Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Piero Benedetti

Sulla teoria delle forme imperalgebriche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 8 (1899), exp. nº 3, p. 1-113
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1899_1_8__A3_0>

PIERO BENEDETTI

SULLA

TEORIA DELLE FORME IPERALGEBRICHE

PRESENTATO COME TESI DI LAUREA

ALLA FACOLTÀ MATEMATICA DELL' UNIVERSITÀ PISANA

NELLA SESSIONE ESTIVA 1898.

Nella Teoria delle forme algebriche, considerando un sistema di forme $\Phi_i(x_1 x_2 \ldots x_n)$, si studiano quelle funzioni costruite coi coefficienti delle varie forme e con una o più serie di variabili che presentano il carattere dell'invariantività rispetto al gruppo delle trasformazioni lineari, del tipo:

$$\text{(I)} \qquad [i=1, 2 \ldots, n] \qquad x_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{in} y_n.$$

Interpetrando le variabili $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$ come coordinate omogenee di un elemento in uno spazio lineare ad $(n-1)$ dimensioni, le formole (I) determinano una trasformazione proiettiva dello spazio in se stesso; le equazioni $\Phi_i = 0$ rappresentano un certo sistema di enti geometrici; e il problema della Teoria delle forme corrisponde al problema della ricerca e dello studio di quelle proprietà geometriche di questo sistema di enti che si conservano a traverso trasformazioni proiettive. In altre parole la Teoria delle forme algebriche corrisponde a quella geometria degli enti algebrici che, secondo la espressione di KLEIN, ha per gruppo fondamentale di trasformazioni quello delle proiettività; ossia, alla Geometria proiettiva degli enti algebrici.

Il SEGRE, in due sue memorie dense di nuovi concetti e feconde di interessanti resultati [1]), ha aperto il campo delle inve-

---

[1]) SEGRE. — *Un nuovo campo di ricerche geometriche,* Saggio. IV Note. Atti della R. Acc. di Torino, vol. XXV 1889-90 e vol. XXVI 1890-91. *Rappresentazioni reali delle forme complesse.* Math. Ann. Bd. 40, 1892.

stigazioni geometriche su altri enti, che chiama *iperalgebrici* in quanto che fra essi sono contenuti gli ordinari enti algebrici, e sulla cui definizione non crediamo opportuno insistere qui. Basti ricordare che i più semplici fra essi stanno, con quelle trasformazioni biunivoche ma non proiettive dello spazio che chiamansi *antiproiettività,* in quella stessa relazione nella quale i più semplici enti algebrici stanno con le proiettività; e che queste antiproiettività sono rappresentate analiticamente da trasformazioni lineari delle variabili $x_1 x_2 \dots x_n$ nelle coniugate delle altre variabili $y_1 y_2 \dots y_n$, che indicheremo con $\bar{y}_1 \bar{y}_2 \dots \bar{y}_n$; ossia del tipo:

$$\text{(II)} \qquad [i = 1, 2 \dots, n] \quad x_{i1} = a_{i1} \bar{y}_1 + a_{i2} \bar{y}_2 + \dots + a_{in} \bar{y}_n .$$

Gli enti iperalgebrici sono rappresentabili analiticamente con equazioni, o sistemi di equazioni, *non* algebriche, ma della forma

$$\Phi \, (x_1 x_2 \dots x_n \, ; \; \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n) \, ,$$

dove Φ è il simbolo di una funzione razionale intera ed omogenea tanto nelle variabili $x_1 x_2 \dots x_n$ che nelle coniugate $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$. Una tale funzione Φ si dirà una *forma iperalgebrica;* ed è appunto alla Teoria delle forme iperalgebriche che il presente lavoro porta il suo modesto contributo.

La possibilità di una Teoria invariantiva delle forme iperalgebriche viene espressa dal Segre in alcune note a piè di pagina del Saggio citato; noi però la riguarderemo da un punto di vista più generale: non faremo alcuna ipotesi sulla realità o no (art. 11) delle forme da considerarsi, e studieremo quelle formazioni invariantive che nei coefficienti e nelle variabili sono forme non algebriche, ma più in generale *iperalgebriche.* Anzi questo ci obbligherà a modificare un poco la notazione simbolica delle forme proposte dal Segre [1]).

---

[1]) I resultati ottenuti dal Segre per le forme binarie reali si ritroveranno nelle seconde metà dei Cap. VII e XI.

Un'altra osservazione vogliamo fare. Nello studio degli enti iperalgebrici si presenta spontaneamente la considerazione delle antiproiettività, che come abbiamo detto servono per la definizione e la generazione di molti di essi; altrettanto spontaneamente quindi si presenta la ricerca e lo studio di quelle proprietà di questi enti che si conservano a traverso trasformazioni antiproiettive. Così ha origine una geometria che ha per gruppo fondamentale di trasformazioni quello di tutte le corrispondenze antiproiettive, che contiene in sè come sottogruppo quello delle corrispondenze proiettive. Ad essa corrisponde la Teoria invariantiva delle forme iperalgebriche rispetto al gruppo generale delle trasformazioni lineari dei tipi (I) e (II), ossia *di 1.ª e di 2.ª specie;* questa Teoria si svolge così subordinatamente all'altra che ha per base il gruppo delle trasformazioni lineari di 1.ª specie, che noi non sappiamo esimerci dal considerarle insieme ambedue.

Anzi, crediamo opportuno per la regolarità dell'esposizione premettere alcune considerazioni sulla Teoria invariantiva delle forme *algebriche* rispetto al gruppo di tutte le trasformazioni lineari di 1.ª e 2.ª specie.

I.

Osservazioni sulla invariantività di 2.ª specie.

1. Una trasformazione lineare di 2.ª specie, ossia del tipo

$$\text{(I)} \qquad x_i = a_{i1}\bar{y}_1 + a_{i2}\bar{y}_2 + \ldots + a_{in}\bar{y}_n \;, \quad [i = 1, 2 \ldots n]$$

quando si interpetrino le variabili $x_1, x_2 \ldots x_n$, $y_1, y_2 \ldots y_n$ come coordinate omogenee di elementi di uno spazio ad $(n-1)$ dimensioni, stabilisce fra gli elementi dello spazio medesimo una antiproiettività. I caratteri principali di una tal corrispondenza si rendono manifesti considerando la trasformazione lineare (I) come prodotto delle due

$$x_i = a_{i1} z_1 + \ldots + a_{in} z_n \;, \quad z_i = \bar{y}_i \;;$$

la 1.ª determina nello spazio una proiettività; la 2.ª quella speciale antiproiettività che è detta *coniugio,* e per la quale, se il sistema di riferimento nello spazio è reale, ad ogni elemento corrisponde il suo coniugato. La antiproiettività risulta come prodotto della proiettività per il coniugio, e si capisce quindi come molte proprietà siano comuni alle due corrispondenze; notevole fra tutte quella, che a due elementi che si appartengono corrispondono sempre due elementi che si appartengono, la quale insieme alla biunivocità e alla continuità della corrispondenza basta per caratterizzare la proiettività in un campo reale, nel quale il coniugio coincide con la identità. Notiamo infine come in una antiproiettività i rapporti anarmonici di quattro elementi di una forma di 1.ª specie e dei quattro corrispondenti siano fra loro coniugati, e quindi uguali solo quando siano reali.

2. Consideriamo nello spazio un ente algebrico, rappresentato p. es. da una equazione

$$F\ (x_1, x_2 \ldots x_n) = 0\ ;$$

sottoponendolo alla trasformazione antiproiettiva (I), otterremo un nuovo ente algebrico, la cui equazione,

$$F'\ (\overline{y}_1\,, \overline{y}_2 \ldots \overline{y}_n) = 0$$

si otterrà dalla precedente ponendo per le x le espressioni (I). Se vogliamo ricondurre questa equazione al tipo solito, ossia vogliamo farvi comparire le variabili y_i e non le $\overline{y}_i$, basta considerare la espressione coniugata del 1.º membro; e così otteniamo l'equazione

$$\overline{F}'\ (y_1, y_2 \ldots y_n) = 0$$

dove $\overline{F}'$ è il simbolo della funzione i cui coefficienti sono i coniugati di quelli della F'. Indichiamo con A ed A' i coefficienti delle F ed F'; saranno $\overline{A}'$ i coefficienti della $\overline{F}'$.

Ora supponiamo che l'annullarsi di una funzione $\Pi\ (A\ldots\ldots)$ dei coefficienti della F esprima una proprietà dell'ente algebrico $F = 0$ che si conservi nella antiproiettività; vuol dire che la funzione Π dovrà annullarsi anche quando sia costruita coi coefficienti della $\overline{F}'$, ossia dovrà aversi $\Pi\ (\overline{A}'\ldots)=0$ quando è $\Pi\ (A\ldots)=0$.

Ma osserviamo che i coefficienti $\overline{A}'$ sono funzioni dei coniugati $\overline{a}_{ik}$ e $\overline{A}$ dei coefficienti a_{ik} ed A; ne segue che la funzione coniugata della $\Pi\ (\overline{A}'\ldots)$, ossia la

$$\overline{\Pi\ (\overline{A}'\ldots)} = \overline{\Pi}\ (A'\ldots)\,,$$

sarà funzione dei coefficienti a_{ik} ed A veramente; essa dovrà annullarsi quando si annulla la Π (A....), ossia dovrà aversi:

$$k\,\Pi\,(\mathrm{A}\ldots.) = \overline{\Pi\,(\bar{\mathrm{A}}'\ldots.)}$$

dove k dipenderà soltanto dai coefficienti a_{ik}.

Guidati da questa considerazione, definiamo dunque la invariantività di una funzione dei coefficienti di un sistema di forme algebriche rispetto ad una generica delle trasformazioni lineari di 2.ª specie; non diciamo rispetto al loro gruppo, perchè nel gruppo da esse generato è contenuto anche il gruppo delle trasformazioni lineari di 1.ª specie, delle quali ora non si parla.

" Considerando un sistema di forme algebriche

" (II) $\quad \Phi_1\,(x_1\ldots x_n)\;,\;\Phi_2\,(x_1\ldots x_n)\;\ldots\ldots,\;\Phi_m\,(x_1\ldots x_n)$

" i cui coefficienti indicheremo con A, supponiamo che esse per
" la trasformazione lineare (I) vadano nelle forme

" (III) $\quad \overline{\Phi'_1}\,(\bar{y}_1\ldots\bar{y}_n)\;,\;\overline{\Phi'_2}\,(\bar{y}_1\ldots\bar{y}_n)\;\ldots\ldots,\;\overline{\Phi'_m}\,(\bar{y}_1\ldots\bar{y}_n)$

" i cui coefficienti indicheremo con $\bar{\mathrm{A}}'$. Il sistema delle forme
" coniugate a queste:

" (IV) $\quad \Phi'_1\,(y_1\ldots y_n)\;,\;\Phi'_2\,(y_1\ldots y_n)\;\ldots\ldots,\;\Phi'_m\,(y_1\ldots y_n)$

" i cui coefficienti sono A', si dirà il *sistema trasformato* del si-
" stema dato per la trasformazione (I) ".

" Una funzione razionale nei coefficienti A e in una o più
" serie di variabili $x, x'\ldots.$,

" $\Pi\,(\mathrm{A}\,,\,x\,,\,x'\ldots.)$,

" si dirà *invariantiva* rispetto a quella trasformazione lineare ge-
" nerica di 2.ª specie, o anche *invariantiva di 2.ª specie,* quando

" costruitala coi coefficienti trasformati A′ e con le variabili
" trasformate $y, y' \ldots$, si avrà la relazione:

$$\text{" (V)} \qquad \theta\,(a_{ik})\,\Pi\,(A, x, x' \ldots) = \overline{\Pi\,(A', y, y' \ldots)}\,,$$

" essendo $\theta\,(a_{ik})$ una funzione dei soli coefficienti a_{ik} „.

3. Dimostriamo subito che una funzione Π invariantiva di 2.ª specie, è anche invariantiva nel significato ordinario rispetto al gruppo delle trasformazioni lineari di 1.ª specie, ossia è anche invariantiva di 1.ª specie. Supponiamo che il sistema (II) si trasformi per la (I) nel sistema (IV); eseguiamo nel sistema (IV) la trasformazione particolare

$$y_i = \bar{u}_i \quad [i = 1, 2 \ldots n]\,;$$

esso andrà nel sistema

$$\Phi'_1\,(\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_n) \,\ldots\ldots, \quad \Phi'_m\,(\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_n)$$

di coefficienti A′, e quindi il sistema trasformato sarà

$$\text{(VI)} \qquad \overline{\Phi'_1}\,(u_1 \ldots u_n) \,\ldots\ldots, \quad \overline{\Phi'_m}\,(u_1 \ldots u_n)$$

di coefficienti $\bar{A}'$. Ora poichè Π è invariantiva di 2.ª specie, dovrà verificarsi la relazione (V) anche per questa particolare trasformazione; onde avremo, essendo k un certo numero:

$$k\,\Pi\,(A', y, y' \ldots) = \overline{\Pi\,(\bar{A}', u, u' \ldots)}\,,$$

e quindi:

$$\bar{k}\;\overline{\Pi\,(A', y, y' \ldots)} = \Pi\,(\bar{A}', u, u' \ldots)\,.$$

Confrontando con la (V) si ha:

$$\text{(VII)} \qquad \bar{k}\,\theta\,(a_{ik})\,\Pi\,(A, x, x' \ldots) = \Pi\,(\bar{A}', u, u' \ldots)\,.$$

Ma osserviamo che si ottiene il sistema (VI) effettuando sul sistema (II) la trasformazione composta della (I) e della $y_i = \overline{u}_i$, ossia la

$$x_i = a_{i1} u_1 + a_{i2} u_2 + \ldots . + a_{in} u_n ;$$

questa è una trasformazione generica di 1.ª specie, e la (VII) dimostra che Π gode di proprietà invariantiva anche rispetto a questa qualunque trasformazione lineare di 1.ª specie.

Dunque si ha: “ Una funzione invariantiva di 2.ª specie è anche invariantiva di 1.ª specie; ossia è invariantiva rispetto al gruppo di *tutte* le trasformazioni lineari, di 1.ª e 2.ª specie „.

Ricordiamo però che a seconda che si considera una trasformazione dell'una o dell'altra specie varia la definizione della invariantività.

4. Il teorema inverso in generale non è vero; ossia se una funzione Π è invariantiva di 1.ª specie, non lo è sempre anche di 2.ª specie. Dimostreremo che affinchè questo sia è condizione necessaria e sufficiente che la invariantività di 2.ª specie sia verificata per la particolare trasformazione così detta di coniugio:

$$\text{(VIII)} \qquad y_i = \overline{u}_i \quad [i = 1, 2 \ldots n] .$$

Che la condizione sia necessaria è chiaro; vediamo dunque che è sufficiente. Per ipotesi, se per una trasformazione lineare di 1.ª specie qualunque

$$x_i = a_{i1} y_1 + \ldots . + a_{in} y_n$$

il sistema (II) si trasforma nel sistema (IV), si ha

$$\theta\,(a_{ik})\;\Pi\,(\mathrm{A}\,x, x' \ldots) = \Pi\,(\mathrm{A}', y, y' \ldots) .$$

Per le (VIII) il sistema (IV) si trasforma nel sistema (VI); dire che Π verifica la proprietà invariantiva di 2.ª specie rispetto alle (VIII), significa dire che, essendo k un certo numero, si ha:

$$\text{(IX)} \qquad k\,\Pi\,(\mathrm{A}', y, y' \ldots) = \overline{\Pi\,(\overline{\mathrm{A}}', u, u' \ldots)} .$$

Confrontando si ottiene

$$k\,\theta(a_{ik})\,\Pi(\mathrm{A}, x, x' \ldots) = \overline{\Pi(\bar{\mathrm{A}}', u, u' \ldots)}\,,$$

e questa mostra la invariantività di Π rispetto alla trasformazione

$$x_i = a_{i1}\,\bar{u}_1 + \ldots . + a_{in}\,\bar{u}_n$$

che è generica di 2.ª specie, e mediante la quale appunto il sistema (II) si trasforma nel sistema (VI).

Così è dimostrato che fra le funzioni invariantive di 1.ª specie, ossia nel senso ordinario, sono invariantive anche di 2.ª specie quelle che soddisfano alla condizione (IX); la quale per le (VIII) può scriversi:

$$k\,\Pi(\mathrm{A}', y, y' \ldots) = \Pi(\bar{\mathrm{A}}', \bar{y}, \bar{y}' \ldots) = \bar{\Pi}(\mathrm{A}', y, y' \ldots)$$

Cioè: " Una funzione invariantiva di 1.ª specie lo è anche di 2.ª specie allora e solo allora che essa coincide a meno di una costante con la *funzione a coefficienti coniugati* ".

Sulla costante k si può dire soltanto che è di modulo 1; infatti per la trasformazione (VIII), come il sistema (IV) si trasforma nel sistema (VI), così il sistema (VI) si trasforma nel sistema (IV); onde si ha applicando la (IX) a questo caso:

$$k\,\Pi(\bar{\mathrm{A}}', u, u' \ldots) = \overline{\Pi(\mathrm{A}', y, y' \ldots)}\,,$$

ossia:

$$\bar{k}\;\overline{\Pi(\bar{\mathrm{A}}', u, u' \ldots)} = \Pi(\mathrm{A}', y, y' \ldots)\,;$$

onde confrontando con la (IX):

$$k\,\bar{k} = 1 \quad , \quad |k| = 1.$$

5. Le poche osservazioni precedenti bastano a stabilire un tal legame fra la Teoria invariantiva delle forme algebriche rispetto al gruppo delle trasformazioni lineari di 1.ª specie e quella rispetto al gruppo di tutte le trasformazioni di 1.ª e 2.ª specie, da permettere di riguardare la seconda come già contenuta nella prima,

E infatti se consideriamo un sistema di forme e conosciamo il complesso delle relative funzioni invariantive nel senso ordinario, fra queste si trovano e facilmente si riconoscono quelle che sono invariantive anche di 2.ª specie.

Per esempio, considerando il sistema di due forme binarie quadratiche a_x^2, α_x^2, si hanno gli invarianti (CLEBSCH):

$$\mathrm{D} = (a\,b)^2 \ , \quad \mathrm{D}' = (a\,\alpha)^2 \ , \quad \mathrm{D}'' = (\alpha\beta)^2 ,$$

che sono anche invarianti di 2.ª specie, essendo funzioni e coefficienti reali; invece l'invariante

$$(m-1)^2 \ \mathrm{D}'^2 - (m+1)^2 \ \mathrm{D}\,\mathrm{D}''$$

che col suo annullarsi esprime che i quattro elementi $a_x^2 = 0$ $\alpha_x^2 = 0$ stanno nel rapporto anarmonico m, non è in generale un invariante di 2.ª specie, giacchè la funzione a coefficienti coniugati è

$$(\bar{m}-1)^2 \ \mathrm{D}'^2 - (\bar{m}+1)^2 \ \mathrm{D}\,\mathrm{D}''$$

la quale in generale non coincide con quella a meno di una costante. E infatti sappiamo già che il rapporto di quattro elementi non si conserva in generale a traverso antiproiettività.

Termineremo osservando come, se la funzione Π è essa stessa una forma algebrica nei coefficienti e nelle variabili, la funzione $\theta\,(a_{ik})$ che comparisce nella definizione della invariantività di 2.ª specie sia, a meno di una costante, una potenza del modulo r della trasformazione. La dimostrazione si può condurre come quella della proprietà analoga nella Teoria delle forme algebriche [1]; però giunti come allora al resultato $\theta\,(a_{ik}) = c r^{\lambda}$, non si può come allora, applicando la trasformazione identica, concludere che è $c = 1$; solo si può dire che c è una costante di modulo 1, giacchè applicando la trasformazione di coniugio si ha

---

[1]) V. p. es. CAPELLI. *Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche.* (Memorie delle R. Acc. dei Lincei, Serie 3, Vol. 12, 1882; §. VI).

$r = 1$, e quindi c non è altro che quella costante k che comparisce nella formola (IX). Con facilità si possono costruire effettivamente delle funzioni invariantive per le quali c è di modulo 1 senza essere l'unità.

II.

Polinomi e forme iperalgebriche.
Condizioni d'identità.

6. Diremo *polinomio iperalgebrico* una espressione razionale intera in una o più quantità $x_1, x_2 \ldots x_n$ e nelle loro coniugate $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n$. Ogni termine del polinomio presenta due *gradi,* uno rispetto alle quantità x, e l'altro rispetto alle $\bar{x}$; la loro somma si dirà *grado complessivo* del termine. I due gradi massimi, che possono verificarsi anche in termini differenti del polinomio, si diranno *gradi* del polinomio.

Un polinomio iperalgebrico si dirà una *forma iperalgebrica* quando è omogeneo rispetto alle quantità x e $\bar{x}$ separatamente, ossia quando i due gradi sono gli stessi per tutti i suoi termini; se i due gradi sono n ed m, si scriverà che si ha una *forma iperalgebrica* $(n, \bar{m})$.

Con naturale estensione si definiscono i polinomi e le forme iperalgebriche contenenti più serie di quantità $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_m, \ldots$ e le loro coniugate $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$, $\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_m, \ldots$.

Nel seguito adotteremo la distinzione ormai abituale nella Teoria delle forme algebriche: il grado di un polinomio si dirà *ordine* quando le quantità a cui è relativo sono di lor natura variabili, o per lo meno nella questione di cui si tratta si presentano come variabili.

7. " Un polinomio iperalgebrico in cui si siano effettuate tutte le possibili riduzioni, ossia in cui si siano riuniti tutti i ter-

mini dei medesimi ordini, non può essere identicamente nullo se non sono nulli tutti i suoi coefficienti „. Può sembrare che questo teorema si riduca immediatamente all'analogo per i polinomi algebrici; questo però non è, perchè le variabili e le coniugate delle variabili non sono variabili fra loro indipendenti, ma sono fissati i valori delle une quando siano fissati i valori delle altre. È quindi necessaria una dimostrazione.

Consideriamo da prima un polinomio in una sola variabile x:

$$\sum_{r=0}^{r=m} a_r\, x^r\, \bar{x}^{m-r} + \sum_{r=0}^{r=m-1} b_r\, x^r\, \bar{x}^{(m-1)-r} + \ldots + \sum_{r=0}^{r=1} k_r\, x^r\, \bar{x}^{1-r} + l\,;$$

se esso è identicamente nullo, certamente devono essere identicamente nulle le varie parti contenenti i termini di uguale ordine complessivo, almeno per x di modulo sufficientemente piccolo; e infatti esse, mentre x tende a zero, divengono infinitesime di differenti ordini. Avremo dunque in generale:

$$\sum_{r=0}^{r=n} p_r\, x^r\, \bar{x}^{n-r} = 0$$

almeno quando il modulo di x è inferiore a un certo limite; o anche, supponendo $x \neq 0$:

$$\sum p_r \left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^r = 0\,.$$

Questa equazione *algebrica* in $\left(\dfrac{x}{\bar{x}}\right)$ è verificata qualunque sia la $\left(\dfrac{x}{\bar{x}}\right)$ purchè di modulo 1, giacchè ogni numero di modulo 1 può porsi sotto la forma $\left(\dfrac{x}{\bar{x}}\right)$ con x di modulo piccolo a piacere; dunque tutti i suoi coefficienti sono nulli, ossia si ha in generale $p_r = 0$. Così è dimostrato che tutti i coefficienti del polinomio sono nulli.

Se il polinomio contiene più variabili, ordinando rispetto a una di esse ci ridurremo a una variabile di meno mediante applicazione della parte già dimostrata del teorema, e così procedendo il teorema verrà dimostrato anche in questo caso generale.

8. Ne segue che affinchè due polinomi iperalgebrici siano identicamente uguali devono essere uguali i coefficienti corrispondenti.

Avvertiamo che saremmo ben lungi dal vero se si credesse che due polinomi iperalgebrici coincidano (a meno magari di un fattore costante) quando si annullano per i medesimi valori delle variabili. Questo avviene però in qualche caso particolare; si abbiano per esempio due polinomi a due serie di variabili $x_1 \dots x_n$, $y_1\, y_2 \dots y_m$, e supponiamo che in essi non siano contenute le $\bar{x}_1 \dots \bar{x}_n$, e vi siano invece contenute le $\bar{y}_1 \dots \bar{y}_m$ senza che vi siano le $y_1 \dots y_m$; siano cioè della forma:

$$F\ (x_1 \dots x_n\ ,\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_m)\ ,\ \Phi\ (x_1 \dots x_n\ ,\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_m).$$

Se essi si annullano per i medesimi valori delle variabili indipendenti x e y, o in altre parole se le equazioni $F = 0$ $\Phi = 0$ stabiliscono la medesima corrispondenza fra le due serie x e y, i due polinomi coincidono a meno di una costante. Questo è ben naturale, giacchè F e Φ sono due polinomi *algebrici* nelle variabili $x_1 \dots x_n\ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_m$, tutte fra loro indipendenti.

9. Un'ultima semplice osservazione. Poichè dall'identità di due polinomi iperalgebrici

$$F\ (x_1 \dots x_n\ \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) = \Phi\ (x_1 \dots x_n\ \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n),$$

segue la uguaglianza dei loro coefficienti, così ne segue anche la identità:

$$F\ (x_1 \dots x_n\ y_1 \dots y_n) = \Phi\ (x_1 \dots x_n\ y_1 \dots y_n)$$

dove le x e le y si considerano come indipendenti. Ossia: " Se due polinomi iperalgebrici sono identicamente uguali, essi lo sono anche quando le variabili e le coniugate delle variabili si considerano come due serie di variabili assolutamente indipendenti ".

Questo resultato sarà nel seguito più volte richiamato; esso permette, p. es., di dedurre dalla identità di due polinomi la identità delle loro derivate prese o soltanto rispetto alle variabili x, o soltanto rispetto alle $\bar{x}$.

III.

Rappresentazione simbolica. — Forme reali.

10. Una forma iperalgebrica lineare, a seconda che contiene le variabili x o le $\bar{x}$, si userà scrivere:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = a_x$$
$$\bar{a}_1 \bar{x}_1 + \bar{a}_2 \bar{x}_2 + \ldots + \bar{a}_n \bar{x}_n = \bar{a}_{\bar{x}} \;;$$

per conseguenza una forma $(p\,\bar{q})$ si potrà scrivere simbolicamente

$$a_x^p \, \bar{a}_{0\bar{x}}^{q} \tag{1}$$

ed avranno significato effettivo solo le combinazioni di p simboli a con q simboli $\bar{a}_0$.

Uno dei coefficienti della forma (1), a meno di un fattore numerico reale, è

$$a_i \, a_k \ldots a_t \, \bar{a}_{0r} \, \bar{a}_{0s} \ldots \bar{a}_{0u} \;;$$

il valore coniugato è, a meno del medesimo coefficiente numerico:

$$\overline{a_i \, a_k \ldots a_t \, \bar{a}_{0r} \, \bar{a}_{0s} \ldots \bar{a}_{0u}} \,.$$

Conveniamo di potere distribuire la segnatura ai singoli simboli, come potremmo se rappresentassero valori effettivi; ossia scriviamo:

$$\overline{a_i a_k \ldots a_t \bar{a}_{0r} \bar{a}_{0s} \ldots \bar{a}_{0u}} = \bar{a}_i \bar{a}_k \ldots \bar{a}_t \bar{\bar{a}}_{0r} \bar{\bar{a}}_{0s} \ldots \bar{\bar{a}}_{0u} = \bar{a}_i \bar{a}_k \ldots \bar{a}_t a_{0r} a_{0s} \ldots a_{0u}.$$

Allora, la forma *coniugata* della (1) potrà indicarsi simbolicamente con $\bar{a}_{\bar{x}}^{p}\, a_{0_x}^{q}$; si osservi bene di non confondere la forma coniugata con la forma *a coefficienti coniugati,* la quale sarebbe la $\bar{a}_x^p\, a_{0_{\bar{x}}}^{q}$.

11. La convenzione or ora fatta rende ragione del perchè nella notazione simbolica di una forma abbiamo adoperato due specie di simboli differenti a e a_0. E infatti, sia p. es. f una forma iperalgebrica $(p\ \bar{p})$; se noi avessimo posto semplicemente

$$f = a_x^p\, \bar{a}_{\bar{x}}^{p} ,$$

avremmo avuto $\bar{f} = \bar{a}_{\bar{x}}^{p}\, a_x^p$, e quindi $f = \bar{f}$; mentre questo in generale non sarà [1]).

Può però darsi che una forma f coincida con la sua coniugata $\bar{f}$; in tal caso la forma si dirà *reale.* Dalla identità:

$$a_x^p\, \bar{a}_{0_{\bar{x}}}^{q} = a_{0_x}^{q}\, \bar{a}_{\bar{x}}^{p} ,$$

segue anzitutto che è $p = q$, e inoltre le relazioni fra i coefficienti:

$$a_i a_k \dots a_t\, \bar{a}_{0r}\, \bar{a}_{0s} \dots \bar{a}_{0u} = a_{0i}\, a_{0k} \dots a_{0t}\, \bar{a}_r\, \bar{a}_s \dots \bar{a}_u = \overline{a_r\, a_s \dots a_u\, \bar{a}_{0i}\, \bar{a}_{0k} \dots \bar{a}_{0t}} .$$

Queste esprimono che le condizioni necessarie e sufficienti per la realità della forma sono che siano fra loro coniugati i coefficienti di combinazioni delle x e $\bar{x}$ fra loro coniugate.

Una forma reale $(p\ \bar{p})$ può indicarsi simbolicamente con la notazione $a_x^p\, \bar{a}_{\bar{x}}^{p}$, nella quale è inclusa la condizione della realità.

---

[1]) Il Segre, nella nota a pie' della pag. 281 alla introduzione al Saggio citato, proponendo una notazione simbolica per le forme, non introduce due simboli differenti a e a_0; Egli così allontana la possibilità della considerazione delle forme coniugate, della quale noi non potremmo fare a meno.

Di modo che quando vorremo supporre che una forma $a_x^p \overline{a}_{0\overline{x}}^{\,q}$ sia reale basterà che poniamo le uguaglianze simboliche:

$$a_i = a_{0i} \ [i = 1, 2, \dots n] .$$

12. Una forma f può coincidere con la sua coniugata a meno di un fattore costante, ossia può aversi l'identità:

$$f = k \overline{f} .$$

Allora la forma può ridursi reale moltiplicandola per un conveniente fattore costante. Infatti essendo, qualunque siano le x:

$$k = f : \overline{f} ,$$

k è un numero complesso di modulo 1, onde può porsi in infiniti modi sotto la forma $\frac{\overline{\sigma}}{\sigma}$; allora si ha:

$$\sigma f = \overline{\sigma} \overline{f} ,$$

e questo mostra che la forma σf è reale. La forma f si dirà *riducibile reale.*

Se in una forma iperalgebrica f scindiamo i coefficienti e le variabili nelle loro parti reali e immaginarie, la equazione $f = 0$ si scinde in due equazioni reali e a variabili reali; è facile vedere che esse si riducono a una sola allora e solo allora che la forma f è reale o riducibile tale.

13. Per le forme a più serie di variabili può adottarsi una notazione simbolica analoga a quella adottata per le forme a una sola serie; in generale una forma nelle variabili $x, y, \dots, \overline{x}, \overline{y}, \dots$ si potrà scrivere

$$a_x^p \, b_y^q \dots \overline{a}_{0\overline{x}}^{\,r} \, \overline{b}_{0\overline{y}}^{\,s} \dots ,$$

e se è reale:

$$a_x^p \, b_y^q \dots \overline{a}_{\overline{x}}^{\,p} \, \overline{b}_{\overline{y}}^{\,q} \dots .$$

IV.

Invariantività di 1.ª e 2.ª specie.

14. Consideriamo un sistema di forme iperalgebriche

$$(\alpha)\quad \Phi_1(x_1 \dots x_n, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n), \Phi_2(x_1 \dots x_n, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n) \dots, \Phi_m(x_1 \dots x_n, \bar{x}_1 \dots \bar{x}_n),$$

e indichiamo con A i coefficienti della 1.ª, con B, quelli della 2.ª, ecc. Quando si effettua sulle variabili x una trasformazione lineare di 1.ª specie

$$x_i = a_{i1}\, y_1 + \dots + a_{in}\, y_n \;[i = 1, 2 \dots n]$$

accompagnata dalla trasformazione coniugata per le $\bar{x}$:

$$x_i = a_{i1}\, y_1 + \dots + a_{in}\, y_n,$$

il sistema (α) si trasforma in un altro sistema

$$\Phi'_1(y_1 \dots y_n, \bar{y}_1 \dots \bar{y}_n), \Phi'_2(y_1 \dots y_n, \bar{y}_1 \dots \bar{y}_n) \dots \Phi'_m(y_1 \dots y_n, y_1 \dots y_n),$$

i cui coefficienti indicheremo con A′, B′,... .

Ora sia $\Pi\,(A\,\bar{A}\;B\,\bar{B} \dots x\,\bar{x}\;x'\,\bar{x}' \dots)$ una funzione razionale nei coefficienti A B ..., nei loro coniugati $\bar{A}\;\bar{B}$ ..., e in una o più serie di variabili $x\;x' \dots$ e le loro coniugate; se essendo $\theta\,(a_{ik}\,\bar{a}_{ik})$ una funzione razionale dei coefficienti a_{ik} e loro coniugati, si ha

$$\theta\,(a_{ik}\,\bar{a}_{ik})\,\Pi\,(A\bar{A}\;\;B\,\bar{B} \dots x\,\bar{x}\;\;x'\,\bar{x}' \dots) = \Pi\,(A'\,\bar{A}'\;\;B'\,\bar{B}' \dots y\,\bar{y}\;\;y'\;\bar{y}' \dots)$$

allora π si dice una *funzione invariantiva di 1.ª specie* del sistema (α).

Se sulle variabili x si effettua una trasformazione lineare di 2.ª specie

$$x_i = a_{i1}\,\bar{y}_1 + \dots + a_{in}\,\bar{y}_n$$

accompagnata dalla coniugata per le $\bar{x}$, il sistema (α) andrà in un certo sistema

$$\bar{\Phi}'_1\,(\bar{y}_1\ldots\bar{y}_n\,y_1\ldots y_n)\,,\;\bar{\Phi}'_2\,(\bar{y}_1\ldots\bar{y}_n y_1\ldots y_n)\,,\ldots,\;\bar{\Phi}'_m\,(\bar{y}_1\ldots\bar{y}_n\,y_1\ldots y_n)\,,$$

i cui coefficienti indicheremo con $\bar{\mathrm{A}}'\,\bar{\mathrm{B}}'\ldots$. Il sistema delle forme coniugate:

$$\Phi'_1\,(y_1\ldots y_n\,\bar{y}_1\ldots\bar{y}_n),\;\Phi'_2\,(y_1\ldots y_n\,\bar{y}_1\ldots\bar{y}_n)\,,\ldots,\;\Phi'_m\,(y_1\ldots y_n\,\bar{y}_1\ldots\bar{y}_n)\,,$$

i cui coefficienti sono $\mathrm{A}'\,\mathrm{B}'\ldots$, si dirà *sistema trasformato* del sistema (α). Se la funzione Π è tale che si abbia:

$$\theta\,(a_{ik}\,\bar{a}_{ik})\,\Pi\,(\mathrm{A}\,\bar{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}\,\bar{\mathrm{B}}\ldots x\,\bar{x}\,x'\,\bar{x}'\ldots) = \overline{\Pi\,(\mathrm{A}'\,\bar{\mathrm{A}}'\,\mathrm{B}'\,\bar{\mathrm{B}}'\ldots y\,\bar{y}\,y'\,\bar{y}'\ldots)}\,,$$

si dirà che Π è una *funzione invariantiva di 2.ª specie* del sistema (α).

15. Non ostante la maggiore generalità che ora noi concediamo tanto alla conformazione del sistema (α) che a quella di Π, le osservazioni che facemmo per le funzioni invariantive di 2.ª specie di un sistema di forme algebriche (art. 1 e segg.) possono ripetersi senza modificazioni sostanziali; e si ha:

1.° " Ogni funzione invariantiva di 2.ª specie lo è anche di 1.ª " specie, ossia è invariantiva rispetto al gruppo di *tutte* le tra- " sformazioni lineari ".

2.° " Fra le funzioni invariantive di 1.ª specie sono invarian- " tive di 2.ª specie quelle che coincidono a meno di un fattore " costante con le rispettive funzioni a coefficienti coniugati; questa " costante è necessariamente di modulo 1 ".

16. Noi ci limiteremo sempre alla considerazione di funzioni invariantive che siano razionali, intere, ed omogenee nei coefficienti delle forme e nei loro coniugati, nelle variabili e nelle loro coniugate; in altre parole, che siano forme iperalgebriche nei coefficienti e nelle variabili. In tal caso, la funzione $\theta\ (a_{ik}\ \bar{a}_{ik})$ che appare nella definizione della invariantività di 1.ª specie è il

prodotto di una potenza del modulo r della trasformazione e di una potenza del suo coniugato $\bar{r}$; per l'invariantività di 2.ª specie è un tal prodotto a meno di una costante di modulo 1. (V. art. 5).

Anche molti altri resultati della Teoria delle forme algebriche si estenderanno facilmente; per esempio, considerando due forme iperalgebriche simili, ossia dei medesimi ordini, i cui coefficienti indicheremo con $A_1\, A_2 \ldots,\ A'_1\, A'_2 \ldots$, ed essendo Π una funzione dei coefficienti della 1.ª forma e dei loro coniugati, si può eseguire la *operazione di Aronhold* sulla funzione Π riguardata nei coefficienti A o $\bar{A}$ e rispetto ai coefficienti A' o $\bar{A}'$ rispettivamente, secondo le due definizioni:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_1} A'_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial A_2} A'_2 + \ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{A}_1} \bar{A}'_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial \bar{A}_2} \bar{A}'_2 + \ldots\ldots ;$$

ebbene, ambedue queste operazioni conservano la proprietà invariantiva, tanto di 1.ª che di 2.ª specie.

Identico resultato si ha per la *polarizzazione*, la quale può effettuarsi su una forma $f = a_x^p\, \bar{a}_{0\bar{x}}^{\,q}$ o riguardandola nelle variabili x e rispetto a nuove variabili y, o riguardandola nelle $\bar{x}$ e rispetto alle $\bar{y}$, con le definizioni:

$$\Delta_y^r f = \frac{1}{p\,(p-1)\ldots(p-r+1)} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} y_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} y_n\right)^{(r)}$$

$$\Delta_{\bar{y}}^r f = \frac{1}{q\,(q-1)\ldots(q-r+1)} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{x}_1} \bar{y}_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_n} \bar{y}_n\right)^{(r)}.$$

Grazie alla osservazione fatta all'art. 9, dalla identità di due forme iperalgebriche si può dedurre l'identità di tutte le loro polari. È evidente inoltre che la polarizzazione, tanto rispetto all'una che all'altra delle variabili, gode qui delle medesime proprietà ed è soggetta alle medesime regole che nella Teoria delle forme algebriche; e infatti mentre p. es. si polarizza una forma $a_x^p \bar{a}_{0\bar{x}}^q$ riguardo alla x, questa forma si tratta come una forma algebrica di ordine p; la parte $\bar{a}_{0\bar{x}}^q$ nella operazione rimane assolutamente inerte. Ci dispensiamo quindi dall'insistere oltre su questo argomento.

V.

Forme binarie.

17. Ci proponiamo ora di determinare la forma caratteristica di una funzione invariantiva, per un sistema di forme iperalgebriche *binarie*.

Consideriamo da prima un sistema di forme lineari

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad , & b_x = b_1 x_1 + b_2 x_2 \,, \ldots . \\ \bar{p}_{\bar{x}} = \bar{p}_1 \bar{x}_1 + \bar{p}_2 \bar{x}_2 \quad , & \bar{q}_{\bar{x}} = \bar{q}_1 \bar{x}_1 + \bar{q}_2 \bar{x}_2 \,, \ldots . \end{array} \right.$$

e sia

$$\Pi \; (a_1 \, a_2 \, \bar{a}_1 \, \bar{a}_2 \ldots . \; p_1 \, p_2 \, \bar{p}_1 \, \bar{p}_2 \ldots .)$$

un loro *invariante di 1.ª specie.* Effettuando la trasformazione lineare

$$x_1 = \xi_1 x_1 + \eta_1 y_2 \quad , \quad x_2 = \xi_2 y_1 + \eta_2 y_2 \; ,$$

il sistema (1) si trasformerà nel sistema:

$$\mathrm{A}_x = a_\xi \, y_1 + a_\eta \, y_2 \ldots .. \; , \quad \bar{\mathrm{P}}_{\bar{x}} = \bar{p}_{\bar{\xi}} \, \bar{y}_1 + \bar{p}_{\bar{\eta}} \, \bar{y}_2 \ldots ..$$

e, ponendo $r = (\xi \eta)$, avremo una identità della forma:

$$r^\lambda \, \bar{r}^\mu \;\; \Pi \; (a_1 \, a_2 \, \bar{a}_1 \, \bar{a}_2 \ldots .) = \Pi \; (a_\xi \, a_\eta \, \bar{a}_{\bar{\xi}} \, \bar{a}_{\bar{\eta}} \ldots .).$$

Riguardiamo le espressioni dei due membri come due forme iperalgebriche nelle variabili $\xi \, \eta$ e nelle coniugate $\bar{\xi} \, \bar{\eta}$; secondo l'art. 9 la identità sussiste ancora se riguardiamo le $\bar{\xi} \, \bar{\eta}$ come indipendenti dalle $\xi\,\eta$, onde possiamo porre

$$\bar{\xi}_1 = 1 \qquad \bar{\xi}_2 = 0 \qquad \bar{\eta}_1 = 0 \qquad \bar{\eta}_2 = 1$$

senza fare alcuna ipotesi sulle $\xi_1\,\xi_2\,\eta_1\,\eta_2$; e otteniamo così la identità (essendo $\bar{r} = (\bar{\xi}\,\bar{\eta}) = 1$):

$$r^{\lambda}\,\Pi\,(a_1\,a_2\,\bar{a}_1\,\bar{a}_2 \ldots . p_1\,p_2\,\bar{p}_1\,\bar{p}_2 \ldots .) = \Pi\,a_{\xi}\,a_{\eta}\,\bar{a}_1\,\bar{a}_2 \ldots . p_{\xi}\,p_{\eta}\,\bar{p}_1\,\bar{p}_2 \ldots .) .$$

Questa dimostra che Π, considerata nei soli argomenti $a_1\,a_2 \ldots . p_1\,p_2 \ldots .$ e non nei coniugati, è un invariante nel senso ordinario del sistema di forme *algebriche* lineari:

$$(2) \qquad a_x\,,\ b_x \ldots .\,,\ p_x\,,\ q_x \ldots . \quad .$$

Quindi, secondo i noti resultati della Teoria delle forme algebriche, avremo:

$$\Pi = \sum k\,(ab)^r\,(ac)^s \ldots .\,(ap)^t\,(pq)^u \ldots \ldots = \sum k\,\mathrm{P}\,,$$

dove i coefficienti k dell'aggregato sono funzioni delle sole quantità $\bar{a}_1\,\bar{a}_2 \ldots . \bar{p}_1\,\bar{p}_2 \ldots ..$

Se ora consideriamo la funzione

$$\bar{\Pi} = \sum \bar{k}\,\bar{\mathrm{P}}\,,$$

anch'essa è un invariante di 1.ª specie del sistema (1), e quindi, considerata nei soli argomenti $a_1\,a_2 \ldots . p_1\,p_2 \ldots .$, è un invariante nel senso ordinario del sistema (2); avremo cioè:

$$\bar{\Pi} = \sum \bar{k}\,\bar{\mathrm{P}} = \sum h\,(ac)^{\lambda}\,(bd)^{\mu} \ldots .\,(pq)^{\nu}\,(aq)^{\rho} \ldots . = \sum h\,\mathrm{Q}\,.$$

È ben chiaro che, poichè i prodotti $\bar{\mathrm{P}}$ non contengono i coefficienti $a_1\,a_2 \ldots . p_1\,p_2 \ldots .$, i quali sono contenuti solo nei coefficienti $\bar{k}$, i nuovi coefficienti h risulteranno combinazioni lineari dei prodotti $\bar{\mathrm{P}}$; e quindi avremo infine, indicando in generale con $\bar{l}$

un certo coefficiente numerico:

$$\bar{\Pi} = \sum \bar{l}\ \bar{P}\ Q$$

$$\Pi = \sum l\ P\ \bar{Q} = \sum l\,(ab)^r (ac)^s \ldots (ap)^t (pq)^u \ldots (\overline{ac})^\lambda\,(\overline{bd})^\mu \ldots (\overline{aq})^\nu\,(\overline{pq})^\rho \ldots$$

Così è dimostrato che un invariante di un sistema di forme lineari si può sempre porre sotto la forma di un aggregato di prodotti di fattori dei tipi (mn) ed $(\overline{mn})$, essendo m_x ed n_x, o m_x ed $\bar{n}_{\bar{x}}$, o $\bar{m}_{\bar{x}}$ ed $\bar{n}_{\bar{x}}$ due forme qualunque del sistema; la segnatura insiste o su ambedue gli elementi del determinante o su nessuno.

18. Se si ha un sistema di forme iperalgebriche

$$a_x^n\,\bar{a}_{0_{\bar{x}}}^m \quad , \quad b_x^p\,\bar{b}_{0_{\bar{x}}}^q \ , \ldots .$$

che siano effettivi prodotti di forme lineari, ogni invariante del loro sistema è anche un invariante del sistema di forme lineari

$$a_x \ , \ \bar{a}_{0_{\bar{x}}} \ , \ b_x \ , \ \bar{b}_{0_{\bar{x}}} \ \ldots\ldots ,$$

e quindi la sua forma ci è già nota. Allora si dimostra precisamente come nella Teoria delle forme algebriche [1]) mediante successiva applicazione del processo di Aronhold riguardo ai coefficienti delle varie forme del sistema e ai loro coniugati, che anche se le forme del sistema sono rappresentazioni simboliche di forme iperalgebriche generali, ogni loro invariante può scriversi *simbolicamente* sotto la forma medesima.

E così è esaurita la ricerca nel caso di un invariante di 1.ª specie del sistema dato; ma il caso di un covariante si riconduce subito a questo. Infatti se consideriamo una forma lineare m_x, si vede subito che le quantità m_2 e $-m_1$, $\bar{m}_2$ e $-\bar{m}_1$ sono cogredienti alle variabili $x_1\,x_2$ e $\bar{x}_1\,\bar{x}_2$ rispettivamente; se adunque abbiamo un covariante del sistema dato, contenente le variabili

---

[1]) V. p. es. Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie,* Bd. I.

$x, x' \ldots$. e le loro coniugate, e aggiungendo al sistema le forme lineari m_x, n_x, ecc. poniamo

$$x_1 = m_2 \;,\quad x_2 = -m_1 \;,\qquad x'_1 = n_2 \;,\quad x'_2 = -n_1 \,, \ldots\ldots$$

e quindi

$$\bar{x}_1 = \bar{m}_1 \;,\quad \bar{x}_2 = -\bar{m}_1 \;,\qquad \bar{x}'_1 = \bar{n}_2 \;,\quad \bar{x}'_2 = -\bar{n}_1 \,, \ldots\ldots$$

otterremo un invariante del sistema ampliato; il quale potrà scriversi simbolicamente sotto la forma:

$$\sum \mathrm{M}\, (ab)^h\, (\overline{a_0 b_0})^k\, (\overline{a_0 m})^l\, (\overline{a_0 n})^m\, (am)^n\, (mn)^p\, (\overline{mn})^q \ldots\ldots$$

Onde il covariante potrà scriversi:

$$\sum \mathrm{M}\, (ab)^h\, (\overline{a_0 b_0})^k\, \bar{a}_{0_{\bar{x}}}^{\,l}\; \bar{a}_{0_{\bar{x}'}}^{\,m}\; a_x^n\, (xx')^p\, (\overline{xx'})^q \ldots\ldots$$

Questa è la espressione simbolica generale di una forma invariantiva.

19. Che reciprocamente ogni prodotto simbolico costituito come abbiamo veduto rappresenti una forma invariantiva di 1.ª specie, è ben evidente; e infatti per una trasformazione lineare di 1.ª specie i fattori lineari simbolici si riproducono identicamente, e i determinanti simbolici a meno del modulo della trasformazione o del suo coniugato; onde tutto il prodotto si riproduce a meno di una potenza del modulo e del suo coniugato. Ed anche un aggregato di tali prodotti simbolici sarà una forma invariantiva di 1.ª specie, purchè naturalmente sia rispettata l'omogeneità nei coefficienti e nelle variabili.

Quanto poi alle forme invariantive di 2.ª specie, anch'esse potranno scriversi simbolicamente come aggregati di prodotti simbolici della specie veduta; ma affinchè inversamente un tale aggregato rappresenti una forma invariantiva di 2.ª specie, è necessario che, oltre la condizione della omogeneità, i coefficienti M siano tali che l'aggregato coincida a meno di una costante col suo coniugato. Questo avviene p. es. quando i coefficienti M sono tutti reali. In particolare è chiaro che un solo prodotto simbolico rappresenta sempre una forma invariantiva di 2.ª specie.

20. Il lettore avrà già osservato come la ordinaria Teoria delle forme algebriche, pur rientrando nella Teoria delle forme iperalgebriche (giacchè una forma algebrica non è che una forma iperalgebrica in cui uno degli ordini è nullo) acquisti in essa una maggiore estensione; e infatti qui si considerano funzioni invariantive che sono forme iperalgebriche e non soltanto algebriche nei coefficienti e nelle variabili. È facile vedere però che come sistema completo delle forme invariantive di un sistema di forme algebriche può assumersi qui quello stesso che si stabilisce nella ordinaria Teoria delle forme, al quale però si aggiungano anche tutte le forme coniugate di quelle che già ci si trovano. E infatti, se consideriamo un prodotto simbolico qualunque, e poniamo in un primo gruppo quelli fra i suoi fattori che *non* sono segnati, e in un secondo quelli che sono segnati, ci persuaderemo subito che, trattandosi di un sistema di forme algebriche, i due gruppi hanno significato effettivo di per se, giacchè se nel prodotto comparisce un simbolo a non ci può mai comparire $\bar{a}$, e viceversa. Di più il prodotto dei fattori del 1.° gruppo e il coniugato del prodotto di quelli del 2.° sono due funzioni invariantive nel senso ordinario, e quindi esprimibili per le forme del sistema completo ordinario; dunque il 2.° prodotto è esprimibile per le coniugate delle forme del sistema completo ordinario, e quindi l'intero prodotto simbolico è esprimibile per le forme del sistema completo e per le loro coniugate.

Noteremo infine come per un sistema di forme iperalgebriche si possano ricercare due sistemi completi, l'uno per le forme invariantive di 1.ª specie, l'altro per quelle di 2.ª specie. Ma poichè una forma invariantiva di 2.ª specie lo è anche di 1.ª specie, certamente tutte le forme invariantive di 2.ª specie sono esprimibili per le forme del 1.° sistema completo; il quale quindi rappresenta anche il sistema completo per le forme di 2.ª specie, quando però avvenga che tutte le sue forme siano esse stesse invariantive anche di 2.ª specie. In questo caso dunque si ha un unico sistema completo per le forme invariantive di ambedue le specie.

21. Termineremo queste generalità sulle forme binarie osservando come, considerando una forma a due serie di variabili

$$f = a_x^m \, b_y^n \, \bar{a}_{0_{\bar{x}}}^{p} \, \bar{b}_{0_{\bar{y}}}^{q} \, ,$$

possa definirsi la operazione Ω da eseguirsi su essa o riguardo alle variabili x, y o riguardo alle $\bar{x}, \bar{y}$; si manterranno evidentemente tutte le proprietà di questa operazione, ed avremo:

$$\Omega_{xy} f = (ab) \, a_x^{m-1} b_y^{n-1} \bar{a}_{0_{\bar{x}}}^{p} \, \bar{b}_{0_{\bar{y}}}^{q} \, , \quad \Omega_{\bar{x}\bar{y}} f = (\overline{a_0 b_0}) \, a_x^m \, b_y^n \, \bar{a}_{0_{\bar{x}}}^{p-1} \, \bar{b}_{0_{\bar{y}}}^{q-1} \, .$$

Così pure considerando due forme

$$f = a_x^m \, \bar{a}_{0_{\bar{x}}}^{n} \quad , \quad \varphi = b_x^p \, \bar{b}_{0_{\bar{x}}}^{q} \, ,$$

possono introdursi gli *scorrimenti* dell'uno sull'altra con le definizioni e le notazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
(f\varphi)_r &= (ab)^r \, a_x^{m-r} \, b_x^{p-r} \, \bar{a}_{0_{\bar{x}}}^{n} \, \bar{b}_{0_{\bar{x}}}^{q} \\
(f\varphi)_{\bar{r}} &= (\overline{a_0 b_0})^r \, a_x^m \, b_x^p \, \bar{a}_{0_{\bar{x}}}^{n-r} \, \bar{b}_{0_{\bar{x}}}^{q-r} \\
(f\varphi)_{r,\bar{s}} &= (ab)^r \, (\overline{a_0 b_0})^s \, a_x^{m-r} \, b_x^{p-r} \, \bar{a}_{0_{\bar{x}}}^{n-s} \, \bar{b}_{0_{\bar{x}}}^{q-1} \, .
\end{aligned}$$

Essi si diranno *scorrimento semplice* r^o, *scorrimento semplice* $\bar{r}^o$, e *scorrimento misto* $(r, \bar{s})$ rispettivamente; possono effettuarsi con l'aiuto della polarizzazione e della operazione Ω, come nella Teoria delle forme algebriche, e quindi si conservano anche tutte le altre loro principali proprietà, le quali si dimostrano partendo appunto da questa prima [1]).

---

[1]) V. Clebsch, *Theorie der binären alg. Formen*, Leipzig 1872.

VI.

Considerazioni per la interpetrazione geometrica sul piano di Gauss.

22. La interpetrazione geometrica delle forme binarie potrà effettuarsi su una forma di 1.ª specie qualunque, considerando $x_1\, x_2$ come coordinate omogenee di un elemento della forma stessa. È opportuno però riferirci a una rappresentazione reale della forma, per esempio a quella notissima sulla sfera, o meglio sul piano di Gauss. Considerando una coppia di valori delle due variabili $x_1\, x_2$, e ponendo $\frac{x_1}{x_2} = z$, noi faremo corrispondere a quella coppia di valori quel punto del piano di Gauss che è indice del valore z della variabile complessa.

Una trasformazione lineare di 1.ª specie delle variabili $x_1\, x_2$ nelle variabili $y_1\, y_2$,

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad , \quad x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \,,$$

quando si ponga $w = \frac{y_1}{y_2}$ dà origine a una trasformazione lineare della variabile z nella variabile w:

$$z = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} \,,$$

e questa a una trasformazione del piano di Gauss in se stesso, che sarà l'immagine di una trasformazione proiettiva della forma di 1.ª specie che sul piano medesimo può concepirsi rappresentata. Le proprietà caratteristiche di queste trasformazioni sono ben note; ma giacchè dovremmo per lo meno ricordarle, preferiamo ritrovarle per una via semplice e breve [1]).

---

[1]) Le considerazioni che seguono mi sono state suggerite dalla lettura della citata memoria del Segre: *Rappresentazioni reali delle forme complesse*, Math. Ann. 40.

23. Per questo osserviamo come può intendersi ottenuta la rappresentazione reale di una forma di 1.ª specie sul piano di Gauss. Assumiamo come forma di 1.ª specie obiettiva un fascio di raggi il cui centro C sia immaginario e il cui sostegno sia un piano reale Π; allora eccezion fatta per la retta che congiunge C col suo coniugato C′, su ogni retta del fascio si ha uno ed un sol punto reale, che è la sua intersezione con la retta coniugata uscente da C′; ed inversamente ogni punto del piano sta su una e su una sola delle rette del fascio C. Si ottiene dunque una rappresentazione reale del fascio sul piano Π facendo corrispondere ad ogni raggio il punto reale che esso contiene, e si ha un solo elemento eccezionale: la retta C C′, che ha per immagine tutti i suoi infiniti punti reali.

Ora sul piano fissiamo un sistema di assi cartesiani ortogonali, e supponiamo che il centro C del fascio sia uno dei due punti ciclici del piano. Se (x, y) è un punto reale del piano, le equazioni delle due rette che uscendo da esso vanno ai due punti ciclici sono:

$$\mathrm{X} + i\,\mathrm{Y} = x + i\,y\ ,\quad \mathrm{X} - i\,\mathrm{Y} = x - i\,y\ ,$$

con X Y coordinate correnti. Una di queste rette passa per il punto C, l'altra per il coniugato C′; sia C quello dei due punti per cui passa la 1.ª retta. Facendo variare il parametro $x + i y$, varia la retta nel fascio di centro C; e sempre avviene che la immagine reale della retta è il punto (x, y).

Sul piano π distendiamo la variabile complessa z, al modo di Gauss; in generale il punto (x, y) sarà indice del valore $z = x + i y$ della variabile complessa. Così avremo ottenuto un piano di Gauss, e una corrispondenza fra i punti di esso e le rette del fascio obiettivo C tale che ogni punto del piano è l'immagine reale di quella retta del fascio che passa per esso; e il valore della variabile complessa in quel punto non è altro che il valore del parametro a cui corrisponde la retta nel fascio. Alla retta all'infinito del piano corrispondono tutti i suoi punti reali, e a questi l'unico valore $z = \infty$ della variabile.

In questo modo può intendersi ottenuta la rappresentazione reale di una forma di 1.ª specie sul piano di Gauss.

24. Una trasformazione lineare di 1.ª specie delle variabili $x_1 x_2$ nelle $y_1 y_2$ stabilisce una proiettività P nel fascio di centro C, e nel medesimo tempo una corrispondenza T fra i punti del piano di Gauss, immagine della proiettività P. Il legame e questo: se due punti del piano sono corrispondenti nella T, i due raggi del fascio C passanti per essi sono corrispondenti nella P. Anche entro il fascio con centro nell'altro punto ciclico C' viene stabilita una proiettività P' (la coniugata della P) quando si facciano corrispondere due raggi che proiettano due punti corrispondenti nella T.

Dunque, dato un punto z del piano, ecco come si ottiene il punto w corrispondente nella T: si considerano i due raggi di C e C' passanti per z, e di essi i due corrispondenti nelle proiettività P e P', la loro intersezione dà il punto w. Ma allora è evidente che la T è una corrispondenza quadratica in cui i due punti ciclici del piano sono vertici dei triangoli fondamentali di ambedue le figure e omologhi di se stessi, e che è quindi una *affinità circolare* di Möbius [1]), ossia una corrispondenza reale binnivoca e continua la cui proprietà caratteristica è quella di trasformare cerchi in cerchi.

Dunque: " A una trasformazione lineare di 1.ª specie delle variabili $x_1 x_2$ nelle variabili $y_1 y_2$ corrisponde sul piano di Gauss una affinità circolare ".

25. Le affinità circolari di Möbius possono presentare due casi distinti: esse sono corrispondenze quadratiche reali [2]) nelle quali

---

[1]) Möbius, *Die Theorie der Kreisverwandschaft in rein geometrischer Darstellung*, Werke, Bd. II.

[2]) **Questa non è però la definizione di Möbius.**

i due triangoli fondamentali hanno due vertici a comune nei punti ciclici del piano, ma questi possono essere o omologhi di se stessi o l'uno omologo dell'altro. In base a questo fatto può farsi la distinzione in affinità *dirette* e *inverse;* e la giustificazione del nome sta in ciò, che ambedue le specie di affinità godono della proprietà di conservare gli angoli, ma le dirette ne conservano anche il senso, mentre le inverse lo invertono.

In una affinità circolare i due terzi vertici dei triangoli fondamentali, necessariamente omologhi, sono in generale a distanza finita, e sono centri di due fasci di raggi corrispondenti, proiettivi. Questi due punti M N', che si dicono *punti centrali* dell'affinità, corrispondono nelle due figure a tutti i punti della retta all'infinito, onde sono necessariamente reali, e non possono trovarsi altro che contemporaneamente a distanza infinita.

Se la affinità è diretta i punti C C' sono omologhi di se stessi, e nella proiettività fra i due fasci M ed N' ai due raggi MC ed MC' corrispondono i raggi N' C' ed N' C; ciò basta per dire che i due fasci di centri M ed N' sono *inversamente uguali.* Se invece la affinità è inversa si troverà che sono *direttamente uguali.*

A ogni raggio uscente da M corrisponde un raggio uscente da N'; i due raggi sono riferiti proiettivamente, e ai punti M N' corrispondono i punti all'infinito dei raggi stessi; è chiaro quindi che anche ad ogni semiraggio uscente da M corrisponde un semiraggio uscente da N', e viceversa. Di più, se A A', BB' sono coppie di punti corrispondenti su due semiraggi corrispondenti, vedremo subito che per la proiettività si ha:

$$MA \,.\, N'A' = MB \,.\, N'B',$$

ossia il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti sui due semiraggi dai rispettivi punti centrali è costante. Questo prodotto rimane costante anche al ruotare dei due semiraggi, perchè basta notare che, come facilmente si dimostra, a ogni cerchio di centro M ne corrisponde uno di centro N'. Il valore costante del prodotto si dirà la *costante dell' affinità.*

Si ha così una definizione metrica molto intuitiva della affinità circolare: su due semiraggi uscenti da due punti MN′ si corrispondono due punti tali che sia costante il prodotto delle loro distanze dai rispettivi punti MN′; i due semiraggi ruotano descrivendo due fasci uguali inversamente o direttamente secondo che l'affinità è diretta o inversa.

Finora abbiamo supposto che esistessero i due punti centrali MN′ a distanza finita; se questo non è, la corrispondenza quadratica si riduce a una proiettività, nella quale i due punti ciclici sono uniti o si corrispondono involutoriamente secondo che l'affinità è diretta o inversa; dunque questa affinità si riduce a una similitudine rispettivamente diretta o inversa.

Altri casi, se la corrispondenza non è degenere, non sono possibili.

26. Dunque a una trasformazione lineare di 1.ª specie sulle variabili corrisponde una affinità circolare diretta (o una similitudine diretta) sul piano di Gauss; inversamente, a ogni tale affinità circolare diretta corrisponde sempre una trasformazione lineare sulle variabili? La risposta affermativa è immediata; infatti si ha una proiettività fra i raggi del fascio con centro nel punto ciclico C, quindi una trasformazione lineare sul parametro da cui dipendono i raggi del fascio, che è la variabile z, e in conseguenza una trasformazione lineare di 1.ª specie sulle variabili $x_1 x_2$.

Ossia: " Al gruppo delle trasformazioni lineari di 1.ª specie sulle variabili $x_1 x_2$ corrisponde il gruppo delle affinità circolari dirette sul piano di Gauss ".

27. Una trasformazione lineare di 2.ª specie delle variabili $x_1\, x_2$ può considerarsi come il prodotto di una di 1.ª specie per il coniugio, il quale sul piano di Gauss è rappresentato dalla formola $z = \bar{w}$. Questa relazione stabilisce sul piano una corrispondenza che non è altro che una simmetria rispetto all'asse reale; quindi ad una trasformazione di 2.ª specie corrisponderà sul piano

il prodotto di una affinità circolare diretta e di una tale simmetria, e perciò (come si vedrà subito pensando p. es. alla nostra definizione metrica dell'affinità) una affinità circolare inversa. Reciprocamente è evidente che ogni affinità circolare inversa sul piano di Gauss corrisponde a una trasformazione lineare di 2.ª specie sulle variabili.

Si ha dunque in generale: " Al gruppo di tutte le trasformazioni lineari di 1.ª e 2.ª epecie sulle variabili $x_1 x_2$, corrisponde il gruppo di tutte le affinità circolari sul piano di Gauss ".

28. Abbiamo considerato soltanto trasformazioni lineari non degeneri, ma per le degeneri la questione si esaurisce subito. Infatti esse stabiliscono sulla forma di 1.ª specie obiettiva delle proiettività od antiproiettività degeneri, per le quali cioè a due elementi della 1.ª e 2.ª serie corrispondono tutti gli elementi della 2.ª e 1.ª serie rispettivamente; così sul piano di Gauss avremo due punti singolari a ognuno dei quali considerato di una certa figura corrispondono tutti i punti dell'altra figura. Una tale corrispondenza può riguardarsi come una affinità circolare degenere; basta supporre che la costante sia nulla.

29. Siano $A_1 A_2 A_3 A_4$ quattro punti del piano di Gauss, indici dei valori $z_1 z_2 z_3 z_4$, e supponiamo che il rapporto anarmonico $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ sia reale. Proiettando i quattro punti dai due punti ciclici C C′ otterremo due quaterne di raggi, e i raggi della 1.ª quaterna corrisponderanno ai valori $z_1 z_2 z_3 z_4$ del parametro, quelli della seconda ai valori $\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \bar{z}_4$. I rapporti anarmonici delle due quaterne saranno dunque $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ e $(\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \bar{z}_4)$, e quindi uguali perchè $(z_1 z_2 z_3 z_4)$ è reale. Allora, consideriamo il cerchio $A_1 A_2 A_3$; esso passa per C e C′, e stabilisce fra i fasci di centri C e C′ una proiettività in cui ai raggi $CA_1\ CA_2\ CA_3$ corrispondono i raggi $C'A_1\ C'A_2\ C'A_3$, e quindi al raggio CA_4 corrisponde il raggio $C'A_4$; dunque A_4 è un punto del cerchio $A_1 A_2 A_3$. Di più *sul cerchio*

il rapporto anarmonico dei 4 punti $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ è quello dei quattro raggi proiettanti, ossia è $(z_1\,z_2\,z_3\,z_4)$; cioè:

" Se il rapporto anarmonico di quattro punti del piano di " Gauss è reale, essi sono su un cerchio (o su una retta), e stanno " su esso in quello stesso rapporto anarmonico reale ".

Ricordate queste cose per noi essenziali, passiamo all'esame di qualche caso particolare.

VII.

Forma iperalgebrica $(1, \bar{1})$, reale.

30. Consideriamo una forma iperalgebrica $(1, \bar{1})$:

$$f = a_{11}\,x_1\,\bar{x}_1 + a_{12}\,x_1\,\bar{x}_2 + a_{21}\,x_2\,\bar{x}_1 + a_{22}\,x_2\,\bar{x}_2.$$

Vogliamo supporre che questa forma sia reale; allora i coefficienti estremi saranno reali e i medi fra loro coniugati, e potremo porre simbolicamente

$$f = a_x\,\bar{a}_{\bar{x}} = b_x\,\bar{b}_{\bar{x}} = \ldots\ldots,$$

ossia in generale $a_{ik} = a_i\,\bar{a}_k$.

Ogni funzione invariantiva di questa forma può scriversi simbolicamente come un aggregato di prodotti di fattori dei tipi

$$(ab)\;,\;(\overline{ab})\;,\;a_x\;,\;\bar{a}_{\bar{x}};$$

supponiamo che un certo termine contenga il fattore (ab); svolgendo la parte residua avremo termini della forma

$$\mathrm{M}\,(ab)\,\bar{a}_i\,\bar{b}_k\,,$$

dove M non contiene nè i simboli a nè i simboli b. Se $i = k$ il termine è nullo; altrimenti si ha:

$$\mathrm{M}\,(ab)\,\bar{a}_i\,\bar{b}_k = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}\,(ab)\,(\bar{a}_i\,\bar{b}_k - \bar{a}_k\,\bar{b}_i) = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}\,(ab)\,(\overline{ab})\,,$$

e dal termine si stacca il prodotto $(ab)\,\overline{(ab)}$, che ha significato effettivo. Lo stesso prodotto si stacca da un prodotto simbolico contenente il fattore $\overline{(ab)}$, come è naturale perchè il prodotto coniugato contiene il fattore (ab). Si vede dunque che finchè un prodotto contiene determinanti simbolici si stacca il prodotto $(ab)\,\overline{(ab)}$; quando finalmente è ridotto a contenere soltanto fattori dei tipi a_x e $\overline{a}_{\bar{x}}$, non può essere altro che una potenza di f. Si vede dunque che, ponendo

$$\mathrm{D} = (ab)\,\overline{(ab)}\,,$$

ogni formazione invariantiva relativa alla forma f si può rappresentare come un aggregato di termini del tipo $\mathrm{D}^{\mu}.f^{\nu}$. Poichè D ed f sono forme invariantive tanto di 1.ª che di 2.ª specie, si ha che:

" Per la forma $f = a_x\,\overline{a}_{\bar{x}}$ il sistema completo delle forme in-
" varianti tanto di 1.ª che di 2.ª specie può ritenersi costituito
" delle due forme:

$$\text{“}\ f = a_x\,\overline{a}_{\bar{x}}\ ,\quad \mathrm{D} = (ab)\,\overline{(ab)}\ \text{”}.$$

Ambedue queste forme sono reali. Si noti che è $\mathrm{D} = (ff)_{1,\bar{1}}$.

31. Ponendo

$$f' = a_x\,\overline{a}_{\bar{y}} = a_{11}\,x_1\,\overline{y}_1 + a_{12}\,x_1\,\overline{y}_2 + a_{21}\,x_2\,\overline{y}_1 + a_{22}\,x_2\,\overline{y}_2\,,$$

poichè scrivere la equazione $f' = 0$ equivale a scrivere le due relazioni

$$x_2 = a_{11}\,\overline{y}_1 + a_{12}\,\overline{y}_2\ ,\quad -x_1 = a_{21}\,\overline{y}_1 + a_{22}\,\overline{y}_2\,,$$

vediamo che la equazione $f' = 0$ stabilisce su una forma di 1.ª specie su cui si eseguisca la interpetrazione geometrica una *antiproiettività,* e sul piano di Gauss una affinità circolare inversa. Ma c'è di più: l'equazione della antiproiettività inversa sarebbe $a_y\,\overline{a}_{\bar{x}} = 0$, ossia la $a_x\,\overline{a}_{\bar{y}} = 0$ stessa; dunque la antiproiettività è involutoria, ossia è una *antinvoluzione*, ed è involutoria anche la affinità circolare inversa sul piano di Gauss.

Ci troviamo così costretti a una breve digressione su cose del resto affatto ovvie sulle affinità circolari involutorie. Supponiamo da prima che esistano i due punti centrali a distanza finita; essi, come corrispondenti ai punti della retta all'infinito nelle due figure, coincideranno in un unico punto O.

Se l'affinità è diretta, mentre un semiraggio ruota intorno ad O il corrispondente ruota anch'esso intorno ad O descrivendo un fascio inversamente uguale, e quindi avremo due semiraggi uniti posti l'uno sul prolungamento dell'altro. Su ognuno di essi avremo un punto corrispondente a se stesso, e precisamente, se R^2 è la costante dell'affinità, alla distanza R da O. Esistono dunque sempre due punti uniti U V distinti se l'affinità non è degenere, e simmetrici rispetto al centro O. Poichè una tale affinità rappresenta una involuzione sulla forma di 1.ª specie obiettiva, due punti corrispondenti A A′ devono formare gruppo armonico coi punti U V (nel senso del piano di Gauss) e quindi (art. 29) i punti A A′ U V stanno in un cerchio e vi formano gruppo armonico.

Ora l'affinità sia inversa; i semiraggi corrispondenti intorno ad O descrivono due fasci direttamente uguali, e poichè la corrispondenza è involutoria possono presentarsi solo due casi: 1.° Ogni semiraggio coincide col suo corrispondente; allora su ogni uno di essi si ha un punto unito alla distanza R da O, se R^2 è la costante dell'affinità, e quindi si ha un cerchio di punti uniti, di centro O e raggio R. La affinità è la notissima *inversione quadrica* o *trasformazione per raggi rettori reciproci* rispetto a questo cerchio. 2.° Ogni semiraggio è sul prolungamento del semiraggio corrispondente; allora non esistono certamente punti uniti, e l'affinità si può considerare come un'inversione quadrica rispetto a un cerchio immaginario.

Supponiamo infine che l'affinità circolare non possegga punti centrali a distanza finita, ossia si riduca a una similitudine involutoria. In tal caso se è diretta sarà la simmetria rispetto a un punto, e saranno uniti il centro di simmetria e tutti i punti della retta all'∞, che corrispondono però tutti all'unico valore $z = \infty$ della variabile. Se è inversa è la simmetria rispetto a un asse reale, e sono uniti tutti i punti dell'asse.

Nel caso degenere i due punti singolari coincidono in un solo (o al finito o all'infinito) cui corrispondono tutti i punti del piano; il punto singolare è anche l'unico punto unito, e rappresenta il centro dell'affinità.

32. Il complesso degli elementi uniti, quando essi esistono, in una antinvoluzione su una forma di 1.ª specie, costituisce quella che il Segre ha chiamato *catena semplice.* Una catena semplice sul piano di Gauss è rappresentata dal complesso degli elementi uniti di una affinità circolare inversa involutoria, e quindi da un cerchio o da una retta, o da un unico punto quando l'antinvoluzione è degenere.

La equazione $f = a_x \bar{a}_{\bar{x}} = 0$ ammette o no soluzioni secondo che l'antinvoluzione $f' = 0$ ammette o no catena fondamentale; è interessante imparare a distinguere i vari casi. Ponendo $\dfrac{x_1}{x_2} = z$, $\dfrac{y_1}{y_2} = w$, la equazione dell'antinvoluzione diviene:

$$a_{11}\, z\, \bar{w} + a_{12}\, z + a_{21}\, \bar{w} + a_{22} = 0 .$$

Il centro O dell'inversione quadrica che questa equazione rappresenta sul piano di Gauss, essendo il punto corrispondente al punto all'infinito del piano, è indice del valore:

$$z_0 = -\frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{\bar{a}_{12}}{a_{11}} .$$

Questo valore è infinito, e quindi l'inversione quadrica si riduce a una simmetria rispetto a un asse reale, quando $a_{11} = 0$; escludiamo per ora questo caso, ed anche escludiamo che l'inversione sia degenere.

Affinchè esista un cerchio di punti uniti, è necessario e sufficiente che due punti corrispondenti qualunque AA' (che sono allineati con O) si trovino dalla medesima parte rispetto ad O; ossia che, se P_∞ è il punto all'infinito del raggio OA, le coppie AA' e OP_∞ non si separino, e quindi il rapporto anarmonico $(OP_\infty AA')$ sia positivo. Prendiamo come punto A l'origine degli assi, ossia il punto $z=0$; avremo per il punto A' corrispondente:

$$\bar{w} = -\frac{a_{22}}{a_{21}}, \quad \text{ossia } w = -\frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

Poichè i punti $OP_\infty AA'$ stanno in linea retta, il loro rapporto anarmonico è quello dei corrispondenti valori della variabile (art. 29), onde si ha:

$$(OP_\infty AA') = \left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \infty, 0, -\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) = \frac{\frac{a_{21}}{a_{11}}}{\frac{a_{21}}{a_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{12}}} = \frac{a_{21}a_{12}}{a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11}}.$$

Secondo che questo numero è $\gtreqless 0$, esiste o non esiste un cerchio di punti uniti. Ma il numeratore è certo positivo, perchè è il prodotto di due numeri complessi coniugati; deve essere dunque rispettivamente:

$$a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} \gtreqless 0$$

ossia:

$$D = (ab)\overline{(ab)} = 2\,(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \lesseqgtr 0.$$

Secondo che dunque è $D \lesseqgtr 0$ esiste o no un cerchio di punti uniti nella inversione quadrica $f' = a_x \bar{a}_{\bar{y}} = 0$.

Abbiamo escluso che la inversione si riduca a una simmetria rispetto a un asse; ma in tal caso esiste una intera retta di punti uniti, inoltre essendo $a_{11}=0$ si ha

$$D = -2\,a_{12}a_{21} = -2\,a_{12}\bar{a}_{12} < 0,$$

e quindi il criterio generale è applicabile anche in questo caso.

Qualche dubbio sull'esattezza del nostro ragionamento potrebbe sorgere quando l'origine degli assi coincidesse col centro della inversione; ma questo caso può sempre evitarsi mediante una trasformazione lineare, che non modifica l'esistenza degli elementi uniti nè il segno di D.

Infine noteremo che l'antinvoluzione, e quindi l'inversione quadrica, è degenere quando è nullo il suo discriminante, ossia quando è

$$a_{11}\, a_{21} - a_{12}\, a_{21} = 0\,,$$

e cioè $D = 0$. In tal caso nella inversione si ha un unico punto unito.

Dunque: " La equazione $f = 0$ possiede infinite radici o una " sola o nessuna secondo che si ha $D \lesseqgtr 0$ [1] ".

D si dirà il *discriminante* della forma reale *f*.

33. Nel caso $D < 0$ proponiamoci di determinare il raggio del cerchio dei punti uniti; escludiamo il caso $a_{11} = 0$, nel quale il raggio è infinito.

Il centro O dell'inversione corrisponde al valore $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ della variabile; due punti corrispondenti abbiamo veduto poco fa essere $A \equiv 0$, $A' \equiv -\frac{a_{22}}{a_{12}}$. Noi qui ammettiamo per un momento che non sia $a_{12} = 0$, ossia il centro dell'inversione non sia nell'origine degli assi.

Le distanze OA, OA' sono i moduli delle differenze dei valori della variabile in O ed in A e A' rispettivamente; ossia

$$OA = \left| -\frac{a_{21}}{a_{11}} \right|\,, \quad OA' = \left| -\frac{a_{21}}{a_{11}} + \frac{a_{22}}{a_{12}} \right|\;;$$

[1] Questo resultato è ottenuto, con altra considerazione, anche dal SEGRE, nella nota al §. 18 del saggio citato.

il raggio R del cerchio è tale che $R^2 = OA \,.\, OA'$; dunque:

$$R^2 = \left| \frac{a_{21}}{a_{11}} \left(\frac{a_{21}}{a_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{12}} \right) \right| = \left| \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot \frac{a_{12}\, a_{21} - a_{11}\, a_{22}}{a_{11}\, a_{12}} \right| = \left| \frac{a_{21}}{a_{12}} \right| \cdot \left| \frac{a_{12}\, a_{21} - a_{11}\, a_{\ 2}}{a_{11}^2} \right| .$$

Ora osserviamo che essendo $a_{12} = \bar{a}_{21}$ si ha $\left| \frac{a_{21}}{a_{12}} \right| = 1$; inoltre

$$a_{12}\, a_{21} - a_{11}\, a_{22} = -\frac{D}{2} .$$

dunque:

$$R^2 = \left| -\frac{D}{2\, a_{11}^2} \right| = -\frac{D}{2\, a_{11}^2}$$

giacchè a_{11} è reale e D è negativo.

Abbiamo escluso che si avesse $a_{12} = 0$; ma osserviamo che al resultato precedente noi saremmo certamente giunti se in luogo di considerare due particolari punti corrispondenti AA' avessimo considerato due altri punti corrispondenti qualunque, e allora il ragionamento sarebbe valso anche nel caso $a_{12} = 0$.

Possiamo dunque senz'altro asserire che il resultato è generale.

34. Quando è $D < 0$, l'equazione iperalgebrica reale $a_x\, \bar{a}_{\bar{x}} = 0$, ossia l'equazione

$$a_{11}\, z\, \bar{z} + a_{12}\, z + a_{21}\, \bar{z} + a_{22} = 0 ,$$

ammette infinite soluzioni. Esse sono rappresentate sul piano complesso da tutti i punti di un cerchio il cui centro è indice del valore $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ della variabile, e il cui raggio è $R = \sqrt{-\frac{D}{2\, a_{11}^2}}$, dove del radicale si intende preso il valore positivo. Dunque la formola di risoluzione della equazione iperalgebrica è

$$z = -\frac{a_{21}}{a_{11}} + \sqrt{-\frac{D}{2\, a_{11}^2}}\; e^{i\theta} ,$$

ove basta che θ assuma tutti i valori da O a 2π.

In questa formola si suppone $a_{11} \neq 0$; una formola analoga si ha supponendo $a_{22} \neq 0$. Infatti effettuando la trasformazione $z = \frac{1}{w}$ si ottiene l'equazione

$$a_{22} w \bar{w} + a_{21} w + a_{12} \bar{w} + a_{11} = 0 ,$$

da cui si ha:

$$w = \frac{1}{z} = - \frac{a_{12}}{a_{22}} + \sqrt{- \frac{D}{2 a_{22}^2}} e^{i\theta} .$$

Quando poi si abbia contemporaneamente $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, l'equazione si riduce alla forma:

$$a_{12} z + a_{21} \bar{z} = 0 \quad , \quad \text{ossia} \quad \frac{z}{\bar{z}} = - \frac{a_{21}}{a_{12}} ;$$

una soluzione è $z = i a_{21}$; e ogni altra è data dalla formola

$$z = k i a_{21} ,$$

dove k è un numero qualunque *reale.*

Quando è $D = 0$ l'equazione ha un'unica radice, rappresentata dal punto singolare dell'inversione degenere, che ne è anche il centro; ossia

$$z = - \frac{a_{21}}{a_{11}} = - \frac{a_{22}}{a_{12}} .$$

VII.

Forma iperalgebrica $(1, \bar{1})$, non reale.

35. Ora passiamo alla considerazione di una forma iperalgebrica $(1, \bar{1})$ non reale, o per lo meno alla quale non sia imposta la condizione di essere reale. Sia essa:

$$f = a_{11} x_1 \bar{x}_1 + a_{12} x_1 \bar{x}_2 + a_{21} x_2 \bar{x}_1 + a_{22} x_2 \bar{x}_2 = a_x \bar{a}_{0\bar{x}} = b_x \bar{b}_{0\bar{x}} = \dots .$$

Ogni sua forma invariantiva potrà scriversi simbolicamente come un aggregato di prodotti di fattori dei tipi

$$(ab) \ , \ (a_0 b_0) \ , \ (ab_0) \ , \ a_x \ , \ a_{0x} \ ,$$

e loro coniugati; vogliamo dimostrare che ogni tal forma può esprimersi in funzione razionale intera delle quattro forme:

$$(1) \qquad a_x \bar{a}_{0\bar{x}} \ , \ (ab)\,(\overline{a_0 b_0}) \ , \ (ab_0)\,(\overline{a_0 b}) \ , \ (ab_0)\,\bar{a}_{0\bar{x}}\,\bar{b}_{\bar{x}} \ ,$$

e loro coniugate.

Se in un prodotto è contenuto il fattore (ab), esso è certamente riducibile, giacchè se ne stacca la forma $(ab)\,(\overline{a_0 b_0})$; infatti, svolgendo la parte residua si ha una somma di termini del tipo

$$\mathrm{M}\,(ab)\,\bar{a}_{0i}\,\bar{b}_{0k} \ ;$$

essi sono nulli se $i = k$, altrimenti si ha

$$\mathrm{M}\,(ab)\,\bar{a}_{0i}\,\bar{b}_{0k} = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}\,(ab)\,(\bar{a}_{0i}\,\bar{b}_{0k} - \bar{a}_{0k}\,\bar{b}_{0i}) = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}\,(ab)\,(\overline{a_0 b_0}) \ ,$$

e si stacca la forma $(ab)\,(\overline{a_0 b_0})$, come avevamo detto.

Analogamente, la presenza di fattori dei tipi $(a_0 b_0)$, $(\overline{ab})$, $(\overline{a_0 b_0})$ determina lo staccarsi della medesima forma o della sua coniugata $(a_0 b_0)\,(\overline{ab})$; possiamo dunque supporre che il prodotto simbolico non contenga più fattori dei tipi (ab), $(a_0 b_0)$, e coniugati.

Se contiene determinanti simbolici, essi saranno dei tipi (ab_0), $(\overline{ab_0})$; se contiene p. es. (ab_0), devono comparire di nuovo nel prodotto un simbolo $\bar{a}_0$ e un simbolo $\bar{b}$, e se essi sono riuniti in un determinante si stacca la forma $(ab_0)\,(\overline{a_0 b})$. Se non sono riuniti, il prodotto sarà della forma

$$(ab_0)\,\bar{a}_{0\bar{y}}\,\bar{b}_{\bar{z}} \ .$$

Se y e z sono ambedue variabili non possono essere che uguali, giacchè consideriamo solo covarianti a una sola serie di variabili, e si stacca la forma $(ab_0)\,\bar{a}_{0\bar{x}}\,\bar{b}_{\bar{x}}$; se una di esse, p. es. y, è simbolo, esso non può essere fornito di indice (0), perchè il prodotto conterrebbe un fattore del tipo $(\overline{a_0 b_0})$; sarà quindi un simbolo senza indice. Allora poichè per le note identità di Gordan si ha

$$\mathrm{M}\,(ab_0)\,\bar{a}_{0\bar{y}}\,\bar{b}_{\bar{z}} = \mathrm{M}\,(ab_0)\,\bar{a}_{0\bar{z}}\,\bar{b}_{\bar{y}} + \mathrm{M}\,[(ab_0)\,(\overline{a_0 b})]\,(\overline{yz}),$$

si vede che il prodotto si spezza in due termini dei quali il 1.° è riducibile per il fattore $\bar{b}_{\bar{y}}$ e il 2.° è già ridotto. Dunque in ogni caso il prodotto è riducibile; il caso in cui contenga il fattore $(\overline{ab_0})$ si riconduce al precedente considerando il prodotto coniugato.

Dunque finchè un prodotto simbolico contiene determinanti, esso è riducibile; e quando contiene solo fattori lineari, dei tipi a, $\bar{a}_{\bar{x}}$, a_{0x}, $\bar{a}_{0\bar{x}}$, esso è necessariamente il prodotto di una potenza della forma $a_x \bar{a}_{0\bar{x}}$ e della sua coniugata. È così dimostrato che ogni funzione invariantiva della forma f può esprimersi in modo razionale intero per le forme (1) e loro coniugate; e poichè le forme (1) sono invariantive anche di 2.ª specie, possiamo ritenere che il sistema completo di 1.ª e 2.ª specie per la forma f sia costituito delle quattro forme:

$$f = a_x\,\bar{a}_{0\bar{x}}\,,\ \ \delta = (ab)\,(\overline{a_0 b_0})\,,\ \ \rho = (\overline{a_0 b})\,a_x\,b_{0x}\,,\ \ \delta_0 = (ab_0)\,(\overline{a_0 b}),$$

e loro coniugate. La forma δ_0 è reale, coincidendo con la sua coniugata.

Si noti che è:

$$\delta = (f\,f)_{1,\bar{1}}\,,\ \ \delta_0 = (f\,\bar{f})_{1,\bar{1}}\,,\ \ \rho = (f\,\bar{f})_{\bar{1}}\,.$$

36. Se poniamo:

$$f' = a_x\,\bar{a}_{0\bar{y}} = a_{11}\,x_1\,\bar{y}_1 + a_{12}\,x_1\,\bar{y}_2 + a_{21}\,x_2\,\bar{y}_1 + a_{22}\,x_2\,\bar{y}_2\,,$$

la equazione $f' = 0$ stabilisce fra gli elementi di una forma di 1.ª specie una antiproiettività, e conseguentemente sul piano di Gauss una affinità circolare inversa. Gli elementi uniti della corrispondenza corrispondono alle radici della equazione iperalgebrica $f = 0$. Le formole della antiproiettività sono:

$$x_2 = a_{11} \bar{y}_1 + a_{12} \bar{y}_2 \;, \; -x_1 = a_{21} \bar{y}_1 + a_{22} \bar{y}_2 ;$$

essa è degenere quando si ha:

$$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = \frac{1}{2} (ab) (\overline{a_0 b_0}) = \frac{1}{2} \delta = 0 .$$

Dunque: " L'essere $\delta = 0$ esprime che l'antiproiettività $f' = 0$ è degenere ".

Quando è $\delta = 0$, poichè ad ogni punto x deve corrispondere uno stesso punto y e inversamente, è chiaro che l'equazione $f' = 0$ si spezza in due fattori lineari, i quali possiamo anche supporre siano effettivamente a_x e $\bar{a}_{0\bar{y}}$. Anche la forma f si spezza dunque nei due fattori lineari a_x e $\bar{a}_{0\bar{x}}$, ed ammette allora certamente due radici in generale distinte, date dalle due equazioni lineari:

$$a_x = 0 \;, \; a_{0x} = 0 .$$

Lo spezzamento della f in fattori lineari avviene soltanto nel caso $\delta = 0$, giacchè porta seco la degenerazione dell'antiproiettività $f' = 0$.

37. Nella antiproiettività $f' = a_x \bar{a}_{0\bar{y}} = 0$, od anche

$$\bar{a}_{\bar{x}} a_{0y} = \bar{a}_{\bar{x}} a_{01} y_1 + \bar{a}_{\bar{x}} a_{02} y_2 = 0 ,$$

ad un elemento x corrisponde l'elemento:

$$y_1 : y_2 = \bar{a}_{\bar{x}} a_{02} : - \bar{a}_{\bar{x}} a_{01} .$$

A questo elemento nella antiproiettività stessa $\bar{f}' = b_x \bar{b}_{0\bar{y}} = 0$ corrisponde un elemento che chiameremo ancora y, legato ad x dalla relazione:

$$(b a_0) \bar{a}_{\bar{x}} \bar{b}_{0\bar{y}} = 0 \;, \; \text{o anche:} \; (\overline{a_0 b}) a_x b_{0y} = 0.$$

Questa è l'equazione della proiettività quadrato dell'antiproiettività $f' = 0$; i suoi elementi uniti sono dati dall'equazione algebrica

$$\rho = (\overline{a_0 b})\, a_x\, b_{0x} = 0\,,$$

e sono quegli elementi che nella antiproiettività $f' = 0$ sono uniti o involutori.

Se la equazione $\rho = 0$ non è identicamente soddisfatta, essa possiede due radici alle quali corrispondono due elementi o ambedue uniti nella antiproiettività, o fra loro corrispondenti in doppio modo; nel 1.° caso le due radici (che possono anche essere coincidenti) sono radici anche dell'equazione iperalgebrica $f = 0$. Dunque: " L'equa-
" zione iperalgebrica $f = 0$ ammette o due radici o una o nessuna;
" nel caso che ne ammetta, esse sono le radici della equazione
" algebrica $\rho = 0$ ".

Se si ha $\rho = 0$ identicamente, la antiproiettività $f' = 0$ è involutoria, poichè il suo quadrato è l'identità; allora la forma f è reale o riducibile reale. Infatti la antiproiettività inversa della $f' = a_x\, \overline{a}_{0\bar{y}} = 0$ è la $a_y\, \overline{a}_{0\bar{x}} = 0$, ossia la $a_{0x}\, \overline{a}_{\bar{y}} = 0$, e poichè le due corrispondenze devono coincidere, si ha (art. 8) un'identità della forma

$$(1) \qquad a_x\, \overline{a}_{0\bar{y}} = k\, a_{0x}\, \overline{a}_{\bar{y}}\;;$$

da cui in particolare:

$$(2) \qquad a_x\, \overline{a}_{0\bar{x}} = k\, a_{0x}\, \overline{a}_{\bar{x}}\;, \quad \text{ossia } f = k\overline{f}\;.$$

Reciprocamente, se la f è reale o riducibile tale, si ha una identità della forma della (2); e quindi (art. 9) anche una della forma della (1), la quale mostra che l'antiproiettività $f' = 0$ è involutoria; si ha dunque $\rho = 0$ identicamente. Dunque: " L'annullarsi identico
" del covariante ρ esprime la condizione necessaria e sufficiente af-
" finchè la forma f sia reale o riducibile tale ".

Per questo noi proponiamo per ρ il nome di *realizzante* della forma f.

38. Se effettivamente, nel caso $\rho = 0$ identicamente, si volessero applicare alla forma f i resultati ottenuti per una forma iperalgebrica reale, dovremmo prima ridurla ad essere veramente reale, considerare cioè la forma μf, con μ costante conveniente. La determinazione di μ è ben facile: dovendo essere

$$\mu f = \bar{\mu} \bar{f}, \text{ ossia } \mu : \bar{\mu} = \bar{f} : f$$

qualunque siano i valori delle variabili, basterà per esempio prendere per μ il valore che $\bar{f}$ assume per certi valori arbitrari di $x_1\, x_2$; questo valore, ormai fissato, indichiamolo con $(\bar{f})$.

Ottenuta così la forma reale $F = (\bar{f}) f$, il suo discriminante è presto calcolato; infatti si ha:

$$D = (F\,F)_{1,\bar{1}} = (\bar{f})^2 (f f)_{1,\bar{1}} = (\bar{f})^2 \delta.$$

Dunque l'equazione $F = 0$, ossia la $f = 0$, ammette infinite soluzioni o una sola o nessuna secondo che si ha $(\bar{f})^2 \delta \lesseqgtr 0$. Nel caso che esistano infinite soluzioni, esse sono rappresentate sul piano di Gauss dai punti di un cerchio, il cui raggio R è tale che (art. 33)

$$R^2 = -\frac{D}{2(\bar{f})^2 a_{1\bar{1}}^2} = -\frac{\delta}{2\, a_{1\bar{1}}^2}\,;$$

e così in generale qualunque resultato che si ottenga per una forma reale può applicarsi alla nostra f, considerando in luogo di essa la forma $(\bar{f}) f$.

D'ora innanzi supporremo che non sia $\rho = 0$ identicamente, ossia che la forma f non sia nè reale nè riducibile tale.

39. È noto che quando una proiettività si rappresenta simbolicamente con la equazione $a_x\, b_y = 0$, la condizione necessaria e sufficiente affinchè essa sia involutoria è che si abbia

$$(ab) = \Omega_{xy}\, a_x\, b_y = 0\,;$$

ora dunque la proiettività $\rho' = (\overline{a_0 b})\, a_x\, b_{0y} = 0$ sarà involutoria quando sia

$$\Omega\,(\overline{a_0 b})\, a_x\, b_{0y} = (\overline{a_0 b})\,(a b_0) = \delta_0 = 0\,.$$

Poichè la proiettività $\rho' = 0$ è il quadrato della antiproiettività $f' = 0$, essere essa involutoria significa che l'antiproiettività $f' = 0$ è ciclica del 4.° ordine.

Dunque: " L'annullarsi dell'invariante reale δ_0 esprime che la " antiproiettività $f' = 0$ è ciclica del 4.° ordine ".

Notiamo che una antiproiettività non può mai essere ciclica del 3.° ordine, perchè la sua 3.ª potenza è ancora una antiproiettività, e quindi non può mai essere l'identità.

IX.

Fascio sizigetico, $\lambda_1 f + \lambda_2 \bar{f}$.

40. Noi vogliamo stabilire un criterio generale per riconoscere la esistenza o la non esistenza delle radici della equazione iperalgebrica $f = a_x\, \overline{a}_{0\bar{x}} = 0$; per questa premettiamo alcune considerazioni. Poniamo

$$f_\lambda = \lambda_1 f + \lambda_2 \bar{f} = \lambda_1\, a_x\, a_{0\bar{x}} + \lambda_2\, a_{0x}\, a_{\bar{x}}\,;$$

dando al parametro $\lambda_1 : \lambda_2$ tutti i possibili valori reali e complessi, perchè le forme f e $\bar{f}$ sono distinte essendo escluso che sia $\rho = 0$ identicamente, otterremo una infinità di forme che diremo costituire un *fascio sizigetico* di forme iperalgebriche $(1, \bar{1})$. Volendo tener conto della dimensione reale del sistema, le forme di esso rappresenteranno una doppia infinità.

Insieme al fascio di forme è da considerarsi il *fascio d'antiproiettività*

$$f'_\lambda = \lambda_1\, a_x\, \overline{a}_{0\bar{y}} = \lambda_2\, a_{0x}\, \overline{a}_{\bar{y}} = 0\,.$$

Poichè le due antiproiettività fondamentali $a_x\, \overline{a}_{0\bar{y}} = 0$, $a_{0x}\, \overline{a}_{\bar{y}} = 0$ sono fra loro inverse e quindi posseggono o i medesimi elementi uniti o i medesimi elementi involutori, questo avverrà per tutte le antiproiettività del fascio. Reciprocamente ogni antiproiettività che possegga quegli elementi uniti o quegli elementi involutori appartiene al fascio; e infatti essa è individuata da un'altra coppia qualunque di elementi corrispondenti, la quale individua anche una antiproiettività del fascio. Dunque: " Ad un fascio sizigetico " appartengono tutte quelle antiproiettività che hanno due certi " elementi uniti o due certi elementi involutori ".

E quindi: " Se la equazione $f=0$ possiede due radici esse " sono radici anche di tutte le equazioni $f_\lambda = 0$, e di esse sole ".

Si presenta dunque questo fatto notevole, che le medesime due radici sono date da una doppia infinità di equazioni iperalgebriche $(1, \bar{1})$ distinte. La dipendenza fra queste è semplicissima: ognuna di esse è una combinazione lineare di un'altra qualunque con la sua coniugata. Se le due radici sono $x'_1 : x'_2$, $x''_1 : x''_2$, e sono radici delle equazioni lineari $a_x = 0$, $b_x = 0$ che immediatamente si costruiscono, una particolare equazione iperalgebrica $(1, \bar{1})$ a cui soddisfano è la $a_x \bar{b}_{\bar{x}} = 0$, e quindi ogni altra è contenuta nella forma:

$$\lambda_1 a_x \bar{b}_{\bar{x}} + \lambda_2 b_x \bar{a}_{\bar{x}} = 0 .$$

Nel caso in cui l'equazione $f=0$ possiede un'unica radice, le precedenti considerazioni debbono ripetersi con qualche modificazione. Questo caso verrà maggiormente illuminato dalla discussione seguente.

41. Considerando il fascio di antiproiettività come un ente razionale, vediamo che cosa rappresenti su esso il complesso di quelle antiproiettività che sono involutorie, ossia delle antinvoluzioni. La antiproiettività inversa della

$$\lambda_1 a_x \bar{a}_{0\bar{y}} + \lambda_2 a_{0x} \bar{a}_{\bar{y}} = 0$$

è la

$$\lambda_1 a_y \bar{a}_{0\bar{x}} + \lambda_2 a_{0y} \bar{a}_{\bar{x}} = 0 \quad , \quad \text{ossia la} \quad \bar{\lambda}_2 a_x \bar{a}_{0\bar{y}} + \bar{\lambda}_1 a_{0x} \bar{a}_{\bar{y}} = 0 \, ;$$

essa è naturalmente ancora una antiproiettività del fascio; scrivendola

$$\mu_1 \, a_x \, \bar{a}_{0\bar{y}} + \mu_2 \, a_{0x} \, \bar{a}_{\bar{y}} = 0$$

si ottiene la relazione

$$\mu_1 : \mu_2 = \bar{\lambda}_2 : \bar{\lambda}_1 \,, \quad \text{ossia anche} \quad \lambda_1 \bar{\mu}_1 - \lambda_2 \bar{\mu}_2 = 0 \,,$$

che lega i valori dei parametri corrispondenti a due antiproiettività fra loro inverse.

Se interpetriamo il parametro $\lambda_1 : \lambda_2$ su un piano di Gauss (che chiameremo il *piano dei parametri*), a ogni antiproiettività del fascio corrisponde un punto del piano e inversamente. La relazione

$$\lambda_1 \bar{\mu}_1 - \lambda_2 \bar{\mu}_2 = 0$$

stabilisce nel piano dei parametri una corrispondenza nella quale sono corrispondenti due punti che corrispondono ad antiproiettività fra loro inverse. Essa non è altro che una inversione quadrica, giacchè la sua equazione si deduce dalla equazione generale

$$a_{11} \lambda_1 \bar{\mu}_1 + a_{12} \lambda_1 \bar{\mu}_2 + a_{21} \lambda_2 \bar{\mu}_1 + a_{22} \lambda_2 \bar{\mu}_2 = 0 \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = \bar{a}_{11} \\ a_{12} = \bar{a}_{21} \\ a_{22} = \bar{a}_{22} \end{array} \right\}$$

supponendo

$$a_{11} = 1 \,, \quad a_{12} = 0 \,, \quad a_{21} = 0 \,, \quad a_{22} = -1 \,.$$

Il centro dell'inversione, che corrisponde al valore $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$, è la origine degli assi; il discriminante è

$$D = 2 \, (a_{11} \, a_{22} - a_{12} \, a_{21}) = -2 < 0 \,,$$

e quindi esiste effettivamente il cerchio fondamentnle dell'inversione; il suo raggio R è tale che

$$R^2 = -\frac{D}{2 \, a_{11}^2} = 0 \,,$$

e cioè è il cerchio con centro nell'origine e di raggio 1.

Indichiamo con R questo cerchio. Ai punti di esso corrispondono quelle antiproiettività del fascio che sono inverse di se stesse, ossia le antinvoluzioni.

Dunque: " Nel fascio sizigetico esistono sempre infinite antin-" voluzioni, costituenti nel fascio una catena semplice R. Due " antiproiettività fra loro inverse sono corrispondenti nell'antin-" voluzione in cui la catena R è fondamentale, ossia sono *separate* " *armonicamente* [1]) dalla catena R ".

42. Se l'equazione $f = 0$ possiede due radici, ad esse corrispondono due punti UV del piano di Gauss, che devono essere uniti in tutte le affinità circolari corrispondenti alle antiproiettività del fascio. Alle antinvoluzioni corrispondono delle inversioni quadriche i cui cerchi fondamentali esistono sempre e costituiscono il fascio di cerchi che ha per base i punti U e V.

Se l'equazione $f = 0$ non possiede radici, si hanno sul piano due punti AB dati dall'equazione $\rho = 0$, che si corrispondono in doppio modo in tutte le affinità circolari; alle antinvoluzioni corrispondono le inversioni quadriche alle quali appartiene la coppia AB, non tutte dotate quindi di cerchio fondamentale; i cerchi fondamentali esistenti costituiscono il fascio di cerchi di cui A e B sono i punti limiti.

Se l'equazione $f = 0$ possiede una sola radice, ad essa corrisponde un punto M del piano, che è l'unico punto unito di tutte le affinità circolari, eccettuate le inversioni quadriche le quali sono dotate tutte di cerchio fondamentale passante per M. Poichè i punti comuni a due cerchi fondamentali sono uniti in tutte le affinità del fascio, così vediamo che i cerchi fondamentali devono costituire un fascio di cerchi tangenti in M. L'unica radice dell'equazione $f = 0$ deve essere considerata come la riunione di due

---

[1]) SEGRE, Saggio, §. 16. La denominazione però è di STAUDT (*Beiträge zur Geometrie der Lage*, n. 212), che per il primo considerò le catene semplici, sebbene con tutt'altri criteri.

radici *ma in una certa direzione,* e al fascio sizigetico appartengono non tutte le forme che posseggono quell'unica radice, ma quelle fra queste per le quali la riunione è avvenuta in quella certa direzione. Potremmo fare altre considerazioni, che tralasciamo per brevità.

43. Le antinvoluzioni del fascio sizigetico, e quindi le forme del fascio che sono reali o riducibili tali, corrispondono a valori del parametro che soddisfano alla relazione

$$\lambda_1 \bar{\lambda}_1 - \lambda_2 \bar{\lambda}_2 = 0 \quad , \quad \text{ossia} \quad \lambda_1 : \lambda_2 = \bar{\lambda}_2 : \bar{\lambda}_1 .$$

Considerando il parametro sotto forma non omogenea, ossia ponendo $\lambda = \lambda_1 : \lambda_2$, questa relazione assume la forma:

$$\lambda = 1 : \bar{\lambda} \quad , \quad \text{ossia} \quad \lambda \bar{\lambda} = 1 .$$

44. Poichè si ha:

$$\delta_\lambda = (f_\lambda f_\lambda)_{1,\bar{1}} = (\lambda_1 f + \lambda_2 \bar{f}, \lambda_1 f + \lambda_2 \bar{f})_{1,\bar{1}} =$$

$$= \lambda_1^2 (ff)_{1,\bar{1}} + \lambda_1 \lambda_2 (f\bar{f})_{1,\bar{1}} + \lambda_2 \lambda_1 (\bar{f} f)_{1,\bar{1}} + \lambda_2^2 (\bar{f}\bar{f})_{1,\bar{1}} = \lambda_1^2 \delta + 2\lambda_1 \lambda_2 \delta_0 + \lambda_2^2 \bar{\delta},$$

le antiproiettività degeneri del fascio sono quelle per le quali si ha, considerando il parametro sotto forma non omogenea:

$$(1) \qquad \delta \lambda^2 + 2\, \delta_0 \lambda + \bar{\delta} = 0 ;$$

esse sono quindi in generale due. Le antiproiettività del fascio potrebbero essere tutte degeneri quando si avesse contemporaneamente $\delta = 0$, $\delta_0 = 0$, ma in tal caso è facile riconoscere che la antiproiettività fondamentale $f' = 0$ sarebbe non solo degenere, ma anche involutoria, ossia la forma f sarebbe riducibile reale; il che abbiamo escluso. Infatti gli elementi singolari sarebbero gli stessi per tutte le antiproiettività del fascio, e quindi (poichè fra esse ce ne sono certamente delle involutorie) coincidenti in un unico elemento per tutte le antiproiettività, che sarebbero perciò tutte involutorie.

Nella rappresentazione del fascio sul piano complesso si riconoscono subito le antiproiettività degeneri. Se l'equazione $f=0$ ammette due soluzioni e quindi esistono due punti base U V, esse sono le due fra loro inverse i cui punti singolari sono U V; e infatti U e V sono punti uniti in ambedue. Dunque in questo caso le due antiproiettività degeneri *non sono involutorie.*

Se l'equazione $f=0$ non possiede soluzioni, esistono due punti limiti A B, e le due antiproiettività degeneri sono quelle i cui due punti singolari coincidono in A e B rispettivamente; è infatti A B si corrispondono in ambedue involutoriamente. Dunque in questo caso *sono involutorie.*

Se infine l'equazione $f=0$ possiede un'unica soluzione, si ha un unico punto base M; le due antiproiettività degeneri coincidono in quella i cui punti singolari coincidono in M, e che quindi è involutoria.

Si ha dunque: " La equazione $f=0$ non ammette soluzioni o
" ne ammette due o una sola secondo che le due antiproiettività
" degeneri del fascio sono involutorie o non lo sono o si riducono
" ad una sola; ossia secondo che le radici dell'equazione (1)
" soddisfano alla relazione (art. 43)

$$" \lambda \bar{\lambda} = 1$$

" o non vi soddisfano o coincidono ".

45. Risolviamo effettivamente la equazione (1), escludendo per ora il caso $\delta = 0$.

Se poniamo

$$\Delta = \delta \bar{\delta} - \delta_0^2 ,$$

le due radici sono:

$$\lambda' = \frac{-\delta_0 + \sqrt{-\Delta}}{\delta} , \quad \lambda'' = \frac{-\delta_0 - \sqrt{-\Delta}}{\delta} .$$

Esse coincidono, e quindi l'equazione $f=0$ ammette un'unica soluzione, quando è $\Delta=0$. In questo caso l'equazione $\rho=0$ possiede una radice doppia, e quindi è nullo il suo discriminante, il quale col calcolo effettivo si trova essere rappresentato appunto da Δ.

Ora supponiamo $\Delta \neq 0$, e poichè Δ ha un valore essenzialmente reale distinguiamo i due casi $\Delta \lesseqgtr 0$.

$\Delta<0$. Poichè $\sqrt{-\Delta}$ è reale, si ha

$$\bar{\lambda}'=\frac{-\delta_0+\sqrt{-\Delta}}{\bar{\delta}}\,.$$

Allora la condizione $\lambda'\bar{\lambda}'=1$ non è soddisfatta; infatti si ha

$$\lambda'\bar{\lambda}'=\frac{\delta_0^2-2\,\delta_0\sqrt{-\Delta}-\Delta}{\delta\,\bar{\delta}}\,,$$

e sarebbe

$$\delta_0^2-2\,\delta_0\sqrt{-\Delta}-\Delta=\delta\,\bar{\delta}\;,\quad -2\,\delta_0\sqrt{-\Delta}=2\,\Delta\;,\quad -\delta_0=\sqrt{-\Delta}$$

$$\delta_0^2=-\Delta=-\delta\,\bar{\delta}+\delta_0^2\;,\quad \delta\,\bar{\delta}=0\;,\quad \delta=0\,,$$

mentre è stato supposto $\delta\neq 0$. Dunque quando è $\Delta<0$ la radice λ' non verifica la relazione $\lambda\bar{\lambda}=1$, e quindi esistono due soluzioni dell'equazione $f=0$.

Se $\delta=0$ il nostro ragionamento non serve a condurci a questo resultato, il quale però è sempre giusto, giacchè si ha $\Delta=-\delta_0^2<0$, e sappiamo a priori che esistono effettivamente due soluzioni dell'equazione $f=0$.

$\Delta>0$. Poichè $\sqrt{-\Delta}$ è puramente immaginario, si ha

$$\bar{\lambda}'=\frac{-\delta_0-\sqrt{-\Delta}}{\bar{\delta}}$$

e perciò:

$$\lambda' \bar{\lambda}' = \frac{\delta_0^2 + \Delta}{\delta \bar{\delta}} = \frac{\delta \bar{\delta}}{\delta \bar{\delta}} = 1 .$$

Dunque quando è $\Delta > 0$ la radice λ' verifica la relazione $\lambda\bar{\lambda} = 1$, e quindi non esistono soluzioni dell'equazione $f = 0$.

In conclusione: " La equazione $f = 0$ ammette due soluzioni, " una o nessuna secondo che si ha $\Delta \lesseqqgtr 0$ ". L'invariante Δ si dirà il *discriminante* della forma f; ma non si creda che quando la f è reale esso si riduca al discriminante D di questa forma reale; sono il δ e il δ_0 che si riducono ambedue al D, mentre il Δ si annulla.

X.

Ancora sul fascio sizigetico, $\lambda_1 f + \lambda_2 \bar{f}$.

46. Tanto per fare qualche applicazione della Teoria delle forme iperalgebriche a ricerche d'indole puramente geometrica, procediamo nella considerazione del fascio sizigetico. Proponiamoci di vedere quando due antiproiettività del fascio:

$$f'\lambda = \lambda_1\, a_x\, \bar{a}_{0\bar{y}} + \lambda_2\, a_{0x}\, \bar{a}_{\bar{y}} = 0 \quad , \quad f'\mu = \mu_1\, a_x\, \bar{a}_{0\bar{y}} + \mu_2\, a_{0x}\, \bar{a}_{\bar{y}} = 0$$

sono tali che il loro prodotto sia una proiettività involutoria. Si può subito notare che in tutte queste involuzioni prodotto certamente sono uniti i due elementi base del fascio o i due elementi limiti, secondo che esistono gli uni o gli altri; ossia esse coincidono tutte nell'unica involuzione che possiede quei due elementi come doppi. Ponendo

$$f'\lambda = n\, \bar{n}_{0\bar{y}} \quad , \quad f'\mu = m_x\, \bar{m}_{0\bar{y}} \quad ,$$

il prodotto delle due antiproiettività $f'\lambda = 0$ $f'\mu = 0$ è la proiettività

$$(m\, n_0)\, \bar{n}_{\bar{x}}\, \bar{m}_{0\bar{y}} = 0 \quad , \quad \text{o anche} \quad (\overline{n_0 m})\, n_x\, m_{0y} = 0,$$

Questa equazione si ottiene uguagliando a zero lo scorrimento $\bar{1}$.° delle forme

$$n_x \bar{n}_{0z} = \lambda_1 a_x \bar{a}_{0z} + \lambda_2 a_{0x} \bar{a}_z$$

$$\bar{m}_z m_{0y} = \bar{\mu}_1 \bar{a}_z a_{0y} + \bar{\mu}_2 \bar{a}_{0z} a_y ,$$

ossia si può scrivere:

$$\lambda_1\bar{\mu}_1(a_x \bar{a}_{0z} , \bar{a}_z a_{0y})_{\bar{1}} + \lambda_1\bar{\mu}_2(a_x \bar{a}_{0z} , \bar{a}_{0z} a_y)_{\bar{1}} + \lambda_2\bar{\mu}_1(a_{0x} \bar{a}_z , \bar{a}_z a_{0y})_{\bar{1}} +$$

$$+ \lambda_2 \bar{\mu}_2 (a_{0x} \bar{a}_z , \bar{a}_{0z} a_y)_{\bar{1}} =$$

$$= \lambda_1\bar{\mu}_1 (\overline{a_0 b})\, a_x b_{0y} + \lambda_1\bar{\mu}_2 (\overline{a_0 b_0})\, a_x b_y + \lambda_2\bar{\mu}_1 (\overline{ab})\, a_{0x} b_{0y} + \lambda_2\bar{\mu}_2 (\overline{a b_0})\, a_{0x} b_y = 0 .$$

Se la proiettività deve essere una involuzione, deve annullarsi il resultato della operazione Ω effettuata sul 1.° membro dell'equazione; ossia deve essere:

$$\lambda_1\bar{\mu}_1(\overline{a_0 b})\,(ab_0) + \lambda_1\bar{\mu}_2(\overline{a_0 b_0})\,(ab) + \lambda_2\bar{\mu}_1(\overline{ab})\,(a_0 b_0) + \lambda_2\bar{\mu}_2(\overline{a b_0})\,(a_0 b) = 0$$

e cioè:

$$\delta_0 \lambda_1 \bar{\mu}_1 + \delta \lambda_1 \bar{\mu}_2 + \bar{\delta} \lambda_2 \bar{\mu}_1 + \delta_0 \lambda_2 \bar{\mu}_2 = 0 .$$

Considerando il fascio sizigetico come un ente razionale, questa è l'equazione di una antinvoluzione fra gli elementi del fascio; dunque: " Per ogni antiproiettività del fascio sizigetico ne esiste " nel fascio stesso un'altra tale che il suo prodotto con quella " è una involuzione; due tali antiproiettività si corrispondono in " una antinvoluzione ".

47. Questa antinvoluzione possiede o no una catena fondamentale o è degenere secondo che il discriminante della sua equazione

$$D = 2\,(a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}) = 2\,(\delta_0^2 - \delta\,\bar{\delta}) = -2\,\Delta$$

è $\lesseqgtr 0$, ossia secondo che è $\Delta \gtreqless 0$. Ma essere una antiproiettività unita in quella antinvoluzione significa che il suo quadrato è una involuzione, ossia che essa è ciclica del 4.° ordine; abbiamo quindi: " Fra le antiproiettività del fascio sizigetico ce ne sono " infinite cicliche del 4.° ordine (costituenti una catena C) o una " sola o nessuna secondo che è $\Delta \gtreqless 0$, ossia secondo che il " fascio possiede due elementi limiti e un unico elemento base o " due elementi base; questa catena C quando esiste è fondamen- " tale per l'antinvoluzione C′ nella quale si corrispondono due " antiproiettività del fascio il cui prodotto è una antinvoluzione ".

Quando il fascio possiede due elementi limiti, esistono in esso due antinvoluzioni degeneri, le quali vanno riguardate anche come antiproiettività cicliche del 4.° ordine; dunque: " Quando la ca- " tena C esiste, essa passa per le due antinvoluzioni degeneri del " fascio ". In particolare quando la catena C si riduce ad un unico elemento, esso è precisamente l'unica antinvoluzione degenere che esiste in tal caso nel fascio.

Quando il fascio possiede due elementi base, esistono due antiproiettività degeneri inverse l'una dell'altra; il loro prodotto è non l'identità come quello di due antiproiettività fra loro inverse generali, ma una corrispondenza perfettamente indeterminata che può quindi riguardarsi come involutoria, mentre non può riguardarsi come tale l'identità. Si vede così che le due antiproiettività degeneri sono corrispondenti nell'antinvoluzione C′.

Se due antiproiettività del fascio sono corrispondenti nella antinvoluzione C′, è evidente che anche le loro inverse sono corrispondenti in C′ stessa; dunque essendo R′ l'antinvoluzione in cui si corrispondono due antiproiettività del fascio fra loro inverse, si ha che la C′ si trasforma in se stessa nella R′; e allora ne discende che anche la R′ si trasforma in se stessa nella C′, e le due antinvoluzioni sono *permutabili*. Quindi le catene C ed R si trasformano in se stesse nelle antinvoluzioni R′ e C′ rispettivamente.

48. Tutte queste cose acquistano in chiarezza quando si considerano le inversioni quadriche corrispondenti alle antinvoluzioni R′ e C′ sul piano dei parametri.

Su esso si ha intanto il cerchio R di raggio 1 e con centro nell'origine O, immagine della catena R; i punti D_1 D_2 corrispondenti alle due antiproiettività degeneri del fascio sono situati su questo cerchio o sono inversi rispetto ad esso secondo che il fascio non possiede o possiede elementi base; quando possiede un unico elemento base, i punti D_1 D_2 coincidono in un punto del cerchio R. Se D_1 D_2 sono sul cerchio R esiste la catena C, la quale ha per immagine un cerchio C passante per D_1 e D_2; esso deve trasformarsi in se stesso nell'inversione rispetto al cerchio R, e quindi deve essere ortogonale ad R. Se i punti D_1 D_2 sono inversi rispetto al cerchio R, la inversione C′ non possiede cerchio fondamentale; essa però è già perfettamente determinata, perchè se ne conosce la coppia D_1 D_2 e si sa che deve trasformare il cerchio R in se stesso. Se i punti D_1 D_2 coincidono in un punto del cerchio R, l'inversione C′ è degenere ed ha il suo punto singolare nel punto stesso.

49. Poichè il cerchio R si trasforma in se stesso nella inversione C′, fra i punti di esso viene stabilita una involuzione; il centro di essa è il centro O′ della inversione C′. Essa possiede due elementi doppi se O′ è esterno al cerchio R, ossia se esiste il cerchio C ortogonale ad R, e sono precisamente D_1 e D_2. Due punti corrispondenti nella involuzione corrispondono a due antinvoluzioni del fascio il cui prodotto è una involuzione. Ora è noto che condizione necessaria e sufficiente affinchè il prodotto di due corrispondenze involutorie sia involutorio è che le due corrispondenze siano permutabili, ossia che ognuna di esse sia trasformata in se stessa dall'altra; dunque: “ La antinvoluzione C′ stabilisce “ fra le antinvoluzioni della catena R una involuzione, che ha i “ suoi elementi doppi nelle due antinvoluzioni degeneri del fascio “ se esse esistono. La caratteristica di due antinvoluzioni corri- “ spondenti è che sono permutabili „.

Nella rappresentazione del fascio sul piano di Gauss, a due antinvoluzioni permutabili corrispondono due inversioni quadriche permutabili; se ambedue posseggono cerchio fondamentale, come nel caso in cui esistono due punti base, poichè ognuno dei cerchi deve trasformarsi in se stesso nell'inversione rispetto all'altro, essi sono ortogonali. Dunque a ogni cerchio del fascio corrisponde il suo ortogonale.

Se il fascio possiede due punti limiti, due inversioni corrispondenti non possono ammettere ambedue cerchio fondamentale, perchè i due cerchi sarebbero ortogonali, quindi si segherebbero, ed esisterebbero due punti base. Dunque di due punti del cerchio R sul piano dei parametri allineati col centro O' dell'inversione C' (in questo caso esterno al cerchio R) uno almeno corrisponde ad una antinvoluzione del fascio priva di catena fondamentale. Ma osserviamo che mentre il parametro $\lambda_1 : \lambda_2$ percorre il cerchio R, la corrispondente forma del fascio è reale ed il suo discriminante è δ_λ, il quale quindi conserva sempre un valore reale, e variabile certamente con continuità. Il suo segno decide se la corrispondente forma rappresenta o no effettivamente una catena semplice; e poichè questo segno non può cambiare altro che passando per i punti nei quali si ha $\delta_\lambda = 0$, ossia per i punti D_1 e D_2 che in questo caso si trovano sul cerchio R, si ha che: " Quando il " fascio è privo di base, e quindi sul piano dei parametri i punti " $D_1 D_2$ stanno sul cerchio R, i punti di R corrispondenti alle " antinvoluzioni del fascio prive di catena fondamentale occupano " uno degli archi $D_1 D_2$ ".

E ne segue in modo preciso: " Di due antinvoluzioni corri- " spondenti nella involuzione sulla catena R una possiede catena " fondamentale e l'altra no ". Non si ha dunque una corrispondenza fra i cerchi rappresentativi del piano complesso; però dato un cerchio si può trovare subito la inversione corrispondente.

Finalmente, quando il fascio possiede un unico elemento base, la involuzione sulla catena R è degenere, come è degenere la C'; a ogni cerchio corrisponde quel cerchio del fascio che si è ridotto all'unico punto base.

50. Proponiamoci un ultimo problema: Considerando una antiproiettività del fascio sizigetico, esistono nel fascio delle antiproiettività che da quella siano trasformate in se stesse, ossia permutabili con quella? [1]). Sia $f' = a_x \bar{a}_{0\bar{y}} = 0$ l'equazione dell'antiproiettività; supposto che essa non sia involutoria, la equazione del fascio sizigetico potrà scriversi:

$$\lambda_1 a_x \bar{a}_{0\bar{y}} + \lambda_2 a_{0y} \bar{a}_{\bar{y}} = 0 . \tag{1}$$

Se $x z$, $y w$ sono coppie di elementi corrispondenti nella antiproiettività

$$f' = a_x \bar{a}_{0\bar{y}} = b_x \bar{b}_{0\bar{y}} = c_x \bar{c}_{0\bar{y}} = 0 ,$$

si ha:

$$x_1 : x_2 = b_2 \bar{b}_{0\bar{z}} : - b_1 \bar{b}_{0\bar{z}}$$

$$y_1 : y_2 = c_2 \bar{c}_{0\bar{w}} : - c_1 \bar{c}_{0\bar{w}} ;$$

sostituendo nella (1) otterremo l'equazione della sua trasformata nella $f' = 0$:

$$\lambda_1 (ab) \cdot (\overline{a_0 c}) \bar{b}_{0\bar{z}} c_{0w} + \lambda_2 (a_0 b) (\overline{ac}) \bar{b}_{0\bar{z}} c_{0w} = 0 . \tag{2}$$

Ma si ha:

$$(ab) (\overline{a_0 c}) \bar{b}_{0\bar{z}} c_{0w} = [(ab) (\overline{a_0 b_0})] \bar{c}_{\bar{z}} c_{0w} + (ab) (\overline{b_0 c}) \bar{a}_{0\bar{z}} c_{0w}$$

$$(a_0 b) (\overline{ac}) \bar{b}_{0\bar{z}} c_{0w} = [(a_0 c_0) (\overline{ac})] \bar{b}_{0\bar{z}} b_w + (c_0 b) (\overline{ac}) \bar{b}_{0\bar{z}} a_{0w} ;$$

con lo scambio di qualche coppia di simboli equivalenti gli ultimi termini si riducono ai primi membri coi segni cambiati; si ha dunque

$$(ab) (\overline{a_0 c}) \bar{b}_{0\bar{z}} c_{0w} = \frac{1}{2} \delta \bar{c}_{\bar{z}} c_{0w}$$

$$(a_0 b) (\overline{ac}) \bar{b}_{0\bar{z}} c_{0w} = \frac{1}{2} \bar{\delta} \bar{b}_{0\bar{z}} b_w .$$

---

[1]) Per le proiettività si può porre un problema analogo: Considerando il fascio di tutte le proiettività che hanno due certi elementi uniti, e una qualunque di esse, esistono proiettività del fascio che in quella si trasformano in se stesso? Ma qui la risposta è immediata: tutte.

Quindi la (2) può scriversi:

$$\lambda_1 \, \delta \, \overline{c}_{\overline{z}} \, c_{0v} + \lambda_2 \, \overline{\delta} \, \overline{b}_{0\overline{z}} \, b_u = 0 \,,$$

o anche ponendo $x \, y$ in luogo di $z \, w$, cambiando i simboli e prendendo il coniugato del 1.° membro:

$$\overline{\lambda}_1 \, \overline{\delta} \, a_x \, \overline{a}_{0\overline{y}} + \overline{\lambda}_2 \, \delta \, a_{0x} \, \overline{a}_{\overline{y}} = 0 \,.$$

Questa è l'equazione dell'antiproiettività trasformata della (1) nella $f' = 0$; naturalmente essa appartiene ancora al fascio sizigetico, e scrivendola

$$\mu_1 \, a_x \, \overline{a}_{0\overline{y}} + \mu_2 \, a_{0x} \, \overline{a}_{\overline{y}} = 0$$

si ha fra i parametri λ e μ la relazione:

$$\mu_1 : \mu_2 = \overline{\lambda}_1 \, \overline{\delta} : \overline{\lambda}_2 \, \delta \quad , \quad \text{ossia} \quad \delta \mu_1 \, \overline{\lambda}_2 - \overline{\delta} \mu_2 \, \overline{\lambda}_1 = 0 \,,$$

o anche:

$$\delta \, \lambda_1 \, \overline{\mu}_2 - \overline{\delta} \, \lambda_2 \, \overline{\mu}_1 = 0 \,.$$

Questa relazione stabilisce fra le antiproiettività del fascio sizigetico una antiproiettività in cui sono corrispondenti due antiproiettività una trasformata dell'altra nella $f' = 0$; anzi l'antiproiettività è involutoria, perchè scrivendone l'equazione

$$i \, \delta \, \lambda_1 \, \overline{\mu}_2 - i \, \overline{\delta} \, \lambda_2 \, \overline{\mu}_1 = 0 \,,$$

si vede che sono soddisfatte le condizioni per la realità della forma del 1.° membro, essendo in essa i coefficienti estremi nulli, e i medi fra loro coniugati. Se questa antinvoluzione possiede catena fondamentale, essa è costituita di quelle antiproiettività del fascio che si trasformano in se stesse nella $f' = 0$, e quindi permutabili alla $f' = 0$. Il discriminante dell'equazione è

$$\mathrm{D} = 2 \, (a_{11} \, a_{22} - a_{12} \, a_{21}) = 2 \, i^2 \, \delta \, \overline{\delta} = -2 \, \delta \, \overline{\delta} < 0 \,.$$

Dunque esiste sempre catena fondamentale; ossia: « Per ogni « antiproiettività $f' = 0$ del fascio sizigetico se ne hanno nel fascio

" stesso infinite ad essa permutabili, costituenti una catena semplice P. Due antiproiettività separate armonicamente dalla catena P sono tali che l'una si trasforma nell'altra nella $f' = 0$ ".

51. Qualunque sia la antiproiettività $f' = 0$, alcune antiproiettività che da essa sono trasformate in se stesse e quindi fanno parte della relativa catena P si riconoscono subito. Anzitutto la $f = 0$ stessa e la sua inversa; poi, se il fascio possiede due elementi base, le due antiproiettività degeneri fra loro inverse appartenenti al fascio. Se il fascio non possiede base, le due antinvoluzioni degeneri si trasformano evidentemente l'una nell'altra qualunque sia la $f' = 0$, e quindi sono separate armonicamente da tutte le catene P. Dunque: " Tutte le catene P relative alle varie antiproiettività del fascio passano fra l'antiproiettività stessa cui si riferiscono, e passano poi per le due antiproiettività degeneri del fascio o sono separate armonicamente dalle due antinvoluzioni degeneri secondo che esistono le une o le altre. Ossia esse costituiscono un fascio di catene che ha nelle due corrispondenze degeneri del fascio sizigetico i suoi elementi base o i suoi elementi limiti rispettivamente ".

Sul piano dei parametri il fascio delle catene P ha per immagine un fascio di cerchi, in cui i punti D_1 D_2 figurano o come punti base o come punti limiti secondo che essi sono inversi rispetto al cerchio R o stanno su esso. Risulta anche evidente che tutti i cerchi del fascio sono ortogonali al cerchio R e al cerchio C quando esiste; ossia: " Nel fascio sizigetico tutte le catene P sono permutabili alla catena R, e alla catena C quando esiste ".

Se consideriamo due antiproiettività di una medesima catena P, evidentemente esse sono fra loro permutabili, giacchè la catena P di ognuna di esse è quella stessa su cui stanno; dunque possiamo dire: " Le antiproiettività del fascio sizigetico si distribuiscono in infinite catene costituenti un fascio; tutte le antiproiettività di una medesima catena sono fra loro permutabili, quelle di catene differenti non sono mai fra loro permutabili ".

Lasciando queste considerazioni osserviamo che veramente tutti i nostri ragionamenti partivano dall'ipotesi che la antiproiettività $f' = 0$ non fosse involutoria; ma evidentemente i resultati ottenuti valgono anche quando la $f' = 0$ è una antinvoluzione del fascio. E infatti quella ipotesi ci è stata necessaria solo per concludere che le antiproiettività del fascio permutabili alla data costituiscono una catena; ora se la $f' = 0$ è una antinvoluzione, poichè la permutabilità è una relazione reciproca, le antiproiettività a questa permutabili sono tutte e sole quelle le cui corrispondenti catene P passano per essa; ossia tutte e sole quelle della catena del fascio di catene P che passa per la data antinvoluzione. Così anche in questo caso è dimostrato che costituiscono una catena.

XI.

Sistema simultaneo di più forme iper. $(1, \bar{1})$, reali.

52. Consideriamo un sistema qualunque di forme iperalgebriche $(1, \bar{1})$, reali:

$$f_1 = a_x \bar{a}_{\bar{x}} = \alpha_x \bar{\alpha}_{\bar{x}} = \dots , \quad f_2 = b_x \bar{b}_{\bar{x}} = \beta_x \bar{\beta}_{\bar{x}} = \dots ,$$

$$f_3 = c_x \bar{c}_{\bar{x}} = \gamma_x \bar{\gamma}_{\bar{x}} = \dots , \quad f_4 = d_x \bar{d}_{\bar{x}} = \delta_x \bar{\delta}_{\bar{x}} = \dots , \text{ ecc.}$$

Volendo costruire per esso un sistema completo di forme invariantive, stabiliamo intanto di introdurre in esso tutti gli scorrimenti singoli e simultanei delle forme del sistema; avremo forme dei 3 tipi:

$$(f_i f_k)_{\bar{1}} = (\bar{a}\bar{b})\, a_x\, b_x \ , \quad (f_i f_i) = (a\alpha)\, (\bar{a}\bar{\alpha}) \ , \quad (f_i f_k)_{1,\bar{1}} = (ab)\, (\bar{a}\bar{b}) \, .$$

Insieme alle forme del 1.° tipo intendiamo introdurre anche le loro coniugate; le forme degli altri due tipi sono tutte reali.

Un prodotto simbolico qualunque conterrà, oltre i fattori lineari, solo determinanti simbolici dei tipi $(a\alpha)$ e (ab), e i loro coniugati $(\overline{a\alpha})$ e $(\overline{ab})$. Che i fattori $(a\alpha)$ e $(\overline{a\alpha})$ siano riducenti è manifesto, giacchè essendo a e α simboli equivalenti la presenza di quei fattori determina, analogamente a quanto vedemmo altre volte, lo staccarsi della forma $(a\alpha)$ $(\overline{a\alpha})$. Ora supponiamo che il prodotto contenga il fattore (ab), con a e b simboli di due forme distinte $f_i f_k$, e vediamo di introdurre nel sistema completo convenienti forme affinchè anche questo fattore divenga riducente. Poniamo

$$\theta_x^2 = (\overline{ab})\, a_x\, b_x \,,$$

e occupiamoci per ora, in luogo del fattore (ab), del fattore (θc), in cui c sia simbolo di una qualunque f_l delle forme del sistema.

Se in un prodotto appare (θc) vi devono di nuovo apparire i simboli θ e c; onde avremo un'espressione

$$(\theta c)\, \theta_x\, \bar{c}_y$$

con x e y variabili o simboli. Ma si ha:

$$\theta_x\, \theta_y = \frac{1}{2}\, (\overline{ab}) \left\{ a_x\, b_y + a_y\, b_x \right\}$$

$$(\theta c)\, \theta_x\, \bar{c}_y = \frac{1}{2}\, (\overline{ab}) \left\{ (bc)\, a_x + (ac)\, b_x \right\} \bar{c}_y \,,$$

e quindi applicando prima l'una e poi l'altra delle identità

$$(bc)\, a_x = (ba)\, c_x + (ac)\, b_x \;\;,\;\; (ac)\, b_x = (ab)\, c_x + (bc)\, a_x \,,$$

si ha rispettivamente:

$$(\theta c)\, \theta_x\, \bar{c}_y = \frac{1}{2}\, (\overline{ab})\, (ab)\,.\, c_x\, \bar{c}_y + (\overline{ab})\, (ac)\, b_x\, \bar{c}_y \;\;,$$

$$= \frac{1}{2}\, (\overline{ab})\, (ab)\,.\, c_x\, \bar{c}_y + (\overline{ab})\, (bc)\, a_x\, \bar{c}_y \;\;.$$

In queste espressioni i primi termini sono ambedue ridotti; gli ultimi sono riducibili a causa dei fattori (ac) e (bc) rispettivamente se c è simbolo equivalente ad a e b, ossia se la f_l è l'una o l'altra delle $f_i f_k$. Ne segue che se si hanno le due sole forme $f_i f_k$ il fattore (θc) è certamente riducente.

Ma supponiamo che avendosi più di due forme si abbia anche $l \neq i \neq k$. Per rendere riducente (θc) basterà rendere riducibile la espressione

$$(\overline{ab})\ (ac)\ b_x\ \bar{c}_{\bar{y}}\ .$$

Se qui x ed y sono ambedue variabili, non può essere che $x = y$, e quindi è sufficiente aggiungere pel sistema completo la forma

$$F_{ikl} = (\overline{ab})\ (ac)\ b_x\ \bar{c}_{\bar{x}}\ ;$$

se poi o x o y o ambedue sono simboli, possiamo p. es. supporre che sia y simbolo, perchè i simboli b e c nella espressione si trovano nelle medesime condizioni a meno della segnatura che in questa discussione non ha influenza, giacchè introducendo una forma intenderemo di introdurre sempre anche la sua coniugata. Se y è equivalente a c, la espressione è certamente riducibile; ma anche se y è equivalente ad a o b, giacchè applicando le solite identità si ha:

$$(\overline{\mathrm{ab}})\ (ac)\ b_x\ \bar{\mathrm{c}}_{\bar{y}} = [(\overline{\mathrm{ac}})\ (ac)]\ b_x\ \bar{\mathrm{b}}_{\bar{y}} + (\overline{\mathrm{cb}})\ (ac)\ b_x\ \bar{\mathrm{a}}_{\bar{y}}$$

$$(\overline{ab})\ (\mathrm{ac})\ \mathrm{b}_x\ \bar{c}_{\bar{y}} = [(\overline{ab})\ (\mathrm{ab})]\ \mathrm{c}_x\ \bar{c}_{\bar{y}} + (\overline{ab})\ (\mathrm{bc})\ \mathrm{a}_x\ \bar{c}_{\bar{y}} =$$

$$= \qquad \text{"} \qquad + [(\overline{\mathrm{cb}})(bc)]\ a_x\ \bar{\mathrm{a}}_{\bar{y}} + (\overline{\mathrm{ac}})\ (bc)\ a_x\ \bar{\mathrm{b}}_{\bar{y}}$$

e tutti i termini del 2.° membro dell'una o dell'altra sono ridotti o riducibili, grazie ai fattori $\bar{a}_{\bar{y}}$ o $\bar{b}_{\bar{y}}$ rispettivamente.

Dunque se si hanno le tre sole forme $f_i f_k f_l$, dopo la introduzione della F_{ikl} il fattore (θc) è certamente riducente; ma ora supponiamo che si abbiano più di tre forme, e che y sia un simbolo d di una forma f_m diversa dalle $f_i f_k f_l$. Avremo la espressione:

$$(\overline{ab})\ (ac)\ b_x\ (\overline{cd})\ d_z$$

con $x\,z$ variabili o simboli; se ambedue sono variabili è $x=z$, e quindi la espressione è ridotta quando si introduca nel sistema completo la forma

$$\mathrm{F}_{iklm} = (ac)\,(\overline{ab})\,(\overline{cd})\,b_x\,d_x\,;$$

se x o z sono simboli, possiamo supporre che lo sia z, perchè b e d si trovano nelle stesse condizioni. Se z è simbolo equivalente a d la espressione è riducibile; trasformando inoltre convenientemente si ha:

$$(\overline{ab})\,(\mathrm{ac})\,(\overline{cd})\,\mathrm{b}_x\,d_z = {}^*[(\overline{ab})\,(\mathrm{ab})]\,(\overline{cd})\,\mathrm{c}_x\,d_z + (\overline{ab})\,(\mathrm{bc})\,(\overline{cd})\,\mathrm{a}_x\,d_z =$$

$$= {}^* \qquad \text{„} \qquad + (\overline{ab})\,(\mathrm{bd})\,(\overline{cd})\,a_x\,\mathrm{c}_z + {}^*(\overline{ab})\,[(\mathrm{dc})\,(\overline{cd})]\,a_x\,\mathrm{b}$$

$$(\overline{ab})\,(ac)\,(\overline{cd})\,\mathrm{b}_x\,\mathrm{d}_z = {}^*[(\overline{ab})(ac)\,(\overline{cd})\,(\mathrm{bd})]\,(\mathrm{xz}) + (\overline{ab})\,ac)\,(\overline{cd})\,\mathrm{b}_z\,\mathrm{d}_x =$$

$$= {}^* \qquad \text{„} \qquad + {}^*[(\overline{ab})\,(\mathrm{ab})]\,(\overline{cd})\,\mathrm{c}_z\,d_x + (\overline{ab})\,(\mathrm{bc})\,(\overline{cd})\,\mathrm{a}_z\,d_x$$

Nei secondi membri i termini segnati con asterisco sono ridotti quando si aggiunga pel sistema completo anche la forma

$$\mathrm{R}_{iklm} = (\overline{ab})\,(ae)\,(bd)\,(\overline{cd})\,;$$

e se z è un simbolo equivalente ad a o b o c, in una opportuna delle identità precedenti tutti i termini del 2.° membro sono riducibili. Dunque se si hanno soltanto le quattro forme $f_i\,f_k\,f_l\,f_m$, certamente, dopo aver introdotto nel sistema completo anche le forme F_{iklm} ed R_{iklm}, il fattore (θc) è riducente.

Ci fermeremo al sistema di quattro forme $f_1\,f_2\,f_3\,f_4$, perchè ciò basta per i nostri scopi. Notiamo che se vogliamo che (θc) sia riducente qualunque siano le forme $f_i\,f_k$ cui si riferisce la θ_x^2, e qualunque sia la forma f_l i cui simboli sono $c\ldots..$, dobbiamo nel sistema completo introdurre *tutte* le forme F_{ikl}, F_{iklm}, R_{iklm} dove $i\,k\,l\,m$ sono scelti in modo qualunque fra i quattro indici

1 2 3 4, purchè fra loro distinti; però è facile persuadersi, applicando le solite identità, che di due delle precedenti forme differenti soltanto per la disposizione degli indici, basta considerarne una, giacchè l'altra in tal caso diventa riducibile. Ne segue che è sufficiente la considerazione delle forme:

$$F_{234}\ ,\quad F_{341}\ ,\quad F_{412}\ ,\quad F_{123}\ ,\quad F_{1234}\ ,\quad R_{1234}\ .$$

Ora siamo in grado di dimostrare che il fattore simbolico (ab), o $(\overline{ab})$, con a e b non equivalenti, è riducente. Se in un prodotto comparisce il fattore $(\overline{ab})$, vi sarà contenuta o l'espressione $(\overline{ab})\ (ab)$, o la $(\overline{ab})\ a_x\ b_y$ con $x\ y$ variabili o simboli. Nel primo caso il prodotto è già ridotto, nel secondo caso se x ed y sono variabili si ha $x=y$ e il prodotto è già ridotto; se poi o x o y sono i simboli, si ha, ponendo

$$\theta_x^2 = (\overline{ab})\ a_x\ b_x :$$

$$2\ \theta_x\ \theta_y = (\overline{ab}) \left\{ a_x\ b_y + a_y\ b_x \right\} ,$$

$$(\overline{ab})\ a_x\ b_y = 2\ \theta_x\ \theta_y - (\overline{ab})\ a_y\ b_x = 2\ \theta_x\ \theta_y - (\overline{ab})\ a_x\ b_y - (\overline{ab})\ (ab)\ .\ (yx),$$

$$2\ (\overline{ab})\ a_x\ b_y = 2\ \theta_x\ \theta_y + (ab)\ (\overline{ab})\ .\ (xy)\ .$$

Nel 2.° membro l'ultimo termine è ridotto, l'altro è certamente riducibile contenendo un fattore del tipo (θc). Quindi anche in questo caso il prodotto è riducibile.

Così, dopo aver dimostrato che tutti i determinanti simbolici dei vari tipi sono riducenti, è ben chiaro che le forme introdotte nel sistema completo sono sufficienti; ossia il sistema completo di 1.ª e anche di 2.ª specie per quattro forme (1, 1) reali può ritenersi costituito delle forme:

$$f_1 = a_x \bar{a}_{\bar{x}} = \alpha_x \bar{\alpha}_{\bar{x}}\ ,\ f_2 = b_x \bar{b}_{\bar{x}} = \beta_x \bar{\beta}_{\bar{x}}\ ,\ f_3 = c_x \bar{c}_{\bar{x}} = \gamma_x \bar{\gamma}_{\bar{x}}\ ,\ f_4 = d_x \bar{d}_{\bar{x}} = \delta_x \bar{\delta}_{\bar{x}}\ ,$$

$$\theta_{12} = \overline{(ab)}\, a_x b_x\ ,\ \theta_{13} = \overline{(ac)}\, a_x c_x\ ,\ \theta_{14} = \overline{(ad)}\, a_x d_x\ ,\ \theta_{23} = \overline{(bc)}\, b_x c_x\ ,\ \theta_{24} = \overline{(bd)}\, b_x d_x\ ,\ \theta_{34} = \overline{(cd)}\, c_x$$

$$D_{11} = (a\alpha)\ \overline{(a\alpha)}\ ,\ D_{22} = (b\beta)\ \overline{(b\beta)}\ ,\ D_{33} = (c\gamma)\ \overline{(c\gamma)}\ ,\ D_{44} = (d\delta)\ \overline{(d\delta)}$$

$$D_{12} = (ab)\,\overline{(ab)}\ ,\ D_{13} = (ac)\,\overline{(ac)},\ D_{14} = (ad)\,\overline{(ad)},\ D_{23} = (bc)\,\overline{(bc)},\ D_{24} = (bd)\,\overline{(bd)},\ D_{34} = (cd)\,\overline{(c}$$

$$F_{234} = \overline{(bc)}\,(bd)\, c_x \bar{d}_{\bar{x}}\ ,\ F_{341} = \overline{(cd)}\,(ca)\, d_x \bar{a}_{\bar{x}}\ ,\ F_{412} = \overline{(da)}\,(db)\, a_x \bar{b}_{\bar{x}}\ ,\ F_{123} = \overline{(ab)}\,(ac)\, b_x$$

$$F_{1234} = \overline{(ab)}\,(ac)\,\overline{(cd)}\, b_x\, d_x\ ,\ R_{1234} = \overline{(ab)}\,(ac)\,(bd)\,\overline{(cd)}\ .$$

Di tutte queste forme vanno considerate anche le coniugate; notiamo però che le f e D sono reali, e delle F_{ikl} e della R_{1234} non importa considerare le coniugate, perchè sono delle nuove F_{ikl} ed R_{iklm}, e di queste abbiamo detto che è sufficiente la considerazione delle già scritte.

53. Faremo qualche considerazione sulla interpetrazione delle forme del sistema completo nel caso di due sole forme. Se esse sono

$$f_1 = a_x \bar{a}_{\bar{x}} = b_x \bar{b}_{\bar{x}} = \dots\ ,\quad f_2 = \alpha_x \bar{\alpha}_{\bar{x}} = \beta_x \bar{\beta}_{\bar{x}} = \dots\ ,$$

il sistema completo sarà costituito, oltre che dalle due forme stesse, dalle forme:

$$\theta = \overline{(a\alpha)}\ a_x\, \alpha_x$$

$$D_{11} = (ab)\ \overline{(ab)}\ ,\quad D_{12} = (a\alpha)\ \overline{(a\alpha)}\ ,\quad D_{22} = (\alpha\beta)\ \overline{(\alpha\beta)}\ ,$$

e dalla coniugata dell'unica che non è reale, ossia la

$$\bar{\theta} = (a\alpha)\ \bar{a}_{\bar{x}}\, \bar{\alpha}_{\bar{x}}\ .$$

Che cosa esprimano D_{11} e D_{22} col loro segno e col loro annullarsi è già noto. Ora poniamo

$$f'_1 = a_x\, \bar{a}_{\bar{y}}\ ,\quad f'_2 = \alpha_x\, \bar{\alpha}_{\bar{y}}\ ,$$

e cerchiamo l'equazione dell'antinvoluzione in cui si trasforma la $f'_1 = 0$ nella $f'_2 = 0$. Se $x\, z$, $y\, w$ sono coppie di punti corrispondenti nella $f'_2 = 0$, si ha:

$$x_1 : x_2 = \alpha_2\, \bar{\alpha}_{\bar{z}} : -\alpha_1\, \bar{\alpha}_{\bar{z}}\ , \quad y_1 : y_2 = \beta_2\, \bar{\beta}_{\bar{w}} : -\beta_1\, \bar{\beta}_{\bar{w}}\ ;$$

sostituendo nell'equazione $f'_1 = 0$ si ha l'equazione

$$(a\alpha)\, (\overline{a\beta})\, \bar{\alpha}_{\bar{z}}\, \beta_w = 0\,,$$

ossia, ponendo

$$F'_1 = (\overline{a\alpha})\, (a\beta)\, \alpha_x\, \bar{\beta}_{\bar{y}}\,,$$

la equazione $F'_1 = 0$ rappresenta l'antinvoluzione trasformata della $f'_1 = 0$ nella $f'_2 = 0$.

Trasformiamo questa equazione. Si ha:

$$(\overline{a\alpha})\, (\mathrm{a}\beta)\, \alpha_x\, \bar{\beta}_{\bar{y}} = (\overline{a\alpha})\, (\mathrm{a}\alpha)\, \beta_x\, \bar{\beta}_{\bar{y}} + (\overline{a\alpha})\, (\alpha\beta)\, \mathrm{a}_x\, \bar{\beta}_{\bar{y}} =$$
$$= D_{12}\, f'_2 \qquad + \qquad ''$$
$$(\overline{\mathrm{a}\alpha})\, (\alpha\beta)\, a_x\, \bar{\beta}_{\bar{y}} = (\overline{\mathrm{a}\beta})\, (\alpha\beta)\, a_x \bar{\alpha}_{\bar{y}} + (\overline{\beta\alpha})\, (\alpha\beta)\, a_x\, \bar{\mathrm{a}}_{\bar{y}}\,.$$

Il 1.° termine del 2.° membro, scambiando i simboli α e β, si riduce al 1.° membro col segno cangiato; onde:

$$(\overline{a\alpha})\, (\alpha\beta)\, a_x\, \bar{\beta}_{\bar{y}} = \frac{1}{2}\, (\overline{\beta\alpha})\, (\alpha\beta)\, a_x\, \bar{a}_{\bar{y}} = -\frac{1}{2}\, D_{22}\, f'_1\,,$$

e quindi

$$F'_1 = D_{12}\, f'_2 - \frac{1}{2}\, D_{22}\, f'_1\,.$$

Analogamente, se $F'_2 = 0$ è l'equazione dell'antinvoluzione trasformata della $f'_2 = 0$ nella $f'_1 = 0$, si ha:

$$F'_2 = D_{12}\, f'_1 - \frac{1}{2}\, D_{11}\, f'_2\,.$$

Ciò mostra che, se le due antinvoluzioni $f'_1=0$ $f'_2=0$ non coincidono, " la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due " antinvoluzioni si trasformino in se stesse l'una nell'altra, ossia " affinchè esse siano permutabili, è che si abbia $D_{12}=0$ „.

Sul piano di Gauss alle due antinvoluzioni corrispondono due inversioni quadriche, ed essere $D_{12}=0$ esprime la loro permutabilità, e quindi la ortogonalità dei loro cerchi fondamentali quando essi esistono, ossia quando è $D_{11}<0$, $D_{22}<0$.

Si discute facilmente il caso in cui è $D_{11}=0$ o $D_{22}=0$.

54. Se ad un elemento x corrispondono, nelle due antinvoluzioni $f'_1=0$ $f'_2=0$, due elementi z e w, si hanno le relazioni

$$a_x \, a_{\bar{z}} = 0 \quad , \quad \alpha_x \, \alpha_{\bar{w}} = 0 \; ,$$

e fra queste eliminando la x si ha l'equazione della proiettività prodotto delle due antinvoluzioni:

$$(a\alpha)\, \bar{a}_{\bar{z}}\, \bar{\alpha}_{\bar{w}} = 0 \; , \quad \text{o anche} \quad (\overline{a\alpha})\, a_x\, a_y = 0 \, .$$

Dunque la equazione $\theta=(\overline{a\alpha})\, a_x\, \alpha_x=0$ dà quegli elementi che appartengono ad una coppia comune alle due antinvoluzioni, o che sono uniti in ambedue le antinvoluzioni. Se θ (che si dirà anche *Jacobiano* delle due forme) è identicamente nulla, le due antinvoluzioni coincidono; se non è identicamente nulla, la equazione $\theta=0$ dà o i due elementi di una coppia comune o due elementi uniti comuni. Vediamo di distinguere i due casi.

Per questo consideriamo il fascio di antiproiettività

$$f'\lambda = \lambda_1 f'_1 + \lambda_2 f'_2 = \lambda_1 \, a_x \, a_{\bar{y}} + \lambda_2 \, \alpha_x \, \alpha_{\bar{y}} = 0$$

e insieme il fascio di forme iperalgebriche $(1, \bar{1})$;

$$f\lambda = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 .$$

Fra le forme del fascio sono reali quelle che corrispondono a valori reali del parametro $\lambda_1 : \lambda_2$, e sono fra loro coniugate quelle corrispondenti a valori coniugati del parametro. Dunque questo fascio può immaginarsi determinato da una forma iperalgebrica non reale e dalla sua coniugata, ed è quindi un *fascio sizigetico* di forme iperalgebriche $(1, \bar{1})$. Secondo che il fascio possiede o no una base, le antinvoluzioni $f'_1 = 0$ $f'_2 = 0$ posseggono o no elementi uniti comuni.

Per vedere se il fascio possiede o no base, basta esaminare il segno del discriminante Δ di una forma non reale qualunque del fascio. Si ha:

$$\delta_\lambda = (f\lambda f\lambda)_{1,\bar{1}} = \lambda_1^2 (f_1 f_1)_{1,\bar{1}} + \lambda_1 \lambda_2 (f_1 f_2)_{1,\bar{1}} + \lambda_2 \lambda_1 (f_2 f_1)_{1,\bar{1}} + \lambda_2^2 (f_2 f_2)_{1,\bar{1}} =$$
$$= \lambda_1^2 D_{11} + 2 \lambda_1 \lambda_2 D_{12} + \lambda_2^2 D_{22}$$

$$\delta_{0\lambda} = (f\lambda \bar{f}\lambda)_{1,\bar{1}} = \lambda_1 \bar{\lambda}_1 (f_1 f_1)_{1,\bar{1}} + \lambda_1 \bar{\lambda}_2 (f_1 f_2)_{1,\bar{1}} + \lambda_2 \bar{\lambda}_1 (f_2 f_1)_{1,\bar{1}} + \lambda_2 \bar{\lambda}_2 (f_2 f_2)_{1,\bar{1}} =$$
$$= \lambda_1 \bar{\lambda}_1 D_{11} + (\lambda_1 \bar{\lambda}_2 + \lambda_2 \bar{\lambda}_1) D_{12} + \lambda_2 \bar{\lambda}_2 D_{22}$$

e quindi, come facilmente si trova:

$$\Delta\lambda = \delta\lambda \, \bar{\delta}\lambda - \delta_0^2\lambda = (\lambda_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1 \lambda_2)^2 (D_{11} D_{22} - D_{12}^2) .$$

Ora osserviamo che $(\lambda_1 \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1 \lambda_2)$ è una quantità puramente immaginaria, e quindi il suo quadrato è una quantità reale essenzialmente negativa; dunque si ha

$$\Delta\lambda \lesseqgtr 0 \quad \text{quando} \quad D_{11} D_{22} - D_{12}^2 \gtreqless 0 \,;$$

Poichè il fascio sizigetico possiede due elementi base o uno solo o nessuno secondo che è $\Delta\lambda \lesseqgtr 0$ (art. 45), così abbiamo:
" Le due antinvoluzioni $f'_1 = 0$ $f'_2 = 0$ posseggono due o uno o
" nessun elemento unito comune, ossia le due catene semplici
" (quando esistono) $f_1 = 0$ $f_2 = 0$, o i due cerchi rappresentativi

" sul piano di Gauss, si segano o si toccano o non si incontrano
" affatto, secondo che si ha:

$$\text{“}\ \Delta_{f_1 f_2} = D_{11}\, D_{22} - D_{12}^2 \gtreqless 0\ ^{1)}\ \text{”}.$$

L'invariante $\Delta_{f_1 f_2}$ si dirà *risultante* delle due forme $f_1\, f_2$.

55. Per il sistema di due forme iperalgebriche $(1, \bar{1})$ reali si ha l'invariante assoluto

$$\frac{D_{12}^2}{D_{11}\, D_{22}}\ ;$$

vediamo quale è il suo significato geometrico, supponendo che ambedue le forme rappresentino effettivamente una catena semplice, ossia due cerchi sul piano di Gauss, e che di più essi si seghino; cioè che si abbia:

$$D_{11} < 0\ ,\quad D_{22} < 0\ ,\quad D_{11}\, D_{22} - D_{12}^2 > 0\ .$$

Siano $C_1\, C_2$ i due cerchi, ed $U\,V$ i loro due punti di intersezione; le equazioni cartesiane dei due cerchi sono le $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, se si suppongono ridotte a forma non omogenea e si pone $\dfrac{x_1}{x_2} = x + iy$; e la equazione del loro fascio, del quale vogliamo ora considerare tutti i cerchi reali e immaginari, è

$$f_\lambda = \lambda_1\, f_1 + \lambda_2\, f_2 = 0\ .$$

Nel fascio si hanno tre cerchi degeneri: uno costituito della retta $U\,V$ o della retta all'infinito, e gli altri due costituiti di due coppie di rette immaginarie che dai punti $U\,V$ vanno ai due punti ciclici del piano. La forma f_λ corrispondente al primo è reale e non degenere; quindi alle due forme f_λ degeneri, che

---

[1]) Ad un resultàto analogo perviene anche il Segre, nella nota al §. 18 del Saggio citato, mediante la considerazione del fascio di antiproiettività, ma non naturalmente riportandosi ai resultati da noi ottenuti per il fascio sizigetico.

effettivamente si spezzano in due fattori lineari, corrispondono gli altri due cerchi degeneri. Dunque i valori del parametro $\lambda_1 : \lambda_2$ corrispondenti a questi cerchi sono dati dall' equazione:

$$(f\lambda\, f\lambda)_{1,\bar{1}} = \lambda_1^2\,(f_1 f_1)_{1,\bar{1}} + \lambda_1\lambda_2\,(f_1 f_2)_{1,\bar{1}} + \lambda_2\lambda_1\,(f_2 f_1)_{1,\bar{1}} + \lambda_2^2\,(f_2 f_2)_{1,\bar{1}} =$$
$$= D_{11}\lambda_1^2 + 2\,D_{12}\lambda_1\lambda_2 + D_{22}\lambda_2^2 = 0\,.$$

Allora per una nota formola di CAYLEY, se indichiamo con φ l'angolo dei due cerchi $C_1\,C_2$, si ha

$$\cos\varphi = \frac{D_{12}}{\sqrt{D_{11}\,D_{22}}}\,,$$

e quindi

$$\cos^2\varphi = \frac{D_{12}^2}{D_{11}\,D_{22}}\,.$$

Questo è il significato semplicissimo dell'invariante assoluto.

Al medesimo resultato si può del resto giungere anche con procedimento più diretto, considerando il triangolo $O_1\ O_2\ U$, se $O_1\,O_2$ sono i centri dei due cerchi, e ricordando le espressioni dei raggi dei due cerchi e dei valori della variabile complessa corrispondenti ai punti $O_1\,O_2$.

XII.

Sistema simultaneo di una forma iper. $(1,\bar{1})$, reale, e di una forma algebrica quadratica.

56. Consideriamo il sistema di una forma algebrica quadratica e di una forma iperalgebrica $(1, \bar{1})$ reale:

$$\varphi = \alpha_x^2 = \beta_x^2 = \ldots\,, \quad f = a_x\,\bar{a}_{\bar{x}} = b_x\,\bar{b}_{\bar{x}} = \ldots\,.$$

Occupiamoci anzitutto della determinazione del relativo sistema completo; in esso vogliamo intanto che siano contenute, oltre le φ e f, le forme

$$D = (\varphi\varphi)_2 = (\alpha\beta)^2\,, \quad D' = (ff)_{1,\bar{1}} = (ab)\,(\overline{ab})\,,$$

e le coniugate di quelle fra queste forme che non sono reali, ossia le forme

$$\bar{\varphi} = \bar{\alpha}_x^2 \quad , \quad \bar{D} = (\overline{\alpha\beta})^2 .$$

Ogni prodotto simbolico conterrà, oltre fattori lineari, determinanti simbolici dei soli tipi (ab), $(a\alpha)$, $(\alpha\beta)$ e coniugati; ma se nel prodotto sono contenuti fattori del 1.° o dell'ultimo tipo, manifestamente, come abbiamo visto più volte, il prodotto è riducibile. Ora supponiamo dunque che nel prodotto sia contenuto un fattore del tipo $(a\alpha)$, o $(\overline{a\alpha})$ che è lo stesso.

Nel prodotto simbolico devono comparire di nuovo i simboli $\bar{a}$ e α, che non possono esser riuniti in un medesimo determinante; avremo dunque

$$(a\alpha)\ \bar{a}_{\bar{x}}\ \alpha_y$$

con $x\,y$ variabili o simboli. Qui possono distinguersi tre casi: 1.° x e y ambedue variabili; 2.° x e y una variabile e una simbolo; 3.° x e y ambedue simboli. Nel 1.° caso non può essere altro che $x = y$, e il prodotto è ridotto quando si introduca nel sistema completo la forma

$$\theta = (\alpha a)\ \alpha_x\ \bar{a}_{\bar{x}} .$$

Nel 2.° caso, se x è simbolo latino o y è simbolo greco il prodotto è certo riducibile; supponiamo dunque p. es. che y sia simbolo latino, e allora x variabile. Avremo l'espressione

$$(a\alpha)\ \bar{a}_{\bar{x}}\ (\alpha b)\ \bar{b}_{\bar{z}} .$$

Se anche z è variabile, è $x = z$, e allora è sufficiente aggiungere pel sistema completo la forma

$$\bar{\Phi} = (a\alpha)\ (b\alpha)\ \bar{a}_{\bar{x}}\ \bar{b}_{\bar{x}} ;$$

se z è simbolo latino il prodotto è riducibile; se z è simbolo greco, si ha l'espressione:

$$(a\alpha)\ (\alpha b)\ (\overline{b\beta})\ \bar{a}_{\bar{x}}\ \bar{\beta}_{\bar{t}} .$$

Se anche v è variabile è $x = v$, basta aggiungere pel sistema completo la forma

$$\bar{\mathrm{U}} = (a\alpha)\,(b\alpha)\,(\overline{a\beta})\,\bar{b}_{\bar{x}}\,\bar{\beta}_{\bar{x}}\,;$$

se v è simbolo greco il prodotto è riducibile; se è simbolo latino, notiamo che si ha:

$$(a\alpha)\,(\alpha b)\,(\overline{b\beta})\,\bar{\mathrm{a}}_{\bar{x}}\,\bar{\beta}_{\bar{v}} = (a\alpha)\,(\alpha b)\,(\overline{b\beta})\,\bar{\mathrm{a}}_{\bar{v}}\,\bar{\beta}_{\bar{x}} + (a\alpha)\,(\alpha b)\,(\overline{b\beta})\,(\overline{\mathrm{a}\beta})\,(\overline{\mathrm{x}\mathrm{v}})\,.$$

Nel 2.° membro il 1.° termine è riducibile, e il 2.° è ridotto quando si convenga di introdurre nel sistema completo la forma:

$$\mathrm{R} = (a\alpha)\,(b\alpha)\,(\overline{a\beta})\,(\overline{b\beta})\,.$$

Così è esaurito il caso in cui nella espressione $(a\alpha)\,\bar{a}_{\bar{x}}\,\alpha_y$ la x è variabile e la y è simbolo; ora supponiamo x simbolo e y variabile, e basterà x simbolo greco. Avremo l'espressione

$$(a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,\alpha_y\,\bar{\beta}_{\bar{z}}\,.$$

Se anche z è variabile basta introdurre pel sistema completo la forma

$$\mathrm{F} = (a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,\alpha_x\,\bar{\beta}_{\bar{x}}\,;$$

se z è simbolo greco il prodotto è riducibile; se z è simbolo latino si ha

$$(a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,\alpha_y\,(\overline{\beta b})\,b_v\,.$$

Se v è variabile il prodotto è già ridotto, staccandosi la coniugata della forma U già introdotta, ossia la U; se v è simbolo latino il prodotto è riducibile; se v è simbolo greco si ha

$$(a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,(\overline{\beta b})\,\alpha_y\,\mathrm{b}_v = (a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,(\overline{\beta b})\,\alpha_v\,\mathrm{b}_y + (a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,(\overline{\beta b})\,(\alpha\mathrm{b})\,(\mathrm{y}\mathrm{v})\,.$$

la quale mostra che il prodotto è riducibile, giacchè nel 2.° membro il 1.° termine è riducibile e il 2.° è ridotto essendo stata già introdotta nel sistema completo la forma R.

Così il 2.° caso è finalmente esaurito. Nel 3.° caso, in cui nella espressione $(a\alpha)\, a_{\bar{x}}\, \alpha_y$ tanto x che y sono simboli, il prodotto è certamente riducibile se non è x simbolo greco e contemporaneamente y simbolo latino. In questo caso poi si ha l'espressione:

$$(a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,(\alpha b)\,\overline{\beta}_{\bar{z}}\,\overline{b}_{\bar{v}}\,.$$

Se z e v sono variabili, si stacca la forma $\overline{\mathrm{U}}$ già introdotta; se z e v sono simboli uguali non possono essere che greci e il prodotto è riducibile; in ogni altro caso si ha:

$$(a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,(\alpha b)\,\overline{\beta}_{\bar{z}}\,\overline{\mathrm{b}}_{\bar{v}} = (a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,(\alpha b)\,\overline{\beta}_{\bar{v}}\,\overline{\mathrm{b}}_{\bar{z}} + (a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,(\alpha b)\,(\overline{\beta\,\mathrm{b}})\,(\overline{\mathrm{z}\,\mathrm{v}})\,,$$

nella quale l'ultimo termine è già ridotto staccandosene la forma R, e la quale quindi mostra che, siano z e v variabili o simboli dell'una o dell'altra specie, il prodotto è sempre riducibile.

Dimostrato così che tutti i determinanti simbolici dei varii tipi sono riducenti, ne segue immediatamente che le forme via via introdotte sono sufficienti per il sistema completo di 1.ª ed anche di 2.ª specie per le forme f e φ; ossia le forme:

$$\varphi = \alpha_x^2 \qquad\qquad f = a_x\,\overline{a}_{\bar{x}}$$

$$\mathrm{D} = (\alpha\beta)^2 \qquad\qquad \mathrm{D}' = (ab)\,(\overline{ab})$$

$$\theta = (\alpha a)\,\alpha_x\,\overline{a}_{\bar{x}}$$

$$\Phi = (\overline{a\alpha})\,(\overline{b\alpha})\,a_x\,b_x \qquad\qquad \mathrm{F} = (a\alpha)\,(\overline{a\beta})\,\alpha_x\,\overline{\beta}_{\bar{x}}$$

$$\mathrm{U} = (\overline{a\alpha})\,(\overline{b\alpha})\,(a\beta)\,b_x\,\beta_x \qquad \mathrm{R} = (a\alpha)\,(b\alpha)\,(\overline{a\beta})\,(\overline{b\beta}).$$

A queste vanno aggiunte le coniugate di quelle che non sono reali; reali sono le

$$f\,,\ \mathrm{D}'\,,\ \mathrm{F}\,,\ \mathrm{R}.$$

57. Poniamo:

$$\varphi' = \alpha_x \alpha_y \qquad , \qquad f' = a_x \bar{a}_{\bar{y}} \ ,$$

$$\Phi' = (\overline{a\alpha})(\bar{b}\alpha)\, a_x b_y \quad , \quad F' = (a\alpha)(\overline{a\beta})\, \alpha_x \bar{\beta}_{\bar{y}} \ ;$$

le equazioni $\varphi' = 0$ $\Phi' = 0$ $f' = 0$ $F' = 0$ rappresentano due involuzioni e due antinvoluzioni rispettivamente, e quindi sul piano di Gauss due affinità circolari dirette involutorie e due inversioni quadriche. Indicheremo con A e B i due elementi dati dall'equazione $\varphi = 0$, uniti nell'involuzione $\varphi' = 0$, e con C la catena $f = 0$, fondamentale per l'antinvoluzione $f' = 0$, quando esiste.

Se $x\,z$, $y\,w$ sono due coppie di elementi corrispondenti nella antinvoluzione $f' = 0$ si ha:

$$x_1 : x_2 = a_2 \bar{a}_{\bar{z}} : -a_1 \bar{a}_{\bar{z}} \quad , \quad y_1 : y_2 = b_2 \bar{b}_{\bar{w}} : -b_1 \bar{b}_{\bar{w}} \ ;$$

sostituendo nell'equazione $\varphi' = 0$ si ha l'equazione

$$(\alpha a)(\alpha b)\, \bar{a}_{\bar{z}} \bar{b}_{\bar{w}} = 0 \ , \quad \text{o anche} \ (\overline{a\alpha})(\overline{b\alpha})\, a_z b_w = 0 \, .$$

Questa non è altro che l'equazione $\Phi' = 0$; dunque: " L'in- " voluzione $\Phi' = 0$ è la trasformata dell'involuzione $\varphi' = 0$ nella " antinvoluzione $f' = 0$ ".

Analogamente si ottiene che: " La antinvoluzione $F' = 0$ è la " trasformata della $f' = 0$ nell'involuzione $\varphi' = 0$ ". Ne segue che le antinvoluzioni $f' = 0$ $F' = 0$ posseggono o non posseggono contemporaneamente catena fondamentale.

58. Affinchè le due corrispondenze $\varphi' = 0$ $f' = 0$ si trasformino in se stesse l'una nell'altra, è necessario e sufficiente che coincidano p. es. le due corrispondenze $f' = 0$ $F' = 0$, ossia le due forme f ed F. Il Jacobiano di queste due forme è:

$$(f\,F)_{\bar{1}} = [b_x \bar{b}_{\bar{x}},\ (a\alpha)(\overline{a\beta})\, \alpha_x \bar{\beta}_{\bar{x}}]_1 = (a\alpha)(\overline{a\beta})(\overline{b\beta})\, b_x \alpha_x = U \, ,$$

e quindi le forme f ed F coincidono quando è identicamente $U = 0$. Dunque: " Essere $U = 0$ identicamente esprime che la coppia di

" elementi A B si trasforma in se stessa nell'antinvoluzione $f' = 0$,
" e quindi quegli elementi o costituiscono una coppia dell'antin-
" voluzione o appartengono alla catena C ".

Sul piano di Gauss, se il cerchio C esiste, quando è $U = 0$ identicamente i punti A B o stanno ambedue sul cerchio C o sono inversi rispetto ad esso. Impareremo in seguito a distinguere i due casi.

59. La antiproiettività prodotto delle due corrispondenze $f' = 0$ $\varphi' = 0$ si trova subito essere rappresentata dall' equazione

$$(\alpha a)\, \alpha_x\, \bar{a}_{\bar{y}} = 0\,;$$

i suoi elementi uniti, che quando esistono sono dati dall'equazione

$$\theta = (\alpha a)\, \alpha_x\, \bar{a}_{\bar{y}} = 0$$

sono tutti e soli quegli elementi che o sono uniti per ambedue le corrispondenze o fanno parte di coppie di elementi corrispondenti in ambedue. La forma θ non può essere identicamente nulla, perchè coinciderebbero le due corrispondenze $f' = 0$ $\varphi' = 0$, e questo non potrebbe essere altro che essendo ambedue degeneri e col medesimo elemento singolare.

La equazione $\theta = 0$ non apparisce che sia reale o riducibile tale; per assicurarcene calcoliamo la sua realizzante, che è:

$$(\theta \bar{\theta})_{\bar{1}} = [\,(\alpha a)\, \alpha_x\, \bar{a}_{\bar{x}}\,,\ (\bar{\beta} \bar{b})\, \bar{\beta}_{\bar{x}}\, b_x]_{\bar{1}} = (a \alpha)\, (\bar{b} \bar{\beta})\, (\bar{a} \bar{\beta})\, \alpha_x\, b_x = \mathrm{U}.$$

Dunque la θ è reale o riducibile tale solo quando la U sia identicamente nulla, ossia quando sul piano di Gauss i punti A B appartengano al cerchio C o siano inversi rispetto ad esso.

Escludiamo per ora che sia $U = 0$ identicamente, e calcoliamo allora il Δ relativo alla forma iperalgebrica $(1, \bar{1})$ non reale θ. Si ha:

$$\delta_\theta = (\theta \theta)_{1,\bar{1}} = [\,(\alpha a)\, \alpha_x\, \bar{a}_{\bar{x}}\,,\ (\beta b)\, \beta_x\, \bar{b}_{\bar{x}}\,]_{1,\bar{1}} = (a \alpha)\, (b \beta)\, (\overline{a b})\, (\alpha \beta)$$

e con opportuna semplice trasformazione si ottiene subito:

$$2\,\delta_\theta = (\alpha\beta)^2\,(ab)\,\overline{(ab)} = \mathrm{D}\,\mathrm{D}'.$$

Si ha poi:

$$\delta_{0\theta} = (\theta\bar{\theta})_{1,\bar{1}} = [(\alpha a)\,\alpha_x\,\bar{a}_{\bar{x}},\ \overline{(\beta b)}\,\bar{\beta}_{\bar{x}}\ b_x]_{1,\bar{1}} = (\alpha a)\,\overline{(\beta b)}\,(\alpha b)\,\overline{(a\beta)} = \mathrm{R}.$$

Quindi:

$$\Delta_\theta = \delta_\theta\,\bar{\delta}_\theta - \delta_{0\theta}^2 = \frac{1}{4}\,\mathrm{D}\,\bar{\mathrm{D}}\,\mathrm{D}'^2 - \mathrm{R}^2.$$

Consideriamo i vari casi:

$\Delta_\theta > 0$. La equazione $\theta = 0$ non possiede radici, e quindi la involuzione $\varphi' = 0$ e l'antinvoluzione $f' = 0$ non hanno nè elementi uniti nè coppie di punti corrispondenti a comune.

$\Delta_\theta < 0$. La equazione $\theta = 0$ possiede due radici distinte; ad esse corrispondono due elementi che o sono uniti in ambedue le corrispondenze e costituiscono una coppia comune ad ambedue. Ma il 1.° caso va escluso perchè i due elementi A e B starebbero sulla catena C, ossia sarebbe $\mathrm{U} = 0$ identicamente, contro l'ipotesi.

$\Delta_\theta = 0$. La equazione $\theta = 0$ possiede un'unica radice; ad essa corrisponde un elemento necessariamente unito per ambedue le corrispondenze, ossia uno degli elementi A B deve trovarsi sulla catena C effettivamente esistente.

60. Sul piano di Gauss i vari resultati sono suscettivi di una interpetrazione notevole quando si supponga che esista il cerchio C. Ricordiamo che in queste considerazioni si intende sempre che si abbia $\mathrm{D} \neq 0$, $\mathrm{D}' \neq 0$.

Nell'ultimo caso ($\Delta_\theta = 0$) uno dei punti A B si trova sul cerchio C, e non c'è niente da aggiungere; nel 2.° caso ($\Delta_\theta < 0$) esiste una coppia di punti M N inversi rispetto al cerchio C, e che stanno in un cerchio C′ coi punti A B separandoli su questo armonicamente. Il cerchio C′ passando pei punti M N inverso rispetto a C è ortogonale a C, e lo sega in due punti H K; osserviamo che come è noto i punti H K sul cerchio C′ separano armonicamente i punti M N; dunque alla involuzione su C′ che ha per elementi doppi M N appartengono lo coppie H K, A B. Ciò mostra che la coppia H K non può separare la coppia A B, ossia i punti A B sono ambedue nell' uno o nell' altro dei due archi H K, e cioè e ambedue interni al cerchio C o ambedue esterni.

Inversamente se i due punti A B sono ambedue interni o ambedue esterni al cerchio C, esiste una coppia comune alle due corrispondenze $f' = 0$ $\varphi' = 0$, ossia è $\Delta_\theta < 0$. Infatti consideriamo il cerchio C′ passante per A e B e ortogonale a C, che seghi C nei punti H e K; sul cerchio C′ la involuzione alla quale appartengono le coppie A B, H K, che non si separano, ammette due punti doppi M N; essi godono della proprietà di essere armonici tanto rispetto alla coppia A B che H K, e quindi rappresentano una coppia comune alle due corrispondenze $f' = 0$, $\varphi' = 0$.

Dunque concludendo abbiamo: " I due punti A B si trovano " o in una medesima regione del cerchio C o in ragioni diverse " o uno di essi è sul cerchio secondo che si ha:

$$" \Delta_\theta = \frac{1}{4} D \bar{D} D'^2 - R^2 \lesseqgtr 0 " .$$

Questo resultato è giusto quando non sia $U = 0$ identicamente, il che può avvenire soltanto nel caso $\Delta_\theta = 0$.

61. Se è $U = 0$ identicamente la forma θ è riducibile reale. Gli elementi che hanno un medesimo corrispondente nelle due corrispondenze $f' = 0$, $\varphi' = 0$ o costituiscono un' intera catena semplice o non esistono affatto. Per poter distinguere i due casi consideriamo il discriminante della forma reale

$$\Theta = (\bar{\theta})\, \theta$$

a cui la θ può ridursi (art. 38); si ha come vedemmo:

$$D_\Theta = (\bar{\theta})^2\, \delta_\theta = \frac{1}{2} (\bar{\theta})^2\, D\, D' , \qquad \text{(art. 59)}$$

e quindi l'equazione $\theta = 0$ rappresenta o non rappresenta effettivamente una catena semplice secondo che si ha $(\bar{\theta})^2 \, D \, D' \lesseqgtr 0$. Non può darsi che la catena si riduca a un punto, essendo $D \neq 0$, $D' \neq 0$.

Abbiamo già osservato che quando è $U = 0$ identicamente i due punti AB o stanno sul cerchio C o costituiscono una coppia dell'inversione quadrica $f' = 0$. Se i punti AB stanno sul cerchio C, considerando il cerchio C' ortogonale a C e passante per A e B esso è evidentemente luogo di coppie comuni alle due corrispondenze $f' = 0$ $\varphi' = 0$, e quindi siamo nel caso $(\bar{\theta})^2 \, D \, D' < 0$; o anche se vogliamo, essendo $D' < 0$, nel caso $(\bar{\theta})^2 \, D > 0$. Se pur esistendo sempre il cerchio C i punti AB sono inversi rispetto ad esso, non può esistere un cerchio luogo di coppie comuni alle due corrispondenze; infatti esso dovendosi trasformare in se stesso nell'inversione $f' = 0$, sarebbe ortogonale al cerchio C, onde lo segherebbe in due punti che dovrebbero essere uniti anche nella corrispondenza $\varphi' = 0$, la qual cosa invece non è. Dunque siamo nel caso $(\bar{\theta})^2 \, D \, D' > 0$, e quindi $(\bar{\theta})^2 \, D < 0$. Se infine i punti AB costituiscono una coppia dell'inversione $f' = 0$ e non esiste il cerchio C, sulla retta AB abbiamo due involuzioni di punti, subordinate rispettivamente alle due involuzioni $f' = 0$ $\varphi' = 0$; una di esse non possiede elementi doppi, e quindi esiste una coppia comune ad ambedue. Questo basta per dire che siamo nel caso $(\bar{\theta})^2 \, D \, D' < 0$, ossia, poichè è $D' > 0$, nel caso $(\bar{\theta})^2 \, D < 0$.

Otteniamo dunque: " Nel caso in cui sia $U = 0$ identicamente, i " due elementi AB stanno sulla catena semplice C o si corrispon- " dono nell'antinvoluzione $f' = 0$ secondo che si ha $(\bar{\theta})^2 D \gtreqless 0$ " [1].

---

[1]) Si noti che effettivamente $(\bar{\theta})^2 \, D$ è un invariante, e anche per il segno; infatti per una trasformazione lineare di modulo r, p. es. di 1.ª specie, D si riproduce a meno di un r^2, θ a meno di un r e quindi $(\bar{\theta})^2$ a meno di un $\bar{r}^2$, e per ciò tutto il prodotto a meno di un $(r \, . \, \bar{r})^2$, che è quantità essenzialmente positiva.

XIII.

Sistema simultaneo di due forme iper. $(1, \bar{1})$, non reali.

62. Prima di passare alla determinazione del sistema completo nel caso di due forme iperalgebriche $(1, \bar{1})$ non reali, facciamo una osservazione generale di cui ci varremo anche in seguito. Sia f una forma iperalgebrica $(p, \bar{p})$ non reale, e indichiamo con α i suoi coefficienti; possiamo scrivere:

$$2f = (f+\bar{f}) + (f-\bar{f}) = (f+\bar{f}) - i\,.\,i\,(f-\bar{f})\,.$$

Le forme iperalgebriche $(p, \bar{p})$:

$$\mathrm{F} = f+\bar{f} \quad , \quad \mathrm{F}' = i\,(f-\bar{f})\,,$$

sono reali, e indicheremo i loro coefficienti rispettivamente con A e A'. Dalla relazione

$$f = \lambda\,\mathrm{F} + \mu\,\mathrm{F}'$$

con $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = -\frac{i}{2}$, discendono fra i coefficienti le relazioni

$$\alpha = \lambda\,\mathrm{A} + \mu\,\mathrm{A}' \quad , \quad \bar{\alpha} = \bar{\lambda}\,\bar{\mathrm{A}} + \bar{\mu}\,\bar{\mathrm{A}}'\,.$$

Ora sia $\Pi(\alpha, \bar{\alpha})$ una funzione invariantiva (invariante o covariante) della forma f; ponendo in essa per le α, e non per le $\bar{\alpha}$, le loro espressioni per le A e A', avremo svolgendo con la formola di Taylor, se Π è di grado k nelle α:

$$\Pi(\alpha, \bar{\alpha}) = \Pi(\lambda\,\mathrm{A} + \mu\,\mathrm{A}', \bar{\alpha}) = \lambda^k\,\Pi(\mathrm{A}, \bar{\alpha}) + \lambda^{k+1}\mu\,\delta_{\mathrm{A}}\,\Pi(\mathrm{A}, \bar{\alpha}) + \ldots + \frac{\mu^k}{k\,!}\,\delta^k_{\mathrm{A}}\,\Pi(\mathrm{A}, \bar{\alpha})\,,$$

dove δ^r_{A} è il simbolo dell'operazione di Aronhold eseguita r volte sulla funzione $\Pi(\mathrm{A}, \bar{\alpha})$ riguardata nei coefficienti A e rispetto agli A'. La funzione $\Pi(A, \bar{\alpha})$ è invariantiva del sistema delle due forme f ed F, perchè si ottiene dalla funzione primitiva Π eseguendo su essa k volte l'operazione di Aronhold riguardo ai coefficienti α e rispetto agli A (art. 16); e quindi nel 2.° membro della precedente uguaglianza si ha una somma di funzioni invariantive delle tre forme f, F, F'.

Una di esse sia $\Pi_1(A, A', \bar{\alpha})$, e operiamo su questa riguardo ai coefficienti $\bar{\alpha}$ come abbiamo operato dianzi sulla $\Pi(\alpha, \bar{\alpha})$ riguardo ai coefficienti α; otterremo Π_1 espressa per una somma di funzioni $\Pi_2(A, A', \bar{A}, \bar{A}')$ invariantive del sistema delle due forme reali F, F'. Π_2 è esprimibile in funzione razionale intera delle forme del sistema completo (supposto che si conosca) relativo alle forme F ed F', e quindi nel medesimo modo anche Π_1 e anche Π stessa. Ne segue che se riusciamo a determinare un sistema di funzioni invariantive della forma f per le quali le forme del sistema completo delle forme reali F ed F' siano esprimibili in modo razionale intero, certamente le funzioni di questo sistema sono sufficienti per il sistema completo della forma f.

Allora, sia $J(A, \bar{A}, A', \bar{A}')$ una forma del sistema completo delle forme reali F ed F'; per le relazioni che si hanno fra i coefficienti di una forma reale, la forma precedente può sempre considerarsi ridotta al tipo $J(A, A')$.

Avendo posto $F = f + \bar{f}$, $F' = i(f - \bar{f})$, si hanno le relazioni:

$$A = \alpha + \alpha_0 \;, \quad A' = i\,\alpha' - i\,\alpha'_0 \;;$$

dove con un indice (0) si distinguono i coefficienti della forma $\bar{f}$, e dove nella seconda abbiamo posto degli apici alle lettere α non per dire che esse indichino coefficienti diversi dagli α, ma per ricordare sempre che esse sono scaturite dalla considerazione dei coefficienti A'. Svolgendo al solito con la formola di Taylor avremo:

$$J(A, A') = J(\alpha + \alpha_0 \,,\, i\,\alpha' - i\,\alpha'_0) = \sum_{r,s} M_{r,s}\, \delta^r_{\alpha}\, \delta^s_{\alpha'}\, J(\alpha, \alpha') \,,$$

dove $M_{r,s}$ sono certi coefficienti numerici, e dove le operazioni di Aronhold si devono eseguire riguardo ai coefficienti α e α' e rispetto ai coefficienti α_0 e α'_0 rispettivamente. Le funzioni

$$\text{(I)} \qquad \delta_\alpha^r \, \delta_{\alpha'}^s \, \mathrm{J}\,(\alpha, \alpha')$$

sono invariantive per la forma f, e per esse si esprime linearmente la forma J; considerando tutte le forme J del sistema completo delle due forme reali F ed F′, tutte le funzioni (I) che da esse si ottengono sono certamente sufficienti pel sistema completo della forma f.

Osserviamo come possono ottenersi tutte le funzioni (I). Poniamo simbolicamente:

$$f = a_x^p \, \bar{a}_{0\bar{x}}^p \quad , \quad \mathrm{F} = \mathrm{A}_x^p \, \bar{\mathrm{A}}^p{}_{\bar{x}} \quad , \quad \mathrm{F} = \mathrm{A}'^p_x \, \bar{\mathrm{A}}'^p{}_{\bar{x}} \ ;$$

per ottenere la $\mathrm{J}\,(\alpha, \alpha')$ bisogna nella $\mathrm{J}\,(\mathrm{A}, \mathrm{A}')$ porre in luogo delle A le α, e quindi, se la $\mathrm{J}\,(\mathrm{A}, \mathrm{A}')$ è scritta simbolicamente, porre in luogo dei simboli $\mathrm{A}, \bar{\mathrm{A}}, \mathrm{A}', \bar{\mathrm{A}}'$ i simboli $a, \bar{a}_0, a', \bar{a}'_0$; ottenuta così simbolicamente la $\mathrm{J}\,(\alpha, \alpha')$ bisogna su essa eseguire le operazioni di Aronhold riguardo ai coefficienti α ed α' e rispetto agli α_0 ed α'_0, ossia riguardo ai coefficienti $a_r \, a_s \dots . \, a_t \, \bar{a}_{0k} \, \bar{a}_{0m} \dots . \, \bar{a}_{0n}$ e $a'_r \dots . \, a'_t \, \bar{a}'_{0k} \dots . \, \bar{a}'_{0n}$ e rispetto ai $a_{0r} \dots . \, a_{0t} \, \bar{a}_k \dots . \, \bar{a}_n$ e $a'_{0r} \dots . \, a'_{0t}$ $\bar{a}'_k \dots . \, \bar{a}'_n$. Simbolicamente noi sappiamo eseguire queste operazioni: si ottiene una somma di termini che si ricavano da quello su cui si opera ponendo al posto di alcuni nei simboli riguardo ai quali si eseguisce la operazione quelli rispetto a cui si eseguisce, ossia nel nostro caso attribuendo l'indice (0) ad alcuni simboli che non lo possedevano e togliendolo ad altrettanti che la possedevano; per es. ponendo in luogo dei simboli $a, \bar{b}, c', \bar{d}' \dots .$, ovunque si trovano, i simboli $a_0, \bar{b}_0, c'_0, \bar{c}'_0 \dots .$, e viceversa.

Così otteniamo simbolicamente tutte le forme (I); e poichè esse sono sufficienti per il sistema completo della forma f, saranno anche sufficienti pel sistema medesimo anche tutte le forme ottenute dalle varie forme J (α, α') con lo scambio degli indici (0) eseguito come abbiamo detto. Siamo giunti cioè al resultato:

" Per il sistema completo della forma $f = a_x^p \bar{a}_{0\bar{x}}^p$ sono sufficienti le forme ottenute nel modo seguente: Si considerano le due forme reali $A_x^p \bar{A}_{\bar{x}}^p$ e $A'^p_x \bar{A}'^p_{\bar{x}}$, e tutte le forme del loro sistema completo; in esse si pongono in luogo dei simboli $A\, A'$, $\bar{A}\, \bar{A}'$ i simboli $a\, a'$, $\bar{a}_0\, \bar{a}'_0$, intendendo che due simboli distinti soltanto per l'apice siano equivalenti; e oltre alle forme che in questo modo si ottengono si considerano tutte quelle che si ricavano da esse effettuando tutti i possibili scambi degli indici (0), ossia ponendo in luogo delle lettere $a, \bar{a}_0, b, \bar{b}_0, \ldots.$ le lettere $a_0, \bar{a}, b_0, \bar{b}, \ldots.$ in tutti i modi possibili ".

Il nostro ragionamento sta evidentemente anche per un sistema qualunque di forme, purchè di uguali ordini rispetto alle x e $\bar{x}$.

63. Consideriamo il sistema di due forme iperalgebriche binarie $(1, \bar{1})$ non reali:

$$f_1 = a_x \bar{a}_{0\bar{x}} = \bar{b}_x \bar{b}_{0\bar{x}} = \ldots. \,, \quad f_2 = \alpha_x \bar{\alpha}_{0\bar{x}} = \beta_x \bar{\beta}_{0\bar{x}} = \ldots..$$

Per la determinazione del sistema completo ad esse relativo ci varremo del resultato ottenuto nell'articolo precedente; considereremo cioè le quattro forme reali

$$A_x \bar{A}_{\bar{x}} \,, \quad A'_x \bar{A}'_{\bar{x}} \,, \quad \mathcal{A}_x \bar{\mathcal{A}}_{\bar{x}} \,, \quad \mathcal{A}'_x \bar{\mathcal{A}}'_{\bar{x}} \,,$$

e nelle forme del relativo sistema completo determinato all'art. 52 porremo in luogo dei simboli $A\, A'\, \mathcal{A}\, \mathcal{A}'$, $\bar{A}\, \bar{A}'\, \bar{\mathcal{A}}\, \bar{\mathcal{A}}'$ i simboli $a\, a'\, \alpha\, \alpha'$, $\bar{a}_0\, \bar{a}'_0\, \bar{\alpha}_0\, \bar{\alpha}'_0$; ricordando che due simboli distinti solo per l'apice sono equivalenti, otterremo solo le 16 forme distinte:

(I) $(ab)\,(\overline{a_0 b_0})$
$(a\alpha)\,(\overline{a_0\alpha_0})$
$(\alpha\beta)\,(\overline{\alpha_0\beta_0})$

(II) $(\overline{a_0 b_0})\, a_x\, b_x$
$(\overline{a_0\alpha_0})\, a_x\, \alpha_x$
$(\overline{\alpha_0\beta_0})\, \alpha_x\, \beta_x$
$(a\,b)\, \overline{a}_{0\bar x}\, \overline{b}_{0\bar x}$
$(a\,\alpha)\, \overline{a}_{0x}\, \overline{\alpha}_{0\bar x}$
$(\alpha\,\beta)\, \overline{\alpha}_{0\bar x}\, \overline{\beta}_{0\bar x}$

(III) $(\overline{a_0 b_0})\,(a\alpha)\, b_x\, \overline{\alpha}_{0\bar x}$
$(\overline{a_0\alpha_0})\,(a\beta)\, \alpha_x\, \overline{\beta}_{0\bar x}$
$(\overline{\alpha_0\beta_0})\,(\alpha a)\, \beta_x\, \overline{a}_{0\bar x}$
$(\overline{\alpha_0 a_0})\,(\alpha b)\, a_x\, \overline{b}_{0\bar x}$

(IV) $(\overline{a_0 b_0})\,(a\,\alpha)\,(\overline{\alpha_0\beta_0})\, b_x\, \beta_x$
$(\overline{a_0 b_0})\,(a\,\alpha)\,(b\,\beta)\,(\overline{\alpha_0\beta_0})$
$(a\,b)\,(\overline{a_0\alpha_0})\,(\alpha\,\beta)\, \overline{b}_{0\bar x}\, \overline{\beta}_{0\bar x}$.

Le ultime tre forme del gruppo (II) e l'ultima del gruppo (IV) provengono dalla considerazione delle coniugate delle forme θ_{ik} ed F_{1234}, appartenenti anch'esse, come dicemmo, al sistema completo delle quattro forme reali. Sulle forme ottenute dobbiamo effettuare tutti i possibili scambi degli indici (0); le forme del gruppo (I) danno così:

1) $(a\,b)\,(\overline{a_0 b_0})$	1') $(a\,\alpha)\,(\overline{a_0\alpha_0})$	1'') $(\alpha\,\beta)\,(\overline{\alpha_0\beta_0})$
2) $(a_0\,b)\,(\overline{a\,b_0})$	2') $(a_0\,\alpha)\,(\overline{a\,\alpha_0})$	2'') $(\alpha_0\,\beta)\,(\overline{\alpha\,\beta_0})$
3) $(a\,b_0)\,(\overline{a_0\,b})$	3') $(a\,\alpha_0)\,(\overline{a_0\,\alpha})$	3'') $(\alpha\,\beta_0)\,(\overline{\alpha_0\,\beta})$
4) $(a_0 b_0)\,(\overline{a\,b})$	4') $(a_0\alpha_0)\,(\overline{a\,\alpha})$	4'') $(\alpha_0\beta_0)\,(\overline{\alpha\,\beta})$.

Le forme (2) e (3) e le (2'') e (3'') sono identiche. Dunque dal gruppo (I) si ottengono pel sistema completo le forme:

$(ab)\,(\overline{a_0 b_0})$, $(a_0 b)\,(\overline{a b_0})$, $(a\alpha)\,(\overline{a_0\alpha_0})$, $(a_0\alpha)\,(\overline{a\alpha_0})$, $(\alpha\beta)\,(\overline{\alpha_0\beta_0})$, $(\alpha_0\beta)\,(\overline{\alpha\beta_0})$,

e le coniugate di quelle fra queste che non sono reali. Dopo la introduzione di queste forme nel sistema completo, è chiaro che i fattori simbolici dei tipi (ab), $(a_0 b_0)$, $(\alpha\beta)$, $\alpha_0\beta_0)$, e coniugati, sono riducenti.

64. Le tre prime forme del gruppo (II) con un solo scambio degli indici (0) danno le

$$1)\ (\overline{a_0 b_0})\, a_x\, b_x \qquad 1')\ (\overline{a_0 \alpha_0})\, a_x\, \alpha_x \qquad 1'')\ (\overline{\alpha_0 \beta_0})\, \alpha_x\, \beta_x$$

$$2)\ (\overline{a_0\, b})\, a_x\, b_{0x} \qquad 2')\ (\overline{a_0\, \alpha})\, a_x\, \alpha_{0x} \qquad 2'')\ (\overline{\alpha_0\, \beta})\, \alpha_x\, \beta_{0x}$$

$$3')\ (\overline{a\, \alpha_0})\, a_{0x}\, \alpha_x\,.$$

Procedendo negli scambi degli indici (0) si ottengono altre forme che evidentemente si ricavano da quelle scritte con lo spostamento totale degli indici; questa è una osservazione generale di cui ci varremo sempre in seguito: se una forma contiene n sorta di simboli basta su essa effettuare $\frac{n}{2}$ o $\frac{n-1}{2}$ scambi degli indici (0) e considerare poi anche tutte le forme che si ottengono da quelle così ottenute con lo scambio totale degli indici (0).

Le ultime tre forme del gruppo (II) danno luogo ad altrettante forme che non sono però evidentemente altro che le coniugate di quelle ottenute dalle prime tre.

Ora si noti che le (1) e (1''), e quindi anche quelle che se ne ottengono con lo scambio totale degli indici, sono identicamente nulle [1]); le altre con lo scambio totale degli indici non danno di nuovo altro che la forma $(\overline{a\alpha})\, a_{0x}\, \alpha_{0x}$; quindi si ottengono per il sistema completo le forme

$$(\overline{a_0 b})\, a_x b_{0x}\,,\ (\overline{a\alpha})\, a_{0x}\alpha_{0x}\,,\ (\overline{a_0\alpha_0})\, a_x\alpha_x\,,\ (\overline{a_0\alpha})\, a_x\alpha_{0x}\,,\ (\overline{a\alpha_0})\, a_{0x}\alpha_x\,,\ (\overline{\alpha_0\beta})\, \alpha_x\beta_{0x}$$

e le loro coniugate.

---

[1]) Quando si ha una identità scritta simbolicamente, con lo scambio totale degli indici (0) si ha una nuova identità, che non è altro che la prima scritta per la forma o il sistema di forme coniugate. In particolare se una forma è identicamente nulla lo è anche quella ottenuta con lo scambio totale degli indici (0).

65. Il gruppo (III) dà le forme

1) $(\overline{a_0 b_0})\,(a\,\alpha)\,b_x\,\bar{\alpha}_{0\bar{x}}$	1′) $(\overline{a_0 \alpha_0})\,(a\,\beta)\,\alpha_x\,\bar{\beta}_{0\bar{x}}$	1″) $(\overline{\alpha_0 \beta_0})\,(\alpha\,a)\,\beta_x\,\bar{a}_{0\bar{x}}$
2) $(\overline{a\,b_0})\,(a_0\alpha)\,b_x\,\bar{\alpha}_{0\bar{x}}$	2′) $(\overline{a\,\alpha_0})\,(a_0\beta)\,\alpha_x\,\bar{\beta}_{0\bar{x}}$	2″) $(\overline{\alpha\,\beta_0})\,(\alpha_0 a)\,\beta_x\,\bar{a}_{0\bar{x}}$
3) $(\overline{a_0\,b})\,(a\,\alpha)\,b_{0x}\,\bar{\alpha}_{0\bar{x}}$	3′) $(\overline{a_0\,\alpha})\,(a\,\beta)\,\alpha_{0x}\,\bar{\beta}_{0\bar{x}}$	3″) $(\overline{\alpha_0\,\beta})\,(\alpha\,a)\,\beta_{0x}\,\bar{a}_{0\bar{x}}$
4) $(\overline{a_0 b_0})\,(a\alpha_0)\,b_x\,\bar{\alpha}_{\bar{x}}$	4′) $(\overline{a_0 \alpha_0})\,(a\beta_0)\,\alpha_x\,\bar{\beta}_{\bar{x}}$	4″) $(\overline{\alpha_0 \beta_0})\,(\alpha a_0)\,\beta_x\,\bar{a}_{\bar{x}}$

1‴) $(\overline{\alpha_0 a_0})\,(\alpha\,b)\,a_x\,\bar{b}_{0\bar{x}}$

2‴) $(\overline{\alpha\,a_0})\,(\alpha_0 b)\,a_x\,\bar{b}_{0\bar{x}}$

3‴) $(\overline{\alpha_0\,a})\,(\alpha\,b)\,a_{0x}\,\bar{b}_{0\bar{x}}$

4‴) $(\overline{\alpha_0 a_0})\,(\alpha b_0)\,a_x\,\bar{b}_{\bar{x}}$

ottenute con un solo scambio degli indici (0), e quelle che si ottengono da queste con lo spostamento totale degli indici. Le forme (1) (4) (1″) (4″) sono riducibili e quindi inutili per il sistema completo, perchè quando se ne sono staccate alcune delle forme già introdotte rimangono delle forme di grado inferiore, e quindi esprimibili anch'esse certamente per le forme già introdotte e non già per quelle che si introdurranno, che saranno di grado più elevato. Sono anche riducibili le (1′) e (2′), giacchè per es. per la (1′) si ha

$$(\overline{a_0\alpha_0})\,(\mathrm{a}\beta)\,\alpha_x\,\bar{\beta}_{0\bar{x}} = [\,(\overline{a_0\alpha_0})\,(\mathrm{a}\alpha)]\,\beta_x\,\bar{\beta}_{0\bar{x}} + (\overline{a_0\alpha_0})\,(\alpha\beta)\,\mathrm{a}_x\,\bar{\beta}_{0\bar{x}}$$

e analogamente per la (2′). Scambiando fra loro i simboli greci e latini si vede che sono riducibili anche le (1‴) e (2‴).

Osserviamo poi che le forme (2) e (4‴), (3) e (3‴), (3′) e (3″), (2″) e (4′), possono esprimersi l'una per l'altra a meno di forme già introdotte nel sistema completo; infatti si ha

$$(\overline{\mathrm{a}\mathrm{b}_0})\,(a_0\alpha)\,b_x\,\bar{\alpha}_{0\bar{x}} = (\overline{\mathrm{a}\,\alpha_0})\,(a_0\alpha)\,b_x\,\bar{b}_{0\bar{x}} + (\overline{\alpha_0\mathrm{b}_0})\,(a_0\alpha)\,b_x\,\bar{\mathrm{a}}_{\bar{x}}$$

ossia, indicando in generale con R una forma riducibile o ridotta:

$$(2) = \mathrm{R} - (4''').$$

Scambiando i simboli greci coi latini si ha:

$$(2'') = \mathrm{R}' - (4');$$

e analogamente per le altre due coppie di forme. Potremo considerare dunque soltanto le forme (2) (3') (2'') (3''') e quelle che se ne ottengono con lo scambio totale degli indici (0). Ma si ha:

$$(\overline{ab_0})\,(\mathrm{a}_0\alpha)\,\mathrm{b}_x\,\bar{\alpha}_{0\bar{x}} = [(\overline{ab_0})\,(\mathrm{a}_0\mathrm{b})]\,\alpha_x\,\bar{\alpha}_{0\bar{x}} + (\overline{ab_0})\,(\mathrm{b}\alpha)\,\mathrm{a}_{0x}\,\bar{\alpha}_{0\bar{x}}\,,$$

ossia

$$(2) = \mathrm{R} - (3);$$

scambiando i simboli greci e latini si ottiene

$$(2'') = \mathrm{R}' - (3'').$$

Queste mostrano come le forme (2) e (2'') si esprimano per le (3) e (3''), e quindi per le (3''') e (3'); dunque è sufficiente la considerazione delle forme (3') (3''') e delle due che se ne ottengono con lo scambio totale degli indici (0), ossia le:

$$(\overline{a\alpha_0})\,(a_0\beta_0)\,\alpha_x\,\bar{\beta}_{\bar{x}} \quad , \quad (\overline{\alpha a_0})\,(\alpha_0 b_0)\,a_x\,\bar{b}_{\bar{x}}\,.$$

Con qualche scambio di simboli equivalenti si vede che queste sono le coniugate delle (4') e (4'''), e per ciò esprimibili per le coniugate delle (3') e (3'''), che possono quindi essere ad esse sostituite. In conclusione basta considerare per il sistema completo le forme:

$$(\overline{\mathrm{a}_0\alpha})\,(\mathrm{a}\beta)\,\alpha_{0x}\,\bar{\beta}_{0\bar{x}} \quad , \quad (\overline{\alpha_0\mathrm{a}})\,(\alpha\mathrm{b})\,\mathrm{a}_{0x}\,\bar{\mathrm{b}}_{0\bar{x}}\,,$$

e le loro coniugate.

66. Consideriamo infine le due prime forme del gruppo (IV); esse sono del 4.° grado nei coefficienti e quindi è sufficiente effettuare su esse uno e due scambi degli indici (0). Quando effettuiamo il 2.° scambio, sapendo di non doverne effettuare altri,

tralasceremo di scrivere le forme manifestamente riducibili. Avremo le

	1) $(\overline{a_0 b_0})\,(a\,\alpha)\,(\overline{\alpha_0 \beta_0})\,b_x\,\beta_x$	1') $(\overline{a_0 b_0})\,(a\,\alpha)\,(b\,\beta)\,(\overline{\alpha_0 \beta_0})$
Con 1 scambio:	2) $(\overline{a\,b_0})\,(a_0\,\alpha)\,(\overline{\alpha_0 \beta_0})\,b_x\,\beta_x$	2') $(\overline{a\,b_0})\,(a_0\,\alpha)\,(b\,\beta)\,(\overline{\alpha_0 \beta_0})$
	3) $(\overline{a_0\,b})\,(a\,\alpha)\,(\overline{\alpha_0 \beta_0})\,b_{0x}\,\beta_x$	3') $(\overline{a_0 b_0})\,(a\,\alpha_0)\,(b\,\beta)\,(\overline{\alpha_0 \beta_0})$
	4) $(\overline{a_0 b_0})\,(a\,\alpha_0)\,(\overline{\alpha\,\beta_0})\,b_x\,\beta_x$	
	5) $(\overline{a_0 b_0})\,(a\,\alpha)\,(\overline{\alpha_0\,\beta})\,b_x\,\beta_{0x}$	
Con 2 scambi:	6) $(\overline{a\,b_0})\,(a_0 \alpha_0)\,(\overline{\alpha\,\beta_0})\,b_x\,\beta_x$	4') $(\overline{a\,b_0})\,(a_0 \alpha_0)\,(b\,\beta)\,(\overline{\alpha\,\beta_0})$
	7) $(\overline{a\,b_0})\,(a_0\,\alpha)\,(\overline{\alpha_0\,\beta})\,b_x\,\beta_{0x}$	5') $(\overline{a\,b_0})\,(a_0\,\alpha)\,(b\beta_0)\,(\overline{\alpha_0\,\beta})$
	8) $(\overline{a_0\,b})\,(a\,\alpha_0)\,(\overline{\alpha\,\beta_0})\,b_{0x}\,\beta_x$	6') $(\overline{a_0\,b})\,(a\,\alpha_0)\,(b_0\beta)\,(\overline{\alpha\,\beta_0})$
	9) $(\overline{a_0\,b})\,(a\,\alpha)\,(\overline{\alpha_0\,\beta})\,b_{0x}\,\beta_{0x}$	

e quelle che si ottengono da esse con lo scambio totale degli indici (0). La 3.ª forma del gruppo (IV) manifestamente darebbe le coniugate di quelle ottenute dalla 1.ª forma. Sono riducibili le forme (1) (2) (3) (4) (5), (1') (2') (3'); le rimanenti si cambiano soltanto l'una nell'altra con lo scambio totale degli indici. Le identità:

$$(\overline{a b_0})\,(a_0 \alpha_0)\,(\overline{\alpha \beta_0})\,b_x \beta_x = (\overline{a b_0})\,(a_0 \beta)\,(\overline{\alpha \beta_0})\,b_x \alpha_{0x} + (\overline{a b_0})\,[(\beta \alpha_0)\,(\overline{\alpha \beta_0})]\,b_x\,a_{0x}$$

$$(\overline{a b_0})\,(a_0 \alpha_0)(\overline{\alpha \beta_0})\,b_x \beta_x = (\overline{a b_0})\,(b \alpha_0)\,(\overline{\alpha \beta_0})\,a_{0x} \beta_x + [(\overline{a b_0})\,(a_0 b)]\,(\overline{\alpha \beta_0})\,\alpha_{0x}\,\beta_x$$

mostrano le relazioni:

$$(6) = -(7) + R \quad , \quad (6) = -(8) + R' \,,$$

e con lo scambio totale degli indici (0) abbiamo:

$$(9) = -(8) + R'' \quad , \quad (9) = -(7) + R''' \,.$$

Dunque tutte le forme (6) (7) (8) (9) sono esprimibili per una qualunque di esse, la cui considerazione quindi è sufficiente.

Possiamo scegliere pes es. la (9), o una qualunque per cui essa sia esprimibile; poichè si ha:

$$(\overline{a_0 b})(a\alpha)(\overline{\alpha_0\beta})\, b_{0x}\beta_{0x} = [(\overline{a_0\alpha_0})(a\alpha)](\overline{b\beta})\, b_{0x}\beta_{0x} + (\overline{a_0\beta})(a\alpha)(\overline{\alpha_0 b})\, b_{0x}\beta_{0x}$$

potremo scegliere la

$$(\overline{a_0\beta})\,(a\alpha)\,(\overline{\alpha_0 b})\, b_{0x}\beta_{0x}\,,$$

di cui dovremo considerare anche la coniugata, che avremmo ottenuto dalla 3.ª forma del gruppo (IV).

Occupiamoci finalmente delle forme (4') (5') (6'); la identità:

$$(\overline{ab_0})(a_0\alpha_0)(b\beta)(\overline{\alpha\beta_0}) = [(\overline{ab_0})(a_0 b)]\,[(\alpha_0\beta)(\overline{\alpha\beta_0})] + (\overline{ab_0})(a_0\beta)(b\alpha_0)(\overline{\alpha\beta_0})$$

mostra la relazione:

$$(4') = R - (5')$$

e con lo scambio totale degli indici (0) si ha:

$$(6') = R' - (5')\,.$$

Basterà dunque considerare p. es. la (5'), ossia la forma

$$(\overline{ab_0})\,(a_0\beta)\,(\alpha_0 b)\,(\overline{\alpha\beta_0})\,.$$

67. In conclusione, il sistema completo di 1.ª e anche di 2.ª specie per due forme iperalgebriche $(1, \overline{1})$ non reali, può ritenersi costituito delle forme:

$$f_1 = a_x\,\overline{a}_{0\overline{x}}\ ,\quad f_2 = \alpha_x\,\overline{\alpha}_{0\overline{x}}$$

$$(ab)\,(\overline{a_0 b_0})\,,\ (ab_0)\,(\overline{a_0 b})\,,\ (a\alpha)\,(\overline{a_0\alpha_0})\,,\ (a_0\alpha)\,(\overline{a\alpha_0})\,,\ (\alpha\beta_0)\,(\overline{\alpha_0\beta})\,,\ (\alpha\beta)\,(\overline{\alpha_0\beta_0})$$

$$(\overline{a_0 b})\,a_x b_{0x}\,,\ (\overline{a\alpha})\,a_{0x}\alpha_{0x}\,,\ (\overline{a_0\alpha_0})\,a_x\alpha_x\,,\ (\overline{a_0\alpha})\,a_x\alpha_{0x}\,,\ (\overline{a\alpha_0})\,a_{0x}\alpha_x\,,\ (\overline{\alpha_0\beta})\,\alpha_x\beta_{0x}$$

$$(\overline{a\alpha})\,(a_0\beta)\,\alpha_{0x}\,\overline{\beta}_{0\overline{x}}\ ,\quad (\overline{\alpha a})\,(\alpha_0 b)\,a_{0x}\,\overline{b}_{0\overline{x}}$$

$$(a\alpha)\,(\overline{a_0\beta})\,(\overline{\alpha_0 b})\,b_{0x}\,\beta_{0x}$$

$$(\overline{ab_0})\,(a_0\beta)\,(\alpha_0 b)\,(\overline{\alpha\beta_0})\,.$$

Fra esse sono reali solo la 2.ª e 5.ª della 2.ª riga; di tutte le altre, eccetto che dell'ultima, vanno considerate anche le forme coniugate [1]. Se vogliamo il sistema completo nel caso di una forma reale e di una non reale, basta porre le identità simboliche $a_i = a_{0i}$; si vede allora che alcune delle precedenti forme divengono identiche, e altre si manifestano inutili, e precisamente l'ultima e l'antipenultima.

XIV.

Forme ternarie.

68. Anche nello studio delle forme ternarie iperalgebriche, come in quello delle algebriche, oltre la considerazione delle variabili $x_1\, x_2\, x_3$ e coniugate è opportuna quella di altre variabili $u_1\, u_2\, u_3$ e coniugate, che si trasformino come i coefficienti delle forme lineari u_x e $\bar{u}_{\bar{x}}$ rispettivamente. Una forma iperalgebrica nelle variabili u si scriverà simbolicamente:

$$u_\alpha^p \; \bar{u}_{\bar{\alpha}_0}^{\bar{q}} ;$$

i suoi coefficienti $\alpha_r\, \alpha_s \dots \alpha_t\; \bar{\alpha}_{0h}\, \bar{\alpha}_{0k} \dots \bar{\alpha}_{0m}$ sono cogredienti ai prodotti $x_r\, x_s \dots x_t\; \bar{x}_{0h}\, \bar{x}_{0k} \dots \bar{x}_{0m}$, essendo $x_1\, x_2\, x_3$, $x_{01}\, x_{02}\, x_{03}$ due serie di variabili cogredienti. Considerando un sistema di forme iperalgebriche alcune nelle variabili x ed altre nelle variabili u, una funzione invariantiva del sistema non si presenta del tipo sotto cui fino ad ora l'abbiamo considerata, ma si può subito ad esso ricondurre considerando le variabili u come coefficienti di forme

---

[1]) Tralasciamo a dirittura la interpetrazione delle forme del sistema, essendosi in essa presentati, oltre i resultati ovvii, solo dei resultati, se pur interessanti, troppo isolati. Si capisce che in seguito potrà essere opportuno cambiare qualche forma del sistema; quelle che abbiamo scelto sono tali che il sistema gode di una perfetta simmetria rispetto ai simboli greci e latini, e si presentano subito ai primi passi nell'interpetrazione.

lineari u_x aggiunte al sistema, e ai coefficienti delle forme nelle variabili u sostituendo dei prodotti di variabili cogredienti alle x. Valgono dunque ancora tutti i resultati ottenuti, e in particolare quelli per la invariantività di 2.ª specie.

Col medesimo procedimento che abbiamo seguìto nel caso delle forme binarie (art. 17), riconducendoci cioè ai resultati noti della Teoria delle forme algebriche, noi vedremo subito che per un sistema di forme lineari

$$a_x\,,\ b_x\,,\ldots\ldots,\ \bar{c}_{\bar{x}}\,,\ \bar{d}_{\bar{x}}\,,\ldots\ldots,\ u_\alpha\,,\ u_\beta\,,\ldots\ldots,\ \bar{u}_{\bar{\gamma}}\,,\ \bar{u}_{\bar{\delta}}\,,\ldots$$

ogni funzione invariantiva può scriversi come un aggregato di prodotti di fattori dei tipi:

$$u_x\,,\quad a_x\,,\quad u_\alpha\,,\quad a_\alpha\,,$$

$$(u u' u'')\,,\ (a u' u'')\,,\ (a b u)\,,\ (a b c)\,,\ (x x' x'')\,,\ (\alpha x' x'')\,,\ (\alpha\beta x)\,,\ (\alpha\beta\gamma)\,,$$

e dei coniugati $\bar{u}_{\bar{x}}\,,\ldots\ldots,\ \overline{(u u' u'')}\,,\ldots\ldots$

E sempre come per le forme binarie, ossia mediante successiva applicazione del processo di Aronhold, si dimostrerà che " Ogni " funzione invariantiva di un sistema qualunque di forme iperal- " gebriche ternarie

$$“\ a_x^m\,\bar{a}_{0\bar{x}}^n\,,\ldots\ldots,\ u^p_\alpha\,\bar{u}^q_{\bar{\alpha}_0}\,,\ldots\ldots$$

" si può scrivere simbolicamente come un aggregato di prodotti " di fattori dei tipi precedenti, costruiti coi simboli delle forme " del sistema medesimo ".

I vari tipi si possono ridurre ai due unici u_x e $\bar{u}_{\bar{x}}$, convenendo di potere porre per la u i simboli a, a_0 e i binomi $(x'x'')_i$ $(\alpha\beta)_i$ $(\alpha\beta_0)_i$ $(\alpha_0\beta_0)_i$ ad essa cogredienti, e per la x i simboli α, α_0 e i binomi $(u'u'')_i$ $(ab)_i$ $(ab_0)_i$ $(a_0b_0)_i$ ad essa cogredienti. Si noti che la segnatura insiste sempre o su tutti gli elementi di un fattore simbolico, o su nessuno.

69. Così abbiamo determinato la forma necessaria di ogni funzione invariantiva. Inversamente un aggregato di prodotti simbolici costituiti come abbiamo detto rappresenta sempre una forma invariantiva di 1.ª specie, quando naturalmente sia rispettata l'omogeneità nei coefficienti e nelle variabili; e infatti i vari fattori simbolici si riproducono a meno di una potenza del modulo della trasformazione o del suo coniugato, onde i vari termini dell'aggregato si riproducono a meno di una potenza del modulo e di una del coniugato, e anzi delle medesime potenze, per la omogeneità. Per l'invariantività di 2.ª specie basterà aggiungere la condizione che l'aggregato si riproduca a meno di una costante quando i coefficienti dei vari suoi termini si cambiano nei loro coniugati.

XV.

Forme iperalgebriche ternarie $(1, \bar{1})$, reali.

70. Considereremo sempre soltanto funzioni invariantive contenenti una sola serie di variabili x e una sola serie di variabili u. La determinazione di un sistema completo di tali funzioni nel caso di una forma $(1, \bar{1})$ reale, o di due forme reali, può raggiungersi con un procedimento molto analogo a quello usato nella Teoria delle forme algebriche per una e per due forme ternarie quadratiche [1]), e quindi ci limiteremo soltanto ad accennare ai passi che via via converrà muovere.

Ogni funzione invariantiva della forma $f = a_x \bar{a}_{\bar{x}}$ potrà scriversi come una somma di prodotti di fattori simbolici dei tipi a_x, $(a b u)$, $(a b c)$ e coniugati; considerando per il sistema completo le forme

$$f = a_x \bar{a}_{\bar{x}} \ , \quad \mathrm{F} = (a b u)\,\overline{(a b u)} \ , \quad \mathrm{A} = (a b c)\,\overline{(a b c)}$$

[1]) Clebsch-Lindemann, *Verlesungen über Geometrie,* Bd. I, Ab. III, §. VIII.

si vede subito che esse sono sufficienti. E infatti il fattore $(a\,b\,c)$ e $(\overline{a\,b\,c})$, è riducente, giacchè se esso è contenuto in un prodotto simbolico, svolgendo la parte residua si hanno termini contenenti la espressione $(a\,b\,c)\ \bar{a}_i\,\bar{b}_h\,\bar{c}_k$, che è nulla se alcuno dei numeri $i\ h\ k$ sono uguali, e in ogni altro caso può scriversi;

$$(a\,b\,c)\ \bar{a}_i\ \bar{b}_h\ \bar{c}_k =$$

$$= \frac{1}{b}\,(a\,b\,c)\,\{\bar{a}_i\bar{b}_h\bar{c}_k + \bar{a}_h\bar{b}_k\bar{c}_i + \bar{a}_k\bar{b}_i\bar{c}_h - \bar{a}_i\bar{b}_k\bar{c}_h - \bar{a}_k\bar{b}_h\bar{c}_i - \bar{a}_k\bar{b}_i\bar{c}_k\} = \frac{1}{b}\,(a\,b\,c)\,(\overline{a\,b\,c}).$$

Supponendo allora che in un prodotto simbolico non siano più contenuti fattori dei tipi (abc) e $(\overline{abc})$, se vi è contenuto un fattore del tipo $(a\,b\,u)$ sono possibili i soli casi:

$$(abu)\,(\overline{acu})\,(\overline{bdu})\ldots,\ (abu)\,(\overline{acu})\,\bar{b}_{\bar{x}}\ldots,\ (abu)\,\bar{a}_{\bar{x}}\,\bar{b}_{\bar{x}}\ldots,\ (abu)\,\bar{a}_{\bar{x}}\,(\overline{bcu})\ldots;$$

il 2.° caso coincide col 4.°, nel 3.° caso il prodotto è nullo; nel 1.° e 4.° caso svolgendo gli ultimi due termini con le note identità si vede che il prodotto è riducibile. Ridotto il prodotto a contenere solo fattori lineari, esso non può essere che una potenza di f.

Se introduciamo anche per la F una notazione simbolica, ponendo $F = u_\alpha\,\overline{u_{\bar{\alpha}}}$, ossia $\alpha_i = (ab)$, $(\alpha\beta)_i = (abc)\,d_i$, le forme del sistema completo di 1.ª e di 2.ª specie, si scrivono:

$$f = a_x\,\bar{a}_{\bar{x}}\quad,\quad F = u_{\bar{\alpha}}\,\bar{u}_{\bar{\alpha}}\quad,\quad A = a_{\bar{\alpha}}\,\bar{a}_{\bar{\alpha}}\,.$$

Per una forma $\varphi = u_\alpha\,u_{\bar{\alpha}}$ il sistema completo di 1.ª e di 2.ª specie sarà costituito dalle forme

$$\varphi = u_\alpha\,\bar{u}_{\bar{\alpha}}\ ,\ \Phi = (\alpha\beta x)\,(\overline{\alpha\beta x}) = a_x\,\bar{a}_{\bar{x}}\ ,\ A = (\alpha\beta\gamma)\,(\alpha\beta\gamma) = a_\alpha\,\bar{a}_{\bar{\alpha}}\,,$$

essendo $a_i = (\alpha\beta)_i$, $(ab)_i = (\alpha\beta\gamma)\,\delta_i$.

71. Sia ora il sistema di due forme reali, $f = a_x\,\bar{a}_{\bar{x}}$, $f' = a'_x\,\bar{a}'_{\bar{x}}$; nel relativo sistema completo introdurremo intanto le forme

$$F_{11} = (a\,b\,u)\,(\overline{a\,b\,u}) = u_\alpha\,\bar{u}_{\bar{\alpha}}\ ,\quad F_{22} = (a'\,b'\,u)\,(\overline{a'\,b'\,u}) = u_{\alpha'}\,\bar{u}_{\bar{\alpha}'}\,,$$

e potremo evidentemente proporci di determinare il sistema completo. invece che per le sole due forme $f\,f'$, per le quattro forme $f\,f'\,F_{11}\,F_{22}$. Ogni prodotto simbolico, facendo ovunque si può le sostituzioni $(ab)_i = \alpha_i$, $(a'b')_i = \alpha'_i$, potrà ridursi a contenere fattori dei soli tipi

$$\text{(I)} \qquad a_x \quad a'_x \quad u_\alpha \quad u_{\alpha'} \quad a_\alpha \quad a_{\alpha'} \quad a'_\alpha \quad a'_{\alpha'} \quad (a\,a'\,u) \quad (\alpha\,\alpha'\,x)$$

e loro coniugati. Non c'è dubbio che nel fare la detta sostituzione qualche simbolo greco non possa acquistare significato, giacchè se in un prodotto abbiamo un fattore p. es. (abu) con u variabile o simbolo, in esso abbiamo l'espressione

$$(abu)\,\bar{a}_{\bar{x}}\,\bar{b}_{\bar{y}} = \frac{1}{2}\,(abu)\,\{\bar{a}_{\bar{x}}\,\bar{b}_{\bar{y}} - \bar{a}_{\bar{y}}\,\bar{b}_{\bar{x}}\} = \frac{1}{2}\,(abu)\,(\overline{a\,b\,v})$$

con $x\,y$ variabili o simboli, e dove abbiamo posto $v_i = (x\,y)_i$; onde effettuando la sostituzione otteniamo $\frac{1}{2}\,u_\alpha\,\bar{u}_{\bar{\alpha}}$, dove il simbolo α comparisce il numero dovuto di volte.

Cominciamo a introdurre nel sistema completo le forme:

$$a_\alpha\,\bar{a}_{\bar{\alpha}}\;,\quad a'_\alpha\,\bar{a}'_{\bar{\alpha}}\;,\quad (a\,a'\,u)\,(\overline{a\,a'\,u})\;,\quad a'_{\alpha'}\,\bar{a}'_{\bar{\alpha}'}\;,\quad a_{\alpha'}\,\bar{a}_{\bar{\alpha}'}\;,\quad (\alpha\,\alpha'\,x)\,(\overline{\alpha\,\alpha'\,x})\;;$$

si vede allora subito, come nell'articolo precedente, che i fattori dei tipi $a_\alpha\;a'_{\alpha'}$ e coniugati, ossia $(a\,b\,c)\;(a'\,b'\,c')$ e coniugati, sono riducenti, provocando con la loro presenza lo staccarsi delle forme $a_\alpha\,\bar{a}_{\bar{\alpha}} = (a\,b\,c)\;(\overline{a\,b\,c})$ e $a'_{\alpha'}\,\bar{a}'_{\bar{\alpha}'} = (a'\,b'\,c')\;(\overline{a'\,b'\,c'})$.

Si ha poi un teorema analogo a quello di Gordan [1]) e che si dimostra con le identiche considerazioni: " Se in un prodotto " simbolico sono contenuti due fattori dei tipi (I) su uno dei " quali insiste la segnatura e sull'altro no e che contengono due " simboli uguali e due equivalenti (a meno della segnatura) il " prodotto è riducibile; nel senso che o se ne stacca una delle " forme già introdotte o si può ridurre il numero dei simboli ".

---

[1]) Clebsch-Lindemann, *Loco cit.*

Notiamo infine che si può sempre evitare che in un prodotto simbolico si trovino riuniti due determinanti dei tipi $(a\,a'\,u)$ e $(\alpha\alpha'\,x)$ o coniugati, e ciò senza aumento si simboli; infatti si ha:

$$(a\,a'\,u)\;(\alpha\,\alpha'\,x) = \begin{vmatrix} a_1 & a'_1 & u_1 \\ a_2 & a'_2 & u_2 \\ a_3 & a'_3 & u_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & x_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & x_2 \\ \alpha_3 & \alpha'_3 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_\alpha & a'_\alpha & u_\alpha \\ a_{\alpha'} & a'_{\alpha'} & u_{\alpha'} \\ a_x & a'_x & u_x \end{vmatrix} .$$

Dopo queste considerazioni si riconoscono facilmente quei prodotti di fattori dei tipi (I) e coniugati che non sono riducibili, o almeno non ci appariscono tali; essi insieme alla forme già introdotte sono certamente sufficienti pel sistema completo, il quale così ci risulta costituito delle forme:

$$f = a_x\,\overline{a}_{\bar x} \qquad f' = a'\,\overline{a'}_{\bar x}$$

$$F_{11} = u_\alpha\,u_\alpha \qquad F_{12} = (a\,a'\,u)\,(\overline{a\,a'\,u}) \qquad F_{22} = u_{\alpha'}\;u_{\alpha'}$$

$$\Phi_{12} = (\alpha\,\alpha'\,x)\;(\overline{\alpha\,\alpha'\,x})$$

$$A_{111} = a_\alpha\,\overline{a}_{\bar\alpha} \qquad A_{112} = a'_\alpha\,\overline{a'}_\alpha \qquad A_{122} = a_{\alpha'}\,\overline{a}_{\bar\alpha'} \qquad A_{222} = a'_{\alpha'}\,\overline{a'}_{\bar\alpha'}$$

$$B_1 = a'_\alpha\,\overline{a'}_{\bar x}\,\overline{u}_{\bar\alpha} \qquad B_2 = a_{\alpha'}\,\overline{a}_{\bar x}\,\overline{u}_{\bar\alpha'}$$

$$N = (a\,a'\,u)\,\overline{a}_{\bar x}\,\overline{a'}_{\bar x} \qquad \mathrm{N} = (\alpha\alpha'x)\,\overline{u}_{\bar\alpha'}\overline{u}_{\bar\alpha}$$

$$C_1 = (aa'u)\,\overline{a'}_{\bar\alpha}\overline{a}_{\bar x}\,u_\alpha \quad C_2 = (a'\,a\,u)\,\overline{a}_{\bar\alpha'}\,\overline{a'}_{\bar x}\,u_{\alpha'} \quad \Gamma_1 = (\alpha\alpha'x)\,\overline{a}_{\bar\alpha'}\overline{u}_{\bar\alpha}\,a_x \quad \Gamma_2 = (\alpha\alpha'x)\,\overline{a'}_{\bar\alpha}\,\overline{u}_{\bar\alpha'}\,a'_x$$

$$D = (aa'u)\,\overline{a}_{\bar\alpha'}\,\overline{a'}_{\bar\alpha}\,u_\alpha\,u_{\alpha'} \qquad \Delta = (\alpha\alpha'x)\,\overline{a'}_{\bar\alpha}\,\overline{a}_{\bar\alpha'}\,a_x\,a'_x .$$

Delle forme che non sono reali devono essere considerate anche le coniugate. Questo è il sistema completo di 1.ª e anche di 2.ª specie.

72. Se vogliamo eliminare i simboli greci dalle forme del sistema completo, lo possiamo facilmente; infatti, ponendo $\alpha_i = (ab)_i$,

$\alpha'_i = (a'b')_i$, si ha:

$$(\alpha\,\alpha'\,x) = a_{\alpha'}\,b_x - b_{\alpha'}\,a_x = (a\,a'\,b')\,b_x - (b\,a'\,b')\,a_x$$

$$(\alpha\,\alpha'\,x) = -(\alpha'\,\alpha\,x) = b'_\alpha\,a'_x - a'_\alpha\,b'_x = (b'\,a\,b)\,a'_x - (a'\,a\,b)\,b'_x$$

e quindi:

$$\Phi_{12} = (\alpha\alpha' x)\,(\overline{\alpha\alpha' x}) = -\left[(aa'b')\,b_x - (ba'b')\,a_x\right].\left[(\overline{a'ab})\,\bar{b}'_{\bar{x}} - (\overline{b'ab})\,\bar{a}'_{\bar{x}}\right] =$$

$$= -4\,(aa'b')\,(\overline{a'ab})\,b_x\,\bar{b}'_{\bar{x}}$$

$$\mathrm{N} = (\alpha\,\alpha'\,x)\,\bar{u}_{\bar{\alpha}}\,\bar{u}_{\bar{\alpha}'} =$$

$$= \left[(aa'b')\,b_x - (ba'b')\,a_x\right]\,(\overline{abu})\,(\overline{a'b'u}) = 2\,(aa'b')\,(\overline{abu})\,(\overline{a'b'u})\,b_x.$$

Analogamente si trasformano $\Gamma_1\,\Gamma_2\,\Delta$; così che le forme del sistema completo espresse in soli simboli latini, sono, disposte per grado crescente nei coefficienti:

$f = a_x\,\bar{a}_{\bar{x}}$ $\quad F_{11} = (a\,b\,u)\,(\overline{a\,b\,u})$ $\quad A_{111} = (a\,b\,c)\,(\overline{a\,b\,c})$

$f' = a'_x\,\bar{a}'_{\bar{x}}$ $\quad F_{12} = (a\,a'u)\,(\overline{a\,a'u})$ $\quad A_{112} = (ab\,c')\,(\overline{ab\,c'})$

$F_{22} = (a'b'u)\,(\overline{a'b'u})$ $\quad A_{122} = (a\,b'\,c')\,(\overline{a\,b'c'})$

$N = (a\,a'u)\,\bar{a}_{\bar{x}}\,\bar{a}'_{\bar{x}}$ $\quad A_{222} = (a'b'c')\,(\overline{a'b'c'})$

$\Phi_{12} = -4\;(aa'b')\;(\overline{a'ab})\;b_x\,\bar{b}'_{\bar{x}}$ $\quad B_1 = (a\,b\,c')\,(\overline{a\,b\,u})\,\bar{c}'_{\bar{x}}$

$C_1 = (aa'u)\;(\overline{b\,c\,a'})\;(b\,c\,u)\,\bar{a}_{\bar{x}}$ $\quad B_2 = (a'\,b'\,c)\;(\overline{a'b'u})\,\bar{c}_{\bar{x}}$

$C_2 = (a'au)\;(\overline{b'c'a})\;(b'c'u)\,\bar{a}'_{\bar{x}}$ $\quad \Gamma_1 = 2\,(aa'b')\;(\overline{a\,b\,u})\;(\overline{a'b'c})\;b_x\,c_x$

$\mathrm{N} = 2\,(aa'b')\,(\overline{abu})\,(\overline{a'b'u})\,b_x$ $\quad \Gamma_2 = 2\,(a'\,ab)\,(\overline{a'b'u})\;(\overline{a\,bc'})\;b'_x\,c'_x$

$$D = (aa'u)\,(\overline{b'c'a})\,(\overline{bca'})\,(b'c'u)\,(bcu)$$

$$\Delta = 2\;(aa'b')\;(\overline{abc'})\;(\overline{a'b'c})\;b_x\,c_x\,c'_x$$

alle quali vanno aggiunte le coniugate di quelle che non sono reali.

XVI.

Forma iperalgebrica ternaria $(1, \bar{1})$, non reale.

73. Per il calcolo del sistema completo relativo a una forma $f = a_x \bar{a}_{0\bar{x}}$ non reale, seguiremo il procedimento generale esposto all'art. 62 e che già seguimmo per il caso di due forme binarie non reali; anzi terremo conto di tutte le osservazioni d'indole generale fatte in quella occasione. Considereremo dunque le due forme iperalgebriche $(1, \bar{1})$ reali $F = A_x \bar{A}_{\bar{x}}$, $F' = A'_x \bar{A}'_{\bar{x}}$ e tutte le forme del loro sistema completo; in ognuna di queste si sostituiranno ai simboli $A\ \bar{A}\ A'\ \bar{A}'$ ed equivalenti i simboli $a\ \bar{a}_0\ a'\ \bar{a}'_0$ ed equivalenti, intendendo che i simboli $a\ a'$ siano anch'essi equivalenti; sulle forme così ottenute si effettueranno tutti i possibili spostamenti degli indici (0), e otterremo così un complesso di forme certamente sufficienti per il sistema completo della forma $f = a_x \bar{a}_{0\bar{x}}$.

74. Le forme del sistema completo delle F ed F′ che danno origine a forme del 2.° grado sono

$$F_{11} = (ABu)\,(\overline{ABu}),\ F_{12} = (AB'u)\,(\overline{AB'u}),\ F_{22} = (A'B'u)\,(\overline{A'B'u}),\ N = (AB'u)\,\bar{A}_{\bar{x}}\bar{B}'_{\bar{x}}$$

e la coniugata della N; esse ci offrono le tre forme distinte:

$$(a\,b\,u)\,(\overline{a_0\,b_0\,u})\ ,\ (a\,b\,u)\,\bar{a}_{0\bar{x}}\bar{b}_{0\bar{x}}\ ,\ (\overline{a_0\,b_0\,u})\,a_x\,b_x .$$

Dalle prime due si ottengono le forme [1]:

$$\begin{array}{ll} 1)\ (a\,b\,u)\,(\overline{a_0 b_0 u}) & 1')\ (a\,b\,u)\,\bar{a}_{0\bar{x}}\bar{b}_{0\bar{x}} \\ 2)\ (a_0 b\,u)\,(\overline{a\,b_0 u}) & 2')\ (a_0 b\,u)\,\bar{a}_{\bar{x}}\,\bar{b}_{0\bar{x}} \\ 3)\ (a_0 b_0 u)\,(\overline{a\,b\,u}) & 3')\ (a_0 b_0 u)\,\bar{a}_{\bar{x}}\,\bar{b}_{\bar{x}}\ . \end{array}$$

---

[1]) In generale per ricordare se su una coppia di simboli si è già effettuato lo scambio dell'indice (0), osserviamo che primitivamente sui simboli che posseggono l'indice (0) insiste anche la segnatura.

La 3.ª darebbe evidentemente le coniugate di quelle della 2.ª serie. Le forme (1') (3') sono identicamente nulle, le (1) e (3) sono fra loro coniugate; onde abbiamo solo le forme

$$(\mathrm{a\,b\,u})\,(\overline{\mathrm{a_0 b_0 u}})\,,\quad (\mathrm{a_0 b u})\,(\overline{\mathrm{a\,b_0 u}})\,,\quad (\mathrm{a_0 b\,u})\,\overline{\mathrm{a}}_{\bar{x}}\,\overline{\mathrm{b}}_{0\bar{x}}$$

e le coniugate delle due estreme; la media è reale.

75. Le forme del 3.º grado si ottengono dalle

$$\mathrm{A}_{111} = (\mathrm{ABC})\,(\overline{\mathrm{ABC}})\,,\ \mathrm{A}_{112} = (\mathrm{ABC'})\,(\overline{\mathrm{ABC'}})\,,\ \mathrm{A}_{122} = (\mathrm{AB'C'})\,(\overline{\mathrm{AB'C'}}),$$

$$\mathrm{A}_{222} = (\mathrm{A'B'C'})\,(\overline{\mathrm{A'B'C'}})$$

$$\mathrm{B}_1 = (\mathrm{ABC'})\,(\overline{\mathrm{AB}u})\,\overline{\mathrm{C}}'_{\bar{x}}\,,\quad \mathrm{B}_2 = (\mathrm{A'B'C})\,(\overline{\mathrm{A'B'}u})\,\overline{\mathrm{C}}_{\bar{x}}$$

e dalle coniugate delle B_1 e B_2; esse sono le tre sole

$$(a\,b\,c)\,(\overline{a_0 b_0 c_0})\,,\quad (a\,b\,c)\,(\overline{a_0 b_0 u})\,\overline{c}_{0\bar{x}}\,,\quad (\overline{a_0 b_0 c_0})\,(a\,b\,u)\,c_x\,.$$

Le prime due danno le forme:

	1) $(a\,b\,c)\,(\overline{a_0 b_0 c_0})$	1') $(a\,b\,c)\,(\overline{a_0 b_0 u})\,\overline{c}_{0\bar{x}}$
Con 1 scambio:	2) $(a_0 b\,c)\,(\overline{a\,b_0 c_0})$	2') $(a_0 b\,c)\,(\overline{a\,b_0 u})\,\overline{c}_{0\bar{x}}$
		3') $(a\,b\,c_0)\,(\overline{a_0 b_0 u})\,\overline{c}_{\bar{x}}$
Con 2 scambi:	3) $(a_0 b_0 c)\,(\overline{a\,b\,c_0})$	4') $(a_0 b_0 c)\,(\overline{a\,b\,u})\,\overline{c}_{0\bar{x}}$
		5') $(a_0 b\,c_0)\,(\overline{a\,b_0 u})\,\overline{c}_{\bar{x}}$
Con 3 scambi:	4) $(a_0 b_0 c_0)\,(\overline{a\,b\,c})$	6') $(a_0 b_0 c_0)\,(\overline{a\,b\,u})\,\overline{c}_{\bar{x}}$;

la 3.ª darebbe le coniugate delle forme della 2.ª serie. Le forme (1) e (4), (2) e (3) sono coniugate; queste forme

$$(\mathrm{a\,b\,c})\,(\overline{\mathrm{a_0 b_0 c_0}})\,,\quad (\mathrm{a_0 b\,c})\,(\overline{\mathrm{a\,b_0 c_0}})$$

e le coniugate, si introdurranno tutte nel sistema completo. Dopo ciò i fattori $(a\,b\,c)$, $(\overline{a_0 b_0 c_0})$ e coniugati sono riducenti, provocando lo staccarsi, dal prodotto simbolico in cui si trovano, della forma $(abc)\,(\overline{a}_0\overline{b}_0\overline{c}_0)$ o della coniugata. (V. forma reale, art. 70).

Le forme (1′) e (6′) sono riducibili, e quindi inutili pel sistema completo; si ha poi, trasformando la (2′):

$$(a_0bc)(\overline{\mathrm{a}}\,\overline{\mathrm{b}}_0\overline{\mathrm{u}})\,\overline{\mathrm{c}}_{0\bar{x}}=(a_0bc)(\overline{\mathrm{c}}_0\overline{\mathrm{b}}_0\overline{\mathrm{u}})\,\overline{\mathrm{a}}_{\bar{x}}-(a_0bc)(\overline{\mathrm{c}}_0\overline{\mathrm{a}}\,\overline{\mathrm{u}})\,\overline{\mathrm{b}}_{0\bar{x}}+(a_0bc)(\overline{\mathrm{c}}_0\overline{\mathrm{a}}\,\overline{\mathrm{b}}_0)\,\overline{\mathrm{u}}_{\bar{x}}$$

ossia, con opportuni scambi di simboli equivalenti:

$$=(c_0ba)(\overline{a}_0\overline{b}_0\overline{u})\,\overline{c}_{\bar{x}}-(a_0cb)(\overline{b}_0\overline{a}\,\overline{u})\,\overline{c}_{0\bar{x}}+[\,(a_0bc)\,(\overline{c}_0\overline{a}\,\overline{b}_0)\,]\,\overline{u}_{\bar{x}}\,,$$

$$2\ (2')=-(3')+\mathrm{R}\,;$$

e con lo scambio totale degli indici (0):

$$2\,(5')=-(4')+\mathrm{R}'\,.$$

Basta perciò considerare le forme (3′) e (4′), ossia le

$$(\mathrm{a\,b\,c_0})\,(\overline{\mathrm{a}}_0\overline{\mathrm{b}}_0\overline{\mathrm{u}})\,\overline{\mathrm{c}}_{\bar{x}}\,,\quad(\mathrm{a_0b_0c})\,(\overline{\mathrm{a}}\,\overline{\mathrm{b}}\,\overline{\mathrm{u}})\,\overline{\mathrm{c}}_{0\bar{x}}\,;$$

di esse vanno considerate anche le coniugate.

76. Le forme del 4.° grado si ottengono dalle

$$\Phi_{12}\equiv(\mathrm{AB'C'})\,(\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}{}'\overline{\mathrm{D}})\,\overline{\mathrm{C}}{}'_{\bar{\mathrm{x}}}\,\mathrm{D_x}$$

$$\mathrm{C_1}=(\mathrm{A\,B'}u)\,(\mathrm{C'D'}u)\,(\overline{\mathrm{C}}{}'\overline{\mathrm{D}}{}'\overline{\mathrm{A}})\,\overline{\mathrm{B}}{}'_{\bar{\mathrm{x}}}\,,\ \mathrm{C_2}=(\mathrm{A'B}u)\,(\mathrm{C\,D}\,u)\,(\overline{\mathrm{C}}\,\overline{\mathrm{D}}\,\overline{\mathrm{A}}{}')\,\overline{\mathrm{B}}_{\bar{\mathrm{x}}}\,,$$

$$\mathrm{N}\equiv(\overline{\mathrm{A}}\,\overline{\mathrm{B}}\,\overline{u})\,(\overline{\mathrm{C}}{}'\overline{\mathrm{D}}{}'\overline{u})\,(\mathrm{A\,C'D'})\,\mathrm{B_x}$$

e dalle coniugate delle ultime tre (la 1.ª è reale); esse sono le

$$(abc)\,(\overline{a}_0\overline{b}_0\overline{d}_0)\,\overline{c}_{0\bar{x}}\,d_x\,,\ \ (abu)\,(cdu)\,(\overline{c}_0\overline{d}_0\overline{a}_0)\,\overline{b}_{0\bar{x}}\,,\ \ (\overline{a}_0\overline{b}_0\overline{u})\,(\overline{c}_0\overline{d}_0\overline{u})\,(cda)\,b_x\,.$$

Le prime due danno le forme:

	1) $(a\,b\,c)\,(\bar a_0\bar b_0\bar d_0)\,\bar c_{0\bar x}\,d_x$	1') $(a\,b\,u)\,(c\,d\,u)\,(\bar c_0\bar d_0\bar a_0)\,\bar b_{0\bar x}$
Con 1 scambio	2) $(a_0b\,c)\,(\bar a\,\bar b_0\bar d_0)\,\bar c_{0\bar x}\,d_x$	2') $(a_0b\,u)\,(c\,d\,u)\,(\bar c_0\bar d_0\bar a)\,\bar b_{0\bar x}$
	3) $(a\,b\,c_0)\,(\bar a_0\bar b_0\bar d_0)\,\bar c_{\bar x}\,d_x$	3') $(a\,b_0u)\,(c\,d\,u)\,(\bar c_0\bar d_0\bar a_0)\,\bar b_{\bar x}$
	4) $(a\,b\,c)\,(\bar a_0\bar b_0\bar d)\,\bar c_{0\bar x}\,d_{0x}$	4') $(a\,b\,u)\,(c_0d\,u)\,(\bar c\,\bar d_0\bar a_0)\,\bar b_0^{-}$
Con 2 scambi	5) $(a_0b_0c)\,(\bar a\,\bar b\,\bar d_0)\,\bar c_{0\bar x}\,d_x$	5') $(a_0b_0u)\,(c\,d\,u)\,(\bar c_0\bar d_0\bar a)\,\bar b_{\bar x}$
	6) $(a_0b\,c_0)\,(\bar a\,\bar b_0\bar d_0)\,\bar c_{\bar x}\,d_x$	6') $(a_0b\,u)\,(c_0d\,u)\,(\bar c\,\bar d_0\bar a)\,\bar b_{0\bar x}$
	7) $(a_0b\,c)\,(\bar a\,\bar b_0\bar d)\,\bar c_{0\bar x}\,d_{0x}$	7') $(a\,b_0u)\,(c_0d\,u)\,(\bar c\,\bar d_0\bar a_0)\,\bar b_{\bar x}$
	8) $(a\,b\,c_0)\,(\bar a_0\bar b_0\bar d)\,\bar c_{\bar x}\,d_{0x}$	8') $(a\,b\,u)\,(c_0d_0u)\,(\bar c\,\bar d\,\bar a_0)\,\bar b_{0\bar x}$

e quelle che se ne ottengono con lo spostamento totale degli indici (0); la 3.ª forma darebbe le coniugate di quelle della 2.ª serie.

Fra le forme della 1.ª serie sono riducibili le (1) (3) (4), e anche la (2) perchè si ha:

$$(a_0bc)\,(\bar a\bar b_0\bar d_0)\,\bar c_{0\bar x}d_x+(da_0c)\,(\bar a\bar b_0\bar d_0)\bar c_{0\bar x}b_x=(dbc)\,(\bar a\bar b_0\bar d_0)\bar c_{0\bar x}a_{0x}+[(da_0b)\,(\bar a\bar b_0\bar d_0)]\bar c_{0\bar x}c_x$$

$$2\,(2)=\mathrm{R}+\mathrm{R}'\,.$$

Si ha poi, trasformando la (5):

$$(a_0b_0c)\,(\bar a\bar b\bar d_0)\,\bar c_{0\bar x}d_x=(a_0b_0c)\,(\bar c_0\bar b\bar d_0)\,\bar a_{\bar x}d_x-(a_0b_0c)\,(\bar c_0\bar a\bar d_0)\,\bar b_{\bar x}d_x+[(a_0b_0c)\,(\bar c_0\bar a\bar b)]\,\bar d_{0\bar x}d_x$$

$$=(c_0a_0b)\,(\bar b_0\bar a\bar d_0)\,\bar c_{\bar x}\,d_x-(a_0c_0b)\,(b_0ad_0)\,\bar c_{\bar x}\,d_x+\mathrm{R}$$

$$(5)=-2\,(6)+\mathrm{R}\,,$$

e con lo scambio totale degli indici (0):

$$(8)=-2\,(7)+\mathrm{R}'$$

Basta considerare quindi le forme (8) e (5), che si scambiano fra loro con lo scambio totale degli indici (0); osservando che sono fra loro coniugate, come si vede con lo scambio dei simboli equivalenti c e d, potremo dire che basta la forma

$$(a_0 b_0 c)\,(\overline{a}\,\overline{b d_0})\,\overline{c}_{0\bar{x}}\, d_x$$

e la sua coniugata.

Fra le forme della 2.ª serie sono riducibili le (1′) e (3′). Trasformando la (2′) si ha:

$$(a_0 b u)\,(c d u)\,\overline{(c_0 d_0 a)}\,\overline{b}_{0\bar{x}} =$$

$$= (a_0 b u)\,(c d u)\,\overline{(b_0 d_0 a)}\,\overline{c}_{0\bar{x}} - (a_0 b u)\,(c d u)\,\overline{(b_0 c_0 a)}\,\overline{d}_{0\bar{x}} + (a_0 b u)\,(c d u)\,\overline{(b_0 c_0 d_0)}\,\overline{a}_{\bar{x}}$$

$$(2') = 2\,(a_0 b u)\,(c d u)\,\overline{(b_0 d_0 a)}\,\overline{c}_{0\bar{x}} + \mathrm{R}\,.$$

Effettuando sui simboli del 2.° membro la sostituzione ciclica $[a\,c\,b\,d]$ si ha:

$$(2') = -2\,(4') + \mathrm{R}\,.$$

Trasformando la (8′) si ha:

$$(a b u)\; c_0 d_0 u)\,\overline{(c d a_0)}\,\overline{b}_{0\bar{x}} =$$

$$= (a b u)\,(c_0 d_0 u)\,\overline{(b_0 d a_0)}\,\overline{c}_{\bar{x}} - (a b u)\,(c_0 d_0 u)\,\overline{(b_0 c a_0)}\,\overline{d}_{\bar{x}} + (a b u)\,(c_0 d_0 u)\,\overline{(b_0 c d)}\,\overline{a}_{0\bar{x}}\,.$$

Effettuando sull'ultimo termine la trasposizione $[ab]$ e sul penultimo la $[cd]$ si ha:

$$2\,(8') = 2\,(a b u)\,(c_0 d_0 u)\,\overline{(b_0 d a_0)}\,\overline{c}_{\bar{x}} = -\,2\,(5')\,,$$

come si vede effettuando sui simboli le trasposizioni $[ad]$ $[bc]$. Analogamente:

$$(6') = -(7')\,.$$

Basterà dunque considerare le forme (2′) (5′) (7′) e quelle che se ne ottengono con lo scambio totale degli indici (0); ma notiamo che per questo scambio le (5′) (7′) danno origine alle (8′) e (6′), che sono state già scartate.

Trasformando la (5′) si ha:

$$(a_0b_0u)\,(cdu)\,\overline{(c_0d_0a)}\,\bar{b}_{\bar{x}} = (cb_0u)\,(a_0du)\,\overline{(c_0d_0a)}\,\bar{b}_{\bar{x}} - (ca_0u)\,(b_0du)\,\overline{(c_0d_0a)}\,\bar{b}_{\bar{x}}$$

$$(5') = -\,2\,(7')\,,$$

come si vede con qualche scambio di simboli nel 2.° membro. Dunque basta considerare le forme (2′) e (5′), e quella che si ottiene dalla (2′) con lo scambio totale degl indici; ossia le:

$$(a_0bu)\,(cdu)\,\overline{(c_0d_0a)}\,\bar{b}_{0\bar{x}}\,,\ (ab_0u)\,(c_0d_0u)\,\overline{(cda_0)}\,\bar{b}_{\bar{x}}\,,\ (a_0b_0u)\,(cdu)\,\overline{(c_0d_0a)}\,\bar{b}_{\bar{x}}\,.$$

Di queste forme devono considerarsi anche le coniugate.

77. Le forme del 5.° grado si ottengono dalle

$$\Gamma_1 \equiv (AB'C')\,\overline{(ADu)}\,\overline{(B'C'E)}\,D_xE_x,\ \Gamma_2 \equiv (A'BC)\,\overline{(A'Du)}\,\overline{(BCE')}\,D'_xE'_x$$

e dalle loro coniugate; esse danno origine alle due forme:

$$(abc)\,\overline{(e_0b_0c_0)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,e_x\,d_x\,,\ \ \overline{(a_0b_0c_0)}\,(ebc)\,(adu)\,\bar{e}_{0\bar{x}}\,\bar{d}_{0\bar{x}}$$

Dalla 1.ª si ottengono le:

	1)	$(a\,b\,c)\,\overline{(e_0b_0c_0)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,e_x\,d_x$
Con 1 scambio:	2)	$(a_0b\,c)\,\overline{(e_0b_0c_0)}\,\overline{(a\,d_0u)}\,e_x\,d_x$
	3)	$(a\,b_0c)\,\overline{(e_0b\,c_0)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,e_x\,d_x$
	4)	$(a\,b\,c)\,\overline{(e_0b_0c_0)}\,\overline{(a_0d\,u)}\,e_x\,d_{0x}$
	5)	$(a\,b\,c)\,\overline{(e\,b_0c_0)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,e_{0x}\,d_x$
Con 2 scambi:	6)	$(a_0b_0c)\,\overline{(e_0b\,c_0)}\,\overline{(a\,d_0u)}\,e_x\,d_x$
	7)	$(a_0b\,c)\,\overline{(e\,b_0c_0)}\,\overline{(a\,d_0u)}\,e_{0x}\,d_x$
	8)	$(a\,b_0c_0)\,\overline{(e_0b\,c)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,e_x\,d_x$
	9)	$(a\,b_0c)\,\overline{(e_0b\,c_0)}\,\overline{(a_0d\,u)}\,e_x\,d_{0x}$
	10)	$(a\,b_0c)\,\overline{(e\,b\,c_0)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,e_{0x}\,d_x$

e quelle che ne vengono con lo spostamento totale degli indici (0); effettuando il 2.° scambio abbiamo tralasciato di scrivere le forme manifestamente riducibili. La 2.ª forma darebbe le coniugate delle forme già scritte. Sono riducibili le forme (1) (2) (4) (5), e anche la (3), perchè si ha:

$$(ab_0c)\,\overline{(ebc_0)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,e_x\,d_x = [\,(eb_0c)\,\overline{(e_0bc_0)}\,]\,\overline{(a_0d_0u)}\,a_x\,d_x\,-$$

$$-\,(eac)\,\overline{(e_0bc_0)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,b_{0x}\,d_x + (eab_0)\,\overline{(e_0bc_0)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,c_x\,d_x\,;$$

l'ultimo termine rappresenta la (3) stessa col segno cambiato, onde:

$$2\,(3) = R + R'$$

La precedente identità in cui si ponga d per d_0 e d_0 per d mostra che anche la (9) è riducibile; la medesima identità in cui si ponga e in luogo di e_0 ed e_0 in luogo di e, offre:

$$(10) = R - (e_0ac)\,\overline{(ebc_0)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,b_{0x}\,d_x + (e_0ab_0)\,\overline{(ebc_0)}\,\overline{(a_0d_0u)}\,c_x\,d_x\,;$$

effettuando le trasposizioni $[ec]$ ed $[eb]$ sui simboli dell'ultimo e penultimo termine, rispettivamente, si ha

$$2\,(10) = R - (8).$$

Analogamente

$$2\,(6) = R - (7)\,,$$

onde possiamo limitarci a considerare le forme (6) e (8), e quelle che ne vengono con lo scambio totale degli indici (0). Ma si ha:

$$(a_0b_0c)\,\overline{(e_0bc_0)}\,\overline{(ad_0u)}\,e_x\,d_x = [\,(a_0b_0c)\,\overline{(abc_0)}\,]\,\overline{(e_0d_0u)}\,e_x\,d_x\,-$$

$$-\,(a_0b_0c)\,\overline{(ae_0c_0)}\,\overline{(bd_0u)}\,e_x\,d_x + (a_0b_0c)\,\overline{(ae_0b)}\,\overline{(c_0d_0u)}\,e_x\,d_x$$

e trasportando il 2.° termine del 2.° membro nel 1.°, con qualche scambio di simboli:

$$2\,(6) = R - (8).$$

Considereremo perciò soltanto la (8), e quella che se ne ottiene con lo spostamento totale degli indici (0):

$$(a\,b_0\,c_0)\,\overline{(e_0\,b\,c)}\,\overline{(a_0\,d_0\,u)}\,e_x\,d_x\,,\quad (a_0\,b\,c)\,\overline{(e\,b_0\,c_0)}\,\overline{(a_0\,d\,u)}\,e_{0x}\,d_{0x}\,.$$

Di queste forme devono esser considerate anche le coniugate.

78. Le forme del 6.° grado si otterranno dalle

$$D = (AB'u)\ (C'D'u)\ (ERu)\ (\overline{C'D'A})\ (\overline{ERB'})$$

$$\Delta = (AB'C')\ (\overline{ADE'})\ (\overline{B'C'R})\ D_x R_x E'_x$$

e dalle loro coniugate. Esse sono:

$$(abu)\ (cdu)\ (eru)\ (\overline{c_0d_0a_0})\ (\overline{e_0r_0b_0})\ ,\quad (\overline{a_0b_0u})\ (\overline{c_0d_0u})\ (\overline{e_0r_0u})\ (cda)\ (erb)\ ,$$

$$(abc)\ (\overline{a_0d_0e_0})\ (\overline{b_0c_0r_0})\ d_x\ r_x\ e_x\ ,\quad (\overline{a_0b_0c_0})\ (ade)\ (bcr)\ \overline{d}_{0\bar{x}}\ \overline{r}_{0\bar{x}}\ \overline{e}_{0\bar{x}}$$

Dalla 1.ª si hanno le forme:

	1)	$(a\,b\,u)\ (c\,d\,u)\ (e\,r\,u)\ (\overline{c_0d_0a_0})\ (\overline{e_0r_0b_0})$
Con 1 scambio:	2)	$(a_0b\,u)\ (c\,d\,u)\ (e\,r\,u)\ (\overline{c_0\,d_0\,a})\ (\overline{e_0r_0b_0})$
	3)	$(a\,b\,u)\ (c_0d\,u)\ (e\,r\,u)\ (\overline{c\,d_0\,a_0})\ (\overline{e_0r_0b_0})$
Con 2 scambi:	4)	$(a_0b_0u)\ (c\,d\,u)\ (e\,r\,u)\ (\overline{c_0\,d_0\,a})\ (\overline{e_0\,r_0\,b})$
	5)	$(a_0b\,u)\ (c_0d\,u)\ (e\,r\,u)\ (\overline{c\,d_0\,a})\ (\overline{e_0r_0b_0})$
	6)	$(a_0bu)\ (c\,d\,u)\ (e_0r\,u)\ (\overline{c_0\,d_0\,a})\ (\overline{e\,r_0\,b_0})$
	7)	$(a\,b_0u)\ (c_0\,d\,u)\ (e\,r\,u)\ (\overline{c\,d_0\,a_0})\ (\overline{e_0r_0\,b})$
	8)	$(a\,b\,u)\ (c_0d_0u)\ (e\,r\,u)\ (\overline{c\,d\,a_0})\ (\overline{e_0r_0b_0})$
	9)	$(a\,b\,u)\ (c_0d\,u)\ (e_0r\,u)\ (\overline{c\,d_0\,a_0})\ (\overline{e\,r_0\,b_0})$
Con 3 scambi:	10)	$(a_0b_0u)\ (c_0\,d\,u)\ (e\,r\,u)\ (\overline{c\,d_0\,a})\ (\overline{e_0r_0\,b})$
	11)	$(a_0b_0u)\ (c\,d\,u)\ (e_0r\,u)\ (\overline{c_0d_0\,a})\ (\overline{e\,r_0\,b})$
	12)	$(a_0b\,u)\ (c_0d\,u)\ (e_0r\,u)\ (\overline{c\,d_0\,a})\ (\overline{e\,r_0\,b_0})$
	13)	$(a_0b\,u)\ (c\,d\,u)\ (e_0r_0u)\ (\overline{c_0d_0\,a})\ (\overline{e\,r\,b_0})$
	14)	$(a\,b_0u)\ (c_0d_0u)\ (e\,r\,u)\ (\overline{c\,d\,a_0})\ (\overline{e_0r_0\,b})$
	15)	$(a\,b\,u)\ (c_0d_0u)\ (e_0r\,u)\ (\overline{c\,d\,a_0})\ (\overline{e\,r_0\,b_0})$

e quelle che si ottengono da queste con lo scambio totale degli indici (0); la 2.ª forma darebbe le forme coniugate. Sono riducibili le forme (1) (2) (3) (5) (8); le (4) e (9) sono nulle identicamente, perchè cambiano di segno effettuando sui simboli le sostituzioni cicliche $[arb]$ $[ce]$. Con le medesime sostituzioni le (6) e (7) divengono uguali a meno del segno; ma la (6) è identicamente nulla, perchè si ha:

$$(a_0 b u)\ (\mathrm{c\,d\,u})\ (\mathrm{r\,e_0 u})\ \overline{(c_0 d_0 a)}\ \overline{(e r_0 b_0)} =$$

$$= (a_0 b u)\ (\mathrm{r\,d\,u})\ (\mathrm{c e_0 u})\ \overline{(c_0 d_0 a)}\ \overline{(e r_0 b_0)} - (a_0 b u)\ (\mathrm{r\,c\,u})\ (\mathrm{d e_0 u})\ \overline{(c_0 d_0 a)}\ \overline{(e\, r_0 b)}$$

e nel 2.° membro i due termini sono ambedue nulli, come si vede effettuando sul 1.° le trasposizioni $[rd]$ $[bc]$ $[ae]$, e sul 2.° le $[rc]$ $[bd]$ $[ae]$. Dunque le (6) e (7) sono identicamente nulle.

Effettuando le trasposizioni $[ab]$ $[ce]$ $[dr]$ si trova:

$$(10) = -(11) \quad , \quad (13) = -(14)\,,$$

onde basterà considerare solo le forme (11) (12) (13) (15), che si permutano fra loro a meno del segno con lo scambio totale degli indici (0). Però trasformando la (12) si ha:

$$(\mathrm{a_0 b u})\ (c_0 d u)\ (\mathrm{e_0 r u})\ \overline{(c\, d_0\, a)}\ \overline{(e r_0 b_0)} =$$

$$= (\mathrm{e_0 b u})\ (c_0 d u)\ (\mathrm{a_0 r u})\ \overline{(c\, d_0\, a)}\ \overline{(e r_0 b_0)} - (\mathrm{e_0 a_0 u})\ (c_0 d u)\ (\mathrm{b r u})\ \overline{(c\, d_0\, a)}\ \overline{(e r_0 b_0}$$

$$2\,(12) = -(10) = (11)\,;$$

e trasformando la (13):

$$(\mathrm{a_0 b u})\ (\mathrm{c d u})\ (e_0 r_0 u)\ \overline{(c_0 d_0 a)}\ \overline{(e\, r\, b_0)} =$$

$$= (\mathrm{c b u})\ (\mathrm{a_0 d u})\ (e_0 r_0 u)\ \overline{(c_0 d_0 a)}\ \overline{(e\, r\, b_0)} - (\mathrm{c a_0 u})\ (\mathrm{b d u})\ (e_0 r_0 u)\ \overline{(c_0 d_0 a)}\ \overline{(e r b_0)}\,.$$

Nel 2.° membro ambedue i termini si riducono alla (15), il 1.° con le sostituzioni cicliche $[aecb]$ $[dr]$, e il 2.° con la $[aecrdb]$; onde si ha

$$(13) = 2\,(15)\,,$$

e con lo spostamento totale degli indici (0):

$$-(13) = 2\,(11)\,.$$

Dunque basta considerare la sola forma (13), che si cambia in se stessa a meno del segno con lo scambio totale degli indici (0); ossia la forma:

$$(a_0 b u)\,(c d u)\,(e_0 r_0 u)\,\overline{(c_0 d_0 a)}\,\overline{(e r b_0)}.$$

Di essa deve esser considerata anche la coniugata.

79. Finalmente operiamo lo scambio degli indici sulla 3.ª forma; avremo le forme:

	1)	$(a\,b\,c)\,\overline{(a_0d_0e_0)}\,\overline{(b_0c_0r_0)}\,d_x\,r_x\,e_x$
Con 1 scambio:	2)	$(a_0b\,c)\,\overline{(a\,d_0e_0)}\,\overline{(b_0c_0r_0)}\,d_x\,r_x\,e_x$
	3)	$(a\,b_0c)\,\overline{(a_0d_0e_0)}\,\overline{(b\,c_0r_0)}\,d_x\,r_x\,e_x$
	4)	$(a\,b\,c)\,\overline{(a_0d_0e_0)}\,\overline{(b_0c_0r_0)}\,d_{0x}\,r_x\,e_x$
	5)	$(a\,b\,c)\,\overline{(a_0d_0e_0)}\,\overline{(b_0c_0r\,)}\,d_x\,r_{0x}\,e_x$
Con 2 scambi:	6)	$(a_0b_0c)\,\overline{(a\,d\,e_0)}\,\overline{(b\,c_0r_0)}\,d_x\,r_x\,e_x$
	7)	$(a_0b\,c)\,\overline{(a\,d\,e_0)}\,\overline{(b_0c_0r_0)}\,d_{0x}\,r_x\,e_x$
	8)	$(a_0b\,c)\,\overline{(a\,d_0e_0)}\,\overline{(b_0c_0r\,)}\,d_x\,r_{0x}\,e_x$
	9)	$(ab_0c_0)\,\overline{(a_0d_0e_0)}\,\overline{(b\,c\,r_0)}\,d_x\,r_x\,e_x$
	10)	$(a\,b_0c)\,\overline{(a_0d\,e_0)}\,\overline{(b\,c_0r_0)}\,d_{0x}\,r_x\,e_x$
	11)	$(a\,b_0c)\,\overline{(a_0d_0e_0)}\,\overline{(b\,c_0r\,)}\,d_x\,r_{0x}\,e_x$
	12)	$(a\,b\,c)\,\overline{(a_0d\,e\,)}\,\overline{(b_0c_0r_0)}\,d_{0x}\,r_x\,e_x$
	13)	$(a\,b\,c)\,\overline{(a_0d\,e_0)}\,\overline{(b_0c_0r\,)}\,d_{0x}\,r_{0x}\,e_x$
Con 3 scambi:	14)	$(a_0b_0c)\,\overline{(a\,d\,e_0)}\,\overline{(b\,c_0r_0)}\,d_{0x}\,r_x\,e_x$
	15)	$(a_0b_0c)\,\overline{(a\,d_0e_0)}\,\overline{(b\,c_0r\,)}\,d_x\,r_{0x}\,e_x$
	16)	$(a_0b\,c)\,\overline{(a\,d\,e_0)}\,\overline{(b_0c_0r\,)}\,d_{0x}\,r_{0x}\,e_x$
	17)	$(ab_0c_0)\,\overline{(a_0d\,e_0)}\,\overline{(b\,c\,r_0)}\,d_{0x}\,r_x\,e_x$
	18)	$(ab_0c\,)\,\overline{(a_0d\,e\,)}\,\overline{(b\,c_0r_0)}\,d_{0x}\,r_x\,e_{0x}$
	19)	$(ab_0c\,)\,\overline{(a_0d\,e_0)}\,\overline{(b\,c_0r\,)}\,d_{0x}\,r_{0x}\,e_x$

e quelle che se ne ottengono con lo spostamento totale degli indici (0). La 4.ª forma darebbe le forme coniugate. Sono riducibili le forme (1) (2) (3) (4) (5) (7) (9) (11) (12) (13); le (6) (8) (15) (18) sono identicamente nulle, giacchè cambiano di segno con lo scambio dei simboli equivalenti *e* e *d*. Anche la (10) è riducibile; infatti

$$(\mathrm{ab_0c})\,\overline{(a_0 d e_0)}\,\overline{(b c_0 r_0)}\,d_{0x}\,\mathrm{r}_x\,e_x = (\mathrm{rb_0c})\,\overline{(a_0 d e_0)}\,\overline{(b c_0 r_0)}\,d_{0x}\,\mathrm{a}_x\,e_x - (\mathrm{rac})\,\overline{(a_0 d e_0)}\,\overline{(b c_0 r_0)}\,d_{0x}\,\mathrm{b}_{0x}\,e_x + (\mathrm{rab_0})\,\overline{(a_0 d e_0)}\,\overline{(b c_0 r_0)}\,d_{0x}\,\mathrm{c}_x\,e_x\,,$$

e nel 2.° membro l'ultimo termine si riduce al 1.° membro col segno cangiato, e gli altri due termini sono uno ridotto e uno riducibile.

Rimangono dunque da considerare soltanto le forme (14) (16) (17) (19), le quali con lo scambio totale degli indici danno rispettivamente le $-(19)$, $-(17)$, $-(16)$, $-(14)$. Trasformando la (14) si ha:

$$(a_0b_0c)\,\overline{(\mathrm{a\,d\,e_0})}\,\overline{(\mathrm{b\,c_0\,r_0})}\,d_{0x}\,r_x\,e_x = (a_0b_0c)\,\overline{(\mathrm{b\,d\,e_0})}\,\overline{(\mathrm{a\,c_0\,r_0})}\,d_{0x}\,r_x\,e_x - (a_0b_0c)\,\overline{(\mathrm{b\,a\,e_0})}\,\overline{(\mathrm{d\,c_0\,r_0})}\,d_{0x}\,r_x\,e_x + (a_0b_0c)\,\overline{(\mathrm{b\,a\,d})}\,\overline{(\mathrm{e_0c_0r_0})}\,d_{0x}\,r_x\,e_x\,;$$

l'ultimo termine è nullo perchè cambia segno con la trasposizione $[er]$, il 1.° termine si riduce al 1.° membro col segno cangiato con la trasposizione $[ab]$, il 2.° termine si riduce alla (17) con le $[ac]$ $[er]$. Dunque:

$$2\,(14) = -(17)\,,$$

e con lo spostamento totale degli indici (0):

$$-2\,(19) = (16)\,.$$

D'altra parte trasformando in altro modo la (14) si ha:

$$(\mathrm{a_0b_0c})\,\overline{(a\,d\,e_0)}\,\overline{(b\,c_0\,r_0)}\,d_{0x}\,\mathrm{r}_x\,e_x = (\mathrm{r\,b_0c})\,\overline{(a\,d\,e_0)}\,\overline{(b\,c_0\,r_0)}\,d_{0x}\,\mathrm{a}_{0x}\,e_x - (\mathrm{ra_0c})\,\overline{(a\,d\,e_0)}\,\overline{(b\,c_0\,r_0)}\,d_{0x}\,\mathrm{b}_{0x}\,e_x + (\mathrm{ra_0b_0})\,\overline{(a\,d\,e_0)}\,\overline{(b\,c_0\,r_0)}\,d_{0x}\,\mathrm{c}_x\,e_x\,.$$

Nel 2.° membro il 1.° termine è nullo perchè cambia di segno con la trasposizione $[ad]$, il 2.° termine ri riduce alla (16) con la $[rb]$, e il 3.° termine si riduce al 1.° membro col segno cambiato con la $[cr]$. Dunque:

$$2\,(14) = -(16)\,,$$

ossia:

$$2\,(14) = -(16) = -(17) = 2\,(19)\,.$$

Basta perciò considerare p. e. la sola forma (17):

$$(a\,b_0\,c_0)\,\overline{(a_0\,d\,e_0)}\,\overline{(b\;c\;r_0)}\,d_{0x}\,r_x\,e_x\,.$$

Nel medesimo tempo dobbiamo considerare anche la forma coniugata.

80. Di modo che il sistema completo per la forma $a_x\,\overline{a}_{0\bar{x}}$ può ritenersi costituito delle 16 forme:

$$(1)\quad a_x\,\overline{a}_{0\bar{x}} \qquad (2)\quad (a\,b\,u)\,\overline{(a_0 b_0 u)} \qquad (4)\quad (a_0 b u)\,a_x\,b_{0x}$$

$$(3)\quad (a_0 b\,u)\,\overline{(a\,b_0 u)}$$

$$(5)\quad (a\,bc)\,\overline{(a_0 b_0 c_0)} \qquad (7)\quad \overline{(a\,b\,c_0)}\,(a_0 b_0 u)\,c_x$$

$$(6)\quad (a_0 bc)\,\overline{(a\,b_0 c_0)} \qquad (8)\quad \overline{(a_0 b_0 c)}\,(a\,b\,u)\,c_{0x}$$

$$(9)\quad (a_0 b_0 c)\,\overline{(a\,b\,d_0)}\,\overline{c}_{0\bar{x}}\,d_x$$

$$(10)\quad (a_0 b\,u)\,(c\,d\,u)\,\overline{(c_0 d_0 a)}\,\overline{b}_{0\bar{x}} \qquad (13)\quad (a_0 bc)\,\overline{(e\,b_0 c_0)}\,\overline{(a\,d\,u)}\,e_{0x}\,d_{0x}$$

$$(11)\quad (a\,b_0 u)\,(c_0 d_0 u)\,\overline{(c\,d\,a_0)}\,\overline{b}_{\bar{x}} \qquad (14)\quad (ab_0 c_0)\,\overline{(e_0 b\,c)}\,\overline{(a_0 d_0 u)}\,e_x\,d_x$$

$$(12)\quad (a_0 b_0 u)\,(c\,d\,u)\,\overline{(c_0 d_0 a)}\,\overline{b}_{\bar{x}}$$

$$(15)\quad (a_0 b\,u)\,(c\,d\,u)\,(e_0 r_0 u)\,\overline{(c_0 d_0 a)}\,\overline{(e\,r\,b_0)}$$

$$(16)\quad (a\,b_0 c_0)\,\overline{(d\,a_0 e_0)}\,\overline{(r_0 b\,c)}\,d_{0x}\,e_x\,r_x$$

e di tutte le loro coniugate. Per la forma $(abu)\,\overline{(a_0 b_0 u)}$ adottiamo una notazione simbolica, ponendo:

$$(abu)\,\overline{(a_0 b_0 u)} = u_\alpha\,\overline{u}_{\bar{\alpha}}$$

ossia

$$\alpha_i = (ab)_i\,,\ \alpha_{0i} = (a_0b_0)_i\,;\ (\alpha\beta)_i = (abc)\,d_i\,,\ (\alpha_0\beta_0)_i = (a_0b_0c_0)\,d_{0i}\,.$$

Allora anche nelle altre forme del sistema completo possono introdursi i simboli greci; p. es. si ha:

$$(abc)\,(\overline{a_0}\overline{b_0}\overline{c_0}) = a_\alpha\,\bar{a}_{0\bar{\alpha}_0}\,,\ (a_0bc)\,(\overline{a}\overline{b_0}\overline{c_0}) = a_{0\alpha}\,\bar{a}_{\bar{\alpha}_0}\,,$$

e queste forme si cambiano in se stesse o nelle loro coniugate scambiando i simboli greci coi latini, ossia, diciamo, sono correlative di se stesse o delle loro coniugate. Le forme del sistema completo sono state scelte in modo da potersi distribuire in coppie di forme fra loro correlative. La correlativa della forma (3) è la

$$(\alpha_0\beta x)\,(\overline{\alpha}\overline{\beta_0}\overline{x})\,;$$

ora notiamo che, ponendo per un momento $x_i = (vw)_i$, si ha

$$(\alpha_0\beta x) = v_{\alpha_0}\,w_\beta - w_{\alpha_0}\,v_\beta\,;$$

conveniamo di porre sempre, in tutta questa discussione:

$$\alpha_i = (ab)_i\ \ \alpha_{0i} = (a_0b_0)_i\,;\ \beta_i = (cd)_i\ \ \beta_{0i} = (c_0d_0)_i\,;$$

allora si ha:

$$(\alpha_0\beta\,x) = (a_0\,b_0\,v)\,(c\,d\,w) - (a_0\,b_0\,w)\,(c\,d\,v)$$

e, per l'identità

$$(cdw)\,(va_0b_0) - (vdw)\,(ca_0b_0) + (vcw)\,(da_0b_0) - (vcd)\,(wa_0b_0) = 0:$$

$$(\alpha_0\beta x) = (ca_0b_0)\,(vdw) - (da_0b_0)\,(vcw) = (da_0b_0)\,c_x - (ca_0b_0)\,d_x\,.$$

Inoltre avremo:

$$\overline{(\alpha\,\beta_0\,x)} = \overline{(d_0\,a\,b)}\ \bar{c}_{0\bar{x}} - \overline{(c_0\,a\,b)}\ \bar{d}_{0\bar{x}}\,,$$

e quindi:

$$(\alpha_0\beta x)(\overline{\alpha\beta_0 x}) = [(da_0b_0)(\overline{d_0ab})]\,c_x\,\bar{c}_{0\bar{x}} + [(ca_0b_0)(\overline{c_0ab})]\,d_x\,\bar{d}_{0\bar{x}} - (da_0b_0)(\overline{c_0ab})\,c_x\,\bar{d}_{0\bar{x}} -$$

$$- (ca_0b_0)(\overline{d_0ab})\,d_x\,\bar{c}_{0\bar{x}}\,.$$

Nel 2.° membro i primi due termini contengono le forme (1) e (6); gli altri due termini rappresentano la (9), e quindi alla forma (9) del sistema completo si può sostituire la $(\alpha_0\beta x)\,(\overline{\alpha\beta_0 x})$.

La correlativa della forma (4) è la

$$(\overline{\alpha_0\,\beta\,x})\;u_\alpha\,u_{\beta_0}$$

e per una identità già notata si ha:

$$(\overline{\alpha_0\beta x})\,u_\alpha\,u_{\beta_0} = (\overline{da_0b_0})\,(abu)\,(c_0d_0u)\,\bar{c}_{\bar{x}} - (\overline{ca_0b_0})\,(abu)\,(c_0d_0u)\,\bar{d}_{\bar{x}} = -2\,(12)\,.$$

Le due forme

$$(7) = \bar{c}_{0\bar{\alpha}}\,u_{\alpha_0}\,c_x\quad,\quad(8) = \bar{c}_{\bar{\alpha}_0}\,u_\alpha\,c_{0_x}$$

sono correlative l'una dell'altra. Le correlative delle forme:

$$(10) = (a_0bu)\,\bar{a}_{\bar{\varepsilon}_0}\,\bar{b}_{0_{\bar{x}}}\,u_\varepsilon\quad,\quad(11) = (ab_0u)\,\bar{a}_{0\bar{\varepsilon}}\,\bar{b}_{\bar{x}}\,u_{\varepsilon_0}$$

sono le

$$(\alpha_0\beta x)\,\bar{e}_{0\bar{\alpha}}\,\bar{u}_{\bar{\beta}_0}\,e_x\quad,\quad(\alpha\beta_0x)\,\bar{e}_{\bar{\alpha}_0}\,\bar{u}_{\bar{\beta}}\,e_{0_x}$$

e si ha, sempre per la solita identità:

$$(\alpha_0\beta x)\,\bar{e}_{0\bar{\alpha}}\,\bar{u}_{\bar{\beta}_0}\,e_x = (da_0b_0)\,(\overline{e_0ab})\,(\overline{c_0d_0u})\,e_x\,c_x - (ca_0b_0)\,(\overline{e_0ab})\,(\overline{c_0d_0u})\,e_x\,d_x =$$

$$= -2\,(ca_0b_0)\,(\overline{e_0ab})\,(\overline{c_0d_0u})\,e_x\,d_x = -2\,(14)\,,$$

come si vede effettuando sui simboli la sostituzione ciclica $[abc]$; con lo scambio totale degli indici (0) si ha:

$$(\alpha\beta_0x)\,\bar{e}_{\bar{\alpha}_0}\,\bar{u}_{\bar{\beta}}\,e_{0_x} = -2\,(13)\,.$$

La correlativa della forma

$$(15) = (abu)\, \bar{a}_{\bar{\varepsilon}_0}\, \bar{b}_{0\bar{\rho}}\, u_\varepsilon\, u_{\rho_0}$$

è la forma

$$(\alpha_0 \beta x)\, \bar{e}_{0\bar{\alpha}}\, \bar{r}_{\bar{\beta}_0}\, e_x\, r_{0x} =$$

$$= (da_0 b_0)\,(e_0 ab)\,(rc_0 d_0)\, e_x\, r_{0x}\, c_x - (ca_0 b_0)\,(\overline{e_0 a b})\,(\overline{rc_0 d_0})\, e_x\, r_{0x}\, d_x =$$

$$= 2\,(ca_0 b_0)\,(\overline{rc_0 d_0})\,(\overline{e_0 a b})\, r_{0x}\, e_x\, d_x = -2\,(16)\,,$$

come si vede effettuando sui simboli le sostituzioni cicliche $[abc]$ $[der]$.

81. Quindi il sistema completo, di 1.ª e anche di 2.ª specie, per la forma $a_x\, \bar{a}_{0\bar{x}}$, potrà ritenersi costituito delle 16 forme:

$$f = a_x\, \bar{a}_{0\bar{x}} \qquad \varphi = u_\alpha\, \bar{u}_{\bar{\alpha}_0}$$

$$F = (a_0 b\, u)\,(\overline{a\, b_0 u}) \qquad \Phi = (\alpha_0 \beta\, x)\,(\overline{\alpha\, \beta_0 x})$$

$$R = (\overline{a_0 b\, u})\, a_x b_{0x} \qquad \mathrm{P} = (\overline{\alpha_0 \beta\, x})\, u_\alpha\, u_{\beta_0}$$

$$A = a_\alpha\, \bar{a}_{0\bar{\alpha}_0}$$

$$B = a_{0\alpha}\, \bar{a}_{\bar{\alpha}_0}$$

$$K_1 = \bar{a}_{0\bar{\alpha}}\, u_{\alpha_0}\, a_x$$

$$K_2 = \bar{a}_{\bar{\alpha}_0}\, u_\alpha\, a_{0x}$$

$$C_1 = (a_0 b\, u)\, \bar{a}_{\bar{\alpha}_0}\, \bar{b}_{0\bar{x}}\, u_\alpha \qquad \Gamma_1 = (\alpha_0 \beta\, x)\, \bar{a}_{0\bar{\alpha}}\, \bar{u}_{\bar{\beta}_0}\, a_x$$

$$C_2 = (a\, b_0 u)\, \bar{a}_{0\bar{\alpha}}\, \bar{b}_{\bar{x}}\, u_{\alpha_0} \qquad \Gamma_2 = (\alpha\, \beta_0 x)\, \bar{a}_{\bar{\alpha}_0}\, \bar{u}_{\bar{\beta}}\, a_{0x}$$

$$D = (a_0 b\, u)\, u_\alpha\, u_{\beta_0}\, \bar{a}_{\bar{\alpha}_0}\, \bar{b}_{0\bar{\beta}} \qquad \Delta = (\alpha_0 \beta\, x)\, a_x\, b_{0x}\, \bar{a}_{0\bar{\alpha}}\, \bar{b}_{\bar{\beta}_0}$$

e di tutte le loro coniugate [1]).

[1]) Le equazioni $a_x\, \bar{a}_{\bar{x}} = 0$ e $a_x\, \bar{a}_{0\bar{x}} = 0$ rappresentano rispettivamente, quando rappresentano qualche cosa, quegli enti che il Segre nel *Saggio* più volte citato ha chiamato *iperconica* ed *ente Q;* non possiamo però inoltrarci qui nell'interpetrazione geometrica, sebbene in essa si presenti subito qualche resultato che può sembrare degno di nota.