del corpo τ_s avremo

$$\begin{aligned} X_{s_1} &= f(s_1 s_2 s_3) = f(s_1 s_3 s_2) \\ X_{s_2} &= f(s_2 s_3 s_1) = f(s_2 s_1 s_3) \\ X_{s_3} &= f(s_3 s_1 s_2) = f(s_3 s_2 s_1) \end{aligned}$$

da cui facilmente

$$\int X_{s_1} \cos ns_1 d\sigma_s = \int X_{s_2} \cos ns_2 d\sigma_s = \int X_{s_3} \cos ns_3 d\sigma_s ;$$

Indicheremo i comuni valori di queste tre espressioni con S_w .

2.° È applicabile al caso nostro la formula (3) §. 2; notando poi che nel passaggio da un punto di τ_s al suo simmetrico rispetto al piano di simmetria $s_\lambda = 0$ cambia segno senza cambiare grandezza, sia la derivata normale di X_{s_λ} , sia la X_{s_λ} stessa, in forza della proprietà II^a §. 2 possiamo ridurre ulteriormente la formula a

$$|X_{s_\lambda}|_g = \frac{-1}{4\pi R_{s_g}^3} \int_S \left(X_{s_\lambda} \cos ns_\lambda + \frac{\partial X_{s_\lambda}}{\partial n} s_\lambda \right) \cdot |s_\lambda|_g d\sigma_s ;$$

ed indicando con R_s la distanza di un punto dello spazio dal centro di τ_s , e notando che per la supposta simmetria del corpo si ha come superiormente

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_S (X_{s_1} + s_1) \cos ns_1 d\sigma_s &= \frac{1}{4\pi} \int (X_{s_2} + s_2) \cos ns_2 d\sigma_s = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int (X_{s_3} + s_3) \cos ns_3 d\sigma_s \end{aligned}$$

per cui indicheremo i comuni valori di queste tre espressioni con Δ_s , avremo

$$(6) \quad |X_{s_\lambda}|_g = \Delta_s \left| \frac{\partial \frac{1}{R_s}}{\partial s_\lambda} \right|_g.$$

Funzione delle velocità per un atto rotatorio. — Indichiamo con $Y_{s_1} Y_{s_2} Y_{s_3}$ tre funzioni delle velocità definite all'esterno di τ_s e tali da soddisfare rispettivamente alle condizioni

$$\left(\frac{\partial Y_{s_1}}{\partial n}\right)_s = s_2 \cos ns_3 - s_3 \cos ns_2, \dots, \left(\frac{\partial Y_{s_3}}{\partial n}\right)_s = s_1 \cos ns_2 - s_2 \cos ns_1.$$

Queste sono con l'approssimazione che a noi basta (a meno di evanescenti come $\frac{1}{R^4}$) le funzioni delle velocità per atti rotatorii del corpo τ_s aventi rispettivamente per assi $s_1 s_2 s_3$. Infatti non solo la $\left(\frac{\partial Y_{s_\lambda}}{\partial n}\right)_g = 0$ con $g \neq s$, ma anche le $|Y_{s_\lambda}|_g$ stesse sono nulle. Per veder ciò si prenda la formula (2) §. 3, e si tenga conto che Y_{s_λ} e le loro derivate normali mutano segno passando da un punto al simmetrico rispetto ai due piani coordinati aventi per asse comune s_λ nel mentre non muta nè segno, nè valore passando da un punto al simmetrico rispetto al piano $s_\lambda = 0$. Con ciò applicando la proprietà III §. 2 si ha la prima riduzione

$$\begin{aligned} Y_{s_3} = & \frac{1}{4\pi R_{s_g}^3} \int_S \left[Y_{s_3} (s_3 \cos ns_3 - (s_1 \cos ns_2 + s_2 \cos ns_1) \frac{3}{R_{s_g}^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{R_{s_g}^2} |s_3|_g s_3 \cos ns_3 \right] d\sigma_3 + \\ & - \frac{1}{4\pi R_{s_g}^3} \int_S \left[\frac{3}{2R_{s_g}^2} |s_3|_g^2 s_3^2 + 2 |s_1 s_2|_g s_1 s_2 - \frac{1}{2} s_3^2 \right] \frac{\partial Y_{s_3}}{\partial n} d\sigma_3 \end{aligned}$$

ed analogamente per $Y_{s_1} Y_{s_2}$.

Ulteriormente poi notando che scambiando s_1 con s_2 (ossia passando da un punto al simmetrico rispetto uno degli altri piani di simmetria) la Y_{s_3} e la $\frac{\partial Y_{s_3}}{\partial n}$ mutano segno senza mutare valore, nel mentre le quantità che esse moltiplicano sotto il segno integrale, non mutano per tale passaggio nè valore nè segno, sempre in forza

della proprietà III^a §. 2 si avrà $Y_{s_3} = 0$. Così adunque

$$|Y_{s_3}|_g = |Y_{s_3}|_g = |Y_{s_1}|_g = 0 \quad \left(\text{a meno di } \frac{1}{R_{s_g}^4} \right)$$

e siccome le Y_{s_λ} sono funzioni regolari, si avrà *a fortiori*

$$\left(\frac{\partial Y_{s_\lambda}}{\partial n} \right)_g = 0$$

Forza viva del liquido. — Indicata adunque con x_{s_λ} la componente secondo l'asse s_λ della velocità di τ_s , nell'atto traslatorio e con y_{s_λ} la componente secondo lo stesso asse della velocità angolare di τ_s , nell'atto rotatorio, la funzione delle velocità per un atto di movimento simultaneo di tutti i corpi della specie considerata (vedi *atto di movimento* §. 5) sarà

$$\sum_g (\Phi_g - \varphi_g + \sum_\lambda (x_{g\lambda} X_{g\lambda} - X'_{g\lambda} + y_{g\lambda} Y_{g\lambda})) .$$

Perciò la forza viva del liquido ci sarà data da

$$-\frac{1}{2} \sum_s \cdot \int \left(\frac{\partial \Phi_g}{\partial n} + \sum_\lambda x_{s\lambda} \cos ns_\lambda + y_{s_1} (s_2 \cos ns_3 - s_3 \cos ns_2) + \dots + \dots \right) \times \\ \times \sum_g (\Phi_g - \varphi_g + \sum_\lambda (x_{g\lambda} X_{g\lambda} - X'_{g\lambda} + y_{g\lambda} Y_{g\lambda})) d\sigma_s .$$

Per il calcolo di questa espressione si osservi che si hanno in primo luogo le formole seguenti :

$$\int_s \sum_g \Phi_g \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\sigma_s = \int_s \Phi_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\sigma_s + \sum_{g \neq s} \int_s \Phi_g \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\sigma_s = \\ = \int_s \Phi_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\sigma_s + \sum_{g \neq s} \int_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \left(|\Phi_g|_s + \frac{1}{2} \sum_\lambda \left| \frac{\partial^2 \Phi_g}{\partial s_\lambda^2} \right|_s s_\lambda^2 \right) \cdot d\sigma_s ; \\ \int_s \sum_g \Phi_g \cos ns_\lambda \cdot d\sigma_s = \sum_{g \neq s} \int_s \Phi_g \cos ns_\lambda \cdot d\sigma_s = \\ = \sum_{g \neq s} \left| \frac{\partial \Phi_g}{\partial s_\lambda} \right|_s \int_s s_\lambda \cos ns_\lambda \cdot d\sigma_s = \sum_{g \neq s} V_s \left| \frac{\partial \Phi_g}{\partial s_\lambda} \right|_s$$

$$\int_S \sum_g \Phi_g (s_2 \cos ns_3 - s_3 \cos ns_2) \cdot d\tau_s = \sum_{g-s} \int_S \Phi_g (s_2 \cos ns_3 - s_3 \cos ns_2) \cdot d\tau_s =$$

$$= \sum_{g-s} \left| \frac{\partial^2 \Phi_g}{\partial s_2 \partial s_3} \right|_s \cdot \int_S (s_2^2 - s_3^2) d\tau = 0$$

..... ;

Esse sono conseguenze dello sviluppo (2) di $|\Phi_g|_s$, dato in questo paragrafo e della simmetria del corpo in forza alla quale possiamo applicare la osservazione III §. 2; nelle due ultime poi i passaggi definitivi si operano in grazia al teorema di Gauss, avendo indicato nella seconda con V_s il volume di τ_s .

In secondo luogo abbiamo l'altro gruppo di formule:

$$\int_S \sum_g \varphi_g \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\tau_s = \int_S \varphi_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\tau_s = \int_S \Phi_s \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} \cdot d\tau_s =$$

$$= \sum_{\lambda} \cdot \sum_{g-s} \left| \frac{\partial^2 \Phi_g}{\partial s_\lambda^2} \right|_s \int_S \Phi_s s_\lambda \cos ns_\lambda d\tau_s ;$$

$$\int_S \sum_g \varphi_g \cos ns_\lambda \cdot d\tau_s = \int_S \varphi_s \cos ns_\lambda d\tau_s = \int_S X_{s_\lambda} \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} \cdot d\tau_s =$$

$$= \sum_{g-s} \left| \frac{\partial \Phi_g}{\partial s_\lambda} \right|_s \cdot \int_S X_{s_\lambda} \cos ns_\lambda d\tau_s ;$$

$$\int_S \sum_g \varphi_g (s_2 \cos ns_3 - s_3 \cos ns_2) \cdot d\tau_s =$$

$$= \sum_{g-s} \left| \frac{\partial^2 \Phi_g}{\partial s_2 \partial s_3} \right|_s \int_S Y_{s_1} (s_2 \cos ns_3 + s_3 \cos ns_2) d\tau_s = 0 ,$$

.....

le quali sono conseguenza della (4) di questo paragrafo ($(\varphi_g)_s = 0$) e della formola delle funzioni armoniche

$$\int \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial n} d\tau = \int \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\tau$$

e della proprietà III.^a §. 2, la quale ci dà modo di vedere che molti degli integrali di superficie sono nulli.

Abbiamo ancora l'altro gruppo di formule:

$$\int_S \sum_g x_{g\lambda} X_{g\lambda} \cos ns_\mu \cdot d\tau_s = x_{s\lambda} \int_S X_{s\lambda} \cos ns_\mu \cdot d\sigma_s +$$

$$+ \sum_{g-s} x_{g\lambda} \left| \frac{\partial X_{g\lambda}}{\partial s_\mu} \right|_s V_s = \sum_{g-s} x_{g\lambda} \left| \frac{\partial X_{g\lambda}}{\partial s_\mu} \right|_s V_s \quad (\lambda \neq \mu)$$

$$\int_S \sum_g x_{g\lambda} X_{g\lambda} \cos ns_\lambda d\tau_s = S_x x_{s\lambda} + \sum_{g-s} x_{g\lambda} \left| \frac{\partial X_{g\lambda}}{\partial s_\lambda} \right|_s V_s ;$$

$$\int_S \sum_g x_{g\lambda} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} X_{g\lambda} \cdot d\tau_s = x_{s\lambda} \int_S X_{s\lambda} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\sigma_s +$$

$$+ \sum_{g-s} x_{g\lambda} \int_S X_{g\lambda} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\tau_s = \sum_{g-s} x_{g\lambda} \left| X_{g\lambda} \right|_s \int_S \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\tau_s ;$$

$$\int_S \sum_g x_{g\lambda} X_{g\lambda} (s_2 \cos ns_3 - s_3 \cos ns_2) d\tau_s = 0$$

.....

.....

che si deducono in modo analogo a quello tenuto per il primo gruppo di formule usando dello sviluppo (5) di questo paragrafo, con le solite avvertenze riguardo ai termini che sono nulli in causa della supposta simmetria del corpo.

A questi tre gruppi di formule aggiungiamo il gruppo seguente che si deduce in modo analogo a quello tenuto per il secondo gruppo

$$\int_S \sum_g X'_{g\lambda} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\sigma_s = \int_S X'_{s\lambda} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} \cdot d\sigma_s = \int_S \Phi_s \frac{\partial X'_{s\lambda}}{\partial n} d\sigma_s = 0$$

$$\int_S \sum_g X'_{g\lambda} \cos ns_\mu \cdot d\sigma_s = \int_S X'_{s\lambda} \cos ns_\mu \cdot d\sigma_s =$$

$$= \int_S X_{s_\mu} \sum_{g-s} x_{g\lambda} \sum_\nu \left| \frac{\partial X_{g\lambda}}{\partial s_\nu} \right|_s \cos ns_\nu \cdot d\sigma_s = S_x \cdot \sum_{g-s} x_{g\lambda} \left| \frac{\partial X_{g\lambda}}{\partial s_\mu} \right|_s$$

$$\int_S \sum_g X'_{g\lambda} (s_2 \cos ns_3 - s_3 \cos ns_2) \cdot d\sigma_s =$$

$$\int_S Y_{s_1} \sum_{g-s} x_{g\lambda} \sum_\nu \left| \frac{\partial X_{g\lambda}}{\partial s_\nu} \right|_s \cos ns_\nu \cdot d\sigma_s = 0$$

.....

.....

Ed infine l'ultimo gruppo

$$\int_S \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial n} + \sum_\lambda x_{s\lambda} \cos ns_\lambda + y_{s_1} (s_2 \cos ns_3 - s_3 \cos ns_2) + \dots + \dots \right) \times$$

$$\times \sum_g y_{g_1} Y_{g_1} \cdot d\sigma_s = y_{s_1}^2 \int_S Y_{s_1} (s_2 \cos ns_3 - s_3 \cos ns_2) d\sigma_s$$

.....

Ed ora raccogliendo i risultati abbiamo tutti gli elementi per il calcolo della forza viva T del liquido che assumerà perciò la forma

$$(7) \quad -\frac{1}{2} \sum_s \left\{ \begin{aligned} & \int_S \Phi_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} d\sigma_s + \sum_\lambda y_{s\lambda}^2 \int_S Y_{s\lambda} \frac{\partial Y_{s\lambda}}{\partial n} d\sigma_s + S_x \sum_\lambda x_{s\lambda}^2 + \\ & + |\Phi_g|_s \cdot \int_S \Phi_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} d\sigma_s + \\ & + \left| \frac{\partial^2 \Phi_g}{\partial s_\lambda^2} \right|_s \cdot \int_S \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} s_\lambda^2 - \Phi_s s_\lambda \cos ns_\lambda \right) d\sigma_s + \\ & + \sum_\mu x_{s\mu} \left(\left| \frac{\partial \Phi_g}{\partial s_\mu} \right|_s + \sum_\lambda x_{g\lambda} \left| \frac{\partial X_{g\lambda}}{\partial s_\mu} \right|_s \right) \cdot (V_s - S_x) + \\ & + \sum_\lambda x_{g\lambda} |X_{g\lambda}|_s \int_S \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} d\sigma_s . \end{aligned} \right.$$

Calcolo della risultante. — Indichiamo $\xi_q \eta_q \zeta_q$ le coordinate del centro di τ_q rispetto alla terna fissa $\xi \eta \zeta$. Allora conformemente

D'altra parte è evidente che perchè una funzione come

$$|\Phi_g|_s, \quad \left| \frac{\partial \Phi_g}{\partial s^\mu} \right|_s, \quad |Xg_\lambda|_s$$

dependa da ξ_q bisognerà che almeno uno degli indici g, s sia uguale a q . Perciò posto

$$\int \Phi_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} d\sigma = S_\Phi, \quad \int_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial n} d\sigma = \Omega_s$$

si avrà

$$\frac{\partial T}{\partial \xi_q} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \sum_{g=q} \left\{ |\Phi_g|_q \cdot Q_\Phi + |\Phi_q|_g \cdot G_\Phi \right\} + \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \sum_{g=q} \sum_{\mu} x_{g\mu} \left\{ (V_g - G_x) \left| \frac{\partial \Phi_q}{\partial g_\mu} \right|_g + |\Phi g_\mu|_q \cdot \Omega_q \right\} \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \sum_{g=q} \sum_{\mu} x_{q\mu} \left\{ (V_q - Q_x) \left| \frac{\partial \Phi_g}{\partial q_\mu} \right|_q + |X_{q\mu}|_g \cdot \Omega_g \right\}. \end{array} \right.$$

D'altra parte ricordando che $x_{h\mu} = \alpha_{h\mu} \dot{\xi}_\mu + \beta_{h\mu} \dot{\eta}_h + \gamma_{h\mu} \dot{\zeta}_h$, e la formula (6) di questo paragrafo e ricorrendo alle formule ausiliarie stabilite ci riduciamo facilmente alla forma

$$(8) \quad \frac{\partial T}{\partial \xi_q} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \sum_{g=q} \left\{ \cdot Q_\Phi \cdot |\Phi_g|_q + G_\Phi |\Phi_q|_g \right\} + \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \sum_{g=q} \left\{ (V_g - G_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial |\Phi_q|_g}{\partial \xi_g} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial |\Phi_q|_g}{\partial \zeta_g} \right) + \right. \\ \left. + \Omega_g \cdot \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial \frac{1}{R_{gq}}}{\partial \xi_q} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial \frac{1}{R_{gq}}}{\partial \zeta_q} \right) \Delta_g \right\} + \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \sum_{g=q} \left\{ (V_q - Q_x) \left(\dot{\xi}_q \frac{\partial |\Phi_g|_q}{\partial \xi_q} + \dots + \dot{\zeta}_q \frac{\partial |\Phi_g|_q}{\partial \zeta_q} \right) + \right. \\ \left. \Omega_g \cdot \left(\dot{\xi}_q \frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \xi_g} + \dots + \dot{\zeta}_q \frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \zeta_g} \right) \Delta_q \right\}. \end{array} \right.$$

Calcolo di $\frac{dT}{\partial \dot{\xi}_q}$. Tenendo conto della formula $x_{h\mu} = \alpha_{h\mu} \dot{\xi}_h + \beta_{h\mu} \dot{\eta}_h + \gamma_{h\mu} \dot{\zeta}_h$

e della (6) di questo paragrafo abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_q} = & -Q_x \dot{\xi}_q - \frac{1}{2} \sum_{g-q} \cdot \sum_{\lambda} \alpha_{q\lambda} \left(\Omega_g \Delta_q \left| \frac{\partial \frac{1}{R_q}}{\partial q_\lambda} \right|_g + (V_q - Q_x) \left| \frac{\partial \Phi_g}{\partial q_\lambda} \right|_q \right) + \\ & - \frac{1}{2} \sum_{g-q} \cdot \sum_{\lambda} \cdot \sum_{\mu} \alpha_{q\mu} (\dot{\xi}_g \alpha_{g\lambda} + \dots + \dot{\zeta}_g \gamma_{g\lambda}) \left| \frac{\partial^2 \frac{1}{R_g}}{\partial q_\mu \partial q_\lambda} \right|_q \cdot \Delta_g \cdot (V_q - Q_x) + \\ & - \frac{1}{2} \sum_{g-q} \cdot \sum_{\mu} \cdot \sum_{\lambda} (\dot{\xi}_g \alpha_{g\mu} + \dots + \dot{\zeta}_g \gamma_{g\mu}) \alpha_{q\lambda} \left| \frac{\partial^2 \frac{1}{R_g}}{\partial g_\mu \partial q_\lambda} \right|_g \Delta_q (V_g - G_x) \end{aligned}$$

la quale tenuto conto delle formule ausiliarie stabilite si può scrivere

$$(9) \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_q} = \left\{ \begin{aligned} & -Q_x \dot{\xi}_q - \frac{1}{2} \sum_{g-q} \left(\Omega_g \cdot \Delta_q \cdot \frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \dot{\xi}_g} + (V_q - Q_x) \frac{\partial |\Phi_g|_q}{\partial \dot{\xi}_q} \right) + \\ & - \frac{1}{2} \sum_{g-q} \Delta_g (V_q - Q_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial^2 \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \dot{\xi}_q \partial \dot{\xi}_q} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial^2 \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \dot{\xi}_q \partial \dot{\zeta}_g} \right) + \\ & - \frac{1}{2} \sum_{g-q} \Delta_q (V_g - G_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial^2 \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \dot{\xi}_g \partial \dot{\xi}_g} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial^2 \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \dot{\xi}_g \partial \dot{\zeta}_g} \right); \end{aligned} \right.$$

e da questa possiamo rilevare come il valore di $\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}$ dipenda unicamente dalla posizione relativa dei centri dei corpi e dalla velocità dei centri stessi e dalla loro forma; ma niente affatto dalla loro orientazione relativa.

Calcolo di $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_q} \right)$ I termini di $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_q} \right)$ si originano derivando

totalmente la $\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_q}$ in due modi diversi.

1.° Quei termini che si hanno derivando in quanto il tempo entra esplicitamente; ossia quelli che si hanno derivando quei termini che dipendono, o dalla configurazione dei corpi come ad esempio $\Omega_g Q_x \Delta_q \dots$, o dalla loro velocità come $\dot{\xi}_g \dot{\eta}_g \dot{\zeta}_g$.

2.° Quei termini che si hanno derivando in quanto il tempo entra implicitamente nelle coordinate $\xi_g \eta_g \zeta_g \xi_q \eta_q \zeta_q$.

Gli unici termini di quest'ultima classe che, nei limiti d'approssimazione stabiliti, non siano trascurabili sono

$$\left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{g=q} \Omega_g \cdot \Delta_q \cdot \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \xi_q^2} \dot{\xi}_q + \dots + \frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \zeta_q} \dot{\zeta}_q \right) + \\ & -\frac{1}{2} \sum_{g=q} \Omega_g \Delta_q \cdot \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \xi_g^2} \dot{\xi}_g + \dots + \frac{\partial^2 \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \zeta_g} \dot{\zeta}_g \right) + \\ & -\frac{1}{2} \sum_{g=q} (V_q - Q_x) \cdot \left(\frac{\partial^2 |\Phi_{g|q}|}{\partial \xi_q^2} \dot{\xi}_q + \dots + \frac{\partial^2 |\Phi_{g|q}|}{\partial \zeta_q} \dot{\zeta}_q \right) + \\ & -\frac{1}{2} \sum_{g=q} (V_q - Q_x) \left(\frac{\partial^2 |\Phi_{g|q}|}{\partial \xi_g^2} \dot{\xi}_g + \dots + \frac{\partial^2 |\Phi_{g|q}|}{\partial \zeta_g} \dot{\zeta}_g \right) \end{aligned} \right.$$

che con semplicissime operazioni d'inversioni delle derivazioni possono anche scriversi

$$(10) \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \cdot \sum_{g=q} \Omega_g \cdot \Delta_q \cdot \left(\frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \xi_g} \dot{\xi}_q + \dots + \frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \zeta_g} \dot{\zeta}_q \right) + \\ & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \sum_{g=q} \Omega_g \cdot \Delta_q \cdot \left(\frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \xi_q} \dot{\xi}_g + \dots + \frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \zeta_q} \dot{\zeta}_g \right) + \\ & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \cdot \sum_{g=q} (V_q - Q_x) \cdot \left(\frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \xi_q} \dot{\xi}_q + \dots + \frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \zeta_q} \dot{\zeta}_q \right) + \\ & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi_q} \sum_{g=q} (V_q - Q_x) \left(\frac{\partial |\Phi_{g|q}|}{\partial \xi_g} \dot{\xi}_g + \dots + \frac{\partial |\Phi_{g|q}|}{\partial \zeta_g} \dot{\zeta}_g \right) . \end{aligned} \right.$$

Ora notiamo che R_{gq} rappresentando la distanza del centro del corpo τ_g da quello del corpo τ_q si ha

$$R_{gq}^2 = (\xi_g - \xi_q)^2 + (\eta_g - \eta_q)^2 + (\zeta_g - \zeta_q)^2$$

dalla quale discende facilmente che

$$\frac{\partial R_{gq}}{\partial \dot{\xi}_g} = -\frac{\partial R_{gq}}{\partial \dot{\xi}_q}, \dots, \frac{\partial R_{gq}}{\partial \dot{\zeta}_g} = -\frac{\partial R_{gq}}{\partial \dot{\zeta}_q}.$$

Ed ora approfittando di queste ultime formule la (9) della pagina precedente potrà scriversi:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_q} &= -Q_x \dot{\xi}_q - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_q} \sum_{g=q} \left((V_q - Q_x) \cdot |\Phi_g|_q - \Omega_g \Delta_q \frac{1}{R_{qg}} \right) \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_q} \sum_{g=q} \Delta_g (V_q - Q_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_q} \frac{1}{R_{gq}} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial}{\partial \dot{\zeta}_q} \frac{1}{R_{gq}} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_q} \sum_{g=q} \Delta_q (V_g - G_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_q} \frac{1}{R_{qg}} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial}{\partial \dot{\zeta}_q} \frac{1}{R_{qg}} \right). \end{aligned} \right.$$

Perciò quei termini della $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_q} \right)$ che si hanno derivando la $\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}}$ in quanto il tempo vi entra esplicitamente saranno:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} &- \frac{d}{dt} \dot{\xi}_q Q_x - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_q} \sum_{g=q} \frac{\partial}{\partial t} \left((V_q - Q_x) \cdot |\Phi_g|_q - \Omega_g \Delta_q \frac{1}{R_{qg}} \right) + \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_q} \sum_{g=q} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_g (V_q - Q_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_q} \frac{1}{R_{gq}} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial}{\partial \dot{\zeta}_q} \frac{1}{R_{gq}} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_q} \sum_{g=q} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_q (V_g - G_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}_q} \frac{1}{R_{qg}} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial}{\partial \dot{\zeta}_q} \frac{1}{R_{qg}} \right). \end{aligned} \right.$$

E perciò posto

$$(12) \quad W = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{g-q} Q_{\Phi} |\Phi_g|_q + G_{\Phi} |\Phi_q|_g + \frac{\partial}{\partial t} \left((V_q - Q_x) |\Phi_g|_q - \Omega_g \Delta_q \frac{1}{R_{qg}} \right) + \\ & -\frac{1}{2} \sum_{g-q} (V_g - G_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial |\Phi_q|_g}{\partial \dot{\xi}_g} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial |\Phi_q|_g}{\partial \dot{\zeta}_g} \right) + \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{g-q} (V_q - Q_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial |\Phi_g|_q}{\partial \dot{\xi}_g} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial |\Phi_g|_q}{\partial \dot{\zeta}_g} \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{g-q} \Delta_g \Omega_q \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial \frac{1}{R_{gq}}}{\partial \dot{\xi}_q} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial \frac{1}{R_{gq}}}{\partial \dot{\zeta}_q} \right) + \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{g-q} \Delta_q \Omega_g \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial \frac{\partial}{R_{qgx}}}{\partial \dot{\xi}_q} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial \frac{1}{R_{qgx}}}{\partial \dot{\zeta}_q} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{g-q} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_g (V_q - Q_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial \frac{1}{R_{gq}}}{\partial \dot{\xi}_q} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial \frac{1}{R_{gq}}}{\partial \dot{\zeta}_q} \right) + \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{g-q} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_q (V_g - G_x) \left(\dot{\xi}_g \frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \dot{\xi}_q} + \dots + \dot{\zeta}_g \frac{\partial \frac{1}{R_{qg}}}{\partial \dot{\zeta}_q} \right) \end{aligned} \right.$$

si avrà in forza delle (8) (10) (11)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_q} \right) = \frac{\partial W}{\partial \dot{\xi}_q} + Q_q \ddot{\xi}_q + \dot{\xi}_q \frac{dQ_x}{dt}$$

e le analoghe per η_q e ζ_q .

Se come ulteriore condizione ammettiamo che il movimento pulsatorio del corpo τ_q sia periodico ed a periodo estremamente piccolo, riuscirà sensibilmente nullo il contributo di $\dot{\xi} \frac{d}{dt} \cdot Q_x$ e le componenti che formarono lo scopo delle nostre ricerche assumeranno la forma

$$(13) \quad \begin{aligned} E_q &= \ddot{\xi} Q_x + \frac{\partial W}{\partial \dot{\xi}_q} \\ &\dots \dots \dots \\ H_q &= \ddot{\zeta} Q_x + \frac{\partial W}{\partial \dot{\zeta}_q} \end{aligned}$$

Conclusione. — Siccome il centro di τ_q è centro di simmetria (e quindi anche di massa) del corpo τ_q le equazioni del centro di massa ci daranno

$$m_q \ddot{\xi} = \Xi_q$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$m_q \ddot{\zeta} = Z_q$$

e con ciò le (13) potranno anche scriversi

$$\ddot{\xi} (m_q - Q_x) = \frac{\partial W}{\partial \xi_q}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\ddot{\zeta} (m_q - Q_x) = \frac{\partial W}{\partial \zeta_q}$$

Basta un semplice sguardo alla composizione di W per persuaderci che :

Se in un liquido inerte sono immersi più corpi $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_r$ il contorno dei quali si deforma periodicamente ma presenta ad ogni istante sei piani di simmetria ortogonale di cui tre formano un triedro trirettangolo e gli altri tre bisecano i diedri di esso,

e un osservatore esamina il movimento dei loro centri e per la loro grande distanza egli non è in grado di misurare le quantità piccole come l'inversa della quarta potenza della minima distanza dei centri,

e definisce per ogni corpo un numero positivo e fisso che chiama massa e che è la media dei valori di

$$m_q - Q_x$$

e chiama forza il prodotto della massa per l'accelerazione del centro egli ricaverà le seguenti leggi:

1.° *Il centro di un corpo isolato da qualunque altro prosegue il cammino con moto traslatorio uniforme.*

2.° *La forza che agisce su di un corpo in causa della presenza di più altri è la somma delle forze che agirebbero sul corpo ove fosse isolato con ciascuno degli altri.*

3.° *La forza che agisce su di un corpo per la presenza di uno o più altri dipende unicamente dal movimento dei corpi restanti e non dal movimento del corpo stesso,*

4.° *La forza che agisce su di un corpo dipende oltre che dal movimento dei corpi con cui è isolato anche dalla relativa posizione dei loro centri, e da nessun altro elemento,*

5.° *Le forze che agiscono su di un corpo per la presenza di uno o più altri ammettono funzione delle forze,*

6.° *Valgono nei rapporti fra massa, forza, accelerazione quei teoremi della meccanica dei punti materiali che sono una pura conseguenza della definizione di questi tre elementi, ossia della definizione:*

$$\text{mass. accel.} = \text{forz.} \quad , \quad \text{mass.} = \text{cost.} \quad , \quad \text{accel.} = \frac{d}{dt} \cdot \text{vel.}$$

Luglio 1901.

