Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Onorato Niccoletti

Sulla trasformazione delle equazioni lineari del secondo ordine con due variabili indipendenti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 8 (1899), exp. nº 1, p. 1-145

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1899_1_8__A1_0>

Prof. ONORATO NICCOLETTI

SULLA TRASFORMAZIONE

DELLE

EQUAZIONI LINEARI DEL SECONDO ORDINE

CON DUE VARIABILI INDIPENDENTI

Le difficoltà gravi e, nella maggior parte dei casi, insuperabili che presenta l'integrazione diretta delle equazioni a derivate parziali ed i pochi risultati che l'analisi ha conseguito per questa via, danno una importanza grandissima alla teoria della *trasformazione* di queste equazioni.

Coi metodi di questa teoria da un'equazione a derivate parziali, di cui sia noto l'integral generale, si deducono delle nuove equazioni, il cui integral generale dipende in guisa perfettamente nota e determinata da quello dell'equazione proposta e si può quindi senz'altro riguardare come conosciuto. In certo modo la teoria della trasformazione delle equazioni a derivate parziali moltiplica infinite volte (mi si permetta la frase) i risultati ottenuti per altra via nell'integrazione di queste equazioni e ne aggiunge infiniti altri nuovi.

Ho trattato in questo lavoro un problema molto particolare della teoria della trasformazione e precisamente il problema seguente:

" *Data un' equazione lineare omogenea del 2.º ordine con due variabili indipendenti:*

$$\Omega(z) = ar + 2\,bs + ct + 2\,dp + 2\,eq + fz = 0\ ,$$

a) determinare tutte *le funzioni* θ, *composte linearmente ed omogeneamente con* z *e colle sue derivate, le quali, per ogni forma della funzione* z *integrale dell' equazione data, soddisfano ad una equazione analoga;*

b) determinare tutte *le funzioni* φ *il cui differenziale è dato da un' espressione lineare omogenea in* z *e nelle sue derivate, e che per ogni forma di* z*, integrale dell' equazione data, soddisfano ad un' equazione analoga.* „

Una tale funzione θ si dirà una *trasformata differenziale della* z *di ordine* m, quando contenga (in modo essenziale) le derivate della z fino all' ordine m: e l' equazione in θ si dirà ottenuta da quella in z mediante *una trasformazione differenziale dell' ordine* m.

Analogamente una funzione φ che soddisfi alla seconda condizione, si dirà *una trasformata integrale della* z *di ordine* m, quando contenga le derivate di z fino all' ordine m; e l' equazione in φ si dirà trasformata di quella in z mediante *una trasformazione integrale dell' ordine* m.

La teoria delle trasformazioni differenziali delle equazioni del 2.° ordine con due variabili indipendenti è stata già molto studiata: basti ricordare per le equazioni del tipo iperbolico la trasformazione di Laplace ed il metodo d'integrazione che se ne deduce, la trasformazione del Lewy, ed i risultati del Darboux, esposti nel Cap. VIII delle sue belle lezioni sulle equazioni di Laplace; e per le equazioni di forma arbitraria la bella memoria del sig. Ruggero Liouville sulle forme integrabili delle equazioni del 2.° ordine [1]).

Meno studiate sono state le trasformazioni integrali; ad eccezione del noto teorema di Moutard e dei risultati che enuncia nella introduzione della sua celebre memoria, bruciata negli incendî della Comune; di alcune interessanti formule del Darboux nelle ultime pagine del capitolo citato, di un teorema del signor Liouville, ritrovato poi per le equazioni del tipo ellittico dal signor Burgatti, non sono a mia conoscenza altri risultati di indole generale; e questi stessi risultati sono stati ottenuti dai diversi autori con metodi distinti e sembrano privi di qualunque legame.

---

[1]) **Le indicazioni bibliografiche seguono nel testo.**

Riunire e coordinare questi risultati sotto un solo punto di vista, dedurli insieme con altri nuovi, almeno finchè mi era possibile, con un metodo naturale, organico, senza grandi sviluppi di calcolo, è stato lo scopo del mio lavoro ed eccone in breve le linee principali.

Ho premesso nel primo capitolo alcune considerazioni preliminari, ricordando alcune nozioni generali relative alle equazioni a derivate parziali del 2.° ordine (le componenti di un'equazione del 2.° ordine, la equazione aggiunta, il concetto d'integral generale.....;) eran tutte cose note, ma ho creduto bene riunirle insieme e presentarle sotto il punto di vista a me più opportuno: ho inoltre dimostrato un teorema, fondamentale per la teoria seguente, relativo a certi sistemi di equazioni ai differenziali totali, che si può però ritenere implicitamente contenuto nei noti lavori di Meray e Riquier sulle equazioni a derivate parziali e nei lavori di Lie.

Il secondo capitolo è dedicato allo studio delle trasformazioni differenziali. Cominciando da quelle del 1.° ordine, ho dedotto dal teorema fondamentale sopra accennato le condizioni necessarie, affinchè un'espressione:

$$\theta = \alpha z + \beta p + \gamma q$$

soddisfi, per ogni valore di z, integrale dell'equazione data, ad una equazione analoga: ho dimostrato poi che queste condizioni erano anche sufficienti: e di questo teorema ho dato due dimostrazioni diverse, una ispirata ai metodi di Darboux, l'altra ad un'idea del Liouville, che è poi fecondissima di risultati anche nei casi ulteriori. Ho studiato quindi le trasformazioni di ordine superiore e dimostrato per esse il risultato importante che si ottengono tutte quante componendo (nel senso generale della teoria delle operazioni) delle trasformazioni del 1.° ordine in un ordine qualunque. Ho ritrovato così, come era naturale, tutti i risultati degli altri autori ed anche dei nuovi: così ad es. la trasformazione che ho detto *singolare* delle equazioni del tipo parabolico; la relazione che lega le due equazioni aggiunte di due altre, l'una trasformata differenziale dell'altra; la legge di composizione ed il teorema di permutabilità delle trasformazioni differenziali. Richiamo anche l'attenzione sul metodo seguito per eseguire i calcoli relativi alle trasformazioni differenziali di ordine superiore e sui risultati ivi ottenuti.

Ho studiato nel terzo capitolo le trasformazioni integrali. Cominciando anche qui da quelle del 1.° ordine, ne ho ricondotto la ricerca all'integrazione di un'equazione del 2.° ordine, che ho detto *l'equazione della trasformazione* e che comparisce nella questione nel modo il più naturale: ho dimostrato che, noto l'integral generale della equazione della trasformazione, eran note anche *tutte* le trasformate integrali del 1.° ordine dell'equazione data, tranne alcune trasformazioni singolari, trovate dal Darboux per le equazioni del tipo iperbolico e che io ho determinato anche per quelle del tipo parabolico. Ho quindi dedotto dal teorema fondamentale del Cap. I il modo di costruire *tutte* le trasformate integrali del 1.° ordine, non singolari, dell'equazione data e ho quindi anche assegnata la forma dell'integral generale della equazione della trasformazione. Di qui ho dedotto come casi particolarissimi i risultati del Moutard, del Liouville e del Burgatti. Ho dato le formule generali relative alla trasformazione del Moutard (supponendo l'equazione scritta in modo affatto arbitrario): ho preso quindi a studiare la trasformazione di Liouville e dimostratone alcune importanti proprietà, non osservate dagli altri autori: come essa porti di nuovo alla costruzione di tutte le trasformate integrali del 1.° ordine dell'equazione data, come insieme con ogni equazione trasformata sia noto anche l'integral generale della equazione aggiunta e in qual modo questo si deduca dall'equazione aggiunta alla data: come infine l'applicazione ulteriore del medesimo processo non richieda più che quadrature. Ho considerato quindi le trasformazioni singolari del 1.° ordine ed ho fatto vedere (seguendo un'idea del Darboux) come nei due casi iperbolico e parabolico, nei quali esistono, diano un terzo modo, molto interessante per costruire tutte le trasformate integrali del 1.° ordine della equazione data. Ho determinato poi tutte le trasformazioni integrali di ordine superiore, e dimostrato per esse il risultato notevole che si ottengono componendo (in un'ordine qualunque) una trasformazione integrale del 1.° ordine con una differenziale; ho di qui dedotto il teorema della permutabilità di una trasformazione integrale con una differenziale; ho dato infine alcune formule, che a me sembrano notevoli, relative a queste trasformazioni di ordine superiore.

Nel quarto capitolo ho dato poi le formule principali relative alle trasformazioni inverse delle trasformazioni differenziali ed integrali: ho trovato così la relazione che lega due equazioni aggiunte di due trasformate, differenziali o integrali, di ordine qualunque, ed accennato infine ad alcune ricerche, suggerite dalla teoria svolta.

Esposte brevemente le linee generali del mio lavoro, debbo io il primo riconoscere che esso ha certamente dei difetti; tuttavia spero che possa offrire agli studiosi qualche interesse: ad ogni modo se anche non ho raggiunto lo scopo modesto che mi ero prefisso, sarà perdonato, io spero, al buon volere.

Avverto infine che gli enunciati dei teoremi esposti furono in parte comunicati in una mia nota ai Lincei dell'agosto 1896.

Roma, febbraio 1897.

ONORATO NICCOLETTI.

§. I.

CONSIDERAZIONI PRELIMINARI

1. Sia data un'equazione lineare omogenea del 2.° ordine:

$$(1) \qquad \Omega(z) = ar + 2\,bs + ct + 2\,dp + 2\,eq + fz = 0,$$

dove, secondo le notazioni di Monge,

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}; \ \ldots\ldots.$$

Nello studio che faremo, avremo riguardo in modo speciale al caso in cui tutti i coefficienti dell'equazione data siano reali e che le funzioni da considerare siano funzioni reali di variabili reali: e ci serviremo della teoria delle funzioni di variabile complessa, solo quando dovremo ricorrere ai teoremi classici di Cauchy sull'esistenza degli integrali delle equazioni a derivate parziali. Osserviamo però esplicitamente che i risultati che otterremo, valgono in massima parte, anche nel caso in cui le variabili possano prendere anche valori complessi. Supponiamo inoltre che siano sempre soddisfatte tutte quelle condizioni sulla continuità e derivabilità che ci occorreranno.

2. Posto ciò, definiamo come *componenti* del 1.° e 2.° ordine dell'espressione differenziale $\Omega(z)$ le espressioni differenziali:

$$(2) \qquad \begin{cases} \Omega_1(z) = ap + bq + dz \ ; \quad \Omega_2(z) = bp + cq + ez \\ \Omega_{11}(z) = az \ ; \quad \Omega_{21}(z) = \Omega_{12}(z) = bz \ ; \quad \Omega_{22}(z) = cz \end{cases}$$

donde risulta subito che le componenti del 2.° ordine della $\Omega(z)$ sono le componenti del 1.° ordine delle sue componenti del 1.° ordine. — Le componenti dell'espressione differenziale $\Omega(z)$ godono di alcune proprietà che importa notare:

a) Mutando proporzionalmente la funzione incognita col porre:

$$z = \lambda z' \tag{3}$$

ed indicando cogli accenti tutti gli elementi relativi alla funzione z', avremo in z' l'equazione:

$$\Omega'(z') = a'r' + 2b's' + c't' + 2d'p' + 2e'q' + f'z' = 0 \tag{1_a}$$

dove possiamo porre:

$$\begin{gathered} a' = \frac{1}{\lambda}\Omega_{11}(\lambda) \;;\quad b' = \frac{1}{\lambda}\Omega_{12}(\lambda) \;;\quad c' = \frac{1}{\lambda}\Omega_{22}(\lambda) \;; \\ d' = \frac{1}{\lambda}\Omega_1(\lambda) \;;\quad e' = \frac{1}{\lambda}\Omega_2(\lambda) \;;\quad f' = \frac{1}{\lambda}\Omega(\lambda) \end{gathered} \tag{4}$$

ed in particolare:

$$a' = a \;;\quad b' = b \;;\quad c' = c \,.$$

Se in particolare λ è una soluzione dell'equazione data, la nuova equazione non contiene esplicitamente la funzione incognita e inversamente.

Tra le componenti antiche e nuove hanno luogo le relazioni:

$$\Omega_{ik}(z) = \lambda\,\Omega'_{ik}(z') \;;\; (i, k = 0, 1, 2 \;;\; \Omega_{10} = \Omega_1 \;;\; \Omega_{01} = \Omega_2 \;;\; \Omega_{00} = \Omega). \tag{5}$$

b) Eseguendo un cambiamento di variabili colle formule:

$$\xi = \xi(xy) \;;\quad \eta = \eta(xy)\,, \tag{6}$$

avremo, indicando con due accenti i nuovi elementi, nella funzione $z''(\xi\eta) = z(xy)$ l'equazione:

$$\Omega''(z'') = a''r'' + 2b''s'' + c''t'' + 2d''p'' + 2e''q'' + f''z'' = 0 \tag{1_b}$$

dove

$$(7) \quad \begin{cases} a'' = a \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\, b \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + c \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\[2ex] b'' = a \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + b \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right) + c \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \\[2ex] c'' = a \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2\, b \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + c \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \\[2ex] d'' = d \dfrac{\partial \xi}{\partial x} + e \dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{1}{2} \left(a \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + 2\, b \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y} + e \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\right) \\[2ex] c'' = d \dfrac{\partial \eta}{\partial x} + e \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{1}{2} \left(a \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2\, b \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y} + e \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right) \\[2ex] f'' = f \end{cases}$$

e le nuove componenti sono legate alle antiche dalle relazioni:

$$(8) \quad \begin{cases} \Omega''_1 (z'') = \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\, \Omega_1 (z) + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\, \Omega_2 (z) + \\[1ex] \qquad + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\, \Omega_{11} (z) + 2 \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x\, \partial y}\, \Omega_{12} (z) + \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}\, \Omega_{22} (z)\right) \\[2ex] \Omega''_2 (z'') = \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\, \Omega_1 (z) + \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\, \Omega_2 (z) + \\[1ex] \qquad + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\, \Omega_{11} (z) + 2 \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}\, \Omega_{12} (z) + \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\, \Omega_{22} (z)\right) \\[2ex] \Omega''_{11} (z'') = \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \Omega_{11} (z) + 2 \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\, \Omega_{12} (z) + \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \Omega_{22} (z) \\[2ex] \Omega''_{12} (z'') = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\, \Omega_{11} (z) + \left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right) \Omega_{12} (z) + \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\, \Omega_{22} (z) \\[2ex] \Omega_{22}'' (z'') = \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 \Omega_{11} (z) + 2 \dfrac{\partial \eta}{\partial x} \dfrac{\partial \eta}{\partial y}\, \Omega_{12} (z) + \left(\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \Omega_{22} (z). \end{cases}$$

3. La quantità

$$\Delta = b^2 - ac \tag{9}$$

è un *invariante* dell' espressione differenziale $\Omega(z)$; non muta per la sostituzione (3); per la (6) si moltiplica per il quadrato del determinante funzionale $\frac{d(\xi\,\eta)}{d(x\,y)}$: se quindi l'equazione data ha i coefficienti reali ed il cambiamento di variabili è reale, *esso conserva il segno di prima.* L'invariante Δ dicesi il *discriminante* della equazione (1).

Il segno dell'invariante Δ ha una grandissima importanza per lo studio delle equazioni lineari del 2.° ordine a coefficienti reali e conduce ad una classificazione di queste equazioni.

Si consideri infatti l'equazione a derivate parziali del 1.° ordine e del 2.° grado:

$$C(\theta) = a\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y} + c\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)^2 = 0. \tag{10}$$

Essa si decompone in due fattori lineari, che saranno reali e distinti, quando sia $\Delta > 0$, reali e coincidenti per $\Delta = 0$, complessi coniugati per $\Delta < 0$. Le linee caratteristiche delle due equazioni lineari del 1.° ordine, nelle quali la (10) si spezza, si dicono anche linee *caratteristiche* dell'equazione data. Ciò posto, se:

a) $\Delta = b^2 - ac > 0$ nel campo che si considera, prendendo come nuove variabili x ed y due integrali indipendenti della $C(\theta) = 0$, l'equazione si riduce alla forma normale:

$$I(z) = s + ap + bq + cz = 0 \tag{11}$$

dove a, b, c sono funzioni note di x e di y. L'equazione data dicesi allora del *tipo iperbolico* o anche *a caratteristiche reali e distinte.*

b) Se $\Delta < 0$, prendendo come nuove variabili due integrali coniugati dell'equazione lineare del 2.° ordine che si ottiene annullando il parametro differenziale secondo Δ_2 della forma differenziale quadratica:

$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2,$$

l'equazione si riduce alla forma normale:

$$(12) \qquad \mathrm{E}(z) = r + t + 2\,ap + 2\,bq + cz = 0$$

e dicesi in tal caso del *tipo ellittico* od anche *a caratteristiche immaginarie.*

c) Se finalmente $\Delta = 0$, prendendo come nuova variabile y un integrale della (10), l'equazione si riduce alla forma normale:

$$(13) \qquad \mathrm{P}(z) = r + 2\,ap + 2\,bq + cz = 0$$

e la riduzione è possibile in infiniti modi. L'equazione dicesi allora del *tipo parabolico* o *a caratteristiche reali e coincidenti.*

4. Ad ogni equazione lineare omogenea del 2.° ordine è coordinata una equazione analoga, legata ad essa molto intimamente: l'equazione *aggiunta.* Essa si può ottenere semplicemente al modo seguente:

Si moltiplichi il primo membro della (1) per una funzione u di x e di y e si cerchi di porre il prodotto $u\,\Omega(z)$ sotto la forma:

$$(14) \quad u\,\Omega(z) = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\,p + \beta\,q + \gamma\,z) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha'p + \beta'q + \gamma'z) = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}\,.$$

Si avranno come condizioni necessarie e sufficienti:

$$\alpha = a\,u\ ;\quad \alpha' + \beta = 2\,b\,u\ ;\quad \beta' = c\,u\ ;$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha'}{\partial y} + \gamma = 2\,du\ ;\quad \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \gamma' = 2\,eu\ ;\quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \gamma'}{\partial y} = fu$$

alle quali tutto si soddisfa nel modo più generale ponendo:

$$(15)\ \begin{cases} \alpha = au\ ;\quad \beta = bu - v\ ;\quad \alpha' = bu + v\ ;\quad \beta' = cu \\ \gamma = 2\,du - \dfrac{\partial(au)}{\partial x} - \dfrac{\partial(bu)}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\ ;\ \gamma' = 2\,eu - \dfrac{\partial(bu)}{\partial x} - \dfrac{\partial(cu)}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

dove v è una funzione arbitraria di x ed y; ed u soddisfa alla equazione lineare del 2.° ordine:

$$(16) \quad \Phi(u) = \frac{\partial^2(au)}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2(bu)}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2(cu)}{\partial y^2} - 2\,\frac{\partial(du)}{\partial x} - 2\,\frac{\partial(eu)}{\partial y} + fu = 0$$

od anche

$$(16^*) \qquad \Phi(u) = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d_1\frac{\partial u}{\partial x} + 2e_1\frac{\partial u}{\partial y} + f_1 u = 0$$

dove d_1, e_1, f_1 hanno i valori:

$$(17) \qquad \begin{cases} d_1 = \dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial b}{\partial y} - d\ ; \qquad e_1 = \dfrac{\partial b}{\partial x} + \dfrac{\partial c}{\partial y} - e\ ; \\ f_1 = \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2\dfrac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 c}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial d}{\partial x} - 2\dfrac{\partial e}{\partial y} + f. \end{cases}$$

L'equazione $\Phi(u) = 0$, a cui il moltiplicatore u deve soddisfare, è appunto l'aggiunta della $\Omega(z) = 0$. Essa dicesi anche *equazione del moltiplicatore.* Un'equazione e la sua aggiunta appartengono dunque al medesimo tipo e si riducono alla forma normale col medesimo cambiamento di variabili. Esse sono identiche quando sia $d_1 = d$, $e_1 = e$ (il che porta anche $f_1 = f$), cioè quando si abbia:

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial b}{\partial y} = 2d\ ; \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} + \dfrac{\partial c}{\partial y} = 2e\ . \end{cases}$$

All'equazione aggiunta di un'equazione lineare del 2.° ordine si è condotti altresì dalle considerazioni seguenti:

Indicando con z ed u due funzioni arbitrarie di x e di y, si cerchi un'espressione $G(u)$, differenziale lineare in u, tale che per ogni forma di z e di u si abbia identicamente:

$$(19) \qquad u\,\Omega(z) - z\,G(u) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

esssendo P e Q funzioni lineari omogenee in z e nelle sue derivate (ed ugualmente per u). Noi diciamo che deve essere:

$$G(u) = \Phi(u)\ ;$$

cioè l'espressione aggiunta della $\Omega(z)$ è la sola per cui la (19) sia soddisfatta. Si osservi infatti che facendo $G(u) = \Phi(u)$, la (19) si verifica subito, riducendosi ad una formula nota di derivazione: basterà dunque provare che non vi sono altre espressioni differenziali che vi soddisfano. Ove una tale espressione $G(u)$ esistesse, la (19) insieme all'altra:

$$u\,\Omega(z) - z\,\Phi(u) = \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y}, \tag{19*}$$

darebbe:

$$z\,(G(u) - \Phi(u)) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y},$$

essendo X ed Y funzioni lineari di z e delle sue derivate, mentre nel primo membro figura soltanto la z; il che evidentemente è impossibile, tranne per $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$, $G(u) = \Phi(u)$, ciò che dimostra appunto quello che si voleva. [1])

Risulta di qui in particolare:

1.° che la relazione tra un'equazione e la sua aggiunta è involutoria: una qualunque delle due equazioni è aggiunta dell'altra;

2.° che essa non muta, mutando variabili;

3.° che essa non muta, mutando proporzionalmente la funzione incognita.

---

[1]) Il medesimo ragionamento più in generale dimostra che, essendo ancora z ed u due funzioni affatto arbitrarie, la relazione:

$$u\,\Omega(z) - z\,G(xy) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

dove *ora* G *è una certa funzione di* x *e di* y (dipendente naturalmente da u) e P e Q sono ancora funzioni lineari omogenee in z e nelle sue derivate, porta di necessità:

$$G(xy) = \Phi(u).$$

Questa osservazione ci sarà utile in seguito.

Le due prime osservazioni sono evidenti: per dimostrare la terza, si osservi che ponendo:

$$z = \lambda\, z' \ ; \quad u = \mu\, u'$$

la (19*) stessa diventa:

$$\mu\, u'\, \Omega\,(\lambda\, z') - \lambda\, z'\, \Phi\,(\mu\, u') = \frac{\partial \overline{\mathrm{P}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\mathrm{Q}}}{\partial y}$$

e quindi le due espressioni:

$$\Omega'\,(z') = \mu\, \Omega\,(\lambda z') \ ; \quad \Phi'\,(u') = \lambda\, \Phi\,(\mu\, u') \tag{20}$$

sono aggiunte l'una dell'altra. [1])

Cerchiamo ora quando un'equazione e la sua aggiunta siano *equivalenti*, si possano cioè ridurre l'una all'altra con un cambiamento di funzione incognita e limitiamoci in questo al caso di $\Delta \neq 0$.

Le (4) del n. 2 danno allora come condizione necessaria e sufficiente:

$$\mathrm{H} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{a\left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} - 2\, e\right) - b\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - 2\, d\right)}{\Delta}\right\} + \tag{21}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{b\left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} - 2\, e\right) - c\left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} - 2\, d\right)}{\Delta}\right\} = 0\ ;$$

e quando questa condizione sia soddisfatta, il fattore λ di proporzionalità che riduce l'una equazione all'altra, si determina con una quadratura.

Dalla relazione che lega due equazioni, aggiunta l'una dell'altra, segue che l'espressione H è un invariante dell'equazione data: il calcolo diretto verifica subito questa proprietà e dimostra che H rimane invariato per la (3); per la (6) si moltiplica per il determinante $\dfrac{d\,(x\,y)}{d\,(\xi\,\eta)}$.

[1]) Cf. Darboux. — *Leçons sur la théorie des surfaces*, vol. II, pag. 71.

L'annullarsi dell'invariante H esprime dunque che l'equazione data è equivalente alla sua aggiunta e si può ridurre a questa mediante un cambiamento di funzione incognita. Esso si può considerare anche come un invariante simultaneo dell'equazione data e della aggiunta e scrivere quindi sotto la forma simmetrica:

$$(21^*)\quad \mathrm{H} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{a\,(e_1 - e) - b\,(d_1 - d)}{\Delta}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{b\,(e_1 - e) - c\,(d_1 - d)}{\Delta}\right\}.$$

5. Dimostriamo ora un teorema sulle equazioni ai differenziali totali, che è, si può dire, il fondamento di tutta la teoria da svolgere.

Siano n variabili indipendenti $x_1\, x_2 \ldots x_n$ e p loro funzioni $z_1\, z_2 \ldots\ldots z_p$, legate da un sistema (A) di relazioni finite e differenziali, il quale goda della proprietà seguente:

" *Considerando insieme colle relazioni* (A) *tutte quelle che si*
" *ottengono derivando tante volte quante si vuole, da un certo mo-*
" *mento in poi si ottengano tante nuove derivate a calcolare, quante*
" *nuove relazioni (indipendenti)* ".

Un sistema (A) di relazioni che goda di questa proprietà, si dirà per brevità un sistema *completo* [1]).

Vogliamo allora dimostrare che le funzioni più generali $z_1\, z_2 \ldots\ldots z_p$ che soddisfano al sistema (A), si ottengono da un sistema di equazioni ai differenziali totali, per il quale le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte in forza delle relazioni date.

Possiamo innanzi tutto supporre di avere già aggiunto al sistema (A) tutte quelle sue conseguenze differenziali che lo rendono un sistema completo: e dopo questo possiamo, introducendo nuove funzioni incognite, supporre ancora che il sistema (A) sia del 1.° ordine, non contenga cioè derivate delle funzioni incognite di ordine superiore al primo.

---

[1]) Un sistema completo gode evidentemente delle proprietà seguenti:

a) *Qualunque sistema algebricamente equivalente al dato è completo.*

b) *Qualunque sistema si ottenga dal dato, aggiungendovi delle conseguenze differenziali delle relazioni del sistema dato, è completo.*

Sono allora da distinguere due casi: o il sistema (A) stesso ci dà *tutte* le derivate delle funzioni incognite espresse per le funzioni stesse e per le variabili indipendenti, oppure questo non accade.

Nel primo caso noi potremo scrivere un sistema *formale* di equazioni ai differenziali totali, a cui le funzioni $z_1 z_2 \dots z_p$ devono soddisfare; ma è facile vedere di più che in tal caso le condizioni d'integrabilità del sistema di equazioni ai differenziali totali, se pure non sono identicamente soddisfatte, lo sono di certo in forza delle relazioni del sistema (A) dato. Queste condizioni d'integrabilità si ottengono infatti uguagliando due espressioni di una *medesima* derivata del 2.° ordine delle funzioni incognite, ottenuta da due diverse derivate del primo ordine; si ottengono quindi derivando due relazioni del sistema (A). Ove dunque due di queste relazioni differenziali fossero diverse, (tenendo naturalmente conto della (A)) noi avremmo che, derivando il sistema (A) ancora una volta, otterremmo un numero di relazioni *nuove* maggiore di quello delle derivate *nuove,* il che per ipotesi è escluso. Le equazioni ai differenziali totali nelle funzioni $z_1 z_2 \dots z_p$ sono dunque integrabili, tenendo conto delle relazioni (A), le quali sono tali di più che quelle tra esse che sono finite, danno, derivate, delle relazioni che sono evidentemente contenute in quelle espresse dalle equazioni ai differenziali totali.

Consideriamo invece il secondo caso, quando cioè le relazioni del sistema (A) non danno *tutte* le derivate prime delle funzioni $z_1 \dots z_p$.

In questo caso differenziamo queste relazioni fino ad ottenerne un altro gruppo (A') di relazioni, dalle quali si possano ottenere tutte queste derivate prime delle funzioni $z_1 \dots z_p$. Il gruppo (A') conterrà in generale anche alcune derivate di ordine superiore, ma ricordando che il sistema (A) è completo, potremo dalle (A') eliminare tutte le derivate di ordine superiore al primo (o per via algebrica, o abbandonando le relazioni che le danno) ed ottenere da (A') un sistema (A'') (completo come i precedenti) che ci dia tutte le derivate prime delle funzioni $z_1 z_2 \dots z_p$. Siamo allora ricondotti al primo caso e valgono quindi le medesime conclusioni.

Nell'uno e nell'altro caso siamo dunque condotti ad un sistema di equazioni ai differenziali totali nelle funzioni $z_1 z_2 \dots z_p$, per il quale le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte o identicamente oppure in forza di m relazioni della forma:

$$(22) \qquad \varphi_1 (z_1 z_2 \dots z_p \ ; \ x_1 x_2 \dots x_n) = 0 \qquad i = 1 \ ; \ 2 \dots m'$$

(le relazioni finite del sistema A), le quali danno di più differenziate, delle relazioni $d\varphi_i = 0$, conseguenze delle equazioni ai differenziali totali stesse. È facile allora vedere che le funzioni $z_1 z_2 \dots z_p$ contengono nella loro espressione più generale $p - m$ costanti arbitrarie.

Scriviamo infatti le equazioni ai differenziali totali nelle z sotto la forma:

$$(23) \qquad dz_i = \sum_k a_{ik}\, dx_k \ ; \quad (i = 1, 2 \dots p \ ; \ k = 1, 2 \dots n)$$

e risolvendo le relazioni $\varphi_i = 0$ rispetto ad m delle z, (il che deve esser possibile), ad es. rispetto alle prime m, scriviamole sotto la forma:

$$(22^*) \quad z_i - f_i (z_{m+1} z_{m+2} \dots z_p \ ; \ x_1 x_2 \dots x_n) = 0 \quad (i = 1, \dots m).$$

Sostituendo allora nelle ultime $p - m$ equazioni (23) i valori di $z_1 \dots z_m$ dati dalle relazioni antecedenti, esse diventano *illimitatamente* integrabili. Infatti le condizioni d'integrabilità ad esse relative devono essere soddisfatte in forza delle (22) o delle (22*) che sono ad esse equivalenti: e questo è impossibile, ove non lo siano identicamente, non contenendo queste condizioni d'integrabilità $z_1 z_2 \dots z_m$. Soddisfatte poi le ultime $p - m$ equazioni (23), è inutile tener conto delle prime m; prendendo infatti $z_1 z_2 \dots z_m$ come sono date dalle (22*), poichè le $d\varphi_i = 0$ sono conseguenze lineari delle (23), le prime m equazioni (23) saranno identicamente soddisfatte.

L'integrale più generale delle (22) e (23) contiene dunque $p-m$ costanti arbitrarie (che sono i valori di $z_{m+1}, z_{m+2} \dots z_p$ in un punto arbitrario del campo) delle quali si può disporre in guisa che in un punto arbitrario (x_i^0) del campo le $z_1 z_2 \dots z_p$ prendano i valori più generali che soddisfano alle (22).

Concludendo, abbiamo quindi il teorema:

Dato in p funzioni incognite $z_1 z_2 \dots z_p$ un sistema completo di relazioni, si soddisfa a questo sistema nel modo più generale con funzioni $z_1 z_2 \dots z_p$ che dipendono da un certo numero di costanti arbitrarie (magari nessuna), delle quali si può disporre in guisa che le funzioni $z_1 \dots z_p$ prendano in un punto del campo i valori più generali possibili, compatibili colle relazioni finite del sistema completo dato.

6. Ricordiamo infine alcune nozioni sul concetto d'integral generale.

Come è noto, dicesi integral generale di una equazione a derivate parziali del 2.° ordine con due variabili indipendenti una funzione z che soddisfi all'equazione e che dipenda da due funzioni arbitrarie, delle quali si possa disporre in guisa che l'integrale stesso z ed una delle sue derivate prime prendano dei valori arbitrarî lungo una curva C del piano $(x\,y)$ che non sia una caratteristica dell'equazione; o, come si dice in linguaggio geometrico, in guisa che la superficie integrale $z\,(x\,y)$ si possa far passare per una sviluppabile assegnata, affatto arbitraria. La ricerca di un tale integral generale costituisce il *problema di Cauchy* per l'equazione data.

Quando il primo membro di questa sia una funzione analitica (nel senso di Weierstrass) di tutti i suoi argomenti e quando le funzioni iniziali si suppongano pure analitiche, i teoremi generali di Cauchy, di Darboux, della Kowaleschy dimostrano l'esistenza dell'integral generale. Molto più recentemente gli studî del Picard sull'integrazione delle equazioni lineari del 2.° ordine, restando sempre nel campo delle funzioni reali di variabili reali, e l'estensioni a queste equazioni del suo metodo delle approssimazioni successive hanno condotto alla dimostrazione dell'esistenza dell'integrale di una equazione lineare a derivate parziali del 2.° ordine sotto condizioni molto meno restrittive che non quelle poste dai teoremi classici di esistenza.

E precisamente il Picard ha dimostrato che nel campo ove i coefficienti dell'equazione rimangono finiti e continui, valgono i due teoremi fondamentali:

a) Un integrale di un'equazione lineare del 2.° ordine del tipo ellittico è determinato dai valori che esso prende lungo un contorno chiuso. Questi valori si possono dare arbitrariamente, colla sola condizione della continuità e l'integrale corrispondente è unico, quando il contorno sia sufficientemente piccolo.

b) Un integrale di un'equazione lineare del 2.° ordine del tipo iperbolico è determinato dai valori che esso ed una delle sue derivate prime prendono lungo una curva C, che (almeno nel campo considerato) sia incontrata in un sol punto da ogni linea caratteristica dell'equazione, ed anche dai valori che l'integrale stesso prende lungo due caratteristiche di sistema diverso. Questi valori si possono dare arbitrariamente colla sola condizione della continuità e derivabilità: e l'integrale corrispondente è unico.

Per le equazioni del tipo parabolico non è stato ancora dimostrato alcun teorema analogo: queste equazioni, finora sotto questo punto di vista le meno studiate, presentano dei caratteri singolarissimi, che le distinguono in modo essenziale dalle equazioni degli altri due tipi e che fanno prevedere come la loro trattazione, si dovrà fare per via affatto diversa: per esse dovremo dunque limitarci ai teoremi classici di Cauchy.

§. II.

LE TRASFORMAZIONI DIFFERENZIALI

7. Ci proponiamo in questo capitolo il problema seguente:

" *Essendo z l'integral generale (che supponiamo noto) della*
" *equazione:*

$$\Omega(z) = ar + 2\,bs + ct + 2\,dp + 2\,eq + fz = 0 \tag{1}$$

" *determinare tutte le espressioni θ della forma:*

$$\theta = \sum\nolimits_{ik} \alpha_{ik}\, z_{ik} \quad \left(0 \leq i + k \leq m \quad , \quad z_{ik} = \frac{\partial z^{i+k}}{\partial x^i\, \partial y^k}\right) \tag{2}$$

" *che per ogni forma dell' integrale z soddisfano ad un' equazione*
" *analoga alla* (1). "

Quando questo accada, diremo che θ è una *trasformata differenziale della z di ordine m,* se θ contiene qualche derivata di z dell' ordine m in modo *essenziale,* in guisa cioè che non possa venire eliminata per mezzo della (1) e di quelle che se ne ottengono derivando; e l'equazione in θ si dirà una *trasformata differenziale dell' ordine m* dell' equazione in z.

8. Cominciando dalle trasformazioni differenziali del 1.° ordine, scriveremo θ sotto la forma:

$$\theta = \alpha\, z + \beta\, p + \gamma\, q \tag{3}$$

e supporremo che effettivamente θ soddisfi, per ogni valore di z, integrale della (1), ad un'equazione:

$$(4)\quad P(\theta) = A\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2\,B\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2\,D\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\,E\frac{\partial\theta}{\partial y} + F\theta = 0.$$

Consideriamo allora insieme la (1) e la (3) ed aggiungiamovi le equazioni che si ottengono derivando θ rispetto ad x e ad y:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,z + \left(\alpha + \dfrac{\partial\beta}{\partial x}\right)p + \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}\,q + \beta\,r + \gamma\,s \\[2ex] \dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,z + \dfrac{\partial\beta}{\partial y}\,p + \left(\alpha + \dfrac{\partial\gamma}{\partial y}\right)q + \beta\,s + \gamma\,t. \end{cases}$$

Se nelle (1), (3), (5) riguardiamo θ come nota, la z come incognita da determinare, e se il determinante:

$$(6)\qquad D = \begin{vmatrix} a & 2\,b & c \\ \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & \beta \end{vmatrix} = a\,\gamma^2 - 2\,b\,\beta\,\gamma + c\,\beta^2$$

è diverso da zero, in guisa che la (1) e le (5) possano risolversi rispetto ad r, s, t; il sistema delle (1), (3), (5) è un sistema *completo,* nel senso già definito al n. 5.

Per dimostrare la nostra asserzione, osserviamo innanzi tutto che, poichè θ soddisfa per ipotesi ad un'equazione del 2° ordine, di tutte le sue derivate di un ordine qualunque m, due sole saranno indipendenti, inquantochè in forza dell'equazione in θ e di quelle che se ne ottengono derivando, tutte quante le derivate di θ dell'ordine m si potranno esprimere linearmente ed omogeneamente per due tra di esse e per le derivate di ordine inferiore (potendo anche, come nel caso dell'equazione:

$$s + ap + bq + cz = 0$$

alcune derivate, le miste, esprimersi soltanto per quelle di ordine inferiore). E naturalmente un'osservazione affatto analoga vale per z.

Posto ciò, si osservi che derivando nuovamente le (5) rispetto ad x ed y, si ottengono, tenendo conto della (4), soltanto *due* nuove relazioni, le quali contengono le *due* derivate terze di z, che si possono riguardare indipendenti: ed ancora seguitando a derivare, si otterranno sempre ciascuna volta due nuove relazioni e due nuove derivate della funzione z a calcolare. Ed ognuna di queste nuove relazioni sarà indipendente dall'altra del medesimo ordine e dalle precedenti, in quantochè per l'ipotesi fatta che il determinante D sia diverso da zero, noi possiamo sostituire alle (1) e (5) quelle relazioni che esprimono r, s, t in funzione delle derivate di ordine inferiore ed è chiaro allora che, derivando nuovamente, si ottengono ogni volta due relazioni indipendenti.

Ne segue che, se scriviamo le formule che danno r, s, t sotto la forma:

$$\tag{7} \begin{cases} r = \lambda z + \mu p + \nu q + \rho \dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \sigma \dfrac{\partial\theta}{\partial y} , \\ s = \lambda' z + \mu' p + \nu' q + \rho' \dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \sigma' \dfrac{\partial\theta}{\partial y} , \\ t = \lambda'' z + \mu'' p + \nu'' q + \rho'' \dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \sigma'' \dfrac{\partial\theta}{\partial y} , \end{cases}$$

dove $\lambda, \lambda' \ldots . \sigma''$ sono funzioni *note* di x ed y, il sistema di equazioni ai differenziali totali nelle tre funzioni incognite z, p, q:

$$\tag{8} \begin{cases} dz = p\, dx + q\, dy \\ dp = r\, dx + s\, dy \qquad (\theta = \alpha z + \beta p + \gamma q) \\ dq = s\, dx + t\, dy , \end{cases}$$

dove per r, s, t intendiamo poste le loro espressioni date dalle (7), sarà senz'altro *integrabile:* e la funzione z più generale che vi soddisfa, dipenderà da due costanti arbitrarie a_1 ed a_2, dalle quali si potrà disporre in guisa che la z, p, q prendano in un punto del campo i valori più generali che soddisfano alla (3): cioè, a causa della forma lineare del sistema (8), z avrà la forma:

$$z = Z + a_1 z_1 + a_2 z_2, \tag{9}$$

dove Z, z_1, z_2 sono soluzioni particolari della (1), e analogamente sarà:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = P + a_1 p_1 + a_2 p_2 \\ q = Q + a_1 q_1 + a_2 q_2 . \end{array} \right. \tag{9*}$$

Sostituendo allora nell' espressione (3) di θ i valori (9) di z, p, q, i coefficienti di a_1 ed a_2 debbono annullarsi; cioè θ deve annullarsi identicamente per $z = z_1$, $z = z_2$.

Queste condizioni determinano di più completamente la funzione θ (a meno di un fattore di proporzionalità, che nella nostra ricerca è inessenziale): non può accadere infatti che la matrice:

$$\left\| \begin{array}{ccc} z_1 & p_1 & q_1 \\ z_2 & p_2 & q_2 \end{array} \right\|$$

sia identicamente nulla, poichè dalle relazioni:

$$z_1 = \lambda z_2 \; ; \quad p_1 = \lambda p_2 \; ; \quad q_1 = \lambda q_2$$

seguirebbe $\lambda = \text{cost.}$ e quindi nelle (9), (9*) resterebbe una sola costante arbitraria.

Abbiamo dunque il teorema:

Quando il determinante D *sia diverso da zero, condizione necessaria perchè* θ *soddisfi ad un' equazione lineare del 2.º ordine è che si annulli per due soluzioni particolari dell' equazione in* z *e sia determinata da queste condizioni* [1]).

Questa condizione è inversamente anche sufficiente. Supponendo

---

[1]) Cf. DARBOUX. — *Leçons,* vol. II, pag. 172.

infatti che θ si annulli per due soluzioni particolari della (1) e ne sia determinata, l'espressione:

$$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2\, b \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} =$$

$$= a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2\, b \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial \theta^2}{\partial y^2} - \beta \frac{\partial \Omega\,(z)}{\partial x} - \gamma \frac{\partial \Omega\,(z)}{\partial y}$$

è lineare omogenea in $z, p, q;\ r, s, t$ e quindi per la (7) in $z, p, q, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$: si avrà cioè una relazione della forma:

$$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2\, b \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2\,\mathrm{D} \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\,\mathrm{E} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \lambda z + \mu p + \nu q;$$

e poichè θ, e quindi anche tutte le sue derivate, si annullano per $z = z_1$, $z = z_2$, anche il secondo membro di questa relazione si annullerà per $z = z_1$, $z = z_2$: sarà dunque proporzionale a θ e si avrà:

$$(4^*) \qquad a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2\, b \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial \theta^2}{\partial y^2} + 2\,\mathrm{D} \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\,\mathrm{E} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mathrm{F}\theta = 0$$

il che dimostra che θ soddisfa ad un'equazione della forma voluta [1]). Si osservi di più esplicitamente l'uguaglianza (che si sarebbe potuta dimostrare anche direttamente) dei coefficienti delle derivate seconde nelle due equazioni in z e in θ.

Abbiamo dunque il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un' espressione θ della forma:

$$\theta = \alpha z + \beta p + \gamma q$$

---

[1]) È chiaro poi che θ non può soddisfare ad altre equazioni del 2° ordine distinte dalla (4*), dipendendo essa θ, come z, da due funzioni arbitrarie.

(Cf. Bianchi. — *Sulle soluzioni comuni a due equazioni a derivate parziali del 2.° ordine ecc.* Accademia dei Lincei 1886, pag. 218, 237, 307).

soddisfi ad un' equazione lineare omogenea del 2.° ordine, quando il determinante:

$$D = a\gamma^2 - 2b\beta\gamma + c\beta^2$$

si supponga diverso da zero, è che θ *si annulli per due soluzioni particolari della equazione in* z *e sia determinata da queste condizioni.*

9. Consideriamo ora il caso eccezionale, che il determinante D si annulli. Questo può accadere soltanto per le equazioni dei tipi iperbolico e parabolico e noi li discuteremo separatamente, riducendo l' equazione alla rispettiva forma normale.

Cominciando dal caso iperbolico, scriveremo l' equazione sotto la forma:

$$s + ap + bq + cz = 0 . \tag{10}$$

Il determinante D si riduce in questo caso a $-\beta\gamma$ e può quindi annullarsi solo per $\beta = 0$ o $\gamma = 0$. L' un caso deducendosi dall'altro collo scambio di x con y, basterà discuterne uno solo, quello ad es. in cui $\gamma = 0$.

Dobbiamo dunque ricercare quando un' espressione:

$$\theta = \alpha z + \beta p \tag{11}$$

soddisfi per ogni valore di z, integrale della (10), ad un' equazione lineare del 2.° ordine.

Supponendo che questo accada, associamo alla (10) quella che si ottiene derivando la (11) rispetto ad y:

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - c\right) z + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y} - \beta a\right) p + (\alpha - b\beta)\, q; \tag{12}$$

ed allora se è $\alpha - b\beta \neq 0$, cioè se la (10) e la (12) permettono di esprimere s e q in funzione z e di p, un ragionamento affatto analogo a quello del caso generale dimostra che il sistema delle (10), (11), (12) è completo.

Infatti la derivata di θ rispetto ad x:

$$(13) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} z + \left(\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) p + \beta r$$

porta la nuova derivata r, ed ogni altra derivazione porterebbe *due* nuove relazioni e *due* nuove derivate. Supponendo dunque:

$$\alpha - b\beta \neq 0,$$

allora, poichè β è certamente non nullo, potremo dalle (10), (12), (13) ricavare r, s, q in funzione lineare omogenea di z, p e di $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$:

$$(14) \qquad \begin{cases} r = \lambda z + \mu p + \rho \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \\ q = \lambda' z + \mu' p + \sigma' \dfrac{\partial \theta}{\partial y}, \\ s = \lambda'' z + \mu'' p + \sigma'' \dfrac{\partial \theta}{\partial y}, \end{cases}$$

e quindi il sistema di equazioni ai differenziali totali in z e p:

$$(15) \qquad \begin{cases} dz = p\,dx + q\,dy \\ dp = r\,dx + s\,dy \end{cases} \qquad \theta = \alpha z + \beta p$$

dove per q, r, s si intendono posti i valori dati dalle (14), è ancora integrabile: donde, come nel caso generale, deduciamo che θ deve annullarsi per una soluzione particolare z_1 dell'equazione (10).

Questa condizione, oltrechè necessaria, è anche sufficiente. Supponendola infatti soddisfatta, la derivata seconda $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y}$ può porsi sotto la forma:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \lambda z + \mu p + \nu q + \tau r$$

e quindi per le (14) l'espressione:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - \tau \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} - \nu \sigma' \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

è lineare omogenea in z e p e si annulla come θ per $z = z_1$. Essa è dunque proporzionale a θ: cioè questa soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} - \tau\rho\,\frac{\partial\theta}{\partial x} - \nu\sigma'\,\frac{\partial\theta}{\partial y} + \pi\,\theta = 0\,, \tag{16}$$

il che dimostra quello che si era affermato.

Rimane ora a considerare il caso che sia $\alpha - b\,\beta = 0$, ossia:

$$\theta = \beta\,(p + b\,z)\,. \tag{11*}$$

Ma in tal caso la teoria elementare delle equazioni del 2.° ordine ci dice che θ soddisfa ad un'equazione della medesima forma della (10) e che si ottiene da questa mediante una trasformazione di Laplace. Questo caso non richiede dunque ulteriore discussione e possiamo enunciare il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un' espressione θ *della forma:*

$$\theta = \alpha\,z + \beta\,p \quad (\text{oppure } \theta = \alpha\,z + \gamma\,q)$$

soddisfi per ogni valore di z, integrale della (10) *ad un' equazione analoga, è che* θ *sia una delle trasformate di Laplace dell' equazione in z oppure si annulli per una soluzione particolare dell' equazione stessa.*

La seconda parte di questo teorema è dovuta al sig. Lucien Lewy [1]).

10. Consideriamo ora il caso parabolico. Scriveremo l'equazione sotto la forma:

$$r + 2\,ap + 2\,bq + cz = 0\,. \tag{17}$$

Il determinante D riduce a γ^2 e si annulla quindi solo per $\gamma = 0$. Dobbiamo dunque anche in questo caso ricercare quando

---

[1]) Cf. Darboux. – *Leçons*, Ib., pag. 177.

L. Lewy. — *Sur quelques équations linéaires aux dérivées partielles.* (Journal de l'Ecole Polytecnique — LVI Cah., pag. 63, 1886).

un' espressione θ, data dalla (11), soddisfi ad un' equazione lineare del 2.° ordine. Associamo in questa ipotesi alla (17) la equazione che si ottiene derivando θ rispetto ad x:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\beta c\right)z+\left(\alpha+\frac{\partial\beta}{\partial x}-2\beta a\right)p-2b\beta q, \tag{18}$$

allora un ragionamento affatto simile al caso precedente, dimostra che il sistema delle (11), (17), (18) è completo. Derivando quindi θ rispetto ad y:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial\alpha}{\partial y}z+\frac{\partial\beta}{\partial y}p+\alpha q+\beta s, \tag{19}$$

potremo ottenere q, r, s espresse lineamente ed omogeneamente per $z, p, \frac{\partial\theta}{\partial x}, \frac{\partial\theta}{\partial y}$, traendole dalle (17), (18), (19) (si noti infatti che b e β sono certamente diversi da zero) colle formule:

$$\left\{\begin{aligned} q&=\lambda z+\mu p+\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}, \\ r&=\lambda' z+\mu' p+\rho'\frac{\partial\theta}{\partial x}, \\ s&=\lambda'' z+\mu'' p+\rho''\frac{\partial\theta}{\partial x}+\sigma''\frac{\partial\theta}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

ed il sistema (15), dove ora per q, r, s si intendano poste le loro espressioni date dalle (20), sarà ancora illimitatamente integrabile e quindi θ si annullerà identicamente per una soluzione z_1 della equazione (17).

Inversamente, se questo accade, derivando la (18) rispetto ad x, si avrà:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=\lambda z+\mu p+\nu q-2b\beta s$$

e quindi l'espressione differenziale:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}-\nu\rho\frac{\partial\theta}{\partial x}+2b\beta\left(\rho''\frac{\partial\theta}{\partial x}+\sigma''\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)$$

è lineare omogenea in z e p e si annulla per $z = z_1$: è dunque proporzionale a θ e si avrà:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \nu \rho \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2 b \beta \left(\rho'' \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sigma'' \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \mu \theta = 0 . \tag{21}$$

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un'espressione θ *della forma:*

$$\theta = \alpha z + \beta p$$

soddisfi per ogni valore di z, *integrale della* (17), *ad un'equazione analoga, è che* θ *si annulli per una soluzione particolare dell'equazione stessa* [1]).

11. Della seconda parte dei teoremi superiori possiamo dare un'altra dimostrazione, la cui idea fondamentale è dovuta al Liouville [2]).

Trattando dapprima il caso generale, supponiamo che θ si annulli identicamente per due integrali particolari z_1 e z_2 dell'equazione in z, lineamente indipendenti. Indichiamo allora con z_3 un'altra soluzione dell'equazione data, tale che il determinante:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = (z_1 p_2 q_3) \tag{22}$$

---

1) Si osservi esplicitamente l'uguaglianza che si ha in tutti i casi tra i coefficienti dei termini del 2.° ordine dell'equazione data e della trasformata.

2) Cf. Roger Liouville. — *Sur les formes intégrables des équations linéaires du second ordre.* (Journal de l'Ecole Polytecnique LVI Cah., 1886, pag. 32 e ss)

sia diverso da zero [1]; ed indicando con z una funzione *arbitraria* di x e di y, con p e q le sue derivate prime, determiniamo le funzioni v_1, v_2, θ dalle tre equazioni lineari:

$$\left\{ \begin{aligned} z &= z_1 v_1 + z_2 v_2 + z_3 \theta \\ p &= p_1 v_1 + p_2 v_2 + p_3 \theta \\ q &= q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 \theta . \end{aligned} \right. \tag{23}$$

Da questo deduciamo, con notazioni analoghe alla (22):

$$\theta = \frac{(z\, p_1\, q_2)}{(z_3\, p_1\, q_2)} \tag{24}$$

cioè θ è una funzione lineare omogenea in z, p, q, che si annulla per $z = z_1$, $z = z_2$ (e diventa uguale ad 1 per $z = z_3$).

Vogliamo ora dimostrare che quando nella (24) si sostituisca per z l'integral generale della (1), θ soddisferà ad un'equazione lineare del 2.° ordine.

---

[1]) L'introduzione di questa terza soluzione z_3, estranea alla questione, (che del resto si potrebbe anche evitare modificando solo leggermente la dimostrazione) è molto utile e perchè introduce nei calcoli una grande simmetria e perchè evita alcune discussioni particolari. È sempre possibile poi prendere la z_3 in modo che il determinante $(z_1\, p_2\, q_3)$ risulti diverso da zero: ove infatti questo non fosse possibile, la z soddisferebbe insieme ad una equazione del 1.° ordine ed ad una del 2°, il che è assurdo.

È facile poi vedere come cambia la funzione θ, quando in luogo della soluzione particolare z_3 se ne prenda un'altra z_4. Infatti dalle formule:

$$\theta = \frac{(z\, p_1\, q_2)}{(z_3\, p_1\, q_2)} \quad ; \quad \theta' = \frac{(z\, p_1\, q_2)}{(z_4\, p_1\, q_2)}$$

deduciamo:

$$\theta' = \theta \cdot \frac{(z_3\, p_1\, q_2)}{(z_4\, p_1\, q_2)} \tag{α}$$

cioè le due funzioni θ e θ' sono proporzionali ed il coefficiente di proporzionalità è dato dalla formula (α).

Deriviamo infatti la prima delle (23) rispetto ad x ed a y; avremo le due relazioni:

$$(25_a)\qquad z_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+z_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+z_3\frac{\partial \theta}{\partial x}=0\ ;\quad z_1\frac{\partial v_1}{\partial y}+z_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+z_3\frac{\partial \theta}{\partial y}=0$$

alle quali possono aggiungersi le altre due:

$$(25_b)\left\{\begin{aligned}&p_1\frac{\partial v_1}{\partial y}+p_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+p_3\frac{\partial \theta}{\partial y}=q_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+q_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+q_3\frac{\partial \theta}{\partial x}\ ;\\ &a\left(p_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+p_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+p_3\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\\ &+b\left(p_1\frac{\partial v_1}{\partial y}+p_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+p_3\frac{\partial \theta}{\partial y}+q_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+q_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+q_3\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)+\\ &+c\left(q_1\frac{\partial v_1}{\partial y}+q_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+q_3\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)=\Omega(z)\ ;\end{aligned}\right.$$

le quali si ottengono, la prima derivando la prima delle (25_a) rispetto ad y, la seconda rispetto ad x e sottraendo; l'altra, calcolando dalle (23) r, s, t e sostituendo in $\Omega(z)$.

Le (25_a), (25_b) possono riguardarsi come 4 equazioni lineari nelle 4 funzioni incognite $\frac{\partial v_1}{\partial x}, \frac{\partial v_1}{\partial y}; \frac{\partial v_2}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial y}$; nè può il determinante dei loro coefficienti esser nullo, altrimenti θ soddisferebbe per ogni forma di z integrale della (1), ad un'equazione lineare del 1.° ordine, il che è assurdo, dipendendo θ, come z, da due funzioni arbitrarie. Esse si possono dunque risolvere rispetto alle quattro derivate superiori e precisamente si ha:

$$(26)\left\{\begin{aligned}\frac{\partial v_1}{\partial x}&=\frac{1}{\Delta_{z_1 z_2}}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big[(p_1z_2)\,\{a(p_2z_3)+b(q_2z_3)\}+(q_2z_3)\,\{b(p_1z_2)+c(q_1z_2)\}\Big]+\right.\\ &\qquad\left.+c\,z_2\,(z_1p_2q_3)\frac{\partial\theta}{\partial y}+z_2\,(p_1z_2)\,\Omega(z)\right\}\\ \frac{\partial v_1}{\partial y}&=\frac{1}{\Delta_{z_1 z_2}}\left\{-a\,z_2\,(z_1p_2q_3)\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\Big[(p_2z_3)\,\{a(p_1z_2)+b(q_1z_2)\}+\right.\\ &\qquad\left.+(q_1z_2)\,\{b(p_2z_3)+c(q_2z_3)\}\Big]+z_2\,(q_1z_2)\,\Omega(z)\right\}\end{aligned}\right.$$

$$
(27)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_2}{\partial x} = \dfrac{1}{\Delta_{z_1 z_2}} \left\{ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} \Big[(p_2 z_1) \{a(p_1 z_3) + b(q_1 z_3)\} + (q_1 z_3) \{b(p_2 z_1) + c(q_2 z_1)\} \Big] - \right. \\
\qquad \left. - c z_1 (z_1 p_2 q_3) \dfrac{\partial \theta}{\partial y} + z_1 (p_2 z_1)\, \Omega(z) \right\} \\
\dfrac{\partial v_2}{\partial y} = \dfrac{1}{\Delta_{z_1 z_2}} \left\{ a z_1 (z_1 p_2 q_3) \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \Big[(p_1 z_3) \{a(p_2 z_1) + b(q_2 z_1)\} + \right. \\
\qquad \left. + (q_2 z_1) \{b(p_1 z_3) + c(q_1 z_3)\} \Big] + z_1 (q_2 z_1)\, \Omega(z) \right\}
\end{cases}
$$

dove in generale si è posto:

$$(a_i b_k) = a_i b_k - a_k b_i$$

e

$$(28)\qquad \Delta_{z_1 z_2} = a(p_1 z_2)^2 + 2b(p_1 z_2)(q_1 z_2) + c(q_1 z_2)^2 .$$

Le equazioni superiori possono anche scriversi abbreviatamente:

$$
(26^*)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = \mu_1 \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \mu_2 \dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \mu\, \Omega(z) , \\[2ex]
\dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \mu'_1 \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \mu'_2 \dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \mu'\, \Omega(z) ;
\end{cases}
$$

$$
(27^*)\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_2}{\partial x} = \nu_1 \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \nu_2 \dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \nu\, \Omega(z) , \\[2ex]
\dfrac{\partial v_2}{\partial y} = \nu'_1 \dfrac{\partial \theta}{\partial x} + \nu'_2 \dfrac{\partial \theta}{\partial y} + \nu'\, \Omega(z) .
\end{cases}
$$

Se quindi z soddisfa alla (1), la (26*) dà immediatamente:

$$(29)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu'_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu'_2 \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = 0 ;$$

cioè θ soddisfa ad un'equazione omogenea del 2.° ordine, nella quale i coefficienti delle derivate seconde sono, come subito si verifica, proporzionali ad a, $2b$, c

Dal modo con cui è stata ottenuta l'equazione in θ, parrebbe che, scrivendo la condizione d'integrabilità per le (27*), si avesse in θ un'altra equazione del 2.° ordine. Ma è facile vedere che questa nuova equazione è identica alla (29): infatti, ove essa fosse distinta, θ soddisferebbe insieme a due equazioni del 2.° ordine, il che è assurdo.

Dalla forma dell'equazione in z segue inoltre che le due funzioni:

$$\vartheta_1 = \frac{\mu'_1}{a} = z_2 \frac{(z_1 p_2 q_3)}{\Delta_{z_1 z_2}} \quad ; \quad \vartheta_2 = \frac{\nu'_2}{a} = -z_1 \frac{(z_1 p_2 q_3)}{\Delta_{z_1 z_2}} \tag{30}$$

sono due soluzioni particolari dell'equazione aggiunta a quella a cui θ soddisfa.

12. Discutiamo ora i due casi eccezionali.

Cominciando dal caso iperbolico, sia z_1 la soluzione particolare della (10), per cui θ si annulla e sia z_2 un'altra soluzione della (10), tale che non annulli il determinante:

$$(z_1 p_2) = z_1 p_2 - z_2 p_1 \, .$$

Indicando allora di nuovo con z una funzione qualunque di x ed y, poniamo:

$$\left\{ \begin{aligned} z &= z_1 v_1 + z_2 \theta \, , \\ p &= p_1 v_1 + p_2 \theta \, , \end{aligned} \right. \tag{31}$$

donde:

$$\theta = \frac{(z\, p_1)}{(z_2 p_1)} \, . \tag{32}$$

Differenziando queste equazioni si ottengono le altre:

$$\left\{ \begin{aligned} z_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + z_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \\ (p_1 + b\, z_1) \frac{\partial v_1}{\partial y} + (p_2 + b\, z_2) \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \Omega\,(z) \; ; \end{aligned} \right.$$

se quindi non è $p_1 + b\, z_1 = 0$, cioè se θ non è una trasformata di

Laplace dell'equazione in z (la quale avrebbe di più nullo l'invariante k di Darboux), si avrà:

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{z_2}{z_1}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{p_2 + b z_2}{p_1 + b z_1}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{1}{p_1 + b z_1}\,\Omega(z); \end{aligned} \right.$$

e quindi, se z soddisfa alla $\Omega(z) = 0$, si ha l'equazione in θ:

$$(34) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{p_2 + b z_2}{p_1 + b z_1}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z_2}{z_1}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = 0$$

che è del tipo iperbolico e ridotta alla forma normale ammette come soluzione dell'equazione aggiunta la funzione:

$$(35) \qquad \vartheta = \frac{(p_1 z_2)}{z_1(p_1 + b z_1)}\,.$$

Nel caso parabolico poi ancora le (31) derivate danno le relazioni:

$$(36) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{z_2}{z_1}\frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{1}{2 b z_1^2}\left\{(p_1 z_2)\frac{\partial \theta}{\partial x} - 2 b z_1 z_2 \frac{\partial \theta}{\partial y} + z_1\,\Omega(z)\right\}; \end{aligned} \right.$$

donde, per $\Omega(z) = 0$, segue l'equazione in θ:

$$(37) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2 b z_1^2}\left((p_1 z_2)\frac{\partial \theta}{\partial x} - 2 b z_1 z_2 \frac{\partial \theta}{\partial y}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{z_2}{z_1}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right\} = 0$$

che è del tipo parabolico e scritta sotto la forma normale, ha come soluzione dell'equazione aggiunta la funzione:

$$(38) \qquad \vartheta = \frac{(p_1 z_2)}{2 b z_1^2}\,.$$

I teoremi superiori sono così nuovamente dimostrati [1]).

13. Passiamo ora alle trasformazioni di ordine superiore.

Sia:

$$\theta = \sum \alpha_{ik}\, z_{ik} \quad ; \quad 0 \leq i+k \leq m \tag{39}$$

una trasformata differenziale della z di ordine m e per ogni valore di z, integrale della (1), soddisfi ad un'equazione come la (4).

Vogliamo ricercare le condizioni necessarie e sufficiente perchè ciò accada. Procederemo perciò con un metodo affatto analogo a quello tenuto per le trasformazioni del 1.° ordine.

Supponendo che effettivamente θ soddisfi ad un'equazione lineare del 2.° ordine, deriviamola rispetto ad x e ad y:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial x} &= \sum \alpha_{ik}\, z_{i+1,\,k} + \sum \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial x}\, z_{ik}\,, \\ \frac{\partial\theta}{\partial y} &= \sum \alpha_{ik}\, z_{i,\,k+1} + \sum \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial y}\, z_{ik}\,, \end{aligned}\right. \tag{40}$$

ed associamo a queste equazioni quelle che si ottengono derivando la $\Omega(z) = 0$ fino all'ordine $m-1$. Le equazioni derivate dell'ordine $m-1$ si scriveranno allora:

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu}\,\Omega(z)}{\partial x^\lambda\, \partial y^\mu} = a\, z_{\lambda+2,\,\mu} + 2b\, z_{\lambda+1,\,\mu+1} + c\, z_{\lambda,\,\mu+2} + \ldots\ldots = 0 \tag{41}$$

---

[1]) Del resto nei due casi eccezionali è quasi evidente che anche θ soddisfa ad un'equazione del 2.° ordine. In questo caso si può infatti prendere:

$$\theta = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{z_1}\right)$$

e facendo $z_1 = 1$ (cambiando proporzionalmente la funzione incognita nell'equazione data) $\theta = p$: e dobbiamo allora dimostrare che se z soddisfa all'una o all'altra delle due equazioni:

$$s + ap + bq = 0 \quad ; \quad r + 2\,ap + 2\,bq = 0$$

anche la derivata prima p soddisfa ad un'equazione analoga, il che subito risulta derivando le due equazioni rispetto ad x.

dove $\lambda+\mu=m-1$ e dove i termini non scritti contengono tutte derivate di z di ordine inferiore ad $m+1$.

Quando le relazioni (40) e (41) possano risolversi rispetto alle derivate di z dell'ordine $m+1$, cioè quando il determinante:

$$(42)\quad D=\begin{vmatrix} \alpha_{m0} & \alpha_{m-1,1} & \alpha_{m-2,2} & \alpha_{m-3,3} & \dots\dots & \alpha_{1,m-1} & \alpha_{0,m} & 0 \\ 0 & \alpha_{m0} & \alpha_{m-1,1} & \alpha_{m-2,2} & \dots\dots & \alpha_{2,m-2} & \alpha_{1,m-1} & \alpha_{0m} \\ a & 2b & c & 0 & \dots\dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 2b & c & \dots\dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots\dots & a & 2b & c \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero, il sistema formato dalle (39) e (40), dalla $\Omega(z)=0$ e dalle equazioni che si ottengono derivando fino all'ordine $m-1$ è un sistema completo. Basta per questo ripetere un ragionamento affatto analogo a quello tenuto per le trasformazioni del 1.° ordine.

Scritte allora le formule che danno le derivate della z di ordine $m+1$ sotto la forma:

$$(43)\qquad z_{i,\,m+1-i}=\sum\lambda^{(i)}_{rs}\,z_{rs}+\lambda^{(i)}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\mu^{(i)}\frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$0\leq r+s\leq m\quad;\quad (i=0,\,1,\,2\,\dots.\,m+1)$$

potremo costruire nelle $\frac{(m+1)\,(m+2)}{2}$ funzioni incognite $z_{00}=z$, $z_{10}=p$, $z_{01}=q,\dots z_{m0},\,\dots..\,z_{0m}$ il sistema di equazioni ai differenziali totali:

$$(44)\quad \begin{cases} dz_{ik}=z_{i+1,\,k}\,dx+z_{i,\,k+1}\,dy & (i+k\leq m) \\ \theta=\sum\alpha_{ik}\,z_{ik}\quad;\quad \dfrac{\partial^{\lambda+\mu}\,\Omega(z)}{\partial x^{\lambda}\,\partial y^{\mu}}=0 & 0\leq\lambda+\mu\leq m-2 \end{cases}$$

e nelle ipotesi fatte, questo sistema sarà illimitatamente integrabile e quindi il suo integral generale conterrà (lineamente):

$$\nu = \frac{(m+1)\,(m+2)}{2} - \frac{m\,(m+1)}{2} - 1 = 2\,m$$

costanti arbitrarie $a_1, a_2 \ldots . a_{2m}$, delle quali si può disporre in guisa da dare alla z e alle sue derivate fino all'ordine m i valori più generali che soddisfano alle relazioni finite tra le (44). In particolare z avrà la forma:

$$z = Z + a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + \ldots . + . a_{2m} z_{2m} \tag{45}$$

dove le z_i sono tante soluzioni (linearmente indipendenti) della equazione in z e di qui, come per le trasformazioni del 1.° ordine, segue che θ deve annullarsi identicamente per $z = z_i$ $(i = 1, 2 \ldots . 2m)$ ed è di più determinata da questa condizione a meno di un fattore di proporzionalità.

Questa condizione, oltrechè necessaria, è anche sufficiente. Infatti, quando essa sia soddisfatta, si può formare un aggregato delle derivate prime e seconde di θ:

$$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2\,b \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} + c\, \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2\,\mathrm{D} \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\,\mathrm{E} \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

che sia una funzione lineare omogenea di z e delle sue derivate fino all' ordine m incluso e che, annullandosi, come θ, per tutte le soluzioni particolari $z = z_i$, le sarà proporzionale: cioè θ soddisfa ad una equazione della forma:

$$a \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2\,b \frac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y} + c\, \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2\,\mathrm{D} \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\,\mathrm{E} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mathrm{F}\,\theta = 0 .$$

Si noti inoltre qui esplicitamente l' uguaglianza dei coefficienti delle derivate seconde nell' equazione in z e in quella in θ.

Abbiamo dunque il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione θ, *lineare omogenea in* z *e nelle sue derivate fino all' ordine* m, *soddisfi ad* *una equazione lineare del 2.° ordine è, quando il determinante* D *sia diverso da zero, che* θ *si annulli per* $2m$ *soluzioni particolari dell' equazione data e sia determinata (a meno di un coefficiente di proporzionalità) da questa condizione. L'equazione in* θ *è in questo caso della medesima classe di quella in* z *e si riduce alla forma normale collo stesso cambiamento di variabili.*

14. Consideriamo ora il caso che il determinante D sia uguale allo zero.

È chiaro, per il significato che ha l'annullarsi di D, che questa condizione è indipendente dalle particolari variabili indipendenti: potremo dunque supporre ridotta l'equazione ad una delle sue tre forme normali.

a) **Caso ellittico.**

L'equazione in z ha la forma:

$$r + t + 2\,ap + 2\,bq + cz = 0 \tag{46}$$

il determinante D ha il valore:

$$D = (\alpha_{m\,0} - \alpha_{m-2,\,2} + \alpha_{m-4,\,4} - \ldots.)^2 + (\alpha_{m-1,\,1} - \alpha_{m-3,\,3} + \alpha_{m-5,\,5} - \ldots..)^2;$$

può quindi annullarsi soltanto ove sia:

$$\alpha_{m\,0} - \alpha_{m-2,\,2} + \alpha_{m-4,\,4} - \ldots\ldots = 0$$

$$\alpha_{m-1,\,1} - \alpha_{m-3,\,3} + \alpha_{m-5,\,5} - \ldots\ldots = 0.$$

Ma in questo caso l'espressione di θ contiene le derivate m.^sime^ di z solo apparentemente, in quanto esse si possono eliminare per mezzo delle equazioni che si hanno derivando la (46) $m-2$ volte. Se dunque θ contiene in modo essenziale le derivate di z dell'ordine m, questo caso non può presentarsi; il determinante D è diverso da zero.

b) **Caso iperbolico.**

L'equazione in z ha la forma (10); il determinante D il valore:

$$D = \pm\,\alpha_{m0}\,\alpha_{0m}\ ;$$

può dunque annullarsi solo per $\alpha_{m0} = 0$, $\alpha_{0m} = 0$.

c) **Caso parabolico.**

L'equazione in z ha la forma (17); il determinante D il valore:

$$D = \alpha_{0m}^2\ ;$$

può dunque annullarsi solo per $\alpha_{0m} = 0$.

Questi due casi vanno discussi separatamente.

Per il caso iperbolico la discussione è stata fatta in modo completo dal Darboux [1]); basterà dunque enunciarne i risultati.

Supponiamo perciò che sia $\alpha_{0m} = 0$ (il caso di $\alpha_{m0} = 0$ si riduce a questo collo scambio di x con y) ed osserviamo che usando della equazione in z e delle sue derivate, possiamo eliminare dalla espressione di θ tutte le derivate miste; scrivere quindi θ sotto la forma:

$$(47)\quad \theta = \alpha z + \alpha_1 z_{10} + \alpha_2 z_{20} + \ldots\ldots + \alpha_m \alpha_{m0} + \beta_1 z_{01} + \beta_2 z_{02} + \ldots\ldots + \beta_n z_{0n}\quad (n < m)$$

che il Darboux indica brevemente con:

$$(47^*)\qquad \theta = (m, n)\,.$$

In questo caso il Darboux ha dimostrato che, quando sia $n > 0$, θ deve necessariamente annullarsi per $m+n$ integrali particolari dell'equazione in z ed è determinata da questa condizione: quando poi sia $n = 0$, cioè θ abbia la forma:

$$(47^{**})\qquad \theta = \alpha\, z + \alpha_1\, z_{10} + \alpha_2\, z_{20} + \ldots\ldots + \alpha_m\, z_{m0}$$

essa o si annulla ancora per m integrali particolari dell'equa-

---

[1]) Cf. Darboux. — *Leçons,* vol. II, cap. VIII, pag. 172-176.

zione in z, oppure coll'applicazione di i trasformazioni di Laplace, può ridursi alla forma:

$$\theta = \alpha^{(i)} z^{(i)} + \alpha_1^{(i)} z_{10}^{(i)} + \ldots\ldots + \alpha_{m-i}^{(i)} z_{m-i,0}^{(i)}$$

e si annulla quindi per $m-i$ soluzioni particolari della equazione in $z^{(i)}$ e perciò anche di quella in z.

Inversamente queste condizioni sono anche sufficienti, ed, ove siano soddisfatte, θ soddisfa effettivamente ad un'equazione lineare omogenea del 2.° ordine della forma di Laplace.

Abbiamo dunque per queste equazioni il bel teorema di Darboux:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un'espressione (m, n) soddisfi ad una equazione lineare omogenea del 2.° ordine, è che si annulli per $m+n$ soluzioni particolari dell'equazione data; solo quando $n=0$, essa può anche dedursi con i trasformazioni di Laplace da una espressione analoga $(m-i, 0)$, che si annulla per $m-i$ soluzioni particolari di un'equazione, i^{ma} trasformata di Laplace della equazione data [1]).

15. Una discussione affatto analoga si può fare per le equazioni del tipo parabolico.

Intanto per mezzo dell'equazione a cui z soddisfa, potremo eliminare tutte le derivate della funzione z, nelle quali la derivazione rispetto ad x comparisce più di una volta, e scrivere quindi θ sotto la forma;

$$\begin{aligned} (48) \qquad \theta = \alpha z + \alpha_1 z_{01} + \alpha_2 z_{02} + \ldots + \alpha_{p-1} z_{0,p-1} + \\ + \beta_1 z_{10} + \beta_2 z_{11} + \ldots + \beta_m z_{1,m-1} \qquad (p \leq m). \end{aligned}$$

---

[1]) Questo teorema generale può subire delle modificazioni, quando la serie di Laplace dell'equazione in z termini prima di m equazioni da un lato, prima di n dall'altro: su questo caso eccezionale però rimandiamo al Darboux (l. c., pag. 168 nota).

Derivando allora θ rispetto ad x ed y, si ha:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \alpha' z + \alpha'_1 z_{01} + \dots\dots - 2 b \beta_m z_{0m} + \beta'_1 z_{10} + \dots\dots \beta'_m z_{1,m-1},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \alpha'' z + \alpha''_1 z_{01} + \dots\dots + \alpha_{p-1} z_{0p} + \beta''_1 z_{10} + \dots\dots + \beta_m z_{1m},$$

e quindi, perchè b è certamente diverso da zero, se non è $\beta_m = 0$, cioè se θ contiene effettivamente qualche derivata dell'ordine m, le due relazioni precedenti ci daranno le due derivate z_{0m}, z_{1m} in funzione di quelle di ordine inferiore (e della medesima forma) e di $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$; e abbiamo allora di nuovo un sistema completo. Prendendo quindi come funzioni incognite le funzioni:

$$z\ ;\ z_{10},\ z_{11},\ \dots\dots z_{1,m-1}\ ;\ z_{01},\ z_{02} \dots\dots z_{0,m-1}$$

potremo costruire in queste $2m$ funzioni un sistema di equazioni ai differenziali totali, le quali tenendo conto della relazione (48) che dà θ e nella ipotesi che θ soddisfi ad un'equazione lineare del 2.° ordine, sono di nuovo illimitatamente integrabili; l'integral generale di questo sistema conterrà dunque $2m-1$ costanti arbitrarie (in modo lineare) e quindi θ dovrà annullarsi identicamente per $2m-1$ soluzioni particolari della equazione in z ed esser determinata da questa condizione. Inversamente questa condizione, oltrechè necessaria è anche sufficiente. Deve dunque aversi, se θ non è identicamente nullo, $p = m$; ed abbiamo il teorema:

Se l'equazione in z ha la forma (17), *condizione necessaria e sufficiente perchè un'espressione θ lineare omogenea in z e nelle sue derivate fino all'ordine m, soddisfi ad un'equazione analoga, è che essa abbia l'una o l'altra delle due forme:*

$$\theta = \alpha z + \alpha_1 z_{01} + \dots\dots + \alpha_m z_{0m} + \beta_1 z_{10} + \beta_2 z_{11} + \dots\dots + \beta_m z_{1,m-1}$$
$$\theta = \alpha z + \alpha_1 z_{01} + \dots\dots + \alpha_{m-1} z_{0,m-1} + \beta_1 z_{10} + \beta_2 z_{11} + \dots\dots + \beta_m z_{1,m-1}$$

e si annulli nel primo caso per $2m$, nel secondo per $2m-1$ soluzioni particolari dell'equazione in z. L'equazione a cui in tal caso θ soddisfa è ancora del tipo parabolico ed ha la forma normale.

16. Alle trasformazioni differenziali di ordine superiore può estendersi il metodo di dimostrazione del Liouville per le trasformazioni del 1.° ordine.

Considerando ad es. il caso generale, indichiamo con $z^{(1)}, z^{(2)}, \dots z^{(2m)}$ le $2m$ soluzioni dell'equazione in z, che annullano l'espressione θ: ed indicando con $z^{(2m+1)}$ un'altra soluzione particolare della equazione in z, scriviamo il sistema di equazioni:

$$(49) \quad z_{ik} = z_{ik}^{(1)} v_1 + z_{ik}^{(2)} v_2 + \dots + z_{ik}^{(2m)} v_{2m} + z_{ik}^{(2m+1)} \theta \quad 0 \leq i+k \leq m$$

nelle $2m+1$ funzioni incognite $v_1, v_2 \dots v_{2m}, \theta$. Queste equazioni sono compatibili in forza dell'equazione a cui z soddisfa (per ipotesi) e di quelle che se ne ottengono derivando, e si riducono appunto a $2m+1$ indipendenti, dalle quali in particolare si deduce per θ un'espressione lineare omogenea in z e nelle sue derivate fino all'ordine m, che si annulla per $z = z_i$ $(i = 1, 2 \dots 2m)$. Dalle relazioni (49), opportunamente differenziate, si ottengono $4m$ relazioni lineari omogenee nelle derivate prime delle $2m$ funzioni v_i e della θ; e si può sempre supporre di aver preso l'ulteriore soluzione $z^{(2m+1)}$ in guisa che queste relazioni possano risolversi rispetto alle derivate delle funzioni v_i, che vengono così espresse come funzioni lineari omogenee delle derivate prime di θ. Segue di qui immediatamente che θ soddisfa, per ogni forma di z integrale della (1), ad una equazione del 2.° ordine; anzi questa equazione verrà scritta sotto m forme diverse, ciascuna delle quali farà conoscere una soluzione particolare dell'equazione aggiunta a quella a cui θ soddisfa. Ed un ragionamento affatto analogo vale evidentemente per le trasformazioni singolari [1]).

---

[1]) Vi è però una lieve differenza nel caso delle trasformazioni differenziali di ordine superiore, in quanto le (49) sono compatibili, solo poichè la funzione z soddisfa alla $\Omega(z) = 0$. Quando invece z sia una funzione affatto generica è necessario sostituire alle (49) le altre equazioni:

$$(49^*) \quad z_{ik} = \sum_{1}^{2m}{}_j \, z_{ik}^{(j)} v_j + z_{ik}^{(2m+1)} \theta + \sum_{\rho\sigma} \lambda_{\rho\sigma} \frac{\partial^{\rho+\sigma} \Omega(z)}{\partial x^\rho \, \partial y^\sigma} \quad 0 \leq i+k \leq m \; ; \; 0 \leq \rho+\sigma \leq m-2$$

essendo le $\lambda_{\rho\sigma}$ altre $\frac{m(m-1)}{2}$ indeterminate.

17. Volendo eseguire i calcoli accennati nel numero precedente, un metodo breve e che conduce a risultati simmetrici risulta dalle considerazioni seguenti:

Facciamo innanzi tutto un'osservazione d'indole puramente algebrica. Consideriamo una serie ricorrente (finita o no) di numeri o di funzioni, definita dalla relazione a tre termini:

$$a\lambda_i + b\lambda_{i+1} + c\lambda_{i+2} = 0 \quad (i = 0, 1 \ldots.). \tag{50}$$

Noto λ_0 e λ_1, la formula superiore dà evidentemente il mezzo di calcolare successivamente i valori di qualunque λ.

Considerando allora tre termini consecutivi di tre qualunque di tali serie, definite dalla medesima relazione fondamentale (che di più possono anche coincidere) abbiamo le relazioni:

$$\begin{aligned} a\lambda_i + b\lambda_{i+1} + c\lambda_{i+2} &= 0 \\ a\lambda'_h + b\lambda'_{h+1} + c\lambda'_{h+2} &= 0 \\ a\lambda''_k + b\lambda''_{k+1} + c\lambda''_{k+2} &= 0 \end{aligned}$$

dalle quali deduciamo:

$$\begin{aligned} a : b : c &= \lambda'_{h+1}\lambda''_{k+2} - \lambda'_{h+2}\lambda''_{k+1} : \lambda'_{h+2}\lambda''_k - \lambda'_h\lambda''_{k+2} : \lambda'_h\lambda''_{k+1} - \lambda'_{h+1}\lambda''_k \\ &= \lambda''_{k+1}\,\lambda_{i+2} - \lambda''_{k+2}\,\lambda_{i+1} : \lambda''_{k+2}\,\lambda_i - \lambda''_k\,\lambda_{i+2} : \lambda''_k\,\lambda_{i+1} - \lambda''_{k+1}\,\lambda_i \\ &= \lambda_{i+1}\,\lambda'_{h+2} - \lambda_{i+2}\,\lambda'_{h+1} : \lambda_{i+2}\,\lambda'_h - \lambda_i\,\lambda'_{h+2} : \lambda_i\,\lambda'_{h+1} - \lambda_{i+1}\,\lambda'_h \end{aligned}$$

e quindi anche in particolare:

$$\frac{\lambda_i\,\lambda'_{h+1} - \lambda_{i+1}\,\lambda'_h}{\lambda_i\,\lambda''_{k+1} - \lambda_{i+1}\lambda''_k} = \frac{\lambda_{i+1}\,\lambda'_{h+2} - \lambda_{i+2}\,\lambda'_{h+1}}{\lambda_{i+1}\,\lambda''_{k+2} - \lambda_{i+2}\,\lambda''_{k+1}} = \frac{\lambda_{i+2}\,\lambda'_h - \lambda_i\,\lambda'_{h+2}}{\lambda_{i+2}\,\lambda''_k - \lambda_i\,\lambda''_{k+2}}$$

cioè il rapporto di due tali determinanti del secondo ordine formati colla legge superiore non cambia sia aumentando di uno ciascun indice, sia ruotando ciclicamente tre indici consecutivi.

Una tale proprietà vale evidentemente anche per gli aggregati lineari omogenei di tali determinanti del 2.° ordine.

Questa semplice osservazione dà luogo a delle conseguenze importanti. Ricordiamo infatti che, se z è integrale di una equazione lineare omogenea del 2.° ordine $\Omega(z)=0$, delle sue derivate di un ordine qualunque due sole sono indipendenti, anzi tra tre derivate consecutive qualunque del medesimo ordine ha luogo la relazione simbolica:

$$a\, z_{ik} + 2\, b\, z_{i-1,\, k+1} + c\, z_{i-2,\, k+2} \equiv 0$$

dove col simbolo $\equiv 0$ abbiamo voluto indicare che l'aggregato del primo membro si esprime linearmente ed omogeneamente per le derivate di ordine inferiore.

Si formino allora con delle soluzioni particolari (linearmente indipendenti) dell'equazione data (in numero dispari) dei determinanti della natura seguente:

La prima linea contenga le soluzioni particolari scelte;
la seconda e la terza contengano rispettivamente le derivate prime di queste soluzioni;
la terza e la quarta due qualunque derivate seconde;
la quinta e la sesta due qualunque derivate terze; . . . . .
. . . .
la penultima e l'ultima (supponendo il determinante di ordine $2m+1$) due qualunque derivate dell'ordine m.

L'osservazione algebrica superiore ed un semplice processo d'induzione dimostrano allora:

1.° che il quoziente di due tali determinanti, corrispondenti a due diversi sistemi di soluzioni (diversi in tutto o in parte), ma ugualmente formati, che contengano cioè le medesime derivate nello stesso ordine, è indipendente dalle particolari derivate dei diversi ordini che figurano nel determinante stesso.

2.° che tre qualunque di questi determinanti, corrispondenti al medesimo sistema di soluzioni particolari, nei quali tutte le linee coincidono, tranne due che contengano derivate dello stesso ordine e che in queste linee contengono ciclicamente due di tre derivate consecutive, hanno valori proporzionali ad a, $2\,b$, c.

Se invece si considerano dei determinanti di ordine pari $2\,m$, nei quali le prime $2\,m-1$ linee siano formate come nei determinanti superiori, la $2\,m^{ma}$ contenga invece una derivata dell' ordine m, tre tali determinanti che non differiscano altro che per la derivata che costituisce l'ultima linea, e che contengano in questa tre derivate consecutive del medesimo ordine si possono evidentemente considerare come tre termini consecutivi di una relazione ricorrente come la (50) e quindi i determinanti del secondo ordine formati con essi soddisfano a relazioni analoghe a quelle nelle λ. È chiaro inoltre che anche per questi determinanti valgono osservazioni perfettamente analoghe a quelle già fatte per i determinanti simili di ordine dispari.

Queste conclusioni si modificano in parte (ed è facile veder come) quando l'equazione $\Omega(z) = 0$ contenga una sola derivata del secondo ordine, cioè quando l'equazione appartenga al tipo iperbolico o parabolico ed abbia la forma normale.

18. Premesse queste osservazioni è facile risolvere le equazioni di cui si è parlato al n. 16. Queste equazioni si possono scrivere infatti (ponendo per maggior simmetria $\theta = v_{2m+1}$):

$$(51) \qquad \sum_{1}^{2m+1}{}_i\, z_{tu}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0 \qquad \sum_{1}^{2m+1}{}_i\, z_{tu}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \qquad 0 \leq t+u \leq m-1$$

$$(52) \qquad \sum_{1}^{2m+1}{}_i \left(z_{m-k,\,k}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial y} - z_{m-k-1,\,k+1}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = 0 \qquad k = 0, 1, 2 \ldots\ldots m-1$$

delle quali le (51) si riducono, in forza della $\Omega(z) = 0$, a $2(2m-1)$ indipendenti, le (52) a due soli indipendenti e quindi costituiscono tra tutte un sistema di $4\,m$ equazioni lineari omogenee nelle $4\,m+2$ funzioni incognite $\dfrac{\partial v_i}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v_i}{\partial y}$.

Per trarre allora da queste $4\,m$ equazioni le derivate delle $2\,m$ prime funzioni $v_1, v_2 \ldots. v_{2m}$ in funzione di quelle di v_{2m+1}, osserviamo intanto che il primo gruppo delle (51) ci dà il modo di esprimere linearmente ed omogeneamente le derivate rispetto ad x delle prime $2\,m-1$ funzioni v per le analoghe di v_{2m}, v_{2m+1}, e precisamente colle formule:

$$(53) \qquad \frac{\partial v_k}{\partial x} = -\frac{[z_1\, z_2 \ldots\ldots z_{k-1}\, z_{2m}\, z_{k+1} \ldots\ldots z_{2m-1}]}{[z_1\, z_2 \ldots\ldots z_{k-1}\, z_k\, z_{l+1} \ldots\ldots z_{2m-1}]} \frac{\partial v_{2m}}{\partial x} -$$

$$- \frac{[z_1 \ldots\ldots z_{k-1}\, z_{2m+1}\, z_{k+1} \ldots\ldots z_{2m-1}]}{[z_1 \ldots\ldots z_{k-1}\, z_k\, z_{k+1} \ldots\ldots z_{2m-1}]} \frac{\partial v_{2m+1}}{\partial x}$$

$$(k = 1, 2 \ldots\ldots 2m-1)$$

dove abbiamo posto per brevità $z^{(i)} = z_i$ e col simbolo $\frac{[\ldots\ldots]}{[\ldots\ldots]}$ abbiamo indicato il quoziente di due determinanti di ordine $2m+1$ formati rispettivamente colle soluzioni rinchiuse dentro parentesi (ma del resto in ugual modo) che sappiamo essere indipendente dalle particolari derivate che entrano a formarli.

Affatto analogamente dal secondo gruppo delle (51) otteniamo:

$$(54) \qquad \frac{\partial v_k}{\partial y} = -\frac{[z_1\, z_2 \ldots\ldots z_{k-1} z_{2m}\, z_{k+1} \ldots\ldots z_{2m-1}]}{[z_1\, z_2 \ldots\ldots z_{k-1}\, z_k\, z_{k+1} \ldots\ldots z_{2m-1}]} \frac{\partial v_{2m}}{\partial y} -$$

$$- \frac{[z_1 \ldots\ldots z_{k-1}\, z_{2m+1}\, z_{k+1} \ldots\ldots z_{2m-1}]}{[z_1 \ldots\ldots z_{k-1}\, z_k\, z_{k+1} \ldots\ldots z_{2m-1}]} \frac{\partial v_{2m+1}}{\partial y}.$$

$$(k = 1, 2 \ldots\ldots 2m-1)$$

od anche con notazione più breve:

$$(53^*] \qquad \frac{\partial v_k}{\partial x} = -\frac{[1, 2 \ldots\ldots k-1,\, 2m,\, k+1 \ldots\ldots 2m-1]}{[1, 2 \ldots\ldots k-1,\, k,\, k+1 \ldots\ldots 2m-1]} \frac{\partial v_{2m}}{\partial x} -$$

$$- \frac{[1, \ldots k-1,\, 2m+1,\, k+1 \ldots\ldots 2m-1]}{[1, \ldots\ldots k-1,\, k,\, k+1 \ldots\ldots 2m-1]} \frac{\partial v_{2m+1}}{\partial x}$$

$$(54^*) \qquad \frac{\partial v_k}{\partial y} = -\frac{[1\ 2 \ldots\ldots k-1,\, 2m,\, k+1 \ldots\ldots 2m-1]}{[1, 2 \ldots\ldots k-1,\, k,\, k+1 \ldots\ldots 2m-1]} \frac{\partial v_{2m}}{\partial y} -$$

$$- \frac{[1 \ldots\ldots k-1,\, 2m+1,\, k+1 \ldots\ldots 2m-1]}{[1 \ldots\ldots k-1,\, k,\, k+1 \ldots\ldots 2m-1]} \frac{\partial v_{2m+1}}{\partial y}.$$

$$(k = 1, 2 \ldots\ldots 2m-1).$$

Sostituendo poi questi valori nelle (52), queste diventano:

$$(55)\quad (1\,2\ldots\ldots 2m)_i \frac{\partial v_{2m}}{\partial y} + (1,2\ldots\ldots 2m-1,\ 2m+1)_i \frac{\partial v_{2m+1}}{\partial y} =$$

$$= (1,2\ldots\ldots 2m)_{i+1} \frac{\partial v_{2m}}{\partial x} + (1,2\ldots\ldots 2m-1,\ 2m+1)_{i+1} \frac{\partial v_{2m+1}}{\partial x}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2\ldots\ldots 2m-1)$$

dove ad es. col simbolo $(1\,2\ldots\ldots 2m)_i$, si è espresso il coefficiente di $\frac{\partial v_{2m}}{\partial y}$ che non è che un determinante di ordine $2m$, le cui prime $2m-1$ linee sono formate colle funzioni $z_1 z_2 \ldots z_{2m}$ nel modo già accennato e l'ultima linea contiene di queste funzioni z_k le derivate $(z_k)_{m-i,\ i}$.

Consideriamo allora due qualunque di tali equazioni, corrispondenti agli indici i e k. Da esse possiamo dedurre $\frac{\partial v_{2m}}{\partial x}$, $\frac{\partial v_{2m}}{\partial y}$ colle formule:

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial v_{2m}}{\partial x} = &-\frac{1}{\Delta_{ik}}\Big\{(12\ldots\ldots 2m)_i\,(12\ldots 2m-1,\ 2m+1)_{k+1} - \\
&\quad - (12\ldots\ldots 2m)_k\,(12\ldots\ldots 2m-1,\ 2m+1)_{i+1}\Big\}\frac{\partial v_{2m+1}}{\partial x} \\
&+\frac{1}{\Delta_{ik}}\Big\{(12\ldots\ldots 2m)_i\,(12\ldots\ldots 2m-1,\ 2m+1)_k - \\
&\quad - (12\ldots\ 2m)_k\,(12\ldots\ldots 2m-1,\ 2m+1)_i\Big\}\frac{\partial v_{2m+1}}{\partial y} \\
\frac{\partial v_{2m}}{\partial y} = &\ \frac{1}{\Delta_{ik}}\Big\{(1,2\ldots\ldots 2m-1,\ 2m+1)_{i+1}\,(12\ldots\ldots 2m)_{k+1} - \\
&\quad - (12\ldots\ldots 2m-1,\ 2m+1)_{k+1}\,(12\ldots 2m)_{i+1}\Big\}\frac{\partial v_{2m+1}}{\partial x} \\
&-\frac{1}{\Delta_{ik}}\Big\{(12\ldots 2m-1,\ 2m+1)_i\,(12\ldots 2m)_{k+1} - \\
&\quad - (12\ldots 2m-1,\ 2m+1)_k\,(12\ldots 2m)_{i+1}\Big\}\frac{\partial v_{2m+1}}{\partial y}
\end{aligned}\right.$$

dove

$$(57)\qquad \Delta_{ik} = (12\ldots 2m)_i\,(12\ldots 2m)_{k+1} - (12\ldots .2m)_k\,(12\ldots .2m)_{i+1}\,;$$

e sotto questa forma si riconosce immediatamente che i valori ottenuti sono indipendenti dai valori particolari degli indici i e k.

Si noti inoltre che indicando con

$$[12\ldots .\,2m-1,\ 2m,\ 2m+1]_{ik}$$

un determinante di ordine $2m+1$ affatto analogo a $[12\ldots .\,2m-1]$ ma in cui le ultime due linee contengono le derivate $\frac{\partial^m}{\partial x^{m-i}\,\partial y^i}$, $\frac{\partial^m}{\partial x^{m-k}\,\partial y^k}$ i determinanti $(\ldots\ldots)$ superiori sono di esso minori corrispondenti all' ultima o penultima linea e quindi per note formule della teoria dei determinanti le (57) possono anche scriversi:

$$(56^*)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial v_{2m}}{\partial x} &= \frac{[1,2\ldots .\,2m-1]}{\Delta_{ik}}\left\{-[12\ldots .\,2m,\,2m+1]_{i,\,k+1}\frac{\partial v_{2m+1}}{\partial x}+\right.\\ &\qquad\left.+[12\ldots .\,2m,\,2m+1]_{ik}\frac{\partial v_{2m+1}}{\partial y}\right\}\\ \frac{\partial v_{2m}}{\partial y} &= \frac{[12\ldots .\,2m-1]}{\Delta_{ik}}\left\{[12\ldots ..\,2m,\,2m+1]_{i+1,\,k+1}\frac{\partial v_{2m+1}}{\partial x}-\right.\\ &\qquad\left.-[12\ldots 2m,\,2m+1]_{i+1,\,k}\frac{\partial v_{2m+1}}{\partial y}\right\}\end{aligned}\right.$$

e in questa forma semplice danno una coppia delle $2m$ relazioni che esprimono le derivate delle prime $2m$ funzioni v in funzione di quelle della $v_{2m+1}=\theta$. Segue di qui che θ soddisfa ad un'equazione lineare del secondo ordine e che la funzione:

$$(58)\qquad \vartheta_m = \frac{1}{c}\,\frac{[12\ldots .\,2m,\,2m+1]_{ik}}{\Delta_{ik}}\,[12\ldots .\,2m-1] =$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{[12\ldots .\,2m,2m+1]_{i+1,\,k+1}}{\Delta_{ik}}\,[12\ldots .\,2m-1]$$

o anche più brevemente:

$$(58^*)\qquad \vartheta_m = \{12\ldots\ldots 2m,\, 2m+1\}\ [12\ldots . 2m-1]$$

è una soluzione dell'equazione aggiunta a quella a cui θ soddisfa.

Un calcolo perfettamente simile dimostrerebbe in generale che le funzioni:

$$(59)\quad \vartheta_\rho = \{12\ldots . 2m,\, 2m+1\}\ [12\ldots . \rho-1,\, \rho+1,\ldots\ 2m-1,\, 2m]$$

sono altrettante soluzioni dell'equazione aggiunta a quella in θ, come appunto il metodo di Liouville faceva prevedere.

È opportuno fare ancora le osservazioni seguenti:

Dalle formule (59) che definiscono le ϑ, seguono immediatamente le relazioni:

$$(60)\qquad \sum_1^{2m}{}_\rho\ z_{tu}^{(\rho)}\ \vartheta_\rho = 0 \qquad 0\quad t+u \leq m-1$$

dalle quali si deducono le altre [1]:

$$(60^*)\qquad \sum_1^{2m}{}_\rho\ z_{t'u'}^{(\rho)}\ (\vartheta_\rho)_{t''u''} = 0 \qquad 0 \leq t'+u'+t''+u'' \leq m-1$$

in particolare dunque le seguenti:

$$\sum z^{(\rho)}\ (\vartheta_\rho)_{tu} = 0 \qquad 0 \leq t+u \leq m-1$$

e quindi anche

$$(61)\qquad z_\rho \equiv [\vartheta_1\, \vartheta_2 \ldots . \vartheta_{\rho-1}\, \vartheta_{\rho+1} \ldots \vartheta_{2m}]\quad (\rho = 1, 2 \ldots . 2m)$$

dove col simbolo $\equiv$ si è indicata la proporzionalità.

19. Delle formule perfettamente analoghe valgono per le trasformazioni singolari.

Cominciando dal caso iperbolico, sia θ un'espressione (m, n) che si annulli per $m+n$ soluzioni particolari $z^{(1)}, z^{(2)}, \ldots . z^{(m+n)}$

---

[1]) Cf. Darboux — l. c., pag. 187.

dell'equazione in z. Poniamo allora per simmetria $\theta = v_{m+n+1}$ e indicando con $z^{(m+n+1)}$ un'altra soluzione particolare dell'equazione in z, (opportunamente scelta), determiniamo θ insieme con altre $m+n$ funzioni $v_1 v_2 \ldots v_{m+n}$ dalle equazioni lineari:

$$(62)\quad z = \sum_1^{m+n+1}{}_i\, z^{(i)} v_i\ ;\ z_{\rho 0} = \sum_1^{m+n+1}{}_i\, z^{(i)}_{\rho 0}\, v_i\ ;\ z_{0\sigma} = \sum_1^{m+n+1}{}_i\, z^{(i)}_{0\sigma}\, v_i;\ (\rho=1..m, \sigma=1..n).$$

Da queste equazioni differenziando deduciamo le altre:

$$(63)\quad \begin{cases} \sum z^{(i)}_{\rho 0} \dfrac{\partial v_i}{\partial x} = 0 & \rho = 0,\, 1,\, 2 \ldots. m-1 \\ \sum z^{(i)}_{0\sigma} \dfrac{\partial v_i}{\partial x} = 0 & \sigma = 1,\, 2 \ldots\ldots n \end{cases}$$

$$(63^*)\quad \begin{cases} \sum z^{(i)}_{\rho 0} \dfrac{\partial v_i}{\partial y} = 0 & \rho = 1,\, 2 \ldots.. m \\ \sum z^{(i)}_{0\sigma} \dfrac{\partial v_i}{\partial y} = 0 & \sigma = 0,\, 1,\, 2 \ldots. n-1\,. \end{cases}$$

Indicando quindi con D il determinante di ordine $m+n+1$:

$$(64)\quad D = (z^{(1)},\, z^{(2)}_{10},\, z^{(3)}_{20} \ldots\ldots z^{(m+1)}_{m,0}\ ,\ z^{(m+2)}_{01}\ ,\ z^{(m+3)}_{02} \ldots\ldots z^{(m+n+1)}_{0,n})\,,$$

con $D_{i,k}$, $D_{ik,lm}$ i suoi minori del 1.° e 2.° ordine corrispondenti alla linea i e alla colonna k (oppure alle linee i, k e alle colonne l, m), abbiamo le formule:

$$(65)\quad \frac{\partial v_h}{\partial x} = \frac{D_{m+1,\,h}}{D_{m+1,\,m+n+1}} \frac{\partial v_{m+n+1}}{\partial x}\ ;\ \frac{\partial v_h}{\partial y} = \frac{D_{m+n+1,\,h}}{D_{m+n+1,\,m+n+1}} \frac{\partial v_{m+n+1}}{\partial y}\ ;$$

$$h = 1,\, 2 \ldots.. m+n\,;$$

e quindi l'equazione in v_{m+n} si può scrivere sotto le $m+n$ forme diverse:

$$(66)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{D_{m+1,\,h}}{D_{m+1,\,m+n+1}} \frac{\partial v_{m+n+1}}{\partial x}\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{D_{m+n+1,\,h}}{D_{m+n+1,\,m+n+1}} \frac{\partial v_{m+n+1}}{\partial y}\right\} = 0;$$

il che fa vedere che le funzioni:

$$(67)\quad \vartheta_h = \frac{D_{m+1,\,h}\; D_{m+n+1,\,m+n+1} - D_{m+1,\,m+n+1}\; D_{m+n+1,\,h}}{D_{m+1,\,m+n+1}\; D_{m+n+1,\,m+n+1}} =$$

$$= \frac{D}{D_{m+1,\,m+n+1}\; D_{m+n+1,\,m+n+1}}\; D_{m+1,\,m+n+1;\,h,\,m+n+1} \quad (h=1,\,2\ldots.m+n)$$

sono altrettante soluzioni dell'equazione aggiunta a quella in θ, quando questa sia scritta sotto la forma normale.

Dalle (67) seguono anche le relazioni:

$$(68)\ \sum \vartheta_i z^{(i)}=0\ ;\ \sum \vartheta_i z^{(i)}_{\rho 0}=0\ ;\ \sum \vartheta_i z^{(i)}_{0\sigma}=0\ ;\ \rho=1,2\ldots.m-1;\ \sigma=1,2\ldots n-1$$

dalle quali si deducono conseguenze analoghe a quelle del caso generale [1]).

20. Consideriamo ora le trasformazioni singolari del tipo parabolico.

Se indichiamo con $z^{(1)}, z^{(2)}\ldots. z^{(2m-1)}$ le soluzioni particolari della (17) che annullano la trasformata singolare θ, con $z^{(2m)}$ un'altra soluzione, potremo determinare $\theta = v_{2m}$ insieme colle altre funzioni $v_1\, v_2 \ldots v_{2m-1}$ dalle relazioni:

$$(69)\quad z = \sum_1^{2m}{}_i\, z^{(i)} v_i\ ;\ z_{0\rho} = \sum_1^{2m}{}_i\, z^{(i)}_{0\rho} v_i\ ;\ z_{1\rho} = \sum_1^{2m}{}_i\, z^{(i)}_{1\rho} v_i \ (\rho = 1,2\ldots.m-1)$$

dalle quali deduciamo le relazioni differenziali:

$$(70)\quad \begin{cases} \sum z^{(i)}_{0\rho} \dfrac{\partial v_i}{\partial x} = 0 \ ; \quad \rho = 0,1,2\ldots.m-1 \\ \sum z^{(i)}_{1\sigma} \dfrac{\partial v_i}{\partial x} = 0 \ ; \quad \sigma = 1,2\ldots..m-2 \end{cases}$$

---

[1]) Cf. Darboux — l. c., pag. 187.

di cui una qualunque del secondo gruppo, si ottiene al modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z_{1\sigma}) = z_{2\sigma} = \frac{\partial^\sigma}{\partial y^\sigma}(z_{20}) = \alpha\, z_{1\sigma} + \beta\, z_{0,\sigma+1} + \gamma\, z_{0\sigma} \;;$$

donde per le (69) seguono appunto le ultime (70).

Si ottiene analogamente l'altro gruppo di formule:

$$(71)\qquad \begin{cases} \sum_i z_{0\rho}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \rho = 0, 1, 2 \ldots . m-2 \\[2mm] \sum_i z_{1\sigma}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \sigma = 1, 2 \ldots . m-2 \end{cases}$$

alle quali bisogna aggiungere l'altra:

$$(72)\qquad \sum_i z_{1,m-1}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial x} + 2\,b \sum_i z_{0,m-1}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0\,.$$

Quest'ultima relazione si ottiene al modo seguente:

Dalle (69) segue: $z_{2,\,m-2} = \sum_i z_{2,m-2}^{(i)}\, v_i$; allora dall'altra:

$$z_{1,\,m-1} = \sum_i z_{1,m-1}^{(i)}\, v_i$$

e dall'identità:

$$\frac{\partial}{\partial y}(z_{2,\,m-2}) - \frac{\partial}{\partial x}(z_{1,\,m-1}) = 0$$

segue:

$$\sum_i z_{2,m-2}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial y} - \sum_i z_{1,m-1}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0$$

ossia, tenendo conto delle equazioni a cui le z_i soddisfano, appunto la (72).

Indicando allora con D il determinante di ordine $2m$:

$$(73)\qquad D = (z^{(1)}, z_{01}^{(2)}, z_{02}^{(3)} \ldots . . z_{0.\,m-1}^{(m)}\;,\; z_{10}^{(m+1)} \ldots . . z_{1,m-1}^{(2m)})$$

con D_{ik}, $D_{ik;lm}$ i suoi minori etc..., dalle (70) deduciamo le formule:

$$\frac{\partial v_h}{\partial x} = \frac{D_{2m,h}}{D_{2m,2m}} \frac{\partial v_{2m}}{\partial x} \qquad h = 1, 2 \ldots\ldots 2m - 1 \tag{74}$$

e quindi

$$\sum_i z^{(i)}_{1,m-1} \frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{1}{D_{2m,2m}} \frac{\partial v_{2m}}{\partial x} \sum_i D_{2m,i} \; z^{(i)}_{1,m-1} = \frac{D}{D_{2m,2m}} \frac{\partial v_{2m}}{\partial x}.$$

Le (71) e (72) diventano allora:

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\sum_1^{2m}{}_i \; z^{(i)}_{0\rho} \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 & (\rho = 0, 1 \ldots . m - 2) \\ \displaystyle\sum_1^{2m}{}_i \; z^{(i)}_{1\sigma} \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 & (\sigma = 1, 2 \ldots . m - 2) \\ \displaystyle\sum_i z^{(i)}_{0,m-1} \frac{\partial v_i}{\partial y} = -\frac{D}{2bD_{2m,2m}} \frac{\partial v_{2m}}{\partial x} & \end{array}\right.$$

dalle quali deduciamo:

$$\frac{\partial v_h}{\partial y} = \frac{D_{2m\,h}}{D_{2m,2m}} \frac{\partial v_{2m}}{\partial y} - \frac{D \,.\, D_{2m,m;\,2m,h}}{2\,b\,D^2_{2m,2m}} \frac{\partial v_{2m}}{\partial x} \; (h = 1, 2 \ldots . 2m - 1) \tag{74*}$$

donde si ha l'equazione in $v_{2m} = \theta$ sotto $2m - 1$ forme diverse e si deduce anche che le funzioni:

$$\vartheta_h = \frac{D \,.\, D_{2m,m;\,2m,h}}{2\,b\,D^2_{2m,2m}} \qquad (h = 1, 2 \ldots . 2m - 1) \tag{75}$$

sono altrettante soluzioni dell'equazione aggiunta a quella a cui θ soddisfa, quando questa sia scritta sotto la forma normale.

Dall'espressione (75) delle funzioni ϑ_h deduciamo le relazioni:

$$\sum_1^{2m-1}{}_h \; \vartheta_h \, z^{(h)}_{0\rho} = 0 \;;\; \sum_1^{2m-1}{}_h \; \vartheta_h \, z^{(h)}_{1\rho} = 0 \;;\; \rho = 0, 1, 2 \ldots . m - 2 \tag{76}$$

dalle quali seguono delle altre formule perfettamente analoghe a quelle dedotte nei casi precedenti.

21. I risultati fin qui ottenuti possono riassumersi nei seguenti due teoremi generali:

a) per le trasformazioni del 1.° ordine:

Se z è l' integral generale di un' equazione lineare omogenea del 2.° ordine con due variabili indipendenti, condizione necessaria e sufficiente perchè una espressione θ della forma:

$$\theta = \alpha z + \beta p + \gamma q$$

soddisfi, per ogni forma della funzione z integrale dell' equazione data, ad una equazione analoga, è che θ si annulli per due soluzioni particolari della equazione data e sia determinata da questa condizione a meno di un fattore di proporzionalità. L' equazione a cui in tal caso θ soddisfa è della medesima classe dell' equazione in z e si riduce alla forma normale collo stesso cambiamento di variabili.

Vi sono però due casi di eccezione:

1.° se l' equazione in z è del tipo iperbolico (ed ha la forma:

$$s + ap + bq + cz = 0) \, ,$$

un' espressione $\theta = \alpha\, z + \beta\, p$ (oppure $\theta = \alpha\, z + \gamma\, q$) soddisfa ad una equazione analoga, quando essa o sia una delle due trasformate di Laplace della funzione z, o si annulli per una soluzione particolare dell' equazione stessa (trasformazione del Lewy).

2.° se l' equazione in z è del tipo parabolico (ed ha la forma:

$$r + 2\, ap + 2\, bq + cz = 0) \, ,$$

un' espressione $\theta = \alpha\, z + \beta\, p$ soddisfa allora ed allora soltanto ad una equazione analoga, quando si annulli per una soluzione particolare dell' equazione stessa.

b) per le trasformazioni di ordine superiore:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un' espressione θ della forma:

$$\theta = \sum \alpha_{ik}\, z_{ik} \qquad 0 \leq i + k \leq m$$

soddisfi, per ogni forma della funzione z integrale dell' equazione *data, ad una equazione analoga, è che* θ *si annulli per* $2m$ *soluzioni particolari dell'equazione stessa e ne sia determinata a meno di un fattore di proporzionalità. L'equazione in* θ *è in tal caso della medesima classe di quella in* z *e si riduce alla forma normale col medesimo cambiamento di variabili.*

Vi sono anche qui due casi di eccezione:

1.° se l'equazione in z *è del tipo iperbolico (ed ha la forma solita) un'espressione* $\theta = (m, n)$ *soddisfa ad un'equazione analoga quando o si annulli per* $m+n$ *soluzioni particolari dell'equazione in* z *o si deduca con trasformazioni di Laplace da una espressione simile (teorema di Darboux).*

2.° se l'equazione in z *è del tipo parabolico ed ha anch'essa la forma normale, un'espressione:*

$$\theta = \alpha z + \alpha_1 z_{01} + \alpha_2 z_{02} + \ldots + \alpha_{m-1} z_{0,\, m-1} + \beta_1 z_{10} + \beta_2 z_{11} + \ldots + \beta_m z_{1,\, m-1}$$

soddisfa allora ed allora soltanto ad un'equazione analoga quando si annulli per $2m-1$ *soluzioni particolari dell'equazione data.*

22. Queste trasformazioni, a cui accennano i teoremi superiori, non sono tutte tra di loro indipendenti: vi sono tra di esse delle relazioni, che riducono di molto il numero di quelle effettivamente distinte. Queste relazioni ci proponiamo ora di trovare.

Cominciando perciò dalle trasformazioni del 1.° ordine, osserviamo innanzi tutto (e questa osservazione è generale) che per ogni trasformazione differenziale la funzione θ è determinata solo a meno di un fattore di proporzionalità: e quindi, disponendo opportunamente di questo fattore, potremo senz'altro riguardare come identiche due equazioni equivalenti, che si deducano cioè l'una dall'altra con un cambiamento proporzionale di funzione incognita. Posto ciò, introduciamo le notazioni seguenti:

Indichiamo con $A_{z_1 z_2}$ la trasformazione generale corrispondente alle soluzioni z_1 e z_2 dell'equazione data, per la quale dunque si ha:

$$(77) \qquad A_{z_1 z_2}) \quad \theta \equiv (z\, p_1\, q_2)\,;$$

(col simbolo $\equiv$ indichiamo la proporzionalità); con E, E' le due trasformazioni di Laplace della equazione (10) e precisamente sia:

$$(78) \qquad \mathrm{E}) \ \theta \equiv p + bz \quad ; \quad \mathrm{E}') \ \theta \equiv q + az \ ;$$

con L_{z_1}, L'_{z_1} le due trasformazioni del Lewy corrispondenti alla soluzione particolare z_1:

$$(79) \qquad \mathrm{L}_{z_1}) \ \theta \equiv (z \, p_1) \quad ; \quad \mathrm{L}'_{z_1}) \ \theta \equiv (z \, q_1)$$

e finalmente con

$$(80) \qquad \mathrm{P}_{z_1}) \ \theta \equiv (z \, p_1)$$

la trasformazione singolare della (17) corrispondente alla soluzione particolare z_1.

Inoltre, quando dall'equazione in z mediante una certa trasformazione S (il ragionamento è affatto generale) si passi ad una equazione in una funzione trasformata θ, e da questa con un'altra trasformazione T si passi ad un'equazione in una nuova funzione ζ, anche le due funzioni z e ζ saranno legate da una certa trasformazione, che noi diremo *composta* di S e T e indicheremo col simbolo S T (scrivendo prima la trasformazione eseguita prima); e se la trasformazione T dipende dalle soluzioni θ_i, $\theta_k \ldots\ldots$ dell'equazione in θ, corrispondenti alle soluzioni $z_i, z_k \ldots\ldots$ dell'equazione in z, scriveremo anche T sotto la forma $\mathrm{T}_{z_i z_k \ldots\ldots}$; ed allora la trasformazione S T si scriverà anche:

$$\mathrm{S} \, \mathrm{T}_{z_i \,.\, z_k} \ldots\ldots$$

Con queste convenzioni si dimostrano subito le relazioni seguenti:

$$(81) \quad \begin{cases} \mathrm{E} \, \mathrm{E}' \equiv 1 \ ; \ \mathrm{L}_{z_1} \mathrm{E}' \equiv \mathrm{E}' \, \mathrm{L}_{z_1} \equiv \mathrm{L}'_{z_1} \ ; \ \mathrm{L}'_{z_1} \mathrm{E} \equiv \mathrm{E} \, \mathrm{L}'_{z_1} \equiv \mathrm{L}_{z_1} \\ \mathrm{L}'_{z_1} \mathrm{L}_{z_2} \equiv \mathrm{L}_{z_2} \mathrm{L}'_{z_1} \equiv \mathrm{L}_{z_1} \mathrm{L}'_{z_2} \equiv \mathrm{L}'_{z_2} \mathrm{L}_{z_1} \equiv \mathrm{A}_{z_1 z_2} \end{cases}$$

$$(82) \qquad \mathrm{P}_{z_1} \mathrm{P}_{z_2} \equiv \mathrm{P}_{z_2} \mathrm{P}_{z_1} \equiv \mathrm{A}_{z_1 z_2}$$

(dove con 1 abbiamo indicata la trasformazione identica, o più generalmente un qualunque cambiamento proporzionale di funzione incognita); dalle quali relazioni seguono immediatamente i due teoremi:

a) Ogni trasformazione differenziale del 1.° ordine di un' equazione del tipo iperbolico si può ottenere dalla composizione di due trasformazioni elementari e precisamente di una delle due trasformazioni di Laplace (e della sua inversa) e di una delle due trasformazioni del Lewy.

b) Ogni trasformazione differenziale del 1.° ordine di un' equazione del tipo parabolico si ottiene componendo due trasformazioni singolari.

Insieme colle relazioni (81) e (82) vi sono anche le altre:

$$(83_a)\quad A_{z_1z_2}\,.\,A_{z_3z_4}\equiv A_{z_2z_3}\,.\,A_{z_4z_1}\equiv A_{z_3z_1}\,.\,A_{z_4z_2}\equiv A_{z_3z_4}\,.\,A_{z_1z_2}\equiv A_{z_4z_1}\,A_{z_2z_3}\equiv A_{z_4z_2}\,A_{z_3z_1}$$

$$(83_b)\quad \begin{cases} E\,L_{z_1}\equiv L_{z_1}\,E \quad ; \quad E'\,L'_{z_1}\equiv L'_{z_1}\,E' \\ E\,A_{z_1z_2}\equiv A_{z_1z_2}\,E \quad ; \quad E'\,A_{z_1z_2}\equiv A_{z_1z_2}\,E' \\ L_{z_1}\,A_{z_2z_3}\equiv L_{z_2}\,A_{z_3z_1}\equiv L_{z_3}\,A_{z_1z_2}\equiv A_{z_2z_3}\,L_{z_1}\equiv A_{z_3z_1}\,L_{z_2}\equiv A_{z_1z_2}\,L_{z_3} \\ L'_{z_1}\,A_{z_2z_3}\equiv L'_{z_2}\,A_{z_3z_1}\equiv L'_{z_3}\,A_{z_1z_2}\equiv A_{z_2z_3}L'_{z_1}\equiv A_{z_3z_1}\,L'_{z_2}\equiv A_{z_1z_2}\,L'_{z_3} \end{cases}$$

$$(83_c)\quad P_{z_1}\,A_{z_2z_3}\equiv P_{z_2}\,A_{z_3z_1}\equiv P_{z_3}\,A_{z_1z_2}\equiv A_{z_2z_3}\,P_{z_1}\equiv A_{z_3z_1}\,P_{z_2}\equiv A_{z_1z_2}\,P_{z_3}\ ^{1});$$

(delle quali il primo gruppo vale per equazioni qualunque, il secondo per quelle del tipo iperbolico, il terzo per quelle del tipo parabolico), nelle quali però figurano delle derivate di ordine superiore al primo. Da esse segue in particolare il teorema:

c) Due trasformazioni differenziali del 1.° ordine sono sempre permutabili, cioè nella loro composizione vale la legge commutativa.

---

[1]) Una qualunque delle relazioni (81)...(83_c) si dimostra immediatameute coll'eseguire le trasformazioni indicate nei due membri e coll'osservare quali derivate figurano nell' espressione finale e per quali soluzioni dell' equazione in z questa si annulli.

23. Veniamo ora alle trasformazioni di ordine superiore. Per queste, il risultato, molto semplice, è dato dal teorema:

Ogni trasformazione differenziale di ordine superiore si ottiene componendo successive trasformazioni differenziali del 1.° ordine.

Infatti nel caso di una trasformazione generale di ordine m, corrispondente alle $2m$ soluzioni particolari $z_1, z_2 \dots z_{2m}$, si compongano successivamente m trasformazioni differenziali del 1.° ordine, corrispondenti rispettivamente ad un qualunque sistema di m coppie distinte formate colle $2m$ soluzioni superiori: si otterrà allora una trasformazione differenziale ancora dell'ordine m, che, annullandosi per le stesse $2m$ soluzioni particolari di quella da cui siamo partiti, deve (a meno un fattore di proporzionalità) coincidere con essa.

Riguardo poi alle trasformazioni singolari, il teorema di Darboux sulle espressioni (m, n), l'analogo relativo alle equazioni del tipo parabolico, ed i risultati del numero antecedente fanno vedere come ogni trasformazione singolare del tipo iperbolico si possa ottenere componendo delle trasformazioni di Lewy e di quelle di Laplace, ogni trasformazione singolare del tipo parabolico componendo un numero dispari di trasformazioni differenziali singolari del 1.° ordine. In tutti i casi poi, pei teoremi del numero superiore, l'ordine di composizione è affatto arbitrario. Il nostro teorema è così dimostrato.

È facile ora dare la legge di composizione di due trasformazioni differenziali di ordine qualunque. È chiaro intanto che componendo due trasformazioni differenziali, si ottiene una nuova trasformazione differenziale, il cui ordine non supera la somma degli ordini delle trasformazioni componenti ed è individuata da tutte insieme quelle soluzioni particolari dell'equazione primitiva, che individuavano le due trasformazioni componenti. Quando di più queste siano affatto generali (cioè il determinante relativo a ciascuna di esse sia diverso da zero) e le soluzioni particolari dell'equazione primitiva che le individuano formino anche tutte insieme un sistema di soluzioni linearmente indipendenti, allora la trasformazione composta avrà necessariamente l'ordine somma degli ordini delle componenti e sarà anche generale. Quando questo non accada, cioè qualcuna delle trasformazioni componenti sia una trasformazione singolare, oppure, anche, essendo le due componenti affatto generali, esse si annullano ambedue per qualche soluzione particolare dell'equazione data, allora la loro composizione porterà o ad una trasformazione singolare, o ad una di ordine inferiore alla somma degli ordini delle componenti; oppure (nel caso del tipo ellittico) potrà essere anche impossibile. In ogni caso è chiaro che vale in questa composizione la legge commutativa e si ha anzi di più che la trasformazione composta è individuata non dalle sue componenti, ma dalle soluzioni particolari che a queste corrispondono. Abbiamo dunque il teorema:

b) Due trasformazioni differenziali di ordine qualunque sono permutabili: la trasformazione composta è ancora una trasformazione differenziale, il cui ordine non supera la somma degli ordini delle trasformazioni componenti.

Un caso particolare di questo teorema è in modo speciale interessante.

Secondo le denominazioni di Lie, si dice che un'equazione ammette una trasformazione infinitesima:

$$X\varphi = \lambda\varphi + \mu \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \nu \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

quando, se φ è un integrale dell'equazione data, anche $X\varphi$ lo è. Ora è evidente che il simbolo $X\varphi$ può riguardarsi come l'espressione di una particolare trasformazione differenziale dell'equazione data (in sè medesima); (e questo ci dà anche una nozione interessante sulla natura delle trasformazioni infinitesime che una equazione può ammettere); quindi dal teorema della permutabilità delle trasformazioni differenziali segue:

Se un' equazione ammette una trasformazione infinitesima, qualunque equazione che da essa si ottenga mediante una trasformazione differenziale ammette essa pure una trasformazione infinitesima ed inversamente.

24. Per la relazione che lega un'equazione alla sua aggiunta è chiaro che quando dall'equazione data $\Omega(z)=0$, mediante una trasformazione differenziale $\theta=\Sigma\,\alpha_{ik}\,z_{ik}$ si passa ad un'equazione $P(\theta)=0$, anche le due equazioni aggiunte, della data e della trasformata, saranno legate da una relazione. È facile trovarne la natura. Basterà intanto limitarsi alle trasformazioni del 1.° ordine, il resultato per quelle di ordine superiore essendo affatto simile e discendendo poi dai teoremi del numero antecedente. Sia dunque:

$$\theta=\alpha z+\beta p+\gamma q$$

una tale trasformazione del 1.° ordine: indicando allora con $\Phi(u)$, $Q(\lambda)$ le espressioni aggiunte delle due $\Omega(z)$, $P(\theta)$, avremo intanto la relazione caratteristica:

$$\lambda\,P(\theta)-\theta\,Q(\lambda)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$$

ossia:

$$\lambda\,P(\alpha z+\beta p+\gamma q)-(\alpha z+\beta p+\gamma q)\,Q(\lambda)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$$

essendo X, Y funzioni lineari omogenee (in θ e quindi anche) in z e nelle sue derivate.

Ma (n. 8 e ss.):

$$P(\alpha z+\beta p+\gamma q)=\beta\,\frac{\partial\Omega(z)}{\partial x}+\gamma\,\frac{\partial\Omega(z)}{\partial y}+\delta\Omega(z)$$

dove δ è una certa funzione di x e di y: e quindi l'uguaglianza superiore diventa:

$$\lambda\left\{\beta\frac{\partial\Omega(z)}{\partial x}+\gamma\,\frac{\partial\Omega(z)}{\partial y}+\delta\Omega(z)\right\}-(\alpha z+\beta p+\gamma q)\,Q(\lambda)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}$$

od anche:

$$(84)\quad \Omega(z)\left\{\delta\lambda-\frac{\partial(\beta\lambda)}{\partial x}-\frac{\partial(\gamma\lambda)}{\partial y}\right\}-z\left\{\alpha\,Q(\lambda)-\frac{\partial(\beta\,Q(\lambda))}{\partial y}-\frac{\partial(\gamma\,Q(\lambda))}{\partial y}\right\}=$$
$$=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial(\beta\lambda\,\Omega(z))}{\partial x}-\frac{\partial(\gamma\lambda\,\Omega(z))}{\partial y}+\frac{\partial(\beta z\,Q(\lambda))}{\partial x}+\frac{\partial(\gamma z\,Q(\lambda))}{\partial y};$$

donde deduciamo che la funzione:

$$u = \delta\lambda - \frac{\partial (\beta \lambda)}{\partial x} - \frac{\partial (\gamma \lambda)}{\partial y}, \tag{85}$$

dove λ soddisfi alla $Q(\lambda) = 0$, è una soluzione della $\Phi(u) = 0$ ed inoltre è anche:

$$\alpha\, Q(\lambda) - \frac{\partial (\beta\, Q(\lambda))}{\partial x} - \frac{\partial (\gamma\, Q(\lambda))}{\partial y} = \Phi(u). \tag{86}$$

Abbiamo adunque il teorema:

Se da una equazione $\Omega(z) = 0$ *si ottiene mediante una trasformazione differenziale del 1.° ordine una equazione* $P(\theta) = 0$ *e si indicano con* $\Phi(u)$, $Q(\lambda)$ *le espressioni aggiunte della* $\Omega(z)$, $P(\theta)$, *dall' equazione* $Q(\lambda) = 0$ *si passa alla* $\Phi(u) = 0$ *ancora mediante una trasformazione differenziale del 1.° ordine.*

È facile individuare completamente questa trasformazione.

Ricordiamo infatti che nella seconda dimostrazione data dei teoremi generali, la trasformazione differenziale generale del 1.° ordine ci ha fatto conoscere due integrali particolari della equazione $Q(\lambda) = 0$; ogni trasformazione singolare un integrale particolare. Vogliamo ora dimostrare che la trasformazione che porta dalla $Q(\lambda) = 0$ alla $\Phi(u) = 0$ è appunto quella corrispondente a questi integrali particolari.

Osserviamo perciò innanzi tutto che la trasformazione definita dalla (85) ha i medesimi coefficienti β e γ di quella che dà θ, e quindi, secondochè questa è generale o singolare, altrettanto accade della (85): di più nel caso iperbolico secondochè la trasformazione che lega z a θ è una trasformazione di Laplace o di Lewy, altrettanto accade di quella che lega λ ad u. Basterà allora far vedere che l'espressione di u, data dalla (85), si annulla quando si sostituiscano per λ le due soluzioni particolari ϑ_1, ϑ_2 date dalla (30) (una nel caso della trasformazione singolare). Limitandosi al caso generale (poichè un ragionamento affatto analogo vale per le trasformazioni singolari) facciamo nella (84), corrispondentemente alle (23)....(30):

$$\lambda = -\vartheta_1 = -\frac{z_2(z_1 p_2 q_3)}{\Delta_{z_1 z_2}} \; ; \; \alpha = \frac{(p_1 q_2)}{(z_1 p_2 q_3)} \; ; \; \beta = \frac{(q_1 z_2)}{(z_1 p_2 q_3)} \; ; \; \gamma = \frac{(z_1 p_2)}{(z_1 p_2 q_3)} .$$

Dalla (26) risulta allora che potremo porre:

$$X = \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{z_2(q_2 z_1)}{\Delta_{z_1 z_2}} \Omega(z) \; ; \; Y = -\left\{ \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{z_2(p_2 z_1)}{\Delta_{z_1 z_2}} \Omega(z) \right\} ;$$

e quindi la (84) dà:

$$\Omega(z) \left\{ \delta\vartheta_1 - \frac{\partial(\beta\vartheta_1)}{\partial x} - \frac{\partial(\gamma\vartheta_1)}{\partial y} \right\} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ X + \beta\vartheta_1 \Omega(z) \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ Y + \gamma\vartheta_1 \Omega(z) \right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right) = 0 .$$

Analogamente per $\lambda = \vartheta_2$ si ha:

$$\Omega(z) \left\{ \delta\vartheta_2 - \frac{\partial(\beta\vartheta_2)}{\partial x} - \frac{\partial(\gamma\vartheta_2)}{\partial y} \right\} = 0$$

e quindi poichè z è arbitrario:

$$\delta\vartheta_i - \frac{\partial(\beta\vartheta_i)}{\partial x} - \frac{\partial(\gamma\vartheta_i)}{\partial y} = 0 \; ; \qquad i = 1, 2 \tag{87}$$

il che dimostra quello che si era affermato [1]).

---

[1]) È facile anche determinare la forma effettiva di u in funzione di λ. Quando θ sia posto sotto la forma:

$$\theta = \frac{(z\ p_1\ q_2)}{(z_1\ p_2\ q_3)} ,$$

la (85) dà immediatamente:

$$u = \frac{\varepsilon}{(z_1\ p_2\ q_3)} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \ , \ p_1\ q_2\right)$$

dove

$$\varepsilon = \frac{(z_1\ p_2\ q_3)}{\Delta z_1\, z_2} .$$

Si osservi ora affatto in generale, che, conosciuto il valore di una funzione θ trasformata differenziale della z di ordine qualunque e le soluzioni particolari z_1, $z_2 \ldots$ che annullano θ, si possono determinare con quadrature le funzioni v_1, $v_2 \ldots$, che figurano nella dimostrazione di Liouville e quindi anche il valore di z corrispondente a quello di θ [1]. Combinando questo risultato col precedente abbiamo il teorema:

Quando per l'equazione primitiva $\Omega(z) = 0$ sia noto anche l'integral generale dell'equazione aggiunta, altrettanto accade di ogni sua trasformata differenziale del 1.° ordine e l'integral generale della equazione aggiunta della trasformata si ottiene da quello della data con quadrature.

Un teorema perfettamente analogo vale evidentemente anche per le trasformazioni differenziali di ordine superiore, come del resto segue anche e dal teorema che precede e dall'osservare che ogni trasformazione differenziale di ordine superiore si ottiene componendo delle trasformazioni del 1.° ordine.

25. Dimostriamo infine che, se z è l'integral generale della $\Omega(z) = 0$, una qualunque sua trasformata differenziale θ è l'integral generale della equazione trasformata. Questa proprietà non è affatto evidente, poichè non è sempre vero che un integrale di una equazione del 2.° ordine, che dipenda da due funzioni arbitrarie, ne sia l'integral generale. Però nel nostro caso gli sviluppi precedenti permettono di dimostrare questo teorema; e noi lo faremo, limitandoci, come è possibile, alle sole trasformazioni del 1.° ordine.

Abbiamo già osservato al numero antecedente che quando siano noti i valori particolari z_1 e z_2 che annullano l'espressione di θ (quel valore nel caso delle trasformazioni singolari), il valore di z corrispondente a quello di θ si ottiene con quadrature. Di qui segue subito la nostra asserzione.

Se infatti prendiamo come definizione dell'integral generale quella di Cauchy, dovremo supporre noti lungo una curva C i

---

[1]) Cf. §. IV.

valori di θ, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ e quindi allora lungo la curva C è noto il valore di z; e le due relazioni:

$$\theta = \alpha z + \beta p + \gamma q \qquad \frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}$$

(essendo t il parametro dei punti della curva) determinano i valori di p e di q lungo la curva stessa: basta allora prendere quell'integrale z della $\Omega(z) = 0$ che soddisfa a queste condizioni iniziali, per ottenerne un integrale θ che soddisfi alle condizioni iniziali accennate.

Ma anche quando si definisca l'integral generale di un'equazione del 2.° ordine al modo di Picard, è facile dimostrare che θ è l'integral generale della sua equazione.

Cominciando perciò dalle equazioni del tipo ellittico, facciamo vedere che è possibile determinare z in guisa che θ prenda lungo un contorno chiuso dei valori assegnati. Si consideri infatti quell'integrale dell'equazione in θ che prende lungo il contorno i valori assegnati e si calcolino i valori corrispondenti di v_1, v_2, z. Questa funzione z così determinata è un integrale della $\Omega(z) = 0$; (basta perciò invertire il ragionamento del n. 11) [1]) e prenderà sul contorno dato dei valori determinati: è quindi compresa nella formula che dà l'integral generale della equazione data.

Un ragionamento ancora più semplice vale per le equazioni del tipo iperbolico.

Basterà allora far vedere che si possono dare arbitrariamente (purchè in modo compatibile) i valori di θ lungo due caratteristiche di diverso sistema, ad es. (supponendo l'equazione in θ ridotta alla forma normale) lungo i due assi coordinati. Ora quando sia noto θ, le due relazioni:

$$(88) \qquad \begin{cases} \theta = \alpha z + \beta p + \gamma q \\ s + ap + bq + cz = 0 \end{cases}$$

[1]) Cf. anche il §. IV.

costituiscono lungo l'asse x un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del primo ordine in z e q (lungo l'asse y in z e p); e quindi in particolare determinano i valori di z lungo gli assi stessi. Basta allora prendere quell'integrale z della (10) che assume lungo i due assi i valori così trovati per dedurne poi l'integrale θ voluto.

Ma si può osservare di più che l'integrazione delle due equazioni simultanee (88) lungo l'uno o l'altro dei due assi (nel senso sopra dichiarato) si può sempre ridurre alle quadrature.

Per vederlo nel modo più semplice, osserviamo che nel caso delle trasformazioni singolari del Lewy (poichè per quelle di Laplace la cosa è evidente) si può fare senz'altro $\theta = p$, oppure $\theta = q$: bisogna però scrivere allora l'equazione in z sotto la forma:

$$s + ap + bq = 0 .$$

Ora, quando sia $\theta = p$, lungo l'asse x si ha z con una quadratura:

$$z = \int \theta \, dx ;$$

lungo l'asse y con un'altra quadratura dalla formula:

$$z = -\int \frac{s + ap}{b} \, dy = -\int \frac{\frac{\partial \theta}{\partial y} + a\theta}{b} \, dy .$$

Una considerazione affatto analoga vale quando sia $\theta = q$.

Nel caso generale poi, facendo $z_2 = 1$, con che l'equazione in z ha sempre $c = 0$, avremo:

$$\theta = p\, q_1 - p_1\, q ;$$

ed allora lungo l'asse x si ha prima q con una quadratura [1]) dalla equazione lineare del primo ordine in q:

$$s + \frac{ap_1 + bq_1}{q_1}\, q = -\frac{a\,\theta}{q_1} ;$$

[1]) Si osservi infatti che l'equazione omogenea ammette l'integrale particolare q_1.

dal valore di q si deduce quello di p colla formula:

$$p = \frac{\theta + p_1 q}{q_1}$$

donde si ha poi z con un' altra quadratura.

Lungo l' asse y poi le due formule:

$$s + \frac{a p_1 + b q_1}{p_1} p = \frac{b \theta}{p_1} \quad ; \quad q = \frac{p q_1 - \theta}{p_1}$$

conducono alle stesse conclusioni e ciò dimostra la nostra asserzione.

Un caso speciale di questo teorema è particolarmente interessante.

È noto come il metodo di Riemann per l' integrazione di una equazione del tipo iperbolico [1]) riduca la determinazione dell' integral generale a quella di un integrale particolare, la *soluzione principale,* che deve prendere lungo due tratti paralleli agli assi coordinati valori determinati: o quando per una data equazione si sappia determinare la soluzione principale, il problema di Cauchy è per essa ricondotto alle quadrature. Da ciò che precede, segue allora:

Quando dell' equazione primitiva sia nota la soluzione principale, la determinazione di una tale soluzione per ogni trasformata differenziale si fa con quadrature.

e quindi anche:

Quando per l' equazione primitiva si sappia risolvere il problema di Cauchy, il problema analogo per ogni sua trasformata differenziale è ricondotto alle quadrature.

---

[1]) Cf. ad es. DARBOUX. — *Leçons etc.* — Vol. II, pag. 71 ss.

§. III.

LE TRASFORMAZIONI INTEGRALI

26. Il problema, che ci proponiamo ora di risolvere, è quello di determinare tutte le funzioni φ, il cui differenziale $d\varphi$ è una funzione lineare omogenea in z e nelle sue derivate fino ad un ordine qualunque m, e che per ogni forma di z, integrale della equazione data, soddisfano ad un'equazione analoga. Quando questo accada, e il differenziale $d\varphi$ contenga in modo *essenziale* le derivate m^{me} di z, diremo allora che φ è una *trasformata integrale* della z *dell'ordine m;* e diremo anche che dall'equazione in z si passa a quella in φ mediante una *trasformazione integrale dell'ordine m.*

Cominciamo anche qui dalle trasformazioni integrali del 1.° ordine. Riscriviamo perciò l'equazione in z:

$$(1)\qquad \Omega(z) = ar + 2\,bs + ct + 2\,dp + 2\,eq + fz = 0\,;$$

e la sua equazione aggiunta:

$$(2)\quad \Phi(u) = \frac{\partial^2 (au)}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 (bu)}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 (cu)}{\partial y^2} - 2\frac{\partial (du)}{\partial x} - 2\frac{\partial (eu)}{\partial y} + fu = 0\,.$$

Moltiplicando allora la $\Omega(z)$ per una soluzione della $\Phi(u) = 0$, avremo:

$$(3)\qquad u\,\Omega(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\,;$$

dove possiamo porre:

$$(4)\qquad \begin{cases} P = \alpha p + \beta q + \gamma z, \\ Q = \alpha' p + \beta' q + \gamma' z, \end{cases}$$

ed α, β, γ; α', β', γ' hanno i valori:

$$(4_a)\qquad \begin{cases} \alpha = au \quad ; \quad \beta = bu - v \; ; \quad \gamma = 2\,du - \dfrac{\partial (au)}{\partial x} - \dfrac{\partial (bu)}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\,; \\[2ex] \alpha' = bu + v \; ; \quad \beta' = cu \quad ; \quad \gamma' = 2\,eu - \dfrac{\partial (bu)}{\partial x} - \dfrac{\partial (cu)}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\,; \end{cases}$$

essendo v una funzione arbitraria di x e di y.

Se quindi z soddisfa alla (1), esisterà una funzione φ di x e di y, tale che:

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha' p + \beta' q + \gamma' z = u\,\Omega_2(z) - z\,\Phi_2(u) + \dfrac{\partial (vz)}{\partial x}\,, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -(\alpha p + \beta q + \gamma z) = -\{u\,\Omega_1(z) - z\,\Phi_1(u)\} + \dfrac{\partial (vz)}{\partial y}\,. \end{cases}$$

Queste relazioni, ove il determinante:

$$(6)\qquad \delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta = v^2 - \Delta u^2 \qquad (\Delta = b^2 - ac)$$

sia diverso da zero, possono risolversi rispetto a p e q e danno:

$$(7)\qquad \begin{cases} p = -\dfrac{1}{\delta}\left\{\beta\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \gamma' z\right) + \beta'\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma z\right)\right\}, \\[2ex] q = \dfrac{1}{\delta}\left\{\alpha\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \gamma' z\right) + \alpha'\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma z\right)\right\}, \end{cases}$$

e quindi anche:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\delta}\left\{\beta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \gamma' z\right) + \beta'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma z\right)\right\}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\delta}\left\{\alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \gamma' z\right) + \alpha'\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma z\right)\right\}\right] = 0;$$

ossia, eseguendo le derivazioni, moltiplicando per $\frac{\delta}{u}$, in forza delle (4_a) e (7):

$$(8)\quad a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\delta}{u}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\delta}\right)+\frac{\gamma}{\delta}\right\}+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\delta}{u}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha'}{\delta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'}{\delta}\right)+\frac{\gamma'}{\delta}\right\}+z\,.\,\frac{\delta}{u}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha'\gamma-\alpha\gamma'}{\delta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'\gamma-\beta\gamma'}{\delta}\right)\right\}=0.$$

Ne segue che ove sia:

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\delta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'\gamma-\beta\gamma'}{\delta}\right)=0,$$

la funzione φ, le cui derivate sono date dalle (5), soddisfa alla equazione del 2.° ordine:

$$(10)\ \mathrm{F}(\varphi)=a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\delta}{u}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta}{\delta}\right)+\frac{\gamma}{\delta}\right\}+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\delta}{u}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha'}{\delta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\beta'}{\delta}\right)+\frac{\gamma'}{\delta}\right\}=0$$

e ne è l'integral generale (cf. n. 44). Inoltre la funzione:

$$(11)\qquad \frac{u}{\delta}=\frac{u}{v^2-\Delta u^2}$$

è una soluzione particolare dell'equazione aggiunta alla (10).

Osservando allora che, quando u sia noto, la (9) è una equazione nella funzione v, possiamo enunciare il teorema:

Quando si conosca una soluzione della $\Phi(u)=0$, *ogni soluzione dell'equazione* (9), (*che non annulli la quantità* $v^2-\Delta u^2$) *permette di costruire un'altra equazione lineare omogenea del 2.° ordine, della medesima classe dell'equazione data, il cui integral generale si ottiene da quello della data con una quadratura.*

L' equazione (9) si dirà *l'equazione della trasformazione,* la (10) *la trasformata della* (1) *mediante la coppia* (u, v). Si noti esplicitamente l'uguaglianza dei termini del 2.° ordine nell' equazione data ed in ognuna delle sue trasformate.

27. Abbiamo supposto finora che il determinante $\delta = v^2 - \Delta u^2$ fosse diverso da zero e quindi le (5) potessero risolversi rispetto a p e a q. Esaminiamo ora il caso di $\delta = 0$. Esso può darsi solo per $\Delta \geq 0$ (e per $v = \pm \sqrt{\Delta} \, . \, u$), cioè solo per i due casi iperbolico e parabolico.

Quando sia $\delta = 0$, tutti due i determinanti:

$$\alpha \gamma' - \alpha' \gamma \quad ; \quad \beta \gamma' - \beta' \gamma$$

sono diversi da zero, altrimenti φ soddisferebbe per ogni valore di z ad una equazione lineare del 1.° ordine, il che è assurdo. Moltiplicando allora la prima delle (5) per α, la seconda per α' e sommando, si ha:

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (\alpha' \gamma - \alpha \gamma') z = 0 \tag{12}$$

e quindi, traendo di qui la z e sostituendo nella prima (o nella seconda) delle (5), si ha in φ l'equazione del 2.° ordine:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\alpha' \gamma - \alpha \gamma'} \right) + \beta' \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\alpha' \gamma - \alpha \gamma'} \right) + \gamma' \frac{\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha' \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\alpha' \gamma - \alpha \gamma'} = 0; \tag{13}$$

ossia:

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\, b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2\,\mathrm{D} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\,\mathrm{E} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \tag{13*}$$

dove D ed E sono funzioni determinate di x e di y; ed il cui integral generale è dato dalla formula:

$$(14)\qquad \varphi = \int \left\{ u\,\Omega_2(z) - z\,\Phi_2(u) \pm \frac{\partial(\sqrt{\Delta}\,.\,u z)}{\partial x} \right\} dx - \\ - \left\{ u\,\Omega_1(z) - z\,\Phi_1(u) \mp \frac{\partial(\sqrt{\Delta}\,.\,u z)}{\partial y} \right\} dy\;,$$

nella quale si devono prendere i segni superiori od inferiori, secondochè nella (13) si è preso:

$$(15)\qquad v = \pm\sqrt{\Delta}\,.\,u\,.$$

Diremo *singolari* queste trasformazioni, per le quali il determinante δ si annulla e potremo allora enunciare il teorema:

Soltanto le equazioni del tipo iperbolico e parabolico ammettono delle trasformazioni singolari: e queste trasformazioni sono definite nel caso del tipo iperbolico dalle formule:

$$(14_a)\qquad \varphi = \int \left\{ u\,\Omega_2(z) - z\,\Phi_2(u) \pm \frac{\partial(\sqrt{\Delta}\,.\,u z)}{\partial x} \right\} dx - \\ - \left\{ u\,\Omega_1(z) - z\,\Phi_1(u) \mp \frac{\partial(\sqrt{\Delta}\,.\,u z)}{\partial y} \right\} dy\;,$$

e nel caso parabolico dall'altra:

$$(14_b)\qquad \varphi = \int \{ u\Omega_2(z) - z\,\Phi_2(u) \}\, dx - \{ u\,\Omega_1(z) - z\,\Phi_1(u) \}\, dy\,.$$

Scriviamo esplicitamente queste formule nel caso che l'equazione sia ridotta all'una o all'altra delle sue forme normali.

Nel caso del tipo iperbolico l'equazione allora sarà:

$$(16)\qquad s + ap + bq + cz = 0\;;$$

e facendo allora nelle (4_a) (dopo aver fatto nei coefficienti i cambiamenti corrispondenti) $u = v$, $\varphi = 2\,\sigma$, avremo:

$$(17)\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial x} = u\,\Omega_2(z)\quad;\quad \frac{\partial\sigma}{\partial y} = z\,\Phi_1(u)\,;$$

donde si trae l'equazione in σ:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = u\,\Omega_2 \left(\frac{1}{\Phi_1(u)}\,\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right), \tag{18}$$

ossia sviluppata:

$$u\,\Phi_1(u)\,\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} - k u^2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} - [\Phi_1(u)]^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0, \tag{18*}$$

dove:

$$k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c$$

è uno degli *invarianti* di Darboux dell'equazione (16).

Affatto analogamente facendo $v = -u$, $\varphi = -2\tau$, si ha:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = z\,\Phi_2(u) \quad ; \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = u\,\Omega_1(z); \tag{19}$$

e quindi l'equazione in τ:

$$u\,\Phi_2(u)\,\frac{\partial^2 \tau}{\partial x\,\partial y} - h u^2 \frac{\partial \tau}{\partial x} - [\Phi_2(u)]^2 \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \tag{20}$$

dove:

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$$

è l'altro invariante della (16).

Nel caso parabolico prenderemo come forma normale:

$$r + 2\,ap + 2\,bq + cz = 0, \tag{21}$$

ed allora facendo nelle (5) $v = 0$, $\varphi = \rho$ avremo:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -2\,z\,\Phi_2(u) \quad ; \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\left\{u\,\Omega_1(z) - z\,\Phi_1(u)\right\}, \tag{22}$$

e quindi ρ soddisfa all'equazione del 2.° ordine:

$$2\,\frac{\partial \rho}{\partial y} - u\,\Omega_1\left(\frac{1}{\Phi_2(u)}\,\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) + \frac{\Phi_1(u)}{\Phi_2(u)}\,\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{23}$$

che è ancora del tipo parabolico ed ha la forma normale.

Le tre trasformazioni singolari sono dunque definite dalle formule:

$$(17^*) \qquad \sigma = \int u\,\Omega_2(z)\,dx + z\,\Phi_1(u)\,dy\,,$$

$$(19^*) \qquad \tau = \int z\,\Phi_2(u)\,dx + u\,\Omega_1(z)\,dy\,,$$

$$(22^*) \qquad \rho = \int \{u\,\Omega_2(z) - z\,\Phi_2(u)\}\,dx - \{u\,\Omega_1(z) - z\Phi_1(u)\}\,dy\,.$$

28. L'equazione (9) della trasformazione è del secondo ordine in v, lineare nelle derivate di ordine superiore, coi medesimi coefficienti a, b, c dell'equazione data: gli altri coefficienti dipendono inoltre dalla soluzione particolare dell'equazione aggiunta che si è presa quale moltiplicatore della $\Omega(z)$. La sua integrazione diretta, che non può tentarsi del resto se non dopo fissata la soluzione u, è quindi tutt'altro che facile. Essa gode però di proprietà notevolissime che discendono molto semplicemente dal suo significato e ne fanno trovare agevolmente l'integral generale.

È chiaro innanzi tutto che la (9) è invariante per un cambiamento di variabili indipendenti: quando poi si muti proporzionalmente la funzione incognita col porre:

$$z = \lambda\,z'\,,$$

le (5) dimostrano subito che la funzione v resta moltiplicata per λ; di guisa che ogni integrale dell'antica equazione della trasformazione, dà, moltiplicato per λ, un integrale della nuova equazione.

Se inoltre φ_1 e φ_2 sono due trasformate integrali della z mediante le due coppie $(u\,v_1)$, $(u\,v_2)$, corrispondenti alla medesima soluzione u della (2), le (5) dimostrano che si ha:

$$d\,(\varphi_1 - \varphi_2) = d\,\{(v_1 - v_2)\,z\}\,,$$

e quindi:

$$(24) \qquad \varphi_1 - \varphi_2 = (v_1 - v_2)\,z\,,$$

(potendosi prendere uguale allo zero la costante d'integrazione, poichè ogni funzione φ contiene in sè una costante additiva arbitraria). Ne segue che, quando si sia integrata l'equazione della trasformazione, la più generale trasformata integrale φ della z, corrispondente alla soluzione u è subito nota, quando ne sia nota una particolare; cioè:

Quando si sia integrata l'equazione della trasformazione, una sola quadratura è sufficiente per ottenere tutte le trasformate integrali della funzione z, corrispondenti alla soluzione particolare u considerata.

Ma la proprietà più importante, quella che ci dà l'integral generale della (9), è data dal teorema seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la funzione φ definita dalle (5), *soddisfi ad una equazione lineare del 2.º ordine, è (quando il determinante δ si supponga diverso da zero) che le sue derivate si annullino per una soluzione particolare della equazione in z.*

Osserviamo perciò innanzi tutto che se una funzione φ definita dalle formule:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \alpha' p + \beta' q + \gamma' z\,, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -(\alpha p + \beta q + \gamma z)\,, \end{aligned}\right.$$

per ogni forma della funzione z, integrale della (1), soddisfa anche essa ad un'equazione lineare del 2.º ordine, essa può sempre pensarsi data dalle (5). Si osservi infatti che la condizione d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0$$

dà:

$$\alpha\, r + (\alpha' + \beta)\, s + \beta'\, t + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha'}{\partial y} + \gamma\right) p +$$
$$+ \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \gamma'\right) q + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \gamma'}{\partial y}\right) z = 0;$$

e quindi, se non è identicamente soddisfatta (nel qual caso φ e z

sono proporzionali, il che non offre alcun interesse), dovrà questa relazione essere equivalente alla (1), a cui la z già soddisfa: si avrà dunque indicando con u un conveniente fattore di proporzionalità:

$$\alpha = au \;;\; \alpha' + \beta = 2\,bu \;;\; \beta' = cu \;;\; \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \alpha'}{\partial y} + \gamma = 2\,du \;;$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial \beta'}{\partial y} + \gamma' = 2\,eu \;;\; \frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial \gamma'}{\partial y} = fu \,,$$

donde segue che u è una soluzione della $\Phi(u) = 0$; e si hanno quindi le (4_a) e le (5), dove v è una funzione determinata di x e di y.

Posto ciò, indicando con $F(\varphi) = 0$ l'equazione a cui la φ per ipotesi soddisfa (la quale equazione non conterrà evidentemente in modo esplicito la funzione incognita), avremo che, supponendo la funzione φ come nota, la z come incognita, le due relazioni (5), la (1) e la $F(\varphi) = 0$, quando si supponga il determinante δ diverso da zero, formano un sistema completo nel senso già definito al n. 5. Infatti allora ogni ulteriore derivazione porta almeno due nuove relazioni distinte e due nuove derivate indipendenti della z (poichè dalle (5) si possono trarre p e q); nè del resto tenendo conto delle $\Omega(z) = 0$, $F(\varphi) = 0$, possono ottenersi più relazioni distinte che non derivate di z indipendenti, poichè altrimenti la z soddisferebbe ad un'altra equazione a derivate parziali, non conseguenza della (1), il che è assurdo. Ne segue che l'equazione ai differenziali totali:

$$dz = p\,dx + q\,dy \tag{25}$$

dove p e q hanno i valori dati dalle (7), è senz'altro illimitatamente integrabile.

L'integral generale della (25) avrà dunque la forma:

$$z = Z + a_1 z_1$$

dove z_1 è una soluzione particolare della (25) stessa, resa omogenea, ed a_1 è una costante arbitraria, della quale si può disporre in guisa che la z prenda in un certo punto un valore arbitrario.

Ne segue, affatto analogamente a quel che si è veduto per le trasformazioni differenziali, che le derivate della φ devono annullarsi per $z = z_1$. Si noti ora che, a causa della (3), la z_1 è una soluzione particolare della (1) (in quanto essa rende $P = Q = 0$); le derivate della φ devono dunque annullarsi per una soluzione particolare dell' equazione data.

Inversamente questa condizione è anche sufficiente e l'equazione che si ottiene in φ è appunto la (10). Infatti, quando essa sia soddisfatta, facendo nella (8) $z = z_1$ essa diventa:

$$z_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha \gamma' - \alpha' \gamma}{\delta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta \gamma' - \beta' \gamma}{\delta} \right) \right\} = 0 ;$$

e quindi, poichè z_1 è diverso da zero,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha \gamma' - \alpha' \gamma}{\delta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta \gamma' - \beta' \gamma}{\delta} \right) = 0 ;$$

cioè φ soddisfa effettivamente ad un' equazione lineare del 2.° ordine (e la funzione v corrispondente all' equazione della trasformazione). Il nostro teorema è così dimostrato.

29. Si ha di qui immediatamente la formula che dà l' integral generale della equazione (9). Per ciò che precede, si ha infatti, facendo nelle (5) $z = z_1$:

$$\frac{\partial (v z_1)}{\partial x} = -(u\, \Omega_2 (z_1) - z_1 \Phi_2(u)) ,$$

$$\frac{\partial (v z_1)}{\partial y} = u\, \Omega_1 (z_1) - z_1 \Phi_1 (u) ,$$

(e la condizione d' integrabilità è identicamente soddisfatta in forza delle equazioni a cui z_1 ed u soddisfano); e quindi la funzione:

$$(26) \qquad v = \frac{1}{\lambda} \int \{\lambda\, \Phi_2 (u) - u\, \Omega_2 (\lambda)\}\, dx - \{\lambda\, \Phi_1 (u) - u\, \Omega_1 (\lambda)\}\, dy$$

dove, per evitar confusioni, abbiamo indicato con λ l' integral generale della equazione (1), è l' integral generale della equazione della trasformazione.

Abbiamo dunque il teorema:

L' integral generale della equazione della trasformazione si deduce con una sola quadratura da quello dell' equazione data.

Nello stesso tempo abbiamo determinato la forma più generale della funzione φ, trasformata integrale del 1.° ordine della z; essa è data da:

$$\varphi = \int \left\{ u\,\Omega_2(z) - z\,\Phi_2(u) + \frac{\partial(vz)}{\partial x} \right\} dx - \left\{ u\,\Omega_1(z) - z\,\Phi_1(u) - \frac{\partial(vz)}{\partial y} \right\} dy \,, \tag{27}$$

essendo v dato dalla formula superiore.

La (27) si può anche scrivere:

$$\varphi = \int \lambda \left\{ \left[u \left(b\,\frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial x} + c\,\frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial y} \right) + v\,\frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial x} \right] dx - \right. \tag{27*}$$

$$\left. - \left[u \left(a\,\frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial x} + b\,\frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial y} \right) - v\,\frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial y} \right] dy \right\},$$

sotto la qual forma è chiaro che le derivate della φ si annullano per $z = \lambda$. L' equazione in φ prende allora la forma:

$$a\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\,b\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y} + c\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \tag{28}$$

$$2\,\frac{\lambda\sqrt{\delta}}{u} \left\{ \Phi_1\left(\frac{u}{\lambda\sqrt{\delta}}\right) - v\,\frac{\partial\left[\frac{1}{\lambda\sqrt{\delta}}\right]}{\partial y} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2\,\frac{\lambda\sqrt{\delta}}{u} \left\{ \Phi_2\left(\frac{u}{\lambda\sqrt{\delta}}\right) + v\,\frac{\partial\left[\frac{1}{\lambda\sqrt{\delta}}\right]}{\partial y} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \,,$$

dove, come al solito:

$$\delta = v^2 - \Delta\,u^2 .$$

Dalla forma (26) della funzione v seguono alcune conseguenze, che importa notare.

Innanzi tutto, poichè l' integrale:

$$\int \{\lambda\,\Phi_2(u) - u\,\Omega_2(\lambda)\}\,dx - \{\lambda\,\Phi_1(u) - u\,\Omega_1(\lambda)\}\,dy$$

muta soltanto segno, quando si scambi λ con u e gli elementi relativi all'equazione $\Omega(z) = 0$ con quelli ıelativi alla sua aggiunta, la funzione $\frac{-v\lambda}{u}$ è l'integral generale della equazione della trasformazione per la $\Phi(u) = 0$, relativa alla soluzione λ della $\Omega(z) = 0$: e quindi:

L'integrazione della equazione (9) *della trasformazione porta con sè l'integrazione della equazione analoga per l'equazione aggiunta della data: da un integrale dell'una si ottiene un integrale dell'altra senza alcun segno di quadratura.*

Inoltre la (26) definisce la funzione $v\lambda$ a meno di una costante additiva arbitraria; donde il teorema:

Alla medesima coppia (λ, u) *di soluzioni dell'equazione data e della aggiunta corrisponde una serie semplicemente infinita di equazioni lineari del 2.° ordine, trasformate della* $\Omega(z) = 0$ *(e che si ottengono tutte facendo variare la costante additiva contenuta in* $v\lambda$*) ed il cui integral generale è dato dalla formula:*

$$\varphi + \varepsilon \frac{z}{\lambda}$$

dove φ *è l'integral generale di una tra esse,* ε *la costante arbitraria, da cui l'equazione dipende.*

La (27*) infine dimostra che, perchè due funzioni φ trasformate integrali della z coincidano, è necessario e sufficiente che sia:

$$\lambda = \lambda' \ ; \ u = u' \ ; \ v = v' ;$$

oppure che siano proporzionali [1]).

---

[1]) Se infatti le derivate della funzione φ data dalle (27*) si annullano anche per $z = \lambda'$, dovremo avere:

$$\left\{\begin{aligned} &u\left(b\,\frac{\partial \frac{\lambda'}{\lambda}}{\partial x} + c\,\frac{\partial \frac{\lambda'}{\lambda}}{\partial y}\right) + v\,\frac{\partial \frac{\lambda'}{\lambda}}{\partial x} = 0 \\ &u\left(a\,\frac{\partial \frac{\lambda'}{\lambda}}{\partial x} + b\,\frac{\partial \frac{\lambda'}{\lambda}}{\partial y}\right) - v\,\frac{\partial \frac{\lambda'}{\lambda}}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right.$$

30. Le formule (26)... (28) danno la più generale trasformazione integrale del 1.° ordine della $\Omega(z) = 0$: da esse si deducono quelle già note come casi particolarissimi.

Noi considereremo due casi soltanto, che danno luogo a due trasformazioni molto note ed importanti.

La prima di queste trasformazioni si ottiene, quando l'equazione (9) della trasformazione ammetta l'integrale particolare $v = 0$.

Deve esistere in tal caso una coppia di soluzioni λ ed u della equazione data e dell'aggiunta, per le quali si abbia:

$$
(29) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& a \frac{\partial \log \frac{u}{\lambda}}{\partial x} + b \frac{\partial \log \frac{u}{\lambda}}{\partial y} = d_1 - d \; ; \\
& b \frac{\partial \log \frac{u}{\lambda}}{\partial x} + c \frac{\partial \log \frac{u}{\lambda}}{\partial y} = e_1 - e \; ;
\end{aligned}
\right.
$$

donde segue (dovendo essere $\delta = -\Delta u^2 \mp 0$ e quindi $\Delta \mp 0$) la condizione d'integrabilità:

$$
(30) \qquad \mathrm{H} = 0 \; ;
$$

cioè l'equazione data deve essere equivalente alla sua aggiunta.

Inversamente se questo accade, se $\mathrm{H} = 0$, l'equazione data e la sua aggiunta sono equivalenti ed il fattore di proporzionalità che cambia l'una nell'altra è determinato appunto dalle equazioni (29): e quindi ad *ogni* soluzione λ dell'equazione data, se ne può coordinare una u della aggiunta che renda $v = 0$.

---

e quindi, poichè $\delta \mp 0$,

$$\lambda' = c\,\lambda \quad (c = \text{costante}) \; ;$$

cioè si può fare $\lambda' = \lambda$.

Allora dovrà essere confrontando le derivate prime di $\frac{z}{\lambda}$:

$$b\,(u-u') + (v-v') = 0 \;\; , \;\; c\,(u-u') = 0 \;\; ; \;\; a\,(u-u') = 0 \;\; ; \;\; b\,(u-u') - (v-v') = 0$$

e quindi $u = u'$; $v = v'$.

Di qui intanto segue:

Perchè una equazione del tipo ellittico od iperbolico sia equivalente alla sua aggiunta, è necessario e sufficiente che si possano determinare due soluzioni particolari λ *ed* u *delle due equazioni, tali che per esse si abbia:*

$$u\,\Omega_1(\lambda) - \lambda\,\Phi_1(u) = 0 \quad ; \quad u\,\Omega_2(\lambda) - \lambda\,\Phi_2(u) = 0 .$$

Si ha infatti allora $\mathrm{H} = 0$ [1]).

Quando questa condizione sia soddisfatta, potremo dunque fare nelle (5) $v = 0$: esse allora diventano:

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = u\,\Omega_2(z) - z\,\Phi_2(u) \quad ; \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -\{u\,\Omega_1(z) - z\,\Phi_1(u)\} \quad ; \end{cases}$$

e la funzione φ, da esse definita, soddisfa all'equazione:

$$(32)\qquad a\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2\,b\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + c\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} -$$

$$-\,2\left(a\,\frac{\partial \log \sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}{\partial x} + b\,\frac{\partial \log \sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}{\partial y} - d\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} -$$

$$-\,2\left(b\,\frac{\partial \log \sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}{\partial x} + c\,\frac{\partial \log \sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}{\partial y} - e\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0;$$

nella quale va preso il segno superiore o l'inferiore, secondochè è $\Delta \gtrless 0$: e cambiando funzione incognita col porre:

$$(33)\qquad \varphi = \sqrt{\pm\Delta}\,.\,u\,z' ,$$

---

[1]) Del resto l'equazione di condizione $\mathrm{H} = 0$ risulta immediatamente dalla (9), quando in essa si faccia $v = 0$: essa diventa allora indipendente da u e si riduce appunto a:

$$\mathrm{H} = 0 ,$$

il che concorda con quanto sopra abbiamo osservato.

la funzione:

$$(34)\qquad z' = \frac{1}{\sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}\int \{u\,\Omega_2(z) - z\,\Phi_2(u)\}\,dx - \{u\,\Omega_1(z) - z\,\Phi_1(u)\}\,dy$$

soddisferà all'equazione:

$$(35)\qquad \mathrm{F}(z') = \mathrm{F}\left(\frac{1}{\sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}\right);$$

dove:

$$(36)\qquad \mathrm{F}(\omega) = \frac{1}{\omega}\left\{a\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + 2\,b\,\frac{\partial^2\omega}{\partial x\,\partial y} + c\,\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + 2\,d\,\frac{\partial\omega}{\partial x} + 2\,e\,\frac{\partial\omega}{\partial y}\right\}.$$

La (35) ammette la soluzione particolare $z' = \dfrac{1}{\sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}$: si trae di qui una conseguenza interessante. Si osservi perciò che l'espressione di H è simmetrica nei coefficienti dell'equazione data e dell'aggiunta, e che l'equazione in z', e quindi anche la sua aggiunta, soddisfano evidentemente alla medesima condizione $\mathrm{H}' = 0$, a cui soddisfa l'equazione data: potremo dunque di nuovo applicare all'una o all'altra di queste due equazioni la medesima trasformazione. Indichiamo allora con $\Omega'(z') = 0$ l'equazione in z', con $\Phi'(u') = 0$ la sua aggiunta, e facciamo su questa la trasformazione superiore corrispondente alla soluzione particolare $z' = \dfrac{1}{\sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}$ della (35). Avremo che la funzione:

$$u\int\left\{\frac{1}{\sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}\,\Phi'_2(u') - u'\,\Omega'_2\left(\frac{1}{\sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}\right)\right\}dx -$$
$$-\left\{\frac{1}{\sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}\,\Phi'_1(u') - u'\,\Omega'_1\left(\frac{1}{\sqrt{\pm\Delta}\,.\,u}\right)\right\}dy$$

è l'integral generale della equazione:

$$\mathrm{G}(\lambda) = \mathrm{G}(u);$$

dove:

$$G(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left\{ a \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + 2\, b \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + 2\, d_1 \frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2\, e_1 \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right\},$$

ossia, poichè l'equazione ammette la soluzione particolare $\lambda = u$, della equazione aggiunta della data. Ne deduciamo:

La trasformazione definita dalle formule superiori è involutoria.

Riducendo l'equazione ad una delle sue forme normali, si vede immediatamente che la trasformazione superiore è quella di Moutard, corrispondente alla soluzione particolare λ dell'equazione data (le (29) danno infatti allora $u = \lambda$). Le formule superiori sono dunque le formule più generali della trasformazione di Moutard.

31. La trasformazione del Moutard non è che una particolare di una serie semplicemente infinita di trasformazioni, le quali si ottengono tutte, secondo il teorema generale del n. 29, prendendo $v\lambda$ uguale ad una *costante arbitraria* ε, che, quando si faccia uguale allo zero, dà la trasformazione di Moutard, ed il cui integral generale si ottiene dalla trasformata φ di Moutard aggiungendovi la funzione $\varepsilon \dfrac{z}{\lambda}$. Abbiamo dunque il teorema:

Se l'equazione $\Omega(z) = 0$ è equivalente alla sua aggiunta, e ad ogni soluzione u di questa si fa corrispondere quella soluzione λ della data, che soddisfa alle (29) ; *la funzione φ_ε definita dalla formula:*

$$(37) \qquad \varphi_\varepsilon = \int \lambda \left\{ \left[u \left(b \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial x} + c \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial y} \right) + \varepsilon \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial x} \right] dx - \right.$$
$$\left. - \left[u \left(a \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial x} + b \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial y} \right) - \varepsilon \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial y} \right] dy \right\},$$

dove ε è una costante arbitraria, soddisfa ad un' equazione lineare del 2.° ordine, che per $\varepsilon = 0$ si riduce alla trasformata di Moutard *della* $\Omega(z) = 0$ *mediante la soluzione particolare* λ; *ed il cui integral generale si ottiene da quello* φ_0 *della trasformata di Moutard colla formula:*

$$\varphi_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon \frac{z}{\lambda}.$$

L'equazione in φ_ε si può scrivere:

$$(38) \qquad a \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x \, \partial y} + c \frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial y^2} +$$

$$+ 2 \left\{ d - a \frac{\partial \log \sqrt{\delta_\varepsilon}}{\partial x} - b \frac{\partial \log \sqrt{\delta_\varepsilon}}{\partial y} - \frac{\varepsilon}{u} \sqrt{\delta_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{\delta_\varepsilon}} \right) \right\} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial x} +$$

$$+ 2 \left\{ e - b \frac{\partial \log \sqrt{\delta_\varepsilon}}{\partial x} - c \frac{\partial \log \sqrt{\delta_\varepsilon}}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{u} \sqrt{\delta_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\lambda \sqrt{\delta_\varepsilon}} \right) \right\} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial y} = 0;$$

dove, come al solito:

$$\delta_\varepsilon = v^2 - \Delta u^2 = \frac{1}{\lambda^2} \{ \varepsilon^2 - \Delta \lambda^2 u^2 \}.$$

Cambiando quindi funzione incognita col porre:

$$\varphi_\varepsilon = \sqrt{\delta_\varepsilon} \, . \, z',$$

la funzione:

$$(39) \qquad z'_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\delta_\varepsilon}} \int \left(u \, \Omega_2(z) - z \, \Phi_2(u) + \varepsilon \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial x} \right) dx -$$

$$- \left(u \, \Omega_1(z) - z \, \Phi_1(u) - \varepsilon \frac{\partial \frac{z}{\lambda}}{\partial y} \right) dy$$

soddisfa all'equazione del 2.° ordine:

$$(40) \qquad F_\varepsilon(z') = F_\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\delta_\varepsilon}} \right);$$

dove:

$$(41)\ F_\varepsilon(\omega)=\frac{1}{\omega}\left\{a\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+2\left(d-\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\delta_\varepsilon}}\right)\right)\frac{\partial\omega}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+2\left(e+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\partial\sqrt{\delta_\varepsilon}}\right)\right)\frac{\partial\omega}{\partial y}\right\}.$$

L'invariante H'_ε di questa equazione è dato da:

$$H'_\varepsilon=\varepsilon\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sqrt{\delta_\varepsilon}\,.\,u}{\Delta}\left(a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\delta_\varepsilon}}\right)+b\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\delta_\varepsilon}}\right)\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\sqrt{\delta_\varepsilon}\,.\,u}{\Delta}\left(b\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\delta_\varepsilon}}\right)+c\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\delta_\varepsilon}}\right)\right)\right]\right\};$$

e quindi in generale non si annulla altro che per $\varepsilon=0$.

Scriviamo esplicitamente queste formule pel caso che l'equazione $\Omega(z)=0$ abbia la forma normale. Avremo allora che:

Indicando con ω una soluzione particolare dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=fz$$

la funzione:

$$z'_\varepsilon=\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon^2-\omega^4}}\int(\omega^2+\varepsilon)\frac{\partial\frac{z}{\omega}}{\partial x}dx-(\omega^2-\varepsilon)\frac{\partial\frac{z}{\omega}}{\partial y}dy$$

soddisfa, per ogni valore della costante arbitraria ε, all'equazione lineare del 2.° ordine:

$$F_\varepsilon(z'_\varepsilon)=\frac{1}{z'_\varepsilon}\left\{\frac{\partial^2 z'_\varepsilon}{\partial x\,\partial y}-\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon^2-\omega^4}}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-\omega^4}}\right)\frac{\partial z'_\varepsilon}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\varepsilon\frac{\sqrt{\varepsilon^2-\omega^4}}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-\omega^4}}\right)\frac{\partial z'_\varepsilon}{\partial y}\right\}=F_\varepsilon\left(\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon^2-\omega^4}}\right);$$

e ne è l'integral generale.

Quando invece l'equazione abbia la forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f z \,,$$

allora la z'_ε è data da:

$$z'_\varepsilon = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \int \left\{ \varepsilon \frac{\partial \frac{z}{\omega}}{\partial x} + \omega^2 \frac{\partial \frac{z}{\omega}}{\partial y} \right\} dx + \left\{ \varepsilon \frac{\partial \frac{z}{\omega}}{\partial y} - \omega^2 \frac{\partial \frac{z}{\omega}}{\partial x} \right\} dy \,;$$

e l'equazione in z'_ε ha la forma:

$$\mathrm{F}_\varepsilon (z'_\varepsilon) = \frac{1}{z'_\varepsilon} \left\{ \frac{\partial^2 z'_\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z'_\varepsilon}{\partial y^2} - 2\,\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \right) \frac{\partial z'_\varepsilon}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - 2\,\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \right) \frac{\partial z'_\varepsilon}{\partial y} \right\} = \mathrm{F}_\varepsilon \left(\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \right).$$

32. Un'altra trasformazione molto notevole si ottiene dalle nostre formule generali, quando si supponga che l'equazione data $\Omega(z) = 0$ ammetta la soluzione particolare $z = 1$, (non contenga cioè esplicitamente la funzione incognita) e si costruisca la funzione v relativa alla coppia $(1, u)$. Avremo in tal caso le formule:

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -2\,eu + \frac{\partial (bu)}{\partial x} + \frac{\partial (cu)}{\partial y} \,; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= 2\,du - \frac{\partial (au)}{\partial x} - \frac{\partial (bu)}{\partial y} \,; \end{aligned} \right.$$

dalle quali v è definito a meno di una costante arbitraria. Le (5) diventano allora, essendo $\gamma = \gamma' = 0$:

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= (bu + v)\, p + cu\, q \,; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\,aup - (bu - v)\, q \,; \end{aligned} \right.$$

e la funzione φ, da esse definita, soddisfa all'equazione:

$$(44) \qquad a\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{v^2-\Delta u^2}{u}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{au}{v^2-\Delta u^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{bu-v}{v^2-\Delta u^2}\right)\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{v^2-\Delta u^2}{u}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{bu+v}{v^2-\Delta u^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{cu}{v^2-\Delta u^2}\right)\right\}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

A questa equazione si poteva pervenire anche direttamente, osservando che le (43) risolute rispetto a p e q danno:

$$(45) \qquad \begin{cases} p=-\dfrac{bu-v}{v^2-\Delta u^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}-\dfrac{cu}{v^2-\Delta u^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\,; \\[2ex] q=\dfrac{au}{v^2-\Delta u^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\dfrac{bu+v}{v^2-\Delta u^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\,; \end{cases}$$

e quindi anche:

$$(44^*) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{au}{v^2-\Delta u^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{bu+v}{v^2-\Delta u^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{bu-v}{v^2-\Delta u^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{cu}{v^2-\Delta u^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right\}=0\,;$$

cioè, a meno del fattore $\dfrac{u}{v^2-\Delta u^2}$, (soluzione particolare dell'equazione aggiunta) appunto la (44).

Le (45) inoltre dimostrano immediatamente che la funzione z si ottiene dalla φ colla stessa trasformazione che fa passare dalla φ alla z, quando però si prenda come soluzione particolare della equazione aggiunta della (44) la funzione $\dfrac{-u}{v^2-\Delta u^2}$, come funzione v corrispondente la $\dfrac{v}{v^2-\Delta u^2}$: cioè la relazione tra le due funzioni v e z è involutoria.

La funzione v è definita dalle (42) a meno di una costante arbitraria ε; e due funzioni φ_1 e φ_2 corrispondenti a valori diversi ε_1 ed ε_2 della costante differiscono di $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\,z$. Ne segue che, facendo sulla funzione φ data dalle (43) la trasformazione superiore, prendendo come soluzione particolare dell'equazione aggiunta la $\frac{-u}{v^2 - \Delta u^2}$, come funzione v corrispondente la $\frac{v}{v^2 - \Delta u^2} + \varepsilon$, ($\varepsilon$ = cost. arbitraria) si ottiene la funzione $z + \varepsilon\varphi$; cioè (a meno del fattore ε) quella che si sarebbe ottenuta dalla z, prendendo invece della v la $v + \frac{1}{\varepsilon}$. Abbiamo quindi il teorema:

Se l'equazione primitiva manca del termine in z, ad ogni soluzione della equazione aggiunta si può coordinare (*mediante le* (42) .... (44)) *una serie semplicemente infinita (dipendente da una costante arbitraria) di equazioni della medesima forma, il cui integral generale si ottiene da quello della data mediante una quadratura. Tutte le equazioni della serie (l'equazione data compresa) sono tra di loro in identica relazione: da una qualunque di esse si può ottenerne un'altra arbitraria colla stessa trasformazione; e se φ_1 e φ_2 sono gli integrali generali di due equazioni della serie, l'integral generale di un'equazione qualunque della serie è dato da:*

$$\varphi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2, \tag{46}$$

essendo c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Inversamente, quando si abbiano le formule:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha p + \beta q \quad ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \alpha' p + \beta' q ;$$

con $\alpha\beta' - \alpha'\beta \mp 0$, le due funzioni φ e z soddisfano rispettivamente a due equazioni lineari del 2.° ordine, trasformate l'una dell'altra colla trasformazione superiore.

Questa trasformazione fu data per la prima volta, almeno a mia conoscenza, dal sig. Roger Liouville nella memoria *Sulle equazioni del 2.° ordine,* già citata: fu poi ritrovata per le equazioni del tipo ellittico dal sig. Burgatti [1]), che ne ha fatto un'appli-

---

[1]) P. Burgatti. — *Sulle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine (tipo ellittico)....* (Annali di Matematica, Serie II, Tomo XXIII, Fascicolo 3°. — Luglio 1895).

cazione interessante alla classificazione dei sistemi ortogonali su una data superficie. Essa è molto importante, potendosi ogni equazione lineare del 2.° ordine ridursi a mancare del termine in z, quando ne sia noto un integrale particolare.

La trasformazione antecedente, che diremo di *Liouville,* contiene come caso particolare quella di *Moutard,* quando, oltre essere $f = 0$, sia anche $H = 0$, e si prenda quella soluzione u della equazione aggiunta che dà anche $v = 0$.

33. Una proprietà molto importante della trasformazione di Liouville è data dal teorema seguente:

Se si conoscono m integrali particolari dell'equazione aggiunta della $\Omega(z) = 0$, *altrettanto accade di ogni equazione ottenuta dalla data con trasformazioni di Liouville.*

Siano infatti $u_1, u_2 \dots u_m$ gli integrali particolari della equazione aggiunta della data e consideriamo di questa le trasformate di Liouville, corrispondenti alle soluzioni particolari $u_1, u_2 \dots u_m$. Dovremo perciò formare le funzioni $v_1, v_2 \dots v_m$ definite dalle relazioni:

$$(47)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x} &= -2\, e u_i + \frac{\partial (b u_i)}{\partial x} + \frac{\partial (c u_i)}{\partial y}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} &= 2\, d u_i - \frac{\partial (a u_i)}{\partial x} - \frac{\partial (b u_i)}{\partial y}; \quad (i = 1, 2 \dots m) \end{aligned} \right.$$

e le $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_m$ dalle altre:

$$(48)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} &= (b u_i + v_i)\, p + c u_i\, q\ ; \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} &= -a u_i\, p - (b u_i - v_i)\, q\ ; \end{aligned} \right.$$

e queste funzioni φ_i soddisfano rispettivamente alle equazioni:

$$
(49)\qquad a\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\,\partial y}+c\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y^2}+
$$

$$
+\frac{v_i^2-\Delta u_i^2}{u_i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{au_i}{v_i^2-\Delta u_i^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{bu_i-v_i}{v_i^2-\Delta u_i^2}\right)\right]\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+
$$

$$
+\frac{v_i^2-\Delta u_i^2}{u_i}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{bu_i+v_i}{v_i^2-\Delta u_i^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{cu_i}{v_i^2-\Delta u_i^2}\right)\right]\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}=0
$$

$$
(i=1,2\,\ldots\,m)\,.
$$

Le (48) danno anche:

$$
\left\{\begin{aligned}
p&=-\frac{bu_i-v_i}{v_i^2-\Delta u_i^2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}-\frac{cu_i}{v_i^2-\Delta u_i^2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\,;\\
q&=\frac{au_i}{v_i^2-\Delta u_i^2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{bu_i+v_i}{v_i^2-\Delta u_i^2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\,;
\end{aligned}\right.
$$

e quindi anche, sostituendo questi valori in $\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}$:

$$
(50)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}&=\frac{b\,(u_k v_i-u_i v_k)+v_i v_k-\Delta u_i u_k}{v_i^2-\Delta u_i^2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{c\,(u_k v_i-u_i v_k)}{v_i^2-\Delta u_i^2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\,;\\
\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}&=-\frac{a\,(u_k v_i-u_i v_k)}{v_i^2-\Delta u_i^2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}-\frac{b\,(u_k v_i-u_i v_k)-(v_i v_k-\Delta u_i u_k)}{v_i^2-\Delta u_i^2}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\,;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(i=1,2\,\ldots\,m)\quad;\quad(k=1,2\,\ldots\,i-1\,;\,i+1\,\ldots\,m)\,.
$$

Da queste formule segue:

a) Ognuna delle funzioni:

$$
\frac{u_k v_i-u_i v_k}{v_i^2-\Delta u_i^2}\qquad(k=1,2\,\ldots\,i-1\,,\,i+1\,\ldots\,m)
$$

$\left(\text{e per la (44*) anche la } \frac{u_i}{v_i^2-\Delta u_i^2}\right)$ è una soluzione particolare della equazione aggiunta alla (49) e ciò dimostra il teorema enunciato. Si noti inoltre che, essendo la v_k determinata solo a meno di una costante additiva, parrebbe di qui che si ottenessero infinite soluzioni dell'equazione aggiunta alla (49): ma aumentando v_k di ε, la soluzione superiore aumenta di $\frac{\varepsilon\, u_i}{v_i^2 - \Delta\, u_i^2}$ e quindi di veramente distinte (linearmente indipendenti) ve ne sono m soltanto.

Di qui si deduce anche che, supponendo di avere integrata completamente l'equazione aggiunta della data, la funzione:

$$\psi_i = \frac{u\, v_i - u_i\, v}{v_i^2 - \Delta\, u_i^2}, \tag{51}$$

dove u è l'integral generale della $\Phi(u) = 0$, è un integrale della equazione aggiunta della (49), che dipende, come u, da due funzioni arbitrarie e che si dimostra agevolmente esserne l'integral generale (cf. n. 44).

Abbiamo dunque il teorema:

Se per l'equazione primitiva è noto l'integral generale della equazione aggiunta, altrettanto accade di ogni equazione trasformata di Liouville; e l'integral generale di questa si ottiene con una quadratura da quello dell'equazione aggiunta alla data.

b) La funzione φ_k si ottiene dalla φ_i mediante la trasformazione di Liouville corrispondente alle due funzioni:

$$\frac{u_k\, v_i - u_i\, v_k}{v_i^2 - \Delta\, u_i^2}\ ; \quad \frac{v_i\, v_k - \Delta\, u_i\, u_k}{v_i^2 - \Delta\, u_i^2}\ ;$$

ma alla soluzione superiore della equazione aggiunta alla (49) corrisponde la funzione v più generale data dalla formula:

$$\frac{v_i\, v_k - \Delta\, u_i\, u_k}{v_i^2 - \Delta\, u_i^2} + \varepsilon,$$

dove ε è una costante arbitraria: e questa per i teoremi superiori porta alla funzione:

$$\varphi_k + \varepsilon\, \varphi_i\ ;$$

donde il teorema:

Quando di una equazione lineare del 2.° ordine si conoscono tutte le trasformate di Liouville, l'applicazione successiva della stessa trasformazione non richiede più quadrature.

Basta infatti combinare linearmente le prime funzioni così ottenute per avere il risultato della successiva applicazione della trasformazione del Liouville.

Si noti infine che la funzione $\varphi_k + \varepsilon \varphi_i$ si sarebbe ottenuta dalla z colla trasformazione del Liouville corrispondente alle due funzioni:

$$u_k + \varepsilon u_i \; ; \quad v_k + \varepsilon v \; ;$$

e si avrà che il teorema superiore potrà anche enunciarsi:

Tutte le trasformate di Liouville di una medesima equazione $\Omega(z) = 0$ *formano un ciclo chiuso.*

Questo teorema comprende in sè e completa quello del n. 32.

34. I teoremi antecedenti mostrano l'importanza della trasformazione del Liouville: osserviamo ora come essa ci dia nuovamente l'integral generale della equazione della trasformazione ed insieme un mezzo molto semplice per costruire *tutte* le trasformate integrali del 1.° ordine (non singolari) dell'equazione data.

Indicando infatti con λ una soluzione particolare della $\Omega(z) = 0$, facciamo in questa il cambiamento di funzione incognita:

$$z = \lambda z' \; ;$$

la nuova equazione in z', $\Omega'(z') = 0$, ammetterà la soluzione particolare $z' = 1$; ed è evidente che una trasformata integrale della equazione in z', che si annulli per $z' = 1$, (cioè una trasformata di Liouville di questa equazione) si potrà considerare anche come una trasformata integrale dell'equazione data, che si annulli per la soluzione particolare $z = \lambda$; ed inversamente. Ne segue appunto il teorema a cui abbiamo accennato, cioè:

Per ottenere tutte le trasformate integrali del 1.° ordine (non singolari) di una equazione lineare del 2.° ordine $\Omega(z) = 0$, *è ne-*

cessario e sufficiente avere integrato anche l'equazione aggiunta. La trasformata integrale del 1.º ordine più generale si ottiene allora cambiando dapprima la funzione incognita nella equazione data, moltiplicando la z per una soluzione particolare dell'equazione stessa; ed applicando quindi all'equazione così mutata la più generale trasformazione di Liouville.

Eseguendo i calcoli sopra indicati, si trovano appunto le formule (26)....(28), di cui questo teorema non è dunque che la traduzione.

Osserviamo esplicitamente che la proprietà ora dimostrata della trasformazione di Liouville, di dare la più generale trasformazione integrale del 1.º ordine della $\Omega(z)=0$, dipende in fondo dal seguente principio generale, di per sè evidente:

Se per una classe particolare di equazioni del 2.º ordine è nota una certa trasformazione, e se ogni equazione lineare del 2.º ordine è riducibile in infiniti modi, dipendenti da una o più funzioni arbitrarie alla classe considerata; dalla particolare trasformazione nota si deducono infinite altre trasformazioni, dipendenti da tante funzioni arbitrarie, quante ve ne sono nella riduzione della equazione alla forma considerata [1]).

Una conseguenza immediata del teorema dimostrato è la seguente:

Se φ è la trasformata integrale della $\Omega(z)=0$ corrispondente alla coppia (λ, u), la $\frac{z}{\lambda}$ si deduce dalla φ colla trasformazione di Liouville corrispondente alla soluzione particolare $\frac{u}{v^2-\Delta u^2}$ dell'equazione aggiunta.

Dal teorema superiore segue anche:

Di ogni equazione trasformata è noto, oltrechè il suo integral generale, anche quello dell'equazione aggiunta;
ed è dato dalla formula:

$$\bar{\psi}=\frac{u\,v_0-u_0\,v}{v_0^2-\Delta\,u_0^2}\,; \tag{51*}$$

---

[1]) Questo principio vale evidentemente anche per equazioni o sistemi di equazioni affatto arbitrarie.

dove u_0 è la soluzione particolare dell'equazione aggiunta alla $\Omega(z) = 0$, adoprata nella trasformazione; v_0 la funzione corrispondente, data dalle (26) per $u = u_0$; u l'integral generale della equazione aggiunta, v la funzione analoga.

Basta dunque avere integrato l'equazione aggiunta della data, perchè altrettanto accada per ogni equazione trasformata; di guisa che l'applicazione successiva di una qualsiasi trasformazione non richiede più che quadrature. La (51*) dimostra inoltre che la funzione:

$$\psi = \frac{\lambda\,\delta_0}{u_0}\,\overline{\psi} = \lambda\,v - \frac{\lambda\,v_0}{u_0}\,u \qquad (\delta_0 = v_0^2 - \Delta\,u_0^2)$$

è una particolare trasformata integrale della equazione $\Phi(u) = 0$; e precisamente quella che corrisponde alla soluzione particolare λ dell'equazione aggiunta $\Omega(z) = 0$, e che si annulla per la soluzione particolare u_0. La costante ε, contenuta implicitamente in v_0, conserva il medesimo valore. Ne segue il teorema notevole che completa l'antecedente:

L'equazione trasformata integrale del 1.° ordine della $\Omega(z) = 0$, corrispondente alla coppia (λ, u) di soluzioni particolari della $\Omega(z) = 0$, $\Phi(u) = 0$, ha come aggiunta l'equazione a cui soddisfa la funzione $\frac{u}{\lambda\,\delta}\,\psi$, dove ψ è la trasformata integrale della $\Phi(u) = 0$ corrispondente alla coppia (u, λ). La costante, che figura in v, ha il medesimo valore in ambedue le trasformazioni.

35. A tutte queste conclusioni sfuggono le trasformazioni singolari: per queste infatti il determinante δ è uguale allo zero, e non valgono più le considerazioni del n. 28. Esse vanno dunque studiate in modo speciale, ed il loro studio è tanto più interessante, in quanto dà un altro metodo, essenzialmente diverso dai due precedenti, per integrare l'equazione generale della trasformazione nei due casi iperbolico e parabolico, nei quali le trasformazioni singolari esistono.

Abbiamo infatti già osservato al n. 28 che due qualunque trasformate integrali della z (singolari o no), corrispondenti alla medesima soluzione particolare u dell'equazione aggiunta, differiscono di ηz, dove η è una funzione determinata di x e di y.

Ne segue che, indicando con φ una *qualunque* trasformata integrale del 1.° ordine della $\Omega(z)=0$, con $\overline{\varphi}$ una delle sue trasformate singolari (supposto che esistano), corrispondenti tutte due alla medesima soluzione particolare u della $\Phi(u)=0$; dovrà aversi:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \eta z ,$$

dove η è una certa funzione di x e di y: ossia per la (12) del n. 27:

$$\varphi = \overline{\varphi} + \lambda \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x} + \mu \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial y} ;$$

dove:

$$\lambda : \mu = \alpha : \alpha' ;$$

cioè la funzione φ è una trasformata differenziale del 1.° ordine della trasformata singolare $\overline{\varphi}$.

Ma non inversamente qualunque trasformata differenziale del 1.° ordine della funzione $\overline{\varphi}$ è una trasformata integrale del 1.° ordine della z. Le due funzioni λ e μ devono infatti soddisfare alla relazione:

$$\alpha \mu - \alpha' \lambda = 0 ;$$

e quindi sono determinate quando si ponga un'altra sola condizione. Ne segue che la trasformazione differenziale che fa passare dalla $\overline{\varphi}$ alla φ non può essere che una di quelle che abbiamo chiamato singolari; poichè, ove essa fosse generale, la funzione φ dovrebbe annullarsi per due valori particolari della $\overline{\varphi}$, il che porterebbe tra λ e μ due relazioni ancora (non omogenee e perciò distinte dalla superiore). Inversamente qualunque trasformazione differenziale singolare della $\overline{\varphi}$ porta effettivamente (come subito si vede, riducendo l'equazione alla sua forma normale) ad una trasformata integrale del 1.° ordine della $\Omega(z)$; e quindi:

Nei due casi iperbolico e parabolico, nei quali esistono le trasformazioni singolari, queste danno un nuovo metodo per integrare l'equazione della trasformazione: e precisamente la trasformata integrale del 1.° ordine della $\Omega(z) = 0$, *corrispondente alla soluzione particolare* u *dell'equazione aggiunta, si ottiene facendo su una delle trasformazioni singolari corrispondenti una trasformazione differenziale di quelle che abbiamo chiamato singolari.*

Segue di qui nuovamente che una trasformata integrale del 1.° ordine della $\Omega(z) = 0$ deve annullarsi (o meglio ridursi ad una costante) per una soluzione particolare dell'equazione in z: ritroviamo così per altra via il teorema generale del n. 28.

Traducendo in formule il teorema superiore, si ottengono di nuovo, come è naturale, le formule (26) ... (28).

Scriviamo esplicitamente queste formule nel caso che l'equazione $\Omega(z) = 0$ sia scritta sotto la forma normale.

Se l'equazione è del tipo iperbolico ed ha la forma normale (16), la trasformazione integrale più generale del 1.° ordine della $\Omega(z) = 0$ è data dall'una o dall'altra delle due formule:

$$\varphi = \sigma - \frac{\sigma'}{z'} z = \tau - \frac{\tau'}{z'} z \; ; \tag{52}$$

dove σ e τ sono le due funzioni definite dalle (17*), (19*); z' è una soluzione particolare della (16), σ' e τ' le funzioni corrispondenti. Anche le due funzioni σ e τ sono legate da una particolare trasformazione differenziale singolare: l'una è la trasformata di Laplace dell'altra.

Quando poi l'equazione sia del tipo parabolico ed abbia la forma normale (21), allora la funzione φ è data dalla formula:

$$\varphi = \rho - \frac{\rho'}{z'} z \, , \tag{53}$$

essendo ρ la soluzione definita dalla (22*), ρ' quella sua forma particolare corrispondente alla soluzione z'.

Questi risultati, nel caso del tipo iperbolico furono già dati dal Darboux [1]).

36. Un'altra proprietà interessante delle trasformazioni singolari risulta dalle considerazioni seguenti:

Indichiamo con u_0 una soluzione particolare della $\Phi(u) = 0$ e supponendo che l'equazione sia dapprima del tipo iperbolico, poniamo:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = u_0 \, \Omega_2(z) \quad ; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} = z \, \Phi_1(u_0) ; \tag{54}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = z \, \Phi_2(u_0) \quad ; \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = u_0 \, \Omega_1(z) . \tag{55}$$

Le due funzioni σ e τ soddisferanno alle due equazioni:

$$\Gamma(\sigma) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} - \frac{1}{u_0} \Phi_1(u_0) \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{k \, u_0}{\Phi_1(u_0)} \frac{\partial \sigma}{\partial y} = 0 ; \tag{56}$$

$$\Pi(\tau) = \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} - \frac{h \, u_0}{\Phi_2(u_0)} \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{1}{u_0} \Phi_2(u_0) \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 . \tag{57}$$

Gli invarianti di queste due equazioni sono:

$$\left\{ \begin{aligned} & h_\sigma = \frac{1}{u_0^2} \Phi_1(u_0) \, \Phi_2(u_0) \, ; \, k_\sigma = \frac{k \, u_0}{\Phi_1(u_0)} \left\{ \frac{\partial \log \Phi_1(u_0)}{\partial y} - a - \frac{\partial \log k}{\partial y} \right\} ; \\ & k_\tau = \frac{h \, u_0}{\Phi_2(u_0)} \left\{ \frac{\partial \log \Phi_2(u_0)}{\partial x} - b - \frac{\partial \log h}{\partial x} \right\} ; \, k_\tau = \frac{1}{u_0^2} \Phi_1(u_0) \, \Phi_2(u_0) . \end{aligned} \right. \tag{58}$$

Da queste formule segue un'osservazione importante. Indichiamo con $\Lambda(\eta) = 0$ l'equazione aggiunta della $\Gamma(\sigma) = 0$, con η il suo integral generale, con $\Lambda_1(\eta)$, $\Lambda_2(\eta)$, $\Gamma_1(\sigma)$, $\Gamma_2(\sigma)$ le rispettive componenti del 1.° ordine.

Osservando allora che la (56) ammette l'integral particolare $\sigma = 1$, avremo, applicando la medesima trasformazione che dalla z fa passare alla σ, che la funzione:

$$\psi = \int \Lambda_2(\eta) \, dx + \eta \, \Gamma_1(1) \, dy = \int \Lambda_2(\eta) \, dx - \frac{\eta}{u_0} \Phi_1(u_0) \, dy \tag{59}$$

---

[1]) Cf Darboux. — *Leçons,* vol, II, pag. 182.

è l'integral generale della equazione:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \Gamma_1(1) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{k_\eta}{\Gamma_1(1)} \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 ;$$

ossia, poichè:

$$\Gamma_1(1) = -\frac{1}{u_0} \Phi_1(u_0) \quad ; \quad k_\eta = h_\sigma = \frac{1}{u_0^2} \Phi_1(u_0) \Phi_2(u_0) ,$$

dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial \log u_0}{\partial y} - a\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \log u_0}{\partial x} - b\right) \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 ;$$

il che dimostra che la funzione:

(60) $$u = u_0 \psi$$

è l'integral generale della $\Phi(u) = 0$. Dunque:

Applicando all'equazione aggiunta della (56) *la medesima trasformazione che porta dalla z alla σ, corrispondente alla soluzione particolare $\sigma = 1$, si ottiene un'equazione equivalente alla* $\Phi(u) = 0$.

La relazione tra le due equazioni (1) e (56) dunque è reciproca, nel senso preciso dato dal teorema superiore.

Inoltre dalle (59) e (60) si ha immediatamente.

(61) $$\eta = \frac{-u_0}{\Phi_1(u_0)} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{u_0}\right) ;$$

donde il teorema:

L'integral generale della equazione aggiunta della (56) *si ottiene dalla* $\Phi(u) = 0$ *mediante una trasformazione di Lewy, che corrisponde alla soluzione particolare u_0 che ha fatto passare dalla σ alla z.*

Affatto analogamente, indicando con ζ l'integral generale della equazione aggiunta alla (57) è:

(62) $$\zeta = \frac{-u_0}{\Phi_2(u_0)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{u_0}\right) ;$$

e quindi anche per l'altra trasformazione singolare τ valgono due teoremi affatto simili ai superiori.

Finalmente nel caso parabolico, quando l'equazione (23) sia scritta sotto la forma normale e si applichi alla sua aggiunta (il cui integral generale chiameremo ω) la medesima trasformazione che fa passare dalla z alla ρ, mediante la soluzione particolare $\rho = 1$, si arriva ancora alla funzione $\frac{u}{u_0}$; il che dimostra un teorema di reciprocità affatto analogo agli antecedenti e dà la formula:

$$\omega = -\frac{1}{2\,b\,u_0}\,\frac{\partial \frac{u}{u_0}}{\partial x}\;; \tag{63}$$

cioè la ω si ottiene dalla u mediante la trasformazione differenziale singolare P, corrispondente alla soluzione particolare u_0.

Queste considerazioni dimostrano anche il teorema:

Le due trasformazioni integrali singolari σ e τ del 1.° ordine delle equazioni del tipo iperbolico hanno come inverse le due trasformazioni del Lewy; la trasformazione singolare ρ delle equazioni del tipo parabolico ha come inversa la trasformazione differenziale singolare P.

37. Veniamo ora alle trasformazioni integrali di ordine superiore.

Sia φ una funzione definita dalle relazioni:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sum \alpha_{ik}\, z_{ik}\;;\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \sum \alpha'_{ik}\, z_{ik}\;;\quad (0 \leq i+k \leq m)\,, \tag{64}$$

e che per ogni valore di z integrale della (1) soddisfi ad un'equazione lineare omogenea del 2.° ordine.

La condizione d'integrabilità per la funzione φ dovrà essere soddisfatta in forza della equazione in z e di quelle che se ne ottengono derivando: dovrà dunque aversi identicamente:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = u\,\Omega(z) + \sum\nolimits_{ik} \frac{\partial^{i+k}(\lambda_{ik}\Omega(z))}{\partial x^i\,\partial y^k} = 0\,;\ (1 \leq i+k \leq m-1) \tag{65}$$

e di qui segue immediatamente che la funzione u è una soluzione dell'equazione aggiunta alla $\Omega(z) = 0$. Nè questa soluzione u può essere nulla; altrimenti, a meno di parti identicamente nulle, la φ sarebbe una funzione lineare omogenea in z e nelle sue derivate fino all'ordine $m-1$, il che evidentemente non ha per noi interesse.

La (65) dimostra anche che tra i coefficienti delle derivate di z di ordine superiore si hanno le relazioni:

$$\alpha'_i = \alpha_{i+1} - a\,\lambda_{i-1} - 2\,b\,\lambda_i - c\,\lambda_{i+1}\,; \tag{66}$$

dove per brevità si è posto:

$$\alpha_k = \alpha_{k\,,\,m-k}\ ;\quad \alpha'_k = \alpha'_{k\,,\,m-k}\ ;\quad \lambda_k = \lambda_{k\,,\,m-k}\,. \tag{66*}$$

Supponendo ora che la funzione φ definita dalle (64) soddisfi effettivamente ad un'equazione lineare omogenea del 2.° ordine (che evidentemente non conterrà in modo esplicito la funzione incognita), aggiungiamo alle (64) le relazioni che si ottengono derivando la $\Omega(z) = 0$ fino all'ordine $m-2$.

Considerando in queste relazioni la funzione φ come nota, la z come funzione incognita, se esse sono risolubili rispetto alle derivate di z dell'ordine m, cioè se il determinante di ordine $m+1$ [1]:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_m \\ \alpha'_0 & \alpha'_1 & \alpha'_2 & \dots & \dots & \alpha'_m \\ c & 2b & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 2b & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix} \tag{67}$$

---

[1]) A causa delle (66) il determinante D può anche scriversi:

$$D = \frac{1}{c} \begin{vmatrix} 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_m & 0 \\ c & 2b & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2b & a \end{vmatrix}\,. \tag{67*}$$

è diverso da zero, il sistema di relazioni considerato è completo. Infatti, poichè le relazioni che si considerano sono per ipotesi risolubili rispetto alle derivate di z di ordine superiore, ogni ulteriore derivazione porta almeno tante *nuove* derivate quante nuove relazioni indipendenti: non può del resto accadere che il numero delle nuove relazioni distinte (tenendo conto naturalmente della equazione in φ) superi quello delle nuove derivate di z; altrimenti ne seguirebbe per z un'altra equazione a derivate parziali, distinta dalla $\Omega(z) = 0$ e da quelle che se ne ottengono derivando; il che evidentemente è assurdo.

Ne segue che il sistema di equazioni ai differenziali totali:

$$(68)\qquad \begin{cases} dz_{ik} = z_{i+1,\,k}\,dx + z_{i,\,k+1}\,dy\ , & 0 \leq i+k \leq m-1 \\ \dfrac{\partial^{i'+k'}\,\Omega(z)}{\partial x^{i'}\,\partial y^{k'}} = 0 \quad , & 0 \leq i'+k' \leq m-3 \end{cases}$$

nelle funzioni incognite z_{00}; z_{10}, z_{01}; ...; z_{0m-1}, $z_{m-1,0}$, dove per le derivate di ordine m sono posti i valori dati dalle relazioni superiori, è illimitatamente integrabile. La sua soluzione più generale conterrà dunque:

$$\frac{m\,(m+1)}{2} - \frac{(m-1)\,(m-2)}{2} = 2\,m-1$$

costanti arbitrarie, il cui significato è ben noto. In particolare la z avrà la forma:

$$(69)\qquad z = \mathrm{Z} + a_1\,z_1 + a_2\,z_2 + \ldots. + a_{2m-1}\,z_{2m-1}\,,$$

essendo Z, z_1, z_2...... z_{2m-1} tante soluzioni particolari, linearmente indipendenti, della equazione in z. Le due derivate $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ dovranno dunque annullarsi, quando in esse si ponga per z una qualunque tra le funzioni z_i $(i = 1, 2 \ldots. 2m-1)$; e sono determinate da questa condizione a meno di una sostituzione lineare omogenea (che evidentemente non altera le equazioni da cui siamo partiti).

Ed una tale arbitrarietà doveva necessariamente restare: infatti se φ è una trasformata integrale della z di ordine m, qualunque sua trasformata di Liouville è ancora rispetto a z una trasformata integrale del medesimo ordine. Segue anzi di qui che quando si conosca la soluzione particolare u dell'equazione aggiunta della $\Omega(z) = 0$, a cui la funzione trasformata φ corrisponde, le due derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ sono con ciò determinate in modo unico.

Inversamente, quando la condizione superiore sia soddisfatta, scrivendo la condizione d'integrabilità per due qualunque derivate successive della z di ordine m, questa diviene una funzione lineare omogenea nelle derivate prime e seconde della funzione φ, in z e nelle sue derivate fino all'ordine $m-1$ (le quali tutte si riducono però a $2m-1$ funzioni indipendenti); ed allora sostituendo in questa espressione per z i valori $z_1, z_2 \ldots . z_{2m-1}$ si hanno $2m-1$ equazioni lineari omogenee nei coefficienti di queste $2m-1$ funzioni a determinante non nullo; (altrimenti le $z_1, z_2 \ldots . z_{2m-1}$ non sarebbero linearmente indipendenti) essi sono dunque tutti uguali allo zero, cioè la φ soddisfa effettivamente ad una equazione lineare omogenea del 2.° ordine.

Abbiamo dunque il teorema:

Ogni trasformata integrale φ della z di ordine m, per la quale il determinante D *sia diverso da zero, è individuata da una soluzione particolare u della equazione aggiunta e da $2m-1$ soluzioni particolari della equazione in z, che devono annullare le due derivate della funzione trasformata φ.*

Segue anche di qui che due trasformate integrali φ, corrispondenti alle medesime soluzioni $u; z_1, z_2 \ldots . z_{2m-1}$, coincidono.

Dal modo con cui è stata ottenuta l'equazione in φ, si trae che essa può scriversi sotto m forme diverse, alle quali corrispondono altrettante soluzioni particolari dell'equazione aggiunta. Sembrerebbe anche che, scrivendo la condizione d'integrabilità non per due derivate successive della z, ma per due derivate qualuuque di ordine m, si potessero dedurre dalla equazione in z delle equazioni lineari di ordine superiore al secondo, delle quali sarebbe noto un integrale dipendente, come z, da due funzioni arbitrarie; ma è chiaro che una qualunque delle equazioni che così si ottengono per la funzione φ non è che un aggregato di quelle che si hanno derivando l'equazione del 2.° ordine in φ un certo numero di volte.

38. Si consideri ora ad es. quella particolare trasformata integrale ψ del primo ordine della funzione z, che corrisponde alla soluzione data u della equazione aggiunta e che si riduce uguale ad una costante per una qualunque delle $2m-1$ soluzioni antecedenti, ad es. per la z_{2m-1}, e si indichino con $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{2m-2}$ i valori che essa prende per le altre soluzioni $z_1, \ldots z_{2m-2}$. Allora quella trasformata differenziale della ψ di ordine $m-1$, corrispondente alle soluzioni particolari $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_{2m-2}$ (nella quale si faccia uguale ad 1 il coefficiente della ψ), è una trasformata integrale della z di ordine m, che corrisponde alla soluzione u data e che si riduce uguale a costante per le $2m-1$ soluzioni particolari $z_1, z_2 \ldots z_{2m-1}$; essa dunque coincide colla funzione cercata φ.

Questa considerazione dimostra anche che, ove della funzione z si consideri una particolare trasformata differenziale (non singolare) dell'ordine k $(k<m)$, che si annulli per le soluzioni particolari $z_1, z_2 \ldots z_{2k}$, e di questa si prenda quella trasformata integrale dell'ordine $m-k$, che corrisponde alla soluzione u della $\Phi(u)=0$, (cioè a quella che ne deriva per la trasformata differenziale dell'ordine k) e che si annulla per le soluzioni rimanenti $z_{2k+1} \ldots z_{2m-1}$; od anche inversamente si consideri prima una trasformata integrale della z di ordine $m-k$, corrispondente alla soluzione u e a $2m-2k-1$ soluzioni z_i; e di questa la trasformata differenziale dell'ordine k corrispondente alle altre $2k$ soluzioni; questa funzione, a causa del teorema precedente, coincide colla funzione φ superiore (o ne differisce per un fattore) [1]. Possiamo dunque, quando il determinante D è diverso da zero, enunciare il teorema:

---

[1]) Cf. anche il §. IV, n. 53.

Una trasformazione integrale generale dell' ordine m si ottiene componendo una trasformazione integrale generale del 1.° ordine con una differenziale pure generale, dell' ordine m—1.

Una trasformazione integrale ed una differenziale (ambedue generali) sono sempre permutabili.

39. Consideriamo ora il caso che il determinante D sia uguale allo zero.

Se le derivate della φ contengono veramente qualche derivata di z dell'ordine m, l'equazione deve appartenere ad uno dei due tipi iperbolico e parabolico (cf. n. 14); e noi li discuteremo separatamente riducendo l'equazione alla sua forma normale.

Quando l'equazione sia del tipo iperbolico, potremo scrivere:

$$(70)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \alpha\, z + \alpha_1\, z_{10} + \dots + \alpha_n\, z_{n0} + \beta_1\, z_{01} + \beta_2\, z_{02} + \dots + \beta_m\, z_{0m}\ , \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \alpha'\, z + \alpha'_1\, z_{10} + \dots + \alpha'_n\, z_{n0} + \beta'_1 z_{01} + \beta'_2 z_{02} + \dots + \beta'_m\, z_{0m}\ , \end{cases}$$

con $n < m$. La condizione d'integrabilità:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0$$

dà allora $\beta_m = 0$, e quando sia $n > 0$, anche $\alpha'_n = 0$: quindi se veramente le due derivate della φ contengono le derivate di z rispetto ad x fino all'ordine n, rispetto ad y fino all'ordine m, sarà $\alpha_n \neq 0$, $\beta'_m \neq 0$; e le relazioni superiori potranno risolversi rispetto a z_{n0}, z_{0m}. Di qui, affatto analogamente al caso generale, deduciamo che le due derivate della funzione φ devono annullarsi per $m+n-1$ soluzioni particolari della equazione in z e sono determinate da questa condizione, quando sia nota la soluzione particolare u dell'equazione aggiunta, corrispondente alla funzione φ.

Quando poi sia $n=0$, allora potremo scrivere le due derivate $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ sotto la forma:

$$(71)\quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \alpha\, z + \alpha_1\,(z_{01}+az) + \ldots + \alpha_m \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\,(z_{01}+az)\,, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \alpha' z + \alpha'_1\,(z_{01}+az) + \ldots + \alpha'_m \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\,(z_{01}+az)\,. \end{cases}$$

La solita condizione d'integrabilità dà allora $\alpha'=\alpha_m=0$; e quindi, se α è diverso da zero, ponendo:

$$(72)\qquad z' = z_{01} + az$$

si avrà:

$$(73)\quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\alpha}{h}\,(z'_{10}+bz') + \alpha_1 z' + \ldots + \alpha_{m-1}\, z'_{0,\,m-2}\,; \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \qquad\qquad = \alpha' z' + \ldots + \alpha'_{m-1}\, z'_{0,\,m-2} + \alpha'_m\, z'_{0,\,m-1}\,; \end{cases}$$

dove:

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + a\, b - c\,;$$

e di qui deduciamo nuovamente che le derivate della φ devono annullarsi per $m-1$ soluzioni particolari dell'equazione in z' e quindi anche di quella in z [1]).

---

[1]) La sostituzione:

$$z = \frac{1}{h}\left(z'_{10} + b\, z'\right)$$

è impossibile quando sia $h=0$. Ma in tal caso z' soddisfa all'equazione del 1.º ordine:

$$(a)\qquad z'_{10} + bz' = 0\,;$$

donde:

$$(a^*)\qquad z' = \mathrm{Y}\, e^{-\int b\, dx}\,;$$

Quando poi sia $\alpha = 0$, allora si ha:

$$(74)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \alpha_1 z' + \alpha_2 z'_{01} + \ldots + \alpha_{m-1} z'_{0,\,m-2}\,; \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \alpha'_1 z' + \alpha'_2 z'_{01} + \ldots + \alpha'_{m-1} z'_{0,\,m-2} + \alpha'_m z'_{0,\,m-1}\,; \end{cases}$$

cioè le derivate della funzione φ si esprimono linearmente ed omogeneamente per la funzione z', trasformata di Laplace della z, e per le sue derivate rispetto ad y fino all'ordine $m-1$. Potremo dunque ripetere per le (74) e per la funzione z' il medesimo processo; e ne deduciamo allora che le derivate della funzione φ o si annullano per $m-k$ soluzioni particolari dell'equazione, a cui soddisfa la $z^{(k)}$, trasformata di Laplace della z di indice k; (e quindi anche di quella in z) oppure, quando sia $k = m-1$,

---

e poi z all'altra:

$$(b)\qquad z_{01} + az = z'\,;$$

donde:

$$(b^*)\quad z = e^{-\int a\,dy}\left\{\int \mathrm{Y}\, e^{\int a\,dy - \int b\,dx}\,dy + \mathrm{X}\right\} = \mathrm{A}\left\{\mathrm{X} + \int \mathrm{Y}\,\beta\,dy\right\},$$

essendo A e β funzioni note di x ed y, X ed Y funzioni arbitrarie di x e di y rispettivamente

Facendo allora nelle (a^*), (b^*) $\mathrm{Y}=0$, cioè $z'=0$, le (73) danno:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \alpha\,\mathrm{A}\,\mathrm{X}\,;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0\,;$$

e quindi $\alpha\,\mathrm{A}$ è una funzione della sola x: l'equazione a cui per ipotesi la φ soddisfa ammette quindi un integrale funzione arbitraria della x, e perciò ha necessariamente la forma:

$$(c)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0\,;$$

si avrà:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \bar{\alpha}\, z^{(m-1)}\ ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \bar{\alpha}'\, z^{(m-1)} + \alpha'_1 \frac{\partial z^{(m-1)}}{\partial y}\ ;$$

cioè la φ si deduce dalla $z^{(m-1)}$ colla trasformazione singolare τ.

Queste conclusioni si modificano in parte, quando la serie di Laplace relativa all'equazione data non si estenda, nel senso della variabile y, fino all'ordine $m-1$. (Cf. la nota superiore).

Inversamente, se si considera una espressione lineare omogenea della z e delle sue derivate, un'espressione $(m, n-1)$ secondo il Darboux, (la quale dunque o si annulli per $m+n-1$ soluzioni particolari dell'equazione in z, oppure si deduca con trasformazioni di Laplace da un'espressione analoga); e se a questa si applica la trasformazione singolare σ, corrispondente ad una soluzione u dell'equazione aggiunta alla $\Omega(z) = 0$ (o più precisamente

---

dove μ è una certa funzione di x ed y; e quindi per le (73):

$$(d) \qquad \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu\, (\alpha'_1 z' + \dots + \alpha'_m z'_{0,\, m-1}) \right\} = 0\ ;$$

e dovendo questa relazione, nell'ipotesi fatta, essere identicamente verificata, dovrà ottenersi combinando la (a) con quelle che se ne ottengono derivandola rispetto ad y fino all'ordine $m-1$.

Se inversamente si fa una combinazione lineare della funzione $\dfrac{z'}{e^{-\int b\, dx}}$ e delle sue derivate rispetto ad y fino all'ordine $m-1$ con coefficienti proporzionali a funzioni, del resto arbitrarie, della sola y, e si pone questo aggregato uguale a $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$; si pone cioè:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \left\{ Y_0 \left[\frac{z'}{e^{-\int b\, dx}}\right] + Y_1 \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{z'}{e^{-\int b\, dx}}\right] + \dots + Y_{m-1} \frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}} \left[\frac{z'}{e^{-\int b\, dx}}\right] \right\},$$

e si avrà evidentemente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = 0$$

e di più le derivate della funzione φ conterranno la z e le sue derivate fino all'ordine m.

a quella corrispondente dell'equazione aggiunta di quella a cui soddisfa la $(m, n-1)$), si ottiene una trasformazione integrale dell'ordine m, evidentemente singolare e per quello che precede, tra le trasformazioni singolari è la più generale possibile. Ed anche qui rispetto all'ordine con cui queste successive trasformazioni si eseguiscono valgono delle considerazioni perfettamente analoghe al caso generale. Possiamo dunque enunciare il teorema:

Una trasformazione integrale singolare di una equazione del tipo iperbolico si ottiene componendo una trasformazione differenziale (singolare o no) con una trasformazione integrale singolare del 1.° ordine. L'ordine di composizione è affatto arbitrario.

40. Se l'equazione data appartiene al tipo parabolico (ed è ridotta alla forma normale), la discussione è ancora più semplice. In questo caso le due derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ hanno la forma:

$$(75)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \alpha z + \alpha_1 z_{01} + \ldots + \alpha_n z_{0n} + \beta_1 z_{10} + \beta_2 z_{11} + \ldots + \beta_m z_{1,\, m-1}\,, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \alpha' z + \alpha'_1 z_{01} + \ldots + \alpha'_n z_{0n} + \beta'_1 z_{10} + \beta'_2 z_{11} + \ldots + \beta'_m z_{1,\, m-1}\,, \end{aligned}\right.$$

con $n < m$.

La solita condizione d'integrabilità dà allora: $\beta_m = 0$; $n = m-1$; $\alpha_n = -2b\beta'_m$; e quindi, se β'_m è diverso da zero, cioè se effettivamente $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ contengono qualche derivata dell'ordine m, sarà anche $\alpha_n \neq 0$. Le (75) possono allora risolversi rispetto a $z_{0,\, m-1}$, $z_{1,\, m-1}$; e quindi le derivate della funzione φ devono annullarsi per $2m-2$ soluzioni particolari della equazione in z e sono determinate da questa condizione, quando al solito sia nota la soluzione particolare u dell'equazione aggiunta a cui la φ corrisponde. E inversamente questa condizione è anche sufficiente. Si consideri infatti la trasformata integrale singolare ρ della z che corrisponde alla soluzione u scelta della equazione aggiunta, e di questa la trasformata differenziale (non singolare) dell'ordine $m-1$, corrispondente alle $2m-2$ soluzioni particolari $\rho_1, \rho_2 \dots \rho_{2m-2}$, corrispondenti alle $z^{(1)}, z^{(2)} \dots . z^{(2m-2)}$; si otterrà così una trasformazione integrale della z di ordine m, evidentemente singolare, la quale, per ciò che precede, dovrà coincidere colla funzione φ.

Ed anche in questo caso delle considerazioni affatto simili a quelle del caso generale dimostrano che l'ordine di composizione di queste successive trasformazioni è affatto arbitrario. Dunque:

Ogni trasformazione singolare di un' equazione del tipo parabolico si ottiene componendo una trasformazione generale con una trasformazione singolare del primo ordine.

Componendo invece una trasformazione differenziale singolare dell'ordine $m-1$ colla trasformazione singolare ρ è chiaro che si ottiene una trasformazione integrale generale dell'ordine $m-1$.

Da tutto ciò che precede segue anche il teorema importante:

La composizione di una trasformazione integrale con una differenziale porta ad una trasformazione integrale. Una trasformazione differenziale ed una integrale sono sempre permutabili [1]).

41. I calcoli relativi alle trasformazioni integrali di ordine superiore si eseguiscono nel modo più simmetrico e completo, estendendo ad esse il processo di dimostrazione del Liouville, dato già per le trasformazioni differenziali.

Discutendo dapprima il caso generale, sia φ una trasformata integrale della z dell'ordine m, corrispondente alle soluzioni $z^{(1)}, z^{(2)} \dots . z^{(2m-1)}$ dell'equazione in z e alla soluzione u dell'aggiunta. È chiaro allora che si potrà scrivere [2]):

$$(76) \qquad \varphi = \sum \alpha_{ik}\, z_{ik} + A \quad ; \quad 0 \leq i+k \leq m-1 \quad ;$$

dove:

$$(77) \qquad A = \int \{u\, \Omega_2(z) - z\, \Phi_2(u)\}\, dx - \{u\, \Omega_1(z) - z\, \Phi_1(u)\}\, dy\,.$$

---

[1]) Cf. anche il §. IV, n. 53.

[2]) Cf. Darboux. — *Leçons*, vol. II, pag. 181.

Indichiamo allora con $z^{(2m)}$ un'altra soluzione della $\Omega(z)=0$, opportunamente scelta; e ponendo:

$$(78)\quad A^i = \int \{u\,\Omega_2(z^{(i)})-z^{(i)}\Phi_2(u)\}dx - \{u\,\Omega_1(z^{(i)})-z^{(i)})\,\Phi_1(u)\}\,dy\ ,\quad (i=1,2\ldots.2m)\,,$$

determiniamo le $2m$ funzioni $v_1, v_2 \ldots. v_{2m}$ dalle equazioni lineari:

$$(79)\qquad A=\sum_1^{2m}{}_i\, A^i\, v_i\quad ;\quad z_{lk}=\sum_1^{2m}{}_i\, z_{lk}^{(i)}\, v_i\ ;\quad 0\leq l+k\leq m-1\,.$$

Queste equazioni si riducono, a causa della $\Omega(z)=0$, a sole $2m$ indipendenti, quando, come supponiamo, l'ulteriore soluzione $z^{(2m)}$ sia stata presa in modo che il determinante delle (79) sia diverso da zero. È evidente allora che la funzione v_{2m} non differisce dalla φ che per un fattore, facile a determinare.

Supporremo inoltre sia $m>1$ [1]), cioè che la trasformazione considerata sia veramente di ordine superiore al primo.

Derivando allora le (79) si hanno evidentemente le relazioni:

$$(80)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum A^i \frac{\partial v_i}{\partial x}=0\ ;\quad \sum A^i \frac{\partial v_i}{\partial y}=0;\\ &\sum z_{tu}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial x}=0\ ;\quad \sum z_{tu}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial y}=0; \end{aligned}\right. \qquad 0\leq t+u\leq m-2$$

alle quali bisogna aggiungere le altre:

$$(81)\quad \sum z_{m-k,\,k-1}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial y} - \sum z_{m-k-1,\,k}^{(i)} \frac{\partial v_i}{\partial x}=0\ ;\ k=1,2\ldots.m-1$$

le quali tutte si riducono a $4m-1$ relazioni indipendenti, da cui potremo trarre le derivate delle prime $2m-1$ funzioni v_i in funzione lineare omogenea delle derivate prime della v_{2m}. È chiaro allora che la funzione v_{2m} soddisfa ad un'equazione lineare omogenea del 2.° ordine, la quale di più può essere scritta sotto $2m-1$

---

[1]) Cf. anche la nota in fine.

forme diverse, che fanno conoscere altrettante soluzioni della equazione aggiunta a quella in v_{2m}. Ed indicando con $V_1, V_2 \dots V_{2m}$, queste soluzioni, un ragionamento perfettamente simile a quello tenuto per le trasformazioni differenziali dimostra le relazioni:

$$(82) \qquad \sum_1^{2m-1}{}_i\, A^i\, V_i = 0 \quad ; \quad \sum_1^{2m-1}{}_i\, z^{(i)}_{tu}\, V_i = 0\ ;\ 0 \leq t+u \leq m-2\ ;$$

dalle quali si possono ottenere i rapporti delle funzioni V_i.

Tornando dalla funzione v_{2m} alla φ, abbiamo dunque il teorema:

Il metodo di costruzione dell'equazione in φ ora accennato fa conoscere $2m-1$ soluzioni particolari dell'equazione aggiunta a quella a cui la φ soddisfa: ed i rapporti di queste $2m-1$ soluzioni $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_{2m-1}$ sono dati dalle relazioni:

$$(83) \qquad \sum_1^{2m-1}{}_i\, A^i\, \psi_i = 0 \quad ; \quad \sum_1^{2m-1}{}_i\, z^{(i)}_{tu}\, \psi_i = 0\ ^{1)}\ .$$

È chiaro che queste medesime soluzioni ψ_i avremmo ottenuto, costruendo la funzione φ come è accennato nel n. 38, tenendo conto dei teoremi dimostrati ai n. 18 e 26 [2]).

---

[1]) Facendo variare la costante additiva contenuta nelle A^i $(i=1, 2 \dots m-1)$, si vede, affatto analogamente alle trasformazioni del 1.º ordine, che ad ogni sistema $(z^{(1)} \dots z^{(2m-1)}, u)$ di soluzioni corrisponde una serie ∞^{2m-1} di equazioni trasformate integrali dell'ordine m, dipendenti da altrettante costanti arbitrarie $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_{2m-1}$; e tra gli integrali di tutte queste equazioni si ha una relazione, facile a determinare, affatto analoga a quella relativa alle trasformazioni del 1.º ordine.

[2]) Si noti poi che i calcoli superiori valgono anche per le trasformazioni integrali del 1.º ordine.

Se infatti φ è la trasformata integrale del 1.º ordine corrispondente alla coppia $(u_1\, z_1)$, indicando con z_2 un'altra soluzione della $\Omega(z)$ e con:

$$A_i^k = \int \{ u_i\ \Omega_2(z_k) - z_i\, \Phi_2(u_k) \}\, dx - \{ u_i\ \Omega_1(z_k) - z_k\ \Phi_1(u_i) \}\, dy\,,$$

scriviamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} z = z_1\, v_1 + z_2\, v_2\ ; \\ A_1 = A_1^1\, v_1 + A_1^2\, v_2\ ; \end{cases}$$

43. Delle formule perfettamente analoghe valgono nei due casi singolari. Cominciando da quelle del tipo iperbolico, supporremo di non aver a che fare con trasformazioni di Laplace; supporremo cioè che la funzione φ le cui derivate sono date dalle (70), si annulli per $m+n-1$ soluzioni particolari dell'equazione data. Potremo allora anche scrivere la φ sotto la forma:

$$\varphi = (n-1,\ m-1) + \sigma\,; \tag{84}$$

dove col simbolo $(n-1,\ m-1)$ abbiamo al solito indicato una espressione lineare omogenea in z e nelle sue derivate rispetto ad x

---

dalle quali si ottiene v_2 proporzionale a φ. Derivando opportunamente queste equazioni, deduciamo le altre:

$$\sum_1^2 {}_i \left[\frac{\partial v_i}{\partial x} \left\{ b u_1 z_i - A_1^i \right\} + c u_1 z_i \frac{\partial v_i}{\partial y} \right] = 0\,;$$

$$\sum_1^2 {}_i \left[\frac{\partial v_i}{\partial x} a u_1 z_i + (b u_1 z_i + A_1^i) \frac{\partial v_i}{\partial y} \right] = 0\,;$$

dalle quali segue che v_2 soddisfa effettivamente ad un'equazione lineare del 2.° ordine e si ottiene anche la soluzione particolare della equazione aggiunta colla formula:

$$t_1 = \frac{u_1 (A_1^1 z_2 - A_1^2 z_1)}{A_1^{1^2} - \Delta u_1^2 z_1^2}\,.$$

L'equazione in v_2 ammette poi la soluzione particolare:

$$V_2 = \frac{z_1}{z_1 A_1^2 - z_2 A_1^1}\,.$$

L'integral generale della equazione aggiunta a quella in v_2 è dato poi dalla formula:

$$t = \frac{(z_1 A_1^2 - z_2 A_1^1)(A^1 u_1 - u A_1^1)}{A_1^{1^2} - \Delta u_1^2 z_1^2}\,;$$

e la $\dfrac{z}{z_1}$ si ottiene dalla v_2 colla trasformazione integrale corrispondente alla coppia (V_2, t_1). La costante arbitraria da cui l'equazione in v_2 dipende è quella additiva contenuta in A_1^1.

e rispetto ad y fino agli ordini $n-1$, $m-1$, e σ è il simbolo della trasformazione singolare (17*).

Indicando allora con $z^{(1)}, z^{(2)} \dots z^{(m+n-1)}$ le soluzioni particolari della $\Omega(z)=0$ che annullano la φ, con $z^{(m+n)}$ un'altra soluzione, opportunamente scelta, e ponendo per brevità $m+n=p$, scriviamo le p equazioni lineari nelle p funzioni $v_1, v_2 \dots v_p$:

$$(85)\quad \sigma=\sum_1^p{}_i\, \sigma^i v_i\,;\; z_{k0}=\sum_1^p{}_i\, z_{k0}^{(i)} v_i\,;\, z_{0l}=\sum_1^p{}_i\, z_{0l}^{(i)} v_i\,;\, k=0,1\dots n-1\,;\; l=0,1\dots m-1,$$

dove al solito:

$$(86)\qquad \sigma^i=\int u\,\Omega_2(z_i)\,dx+z_i\,\Phi_2(u)\,dy\,.$$

Da queste equazioni evidentemente la funzione v_p è definita proporzionale a φ.

Derivando ora le (85) otteniamo le altre relazioni:

$$(87)\quad \begin{cases} \sum \sigma^i \dfrac{\partial v_i}{\partial x}=0 \quad ; \quad \sum \sigma^i \dfrac{\partial v_i}{\partial y}=0\,; \\ \sum z_{k0}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial x}=0\ ;\ k=0,1\dots n-2\ ;\ \sum z_{k0}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial y}=0\ ;\ k=0,1,2\dots n-1 \\ \sum z_{0l}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial x}=0\ ;\ l=0,1\dots m-1\ ;\ \sum z_{0l}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial y}=0\ ;\ l=0,1,2\dots m-2 \end{cases}$$

cioè in tutto $2p-2$ relazioni lineari omogenee nelle derivate prime delle p fuzioni v_i. Da esse potremo dunque trarre i valori delle derivate delle prime $p-1$ tra esse per quelle dell'ultima v_p: e questo appunto dimostra che la v_p soddisfa per ogni valore di z, ad un'equazione lineare del 2.° ordine che si ottiene di più sotto $m+n-1$ forme diverse, a ciascuna delle quali corrisponde una soluzione particolare dell'equazione aggiunta. E naturalmente valgono per la φ le medesime conseguenze, che per la v_p: indicando inoltre con $\psi_1, \psi_2 \dots \psi_{m+n-1}$ le soluzioni dell'equazione aggiunta alla φ, trovate col metodo superiore, un ragionamento affatto simile al caso generale dimostra le relazioni:

$$(88)\quad \sum_{1}^{p-1} \sigma^i \psi_i = 0 \;;\; \sum_{1}^{p-1} z_{k0}^{(i)} \psi_i = 0 \;;\; \sum_{1}^{p-1} z_{0l}^{(i)} \psi_i = 0; k=0, 1 \ldots m-2;\; l=0, 1 \ldots n-2$$

le quali determinano i rapporti delle ψ_i.

Calcoli perfettamente analoghi valgono nel caso che uno dei due numeri n ed m siano uguali allo zero: è inutile dunque insistervi più oltre.

Nel caso parabolico è facile vedere che la funzione φ, data dalle (75), può scriversi al modo seguente:

$$(89)\quad \varphi = \alpha z + \alpha_1 z_{01} + \ldots + \alpha_{m-2} z_{0,\,m-2} + \beta_1 z_{10} + \beta_2 z_{11} + \ldots + \beta_{m-1} z_{1,\,m-2} + \rho$$

essendo ρ la trasformazione singolare data dalla (22*). Ponendo allora $2m-1=p$, siano $z^{(1)}, z^{(2)} \ldots z^{(p-1)}$ le soluzioni particolari della equazione in z che annullano la φ, $z^{(p)}$ un'altra soluzione: e determiniamo le p funzioni $v_1 \ldots v_p$ dalle equazioni lineari:

$$(90)\quad \rho = \sum_{1}^{p}{}_i\, \rho^i v_i \;;\; z_{0k} = \sum_{1}^{p}{}_i\, z_{0k}^{(i)} v_i \;;\; z_{1k} = \sum_{1}^{p}{}_i\, z_{1k}^{(i)} v_i \;;\; k = 0, 1 \ldots m-2,$$

sarà in particolare v_p proporzionale a φ.

Dalle (90) derivando deduciamo i due sistemi di relazioni [1]:

$$(91)\quad \begin{cases} \sum \rho^i \dfrac{\partial v_i}{\partial x} = 0 \;;\; \sum z_{0k}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial x} = 0 \;;\; \sum z_{1k}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial x} = 0 \;;\; k=0, 1 \ldots m-2 \;;\; l=0, 1 \ldots m-3 \\ \sum \rho^i \dfrac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \;;\; \sum z_{0k}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \;;\; \sum z_{1k}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \;;\; k=0, 1, 2 \ldots m-3 \;; \\ \qquad \sum z_{1,\,m-2}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial x} + 2\, b \sum z_{0,\,m-2}^{(i)} \dfrac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \;; \end{cases}$$

---

[1]) Cf. il n. 20.

le quali costituiscono in tutto un sistema di $2p-2$ equazioni lineari omogenee, che permettono di esprimere le derivate delle prime $p-1$ funzioni v per quelle dell'ultima v_p: e di qui seguono per la v_p e quindi per la φ delle conclusioni perfettamente simili alle superiori [1]).

44. Dimostriamo infine che quando z è l'integral generale della sua equazione, altrettanto accade di ogni sua trasformata integrale φ.

Basterà evidentemente limitarsi alla considerazione delle trasformazioni del 1.° ordine.

Supponiamo dunque di saper risolvere per la (1) il problema di Cauchy e risolviamolo per la (10). Siano perciò assegnate lungo una curva C le derivate $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ della funzione φ (ed il suo valore in un punto). Allora, se δ è diverso da zero, le (7) ci danno p e q in funzione di $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ e z; e sostituendo questi valori nella relazione (che ha luogo lungo la curva C):

$$\frac{dz}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt},$$

(dove t è il parametro dei punti della curva C) avremo in z una equazione differenziale lineare del 1.° ordine rispetto alla variabile t, che quindi si integra con quadrature. Noto poi il valore di z lungo la C, le (7) danno immediatamente i valori di p e di q lungo la curva stessa, e ciò dimostra quello che si voleva.

---

[1]) Combinando questi risultati con quelli dei numeri 24, 38...40 abbiamo anche il teorema:

Dall'equazione aggiunta a quella a cui soddisfa una funzione φ trasformata integrale della z, si passa alla equazione $\Phi(u) = 0$ ancora con una trasformazione integrale del medesimo ordine e della stessa natura, la quale corrisponde alla soluzione particolare della φ ed a quelle soluzioni dell'equazione aggiunta che sono date dal metodo di dimostrazione di Liouville.

Quando poi sia $\delta = 0$, allora dalle (5) e dall'altra:

$$\frac{dz}{dt} = p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt}$$

si hanno immediatamente i valori di z e delle sue derivate prime in funzione di $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ e quindi si giunge alle medesime conclusioni.

Un ragionamento affatto analogo vale nei due casi ellittico ed iperbolico, quando si definisca l'integral generale colle condizioni iniziali del Picard.

Per le equazioni del tipo ellittico, supponiamo assegnati i valori della φ lungo un contorno chiuso C e costruiamo quell'integrale φ della (10) che prende lungo C i valori assegnati: le formule (7) definiscono allora una funzione z che soddisfa alla equazione data e che prende lungo C certi valori: questa funzione z, che dà poi la φ, è quindi compresa nella formula che dà l'integral generale della equazione data.

Se l'equazione è del tipo iperbolico, e si vuole un integrale che prenda lungo due caratteristiche dei valori assegnati, supponendo senz'altro l'equazione ridotta alla sua forma normale (16), lungo il tratto parallelo all'asse x la z dovrà soddisfare alla relazione (essendo $\alpha = \beta' = 0$):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \alpha' p + \gamma' z,$$

lungo il tratto parallelo all'asse y all'altra:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -(\beta q + \gamma z),$$

donde si deduce il valore di z lungo i due tratti rettilinei con due quadrature. In particolare avremo anche qui il risultato:

Quando per l' equazione data si conosca la soluzione principale, la determinazione di una tale soluzione per ogni trasformata integrale del 1.º ordine si fa con quadrature;

e quindi anche:

Quando per l' equazione data si sappia risolvere il problema di Cauchy, il problema analogo per ogni trasformata integrale del 1.º ordine è ricondotto alle quadrature.

È chiaro poi che dei teoremi affatto simili valgono per le trasformazioni integrali di ordine superiore. Essi si deducono del resto da quei già dimostrati sulla natura di queste trasformazioni.

§. IV.

LE TRASFORMAZIONI INVERSE

DELLE

TRASFORMAZIONI DIFFERENZIALI ED INTEGRALI

45. Vogliamo ora occuparci brevemente delle trasformazioni inverse delle differenziali ed integrali, cioè di quelle trasformazioni che da una funzione θ o da una φ, trasformate differenziale ed integrale di una funzione z, riportano alla funzione stessa; e vogliamo precisamente dare gli elementi caratteristici di queste trasformazioni. Esse ci offrono un primo e molto interessante esempio di una estesa classe di trasformazioni delle equazioni lineari del 2.° ordine, che comprendono come casi particolarissimi le trasformazioni differenziali ed integrali [1]).

Ci è necessario per questo premettere un lemma.

Siano $z_1, z_2 \dots z_{2m}$ $2m$ soluzioni particolari linearmente indipendenti della equazione data $\Omega(z) = 0$, e si determinino $2m$ funzioni $\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_{2m}$ (o meglio i loro rapporti) dalle equazioni lineari omogenee (in numero di $2m-1$ indipendenti):

(1) $$\sum (z_i)_{tu}\, \vartheta_i = 0 \quad ; \quad 0 \leq t+u \leq m-1 \text{ [2])}.$$

Queste equazioni hanno, come è noto, per conseguenza le altre:

(2) $$\sum (z_i)_{t'u'}\, (\vartheta_i)_{t''u''} = 0 \quad , \quad 0 \leq t'+u'+t''+u'' \leq m-1 \ ,$$

[1]) Cf. due mie note, collo stesso titolo del presente lavoro, pubblicate negli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (23 maggio e 13 giugno 1897).

[2]) Cf. la nota in fine al lavoro.

in particolare:

$$(3) \qquad \sum (z_i)_{tu} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} = 0 \ , \quad \sum (z_i)_{tu} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} = 0 \ , \ 0 \quad t+u \leq m-2 \, .$$

Derivando poi quelle tra le (1) per cui $t+u=m-1$, avremo in generale:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \sum (z_i)_{tu} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} = - \sum (z_i)_{t+1,\, u}\, \vartheta_i \ ; \\ & \sum (z_i)_{tu} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} = - \sum (z_i)_{t,\, u+1}\, \vartheta_i \ ; \end{aligned} \right. \qquad t+u \leq m-1$$

e quindi derivando le (3):

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum (z_i)_{tu} \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x^2} = - \sum (z_i)_{t+1,\, u} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} = \sum (z_i)_{t+2,\, u}\, \vartheta_i \ ; \\ & \sum (z_i)_{tu} \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x \partial y} = - \sum (z_i)_{t+1,\, u} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} = \sum (z_i)_{t+1,\, u+1}\, \vartheta_i \ ; \quad t+u \leq m-2 \\ & \sum (z_i)_{tu} \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial y^2} = - \sum (z_i)_{t,\, u+1} \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} = \sum (z_i)_{t,\, u+2}\, \vartheta_i \ . \end{aligned} \right.$$

Ponendo quindi:

$$\tau(\varphi) = a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\, b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} + c \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \, ,$$

avremo sommando:

$$\sum (z_i)_{tu}\, \tau(\vartheta_i) = \sum \tau\left((z_i)_{tu} \right) . \ \vartheta_i \ ; \quad 0 \leq t+u \leq m-2$$

e quindi:

$$(5) \qquad \sum (z_i)_{tu}\, \tau(\vartheta_i) = 0 \ ; \quad 0 \leq t+u \leq m-2 \, .$$

Dalle (1), (3), (5) segue anche:

$$(6) \sum (z_i)_{tu} \left\{ \tau(\vartheta_i) + \alpha \frac{\partial \vartheta_i}{\partial x} + \beta \frac{\partial \vartheta_i}{\partial y} + \gamma\, \vartheta_i \right\} = \sum (z_i)_{tu}\, \mathrm{G}(\vartheta_i) = 0 \, ; \, 0 \leq t+u \leq m-2$$

essendo α, β, γ funzioni arbitrarie e:

$$G(\varphi) = \tau(\varphi) + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \varphi .$$

Segue di qui che tutte le funzioni ϑ_i soddisfano ad una medesima equazione lineare del 2.° ordine della medesima classe di quella in z. Basta infatti prendere le funzioni α, β, γ in guisa da annullare tre delle espressioni $G(\vartheta_i)$; ed allora le altre $2m-3$, essendo legate da altrettante relazioni lineari omogenee a determinante non nullo, saranno identicamente nulle.

Il ragionamento fatto supporre $m \geq 2$; nel caso di $m=1$, si hanno due sole funzioni ϑ_1 e ϑ_2 legate dalla relazione:

$$z_1 \vartheta_1 + z_2 \vartheta_2 = 0 ;$$

ed allora esse soddisfano ad un'equazione equivalente a quella in z.

Quando poi l'equazione in z sia del tipo iperbolico:

$$s + ap + bq + cz = 0 ,$$

e si abbiano $m+n$ soluzioni z_i ed altrettante funzioni ϑ_i, definite dalle formule:

$$\sum (m-1, n-1)_i \vartheta_i = 0 , \tag{7}$$

un calcolo affatto simile dimostra ancora che le ϑ_i soddisfano tutte ad un'equazione del tipo iperbolico [1]).

Ed un resultato perfettamente analogo si ottiene per le equazioni del tipo parabolico, quando si abbiano $2m+1$ soluzioni z_i ed altrettante funzioni ϑ_i, definite dalle formule:

$$\sum (z_i)_{0k} \vartheta_i = 0 \quad \sum (z_i)_{1k} \vartheta_i = 0 \quad k = 0, 1, \dots m-1. \tag{8}$$

46. È facile ora determinare le trasformazioni inverse delle trasformazioni differenziali.

Cominciando dalle trasformazioni generali, indichiamo con $u_1, u_2, \dots u_{2m}$ $2m$ soluzioni della $\Phi(u) = 0$, linearmente indipen-

[1]) Cf. Darboux. — *Leçons,* vol. II, pag. 184.

denti: determiniamo quindi $2m$ funzioni ω_i (i loro rapporti) dalle relazioni:

$$(9) \qquad \sum (u_i)_{rs}\, \omega_i = 0 \quad ; \qquad 0 \leq r+s \leq m-1$$

e posto:

$$(10) \qquad A_i = \int \{u_i\, \Omega_2(z) - z\, \Phi_2(u_i)\}\, dx - \{u_i\, \Omega_1(z) - z\, \Phi_1(u_i)\}\, dy\,,$$

consideriamo la funzione:

$$(11) \qquad \omega = \sum_1^{2m}{}_i\, \omega_i\, A_i\,.$$

Noi diciamo che la funzione ω soddisfa, per ogni valore di z integrale dell'equazione data, ad un'equazione lineare omogenea del 2.° ordine, e che essa è l'inversa di una trasformazione differenziale generale dell'ordine m; cioè la z è esprimibile linearmente ed omogeneamente per le derivate della ω fino all'ordine m.

Si osservi infatti che dalla (11) segue, tenendo conto delle (9):

$$(12) \qquad \begin{cases} \omega_{rs} = \sum_1^{2m}{}_i\, (\omega_i)_{rs}\, A_i & 0 \leq r+s \leq m-1 \\ \omega_{m-h,\,h} = \sum_1^{2m}{}_i\, (\omega_i)_{m-h,\,h}\, A_i + \alpha_h\, z\,. & \end{cases}$$

Queste relazioni ci dimostrano intanto che ω soddisfa, per ogni valore di z, ad un'equazione lineare omogenea del 2.° ordine.

Questo è chiaro per $m > 2$, ricordando che in forza del teorema precedente tutte le ω_i soddisfano ad una medesima equazione $G(\omega_i) = 0$, ed avendosi dalle prime tra le (12):

$$G(\omega) = \sum G(\omega_i)\, A_i = 0\,;$$

bisogna adunque discutere i due casi $m = 1$, $m = 2$.

Quando sia $m = 1$, si ha:

$$\omega_1 = -k\, u_2 \quad ; \quad \omega_2 = k\, u_1$$

(indicando con k un fattore di proporzionalità) e quindi:

$$(\omega)_{10} = (\omega_1)_{10}\,A_1 + (\omega_2)_{10}\,A_2 - k\,z\,\{\,b\,((u_1)_{10}\,u_2) + c\,((u_1)_{01}\,u_2)\}\;;$$

$$(\omega)_{01} = (\omega_1)_{01}\,A_1 + (\omega_2)_{01}\,A_2 + k\,z\,\{\,a\,((u_1)_{10}\,u_2) + b\,((u_1)_{01}\,u_2)\}\;;$$

ed anche, come un calcolo facile dimostra:

$$\tau\,(\omega) = \tau\,(\omega_1)\,A_1 + \tau\,(\omega_2)\,A_2 + \lambda\,z\,.$$

Allora le relazioni:

$$\omega = \omega_1\,A_1 + \omega_2\,A_2\,;$$

$$(\omega)_{10} = (\omega_1)_{10}\,A_1 + (\omega_2)_{10}\,A_2 + \lambda_1\,z\;;\quad (\omega)_{01} = (\omega_1)_{01}\,A_1 + (\omega_2)_{01}\,A_2 + \lambda_2\,z\;;$$

$$\tau\,(\omega) = \tau\,(\omega_1)\,A_1 + \tau\,(\omega_2)\,A_2 + \lambda_3\,z$$

danno immediatamente le altre due:

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega_1 & \omega_2 \\ (\omega)_{10} & (\omega_1)_{10} & (\omega_2)_{10} \\ (\omega)_{01} & (\omega_1)_{01} & (\omega_2)_{01} \end{vmatrix} = \lambda\,z\,;\quad \begin{vmatrix} \omega & \omega_1 & \omega_2 & 0 \\ (\omega)_{10} & (\omega_1)_{10} & (\omega_2)_{10} & \lambda_1 \\ (\omega)_{01} & (\omega_1)_{01} & (\omega_2)_{01} & \lambda_2 \\ \tau\,(\omega) & \tau\,(\omega_1) & \tau\,(\omega_2) & \lambda_3 \end{vmatrix} = 0\,;$$

le quali dimostrano insieme che ω soddisfa ad un'equazione lineare del 2.° ordine, (di cui le ω_h sono integrali particolari) e che la z è una trasformata differenziale del 1.° ordine della ω, corrispondente alle due soluzioni particolari ω_1 ed ω_2.

Quando poi sia $m = 2$, alle relazioni, verificate per ipotesi:

$$\sum_1^4{}_h\,\omega_h\,u_h = 0\,;\;\sum \omega_h\,(u_h)_{10} = -\sum (\omega_h)_{10}\,u_h = 0\,;\;\sum \omega_h (u_h)_{01} = -\sum (\omega_h)_{01}\,u_h = 0\,,$$

deve aggiungersi l'altra che si ottiene derivando:

$$\sum_h \frac{d\,(u_h\,\omega_h)}{d\,(x\,y)} = 0\,;$$

e da queste segue:

$$\omega = \sum_1^4{}_h \, \omega_h \, A_h \;\; ; \quad (\omega)_{10} = \sum (\omega_h)_{10} \, A_h \;\; ; \quad \omega_{01} = \sum (\omega_h)_{01} \, A_h \; ;$$

$$(\omega)_{20} = \sum (\omega_h)_{20} \, A_h + \lambda_1 z \; ; \; \omega_{11} = \sum (\omega_h)_{11} \, A_h + \lambda_2 z \; ; \; \omega_{02} = \sum (\omega_h)_{02} \, A_h + \lambda_3 z \; ;$$

$$\tau(\omega) = \sum \tau(\omega_k) \, A_h - z \, \Delta \sum \frac{d \, (u_h \, \omega_h)}{d \, (x \, y)} = \sum \tau(\omega_h) \, A_h \; ;$$

e quindi:

$$G(\omega) = \sum{}_h \, G(\omega_h) \, A_h = 0 \, ,$$

indicando con $G(\omega)$ l'equazione a cui le $4 \; \omega_i$ soddisfano.

È poi anche:

$$\lambda z = \begin{vmatrix} \omega & \omega_{10} & \omega_{01} & \omega_{20} & \omega_{02} \\ \omega_1 & (\omega_1)_{10} & (\omega_1)_{01} & (\omega_1)_{20} & (\omega_1)_{02} \\ \omega_2 & (\omega_2)_{10} & (\omega_2)_{01} & (\omega_2)_{20} & (\omega_2)_{02} \\ \omega_3 & (\omega_3)_{10} & (\omega_3)_{01} & (\omega_3)_{20} & (\omega_3)_{02} \\ \omega_4 & (\omega_4)_{10} & (\omega_4)_{01} & (\omega_4)_{20} & (\omega_4)_{02} \end{vmatrix} \; ;$$

cioè z è una trasformata differenziale del 2.° ordine della ω, corrispondente alle soluzioni particolari $\omega_1 \ldots . \omega_4$.

Rimane ancora a dimostrare che, anche nel caso di $m > 2$, la z è una trasformata differenziale della ω di ordine m, corrispondente alle soluzioni ω_h: basta per ciò osservare che in forza della equazione a cui la ω soddisfa, le (12) si riducono a $2m+1$ indipendenti, e da esse eliminando gli integrali A_i, si ottiene appunto per z un'espressione lineare omogenea di ω e delle sue derivate fino all' ordine m, che si annulla per $\omega = \omega_i$ $(i = 1, 2 \ldots 2m)$: e ciò dimostra quello che si era affermato.

Possiamo dunque enunciare il teorema:

Ad ogni sistema di $2\,m$ *soluzioni dell' equazione aggiunta della* $\Omega(z) = 0$, *linearmente indipendenti, corrisponde una funzione* ω, *data* *dalla formula* (10), *che soddisfa ad un' equazione lineare omogenea del secondo ordine (di cui le* ω_i *sono integrali particolari) della medesima classe della* $\Omega(z) = 0$, *e tale che dalla* ω *si ottiene la* z *con una trasformazione differenziale generale dell' ordine m, corrispondente alle soluzioni particolari* $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{2m}$.

47. In modo perfettamente analogo si trattano i due casi delle equazioni del tipo iperbolico e parabolico, a cui abbiamo accennato nel n. 45.

Il caso delle equazioni del tipo iperbolico è stato trattato in modo completo dal Darboux [1]): basterà dunque enunciarne i risultati. Egli ha fatto vedere che indicando con $u_1, u_2 \ldots u_{m+n}$ $m+n$ soluzioni particolari della $\Phi(u) = 0$, con $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{m+n}$ delle funzioni determinate dalle relazioni simboliche:

$$\sum (m-1, n-1)_{u_i} \omega_i = 0 , \tag{13}$$

la funzione:

$$\omega = \sum_1^{m+n}{}_i\, \omega_i\, \sigma_i , \tag{14}$$

dove:

$$\sigma_i = \int u_i\, \Omega_2(z)\, dx + z\, \Phi_1(u_i)\, dy , \tag{15}$$

soddisfa, per ogni valore di z integrale dell' equazione data, ad una equazione lineare omogenea del tipo iperbolico, (di cui le ω_i sono degli integrali particolari) e che la z si ottiene dalla ω mediante una trasformazione differenziale (m, n) corrispondente alle soluzioni particolari $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{m+n}$.

Quando poi l' equazione abbia il tipo parabolico, si considerino $2m-1$ soluzioni $u_1, u_2 \ldots u_{2m-1}$ della $\Phi(u) = 0$ e le fun-

---

1) Cf. Darboux — l. c., pag. 187.

zioni $\omega_1, \omega_2 \dots . \omega_{2m-1}$, definite dalle relazioni:

$$(16) \quad \sum (u_i)_{0k}\, \omega_i = 0 \ ; \ \sum (u_i)_{1k}\, \omega_i = 0 \qquad k = 0, 1, 2 \dots . m-2 .$$

Allora la funzione:

$$(17) \qquad \omega = \sum_{1}^{2m-1}{}_i \, \omega_i \, \rho_i ,$$

dove:

$$(18) \quad \rho_i = \int \{u_i\, \Omega_2(z) - z\, \Phi_2(u_i)\}\, dx - \{u_i\, \Omega_1(z) - z\, \Phi_1(u_i)\}\, dy ,$$

soddisfa anche essa per ogni valore di z integrale dell'equazione data ad un'equazione del tipo parabolico e della forma normale; e di più la z si deduce dalla ω mediante una trasformazione differenziale singolare dell'ordine m.

Escludendo infatti il caso di $m = 1$, (nel quale z si ottiene dalla ω con una trasformazione singolare del tipo parabolico), derivando la (17) otteniamo le relazioni:

$$(19) \quad \begin{cases} \omega_{0k} = \sum (\omega_i)_{0k}\, \rho_i \ ; & k = 0, 1, 2 \dots . m-1 \\ \omega_{1h} = \sum (\omega_i)_{1h}\, \rho_i \ ; & h = 0, 1, 2 \dots . m-2 \\ \omega_{1,m-1} = \sum (\omega_i)_{1,m-1}\, \rho_i - 2bz \sum (\omega_i)_{0,m-2}\, (u_i)_{01} & \end{cases}$$

ed inoltre anche l'altra:

$$(19_a) \qquad \omega_{20} = \sum (\omega_i)_{20}\, \rho_i ;$$

dalle quali, indicando con $G(\omega) = 0$ l'equazione del tipo parabolico di cui le ω_i sono integrali particolari, deduciamo:

$$(20) \qquad G(\omega) = \sum G(\omega_i)\, \rho_i = 0 .$$

Inoltre le $2m$ relazioni (19) danno, quando se ne eliminino le ρ_i, per la funzione z un'espressione lineare omogenea nelle derivate ω_{0k}, ω_{1k} $(k = 0, 1, 2 \dots . m-1)$, che si annulla di più per $\omega = \omega_i$; e ciò dimostra anche la seconda parte della nostra asserzione.

48. Ricordiamo ora che nella dimostrazione di Liouville del teorema fondamentale della teoria delle trasformazioni differenziali abbiamo trovato che ad ogni trasformazione generale dell' ordine m corrispondevano $2m$ soluzioni particolari ϑ_i dell' equazione aggiunta della trasformata; e le relazioni che legavano queste funzioni ϑ_i alle soluzioni z_i, che determinavano la trasformazione, erano appunto quelle date dalle formule (1) e (2) (ed un risultato perfettamente simile si è avuto nel caso delle trasformazioni singolari). Da questa osservazione, tenendo presente l'espressione della funzione z per le funzioni v_i, che entrano appunto nella dimostrazione di Liouville [1]), segue dunque il teorema:

" *Se* θ *è una trasformata differenziale generale dell'ordine* m *della funzione* z, *corrispondente alle soluzioni particolari* $z_1, z_2 \ldots . z_{2m}$, *inversamente la* z *si ottiene dalla* θ *con una trasformazione del tipo* (11), *dove le soluzioni particolari dell' equazione aggiunta a quella in* θ *che individuano la trasformazione, sono appunto quelle che fanno conoscere il metodo di dimostrazione del Liouville* ".

Ed un risultato perfettamente analogo, vale, come è evidente, anche per le trasformazioni inverse delle trasformazioni differenziali singolari dei due tipi iperbolico e parabolico.

Per le equazioni del tipo iperbolico vi è da fare una leggiera osservazione. Abbiamo veduto al n. 14 che una espressione $(m, 0)_z$ o si annullava per m soluzioni particolari dell' equazione in z, oppure si deduceva con i trasformazioni di Laplace da un' espressione analoga $(m-i, 0)_{z^{(i)}}$ della funzione $z^{(i)}$, i^{ma} trasformata di Laplace della funzione z. Ne segue, osservando che le due trasformazioni di Laplace sono inverse l' una dell' altra, che una proprietà affatto analoga vale per le inverse delle trasformazioni $(m, 0)$. Esse o sono date da una formula come la (14) o si deducono con i trasformazioni di Laplace da una formula analoga, in cui invece di m si ha $m-i$, e invece della funzione z (e dell' aggiunta) la sua i^{ma} trasformata di Laplace.

---

[1]) Cf. il §. II, n. 16-18.

Un altro risultato, molto interessante, che discende dalle formule superiori è anche il seguente:

Abbiamo dimostrato nella teoria delle trasformazioni differenziali che, se ad es. θ è una trasformata differenziale generale della z di ordine m, corrispondente alle soluzioni particolari $z_1, z_2 \dots z_{2m}$ della $\Omega(z) = 0$, l'integral generale u della $\Phi(u) = 0$ si ottiene da quello ϑ dell'equazione aggiunta a quella a cui θ soddisfa, ancora con una trasformazione differenziale generale dell'ordine m, che corrisponde di più alle solite soluzioni $\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_{2m}$ date dal metodo di Liouville. Ne segue, tenendo conto delle relazioni tra le ϑ_i e le z_i, il teorema:

" *Se θ è una trasformata differenziale generale della z dell'ordine m, corrispondente alle soluzioni particolari $z_1, z_2 \dots z_{2m}$, l'integral generale ϑ dell'equazione aggiunta di quella a cui θ soddisfa si ottiene da quello u della $\Phi(u) = 0$ con una trasformazione del tipo* (11), *la quale corrisponde ancora alle stesse soluzioni partiticolari $z_1, z_2 \dots z_{2m}$ dell'equazione in z* ".

Ed un risultato perfettamente analogo vale per le trasformazioni differenziali singolari.

49. Veniamo ora allo studio delle trasformazioni inverse delle trasformazioni integrali. È necessario per questo premettere un lemma affatto analogo a quello dimostrato nel n. 45.

Indicando con $z_1, z_2 \dots z_{2m-1}$ altrettante soluzioni particolari, linearmente indipendenti, della $\Omega(z) = 0$, con u_1 una soluzione qualunque dell'aggiunta, con:

$$A_1^i = \int \{u_1 \Omega_2(z_i) - z_i \Phi_2(u_1)\} dx - \{u_1 \Omega_1(z_i) - z_i \Phi_1(u_1)\} dy,$$

si determinino $2m-1$ funzioni $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{2m-1}$ dalle relazioni:

$$(21) \quad \sum A_1^i \omega_i = 0 \;;\; \sum (z_i)_{rs} \omega_i = 0 \qquad i = 1, 2 \dots 2m-1 \;;\; 0 \leq r+s \leq m-2$$

(supponendo naturalmente $m \geq 2$), che ne danno i mutui rapporti.

Tutte queste $2m-1$ funzioni ω_i soddisfano ad una medesima equazione lineare omogenea del 2.° ordine:

$$\text{(22)} \qquad G(\omega) = 0$$

della medesima classe di quella in z.

Per dimostrare questa asserzione basta procedere, quando sia $m \geq 3$, nello stesso modo che al n. 45: quando poi sia $m = 2$, allora osservando che si hanno soltanto tre funzioni ω_1, ω_2, ω_3 definite dalle due relazioni:

$$A_1 \omega_1 + A_2 \omega_2 + A_3 \omega_3 = 0 \quad , \quad z_1 \omega_1 + z_2 \omega_2 + z_3 \omega_3 = 0 \quad ,$$

il teorema è evidente.

Un risultato perfettamente analogo, si ottiene, quando, essendo l'equazione di uno dei due tipi iperbolico o parabolico, le funzioni ω siano definite dall'uno o dall'altro sistema di relazioni:

$$\text{(23)} \qquad \sum_1^{m+n-1}{}_i\, \omega_i\, \sigma_i = 0 \qquad \sum (m-2, n-2)_i\, \omega_i = 0 \;;$$

oppure:

$$\text{(24)} \quad \sum_1^{2m}{}_i\, \omega_i\, \rho_i = 0 \;;\; \sum (z_i)_{0k}\, \omega_i = 0 \;;\; \sum (z_i)_{1k}\, \omega_i = 0 \qquad k = 0, 1 \ldots. m-2.$$

essendo risp. σ_i e ρ_i i simboli delle trasformazioni integrali singolari del 1.° ordine delle equazioni del tipo iperbolico e parabolico.

50. Veniamo ora alle trasformazioni inverse delle trasformazioni integrali generali di ordine m.

Il caso in cui sia $m = 1$, è stato già da noi studiato, ed abbiamo veduto che l'inversa di una trasformazione integrale del 1.° ordine è una certa trasformazione di Liouville (cf. n. 34): supporremo dunque senz'altro sia $m \geq 2$.

Indichiamo allora con $u_1, u_2 \ldots. u_{2m-1}$ $2m-1$ soluzioni linearmente indipendenti della $\Phi(u) = 0$, con z_1 una dell'equazione data; e ponendo:

$$\text{(25)} \quad A_i^1 = \int \{u_i\, \Omega_2(z_1) - z_1\, \Phi_2(u_i)\}\, dx - \{u_i\, \Omega_1(z_1) - z_1\, \Phi_1(u_i)\}\, dy \;,$$

determiniamo $2m-1$ funzioni ω_i (i loro rapporti) dalle relazioni:

$$(26) \qquad \sum A_i^1\,\omega_i = 0 \ ; \ \sum (u_i)_{rs}\,\omega_i = 0 \ ; \quad 0 \leq r+s \leq m-2$$

e consideriamo la funzione:

$$(27) \qquad \omega = \sum_{1}^{2m-1}{}_i\ \omega_i\,A_i$$

(dove:

$$A_i = \int \{u_i\,\Omega_2(z) - z\,\Phi_2(u_i)\}\,dx - \{u_i\,\Omega_1(z) - z\,\Phi_1(u_i)\}\,dy).$$

Da queste relazioni deduciamo derivando:

$$(28) \qquad \begin{cases} \omega_{ik} = \sum_r (\omega_r)_{ik}\,A_r \ ; \quad 0 \leq i+k \leq m-2 \\ \omega_{i,\,m-1-i} = \sum_r (\omega_r)_{i,\,m-1-i}\,A_r + \lambda_i\,z\,. \end{cases}$$

Ricordando ora che le ω_r soddisfano tutte ad una medesima equazione lineare omogenea del secondo ordine, della medesima classe della $\Phi(u) = 0$ (e quindi anche della $\Omega(z) = 0$), dal primo gruppo di relazioni (28) deduciamo, quando sia $m \geq 3$ [1]), in modo perfettamente analogo a quello tenuto per le inverse delle trasformazioni differenziali, che la ω soddisfa alla stessa equazione, a cui soddisfano le funzioni ω_i.

Quando poi sia $m = 2$, e si abbiano quindi tre funzioni ω_1, ω_2, ω_3 definite dalle relazioni:

$$(26^*) \qquad \omega_1\,A_1^1 + \omega_2\,A_2^1 + \omega_3\,A_3^1 = 0 \ , \quad \omega_1\,u_1 + \omega_2\,u_2 + \omega_3\,u_3 = 0 \ ,$$

avremo, indicando con k un fattore di proporzionalità:

$$(26^{**}) \quad \omega_1 = k\,(u_2 A_3^1 - u_3 A_2^1) \ ; \ \omega_2 = (u_3 A_1^1 - u_1 A_3^1) \ ; \ \omega_3 = (u_1 A_2^1 - u_2 A_1^1) \ ;$$

ed ancora:

$$(27^*) \qquad \omega = \omega_1\,A_1 + \omega_2\,A_2 + \omega_3\,A_3\,.$$

---

[1]) Quando sia $m = 3$, il ragionamento è affatto simile a quello tenuto nel caso di $m = 2$ al n. 46.

Indicando allora con λ e μ i due determinanti del terzo ordine:

$$\lambda = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ (u_1)_{10} & (u_2)_{10} & (u_3)_{10} \end{vmatrix} \qquad \mu = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ u_1 & u_2 & u_2 \\ (u_1)_{01} & (u_2)_{01} & (u_3)_{01} \end{vmatrix},$$

avremo derivando le relazioni:

$$(29) \quad \begin{cases} \omega_{10} = \sum_i (\omega_i)_{10} A_i + k\, z\, (b\,\lambda + c\,\mu)\,, \\ \omega_{01} = \sum_i (\omega_i)_{01} A_i - k\, z\, (a\,\lambda + b\,\mu)\,, \\ \omega_{20} = \sum_i (\omega_i)_{20} A_i + k\, p\, (2\,b\,\lambda + c\,\mu) + k\,c\,\lambda\,q + \nu_1 z\,, \\ \omega_{11} = \sum_i (\omega_i)_{11} A_i - a k \lambda p + c k \mu q + \nu_2 z\,, \\ \omega_{02} = \sum_i (\omega_i)_{02} A_i - a k \mu p - k\, q\, (a\lambda + 2\,b\,\mu) + \nu_3 z\,, \end{cases}$$

e quindi anche:

$$(30) \qquad \tau(\omega) = a\,\omega_{20} + 2\,b\,\omega_{11} + c\,\omega_{02} = \sum \tau(\omega_i)\, A_i + \nu\, z.$$

Ne segue, indicando con:

$$G(\omega) = \tau(\omega) + \alpha\,\omega_{10} + \beta\,\omega_{01} + \gamma\,\omega$$

l'equazione a cui le ω_i soddisfano, che sarà:

$$G(\omega) = \rho\, z\,,$$

indicando con ρ un fattore di proporzionalità. Ma per la prima della (26) è chiaro che ω e quindi tutte le sue derivate si annullano identicamente per $z = z_1$: facendo dunque nella relazione superiore $z = z_1$, si ha $\rho\, z_1 = 0$ e quindi $\rho = 0$. È dunque dimostrato che anche in questo caso la funzione ω soddisfa, per ogni valore di z, ad una equazione lineare omogenea del 2.° ordine:

$$(31) \qquad G(\omega) = 0\,,$$

della medesima classe dell'equazione data, di cui le ω_i sono integrali particolari.

Vogliamo ora di più far vedere che la z si deduce dalla ω con una trasformazione integrale dell'ordine m.

Aggiungiamo infatti alle relazioni (28), (le quali avendo ora dimostrato che ω è l'integrale di una equazione lineare del 2.° ordine, si riducono a $2m-1$ indipendenti) le altre due che si ottengono derivando ancora una volta:

$$\omega_{i,\,m-i} = \sum_r (\omega_r)_{i,\,m-i} \, A_r + \lambda'_i z + \mu'_i p + \nu'_i q \,. \tag{32}$$

Le (28) e le (32) costituiscono un sistema di $2m+1$ relazioni nelle funzioni A , z, p, q (nel caso di $m=2$ questo sistema è costituito dalle (27) e (29)). Eliminandone una volta le funzioni A_i e la q, un'altra le funzioni A_i e la p, noi otterremo in ogni caso due relazioni della forma:

$$p + \alpha z = f(\omega) \;\; ; \;\; q + \alpha' z = f'(\omega) \,; \tag{33}$$

essendo f ed f' funzioni lineari omogenee di ω e delle sue derivate fino all'ordine m. Ma si ricordi ora che ω e quindi anche $f(\omega)$, $f'(\omega)$ si annullano identicamente per $z = z_1$, ed allora le relazioni precedenti prenderanno la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{z_1}\right) = f(\omega) \;\; ; \;\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{z_1}\right) = f'(\omega) \,; \tag{33*}$$

la quale dimostra che la $\frac{z}{z_1}$ (e quindi anche la z) si deduce dalla ω con una trasformazione integrale dell'ordine m. Di più dalle relazioni superiori è anche chiaro che le derivate superiori si annullano per $\omega = \omega_i$; e quindi la trasformazione integrale, definita dalle (33) è una trasformazione integrale generale dell'ordine m, corrispondente alle soluzioni particolari $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{2m-1}$.

51. In modo perfettamente analogo si determinano le trasformazioni inverse delle trasformazioni integrali singolari delle equazioni del tipo iperbolico e parabolico.

Cominciando dal caso iperbolico, indichiamo con $u_1, u_2 \ldots u_{m+n+1}$ altrettante soluzioni della $\Phi(u) = 0$, con z_1 una dell'equazione in z e determiniamo le $l = m+n+1$ funzioni ω_i dalle relazioni:

$$(34) \sum_1^l {}_i\, \omega_i\, \sigma_i^1 = 0 \;;\; \sum_1^l {}_i\, \omega_i\, (u_i)_{r0} = 0 \;;\; \sum_1^l {}_i\, \omega_i\, (u_i)_{0s} = 0 \;; \quad \begin{cases} r = 0, 1 \ldots m-1 \\ s = 0, 1 \ldots n-1 \end{cases}$$

(dove:

$$\sigma_i^1 = \int u_i\, \Omega_2(z_1)\, dx + z_1\, \Phi_1(u_i)\, dy)$$

che possiamo anche scrivere compendiosamente (colle notazioni di Darboux):

$$(34^*) \qquad \sum \omega_i\, \sigma_i^1 = 0 \;;\; \sum \omega_i\, (m-1, n-1)_{u_i} = 0\,.$$

Le ω_i soddisfano allora tutte ad una medesima equazione del tipo iperbolico.

Consideriamo ora la funzione ω data dalla formula:

$$(35) \qquad \omega = \sum_1^l {}_i\, \omega_i\, \sigma_i\,.$$

Derivando questa espressione di ω, avremo, tenendo conto della (34):

$$(36) \quad \begin{cases} (m, n-1)_\omega = \sum_1^l {}_i\, (m, n-1)_{\omega_i}\, \sigma_i \\ \omega_{m+1,0} = \sum_i (\omega_i)_{m+1,0}\, \sigma_i + \Omega_2(z) \sum (\omega_i)_{m0}\, u_i \\ \omega_{0,n} = \sum_i (\omega_i)_{0,n}\, \sigma_i + z \sum (\omega_i)_{0,n-1}\, (u_i)_{01} \\ \omega_{0,n+1} = \sum_i (\omega_i)_{0,n+1}\, \sigma_i + \alpha\, z + \beta\, q\,. \end{cases}$$

Queste relazioni ci dimostrano che quando sia $m \geq 1$, $n \geq 2$, la ω soddisfa alla medesima equazione lineare omogenea a cui soddisfano tutte le ω_i. Inoltre dalle relazioni (36) eliminando una volta gli integrali σ_i e la q, un' altra gli integrali σ_i e la p, otteniamo due relazioni della forma:

$$(37) \qquad \begin{cases} p + \alpha z = \sum_{1}^{m+1}{}_i \, \mu_i \, \omega_{i0} + \sum_{1}^{n}{}_k \, \nu_k \, \omega_{0k} \, ; \\ q + \alpha' z = \sum_{1}^{m}{}_i \, \mu'_i \, \omega_{i0} + \sum_{1}^{n+1}{}_k \, \nu'_k \, \omega_{0k} \, ; \end{cases}$$

ma, per la prima delle (34), annullandosi ω (e quindi tutte le sue derivate) per $z = z_1$, le relazioni superiori si possono anche scrivere:

$$(37^*) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{z}{z_1}\right) = \sum_{1}^{m+1}{}_i \, \mu_i \, \omega_{i0} + \sum_{1}^{n}{}_k \, \nu_k \, \omega_{0k} \, , \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{z}{z_1}\right) = \sum_{1}^{m}{}_i \, \mu'_i \, \omega_{i0} + \sum_{1}^{n+1}{}_k \, \nu'_k \, \omega_{0k} \, , \end{cases}$$

donde segue appunto che la $\dfrac{z}{z_1}$ è una trasformata integrale della ω, e precisamente quella corrispondente alle soluzioni particolari $\omega_1 \ldots . \omega_{m+n+1}$.

Quando poi sia $n = 1$ con $m \geq 1$, essendo al solito z_1 una soluzione dell' equazione in z, $u_1 \ldots . u_{m+2}$ dell' aggiunta, determinate le $m+2$ funzioni ω_i dalle relazioni:

$$(38) \qquad \sum \omega_i \, \sigma_i^1 = 0 \quad , \quad \sum \omega_i \, (u_i)_{r0} = 0 \quad , \quad r = 0, 1, 2 \ldots . m-1$$

la funzione:

$$(39) \qquad \omega = \sum_{1}^{l}{}_i \, \omega_i \, \sigma_i$$

avrà per successive derivate le espressioni:

$$(40)\quad \begin{cases} \omega_{r0} = \sum_i (\omega_i)_{r0}\, \sigma_i \quad , \quad r = 0, 1, 2 \ldots. m\,, \\ \omega_{m+1,0} = \sum (\omega_i)_{m+1,0}\, \sigma_i + \Omega_2(z) \sum (\omega_i)_{m0}\, u_i\,, \\ \omega_{01} = \sum (\omega_i)_{01}\, \sigma_i + z \sum \omega_i \dfrac{\partial u_i}{\partial y}\,, \\ \omega_{11} = \sum (\omega_i)_{11}\, \sigma_i + z \sum (\omega_i)_{10} \dfrac{\partial u_i}{\partial y}\,, \\ \omega_{02} = \sum (\omega_i)_{02}\, \sigma_i + q \sum \omega_i \dfrac{\partial u_i}{\partial y} + \alpha\, z\,. \end{cases}$$

Indicando quindi con:

$$\tau(\omega) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial \omega}{\partial x} + \beta \frac{\partial \omega}{\partial y} + \gamma\, \omega$$

l'equazione a cui tutte le ω_i soddisfano, si avrà per le (40):

$$\tau(\omega) = \sum \tau(\omega_i)\, \sigma_i + \lambda z = \lambda z\,.$$

Ricordando inoltre che la ω (e tutte le sue derivate) si annullano per $z = z_1$, si deduce anche in questo caso che $\lambda = 0$, cioè effettivamente la ω soddisfa ad un'equazione lineare del tipo iperbolico.

Inoltre eliminando dalle relazioni (40) una volta gli integrali σ_i e la derivata p, un'altra volta gli integrali stessi e la q, noi avremo due relazioni affatto analoghe alle (37), donde ancora segue che la $\dfrac{z}{z_1}$ è una trasformata integrale della ω corrispondente alle soluzioni particolari $\omega_1, \omega_2 \ldots. \omega_{m+2}$.

Qualora poi l'equazione abbia il tipo parabolico, converrà supporre, perchè si abbia una trasformazione singolare, che si conosca una soluzione z_1 dell'equazione data, $l = 2m+2$ u_i dell'aggiunta e si determinino le funzioni ω_i dalle relazioni:

$$(41)\quad \sum_1^l{}_i\, \omega_i\, \rho_i^1 = 0\ ;\ \sum_1^l{}_i\, \omega_i\, (u_i)_{0h} = 0\ ;\ \sum_1^l{}_i\, \omega_i (u_i)_{1h} = 0 \quad ; \quad h = 0, \ldots. m-1$$

dalle quali risulta ancora che le ω_i sono integrali di una medesima equazione del secondo ordine del tipo parabolico.

Allora la funzione:

$$(42)\qquad \omega = \sum_1^l \omega_i \, \rho_i \;, \quad \left(\rho_i = \int \{u_i \, \Omega_2(z) - z \, \Phi_2(u_i)\} \, dx - \{\ldots\} \, dy\right)$$

avrà come derivate le funzioni:

$$(43)\qquad \begin{cases} \omega_{0h} = \sum (\omega_i)_{0h} \, \rho_i \;; \quad \omega_{1h} = \sum (\omega_i)_{1h} \, \rho_i \;, \quad h = 0, 1, 2 \ldots m \\ \omega_{0,m+1} = \sum (\omega_i)_{0,m+1} \, \rho_i - \sum (\omega_i)_{0m} \left(u_i \, p - z \dfrac{\partial u_i}{\partial x}\right), \\ \omega_{1,m+1} = \sum (\omega_i)_{1,m+1} \, \rho_i - \sum (\omega_i)_{1m} \left(u_i \, p - z \dfrac{\partial u_i}{\partial x}\right), \\ \omega_{2k} = \sum (\omega_i)_{2k} \, \rho_i \;, \quad k = 0, 1, 2 \ldots m-1 \\ \omega_{2m} = \sum (\omega_i)_{2m} \, \rho_i + 2 b z \sum (\omega_i)_{1m} \, u_i \;, \\ \omega_{2,m+1} = \sum (\omega_i)_{2,m+1} \, \rho_i + \alpha q + \beta q + \gamma z \,. \end{cases}$$

Da queste relazioni segue, che per $m \geq 1$, la ω soddisfa alla stessa equazione del secondo ordine, a cui le ω_i soddisfano e che la $\dfrac{z}{z_1}$ si deduce dalla ω con una trasformazione integrale singolare dell' ordine $m+2$ corrispondente alle soluzioni particolari $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{2m+2}$. E come subito si verifica, una conclusione affatto identica vale quando sia $m = 0$.

52. È facile ora caratterizzare le trasformazioni inverse delle trasformazioni integrali. Ricordiamo infatti che ad es. nel caso generale, ad ogni sistema di soluzioni $z_1, z_2 \ldots z_{2m-1}$ della $\Omega(z) = 0$ ed una u della $\Phi(u) = 0$ corrispondeva una serie ∞^{2m-1} (dipendente da $2m-1$ costanti arbitrarie) di equazioni lineari omogenee del secondo ordine, trasformate integrali φ della z di ordine m:

ed il metodo di dimostrazione ivi tenuto faceva conoscere una soluzione particolare φ_0 dell'equazione in φ (che si otteneva facendo nelle formule di trasformazione $z=0$) e $2m-1$ soluzioni $\psi_1 \ldots . \psi_{2m-1}$ soluzioni dell'equazione aggiunta, i cui mutui rapporti erano determinati dalle relazioni:

$$(44) \qquad \sum \psi_i \, A_1^i = 0 \quad ; \quad \sum \psi_i \, (z_i)_{rs} = 0 \quad ; \quad 0 \leq r+s \leq m-2$$

(ed un risultato perfettamente analogo si trovò nel caso delle trasformazioni singolari).

Possiamo dunque, tenendo presente il risultato del n. 51, enunciare il teorema:

" *Se φ è una trasformata integrale dell'ordine m della $\Omega(z)=0$ corrispondente alle soluzioni $z_1, z_2 \ldots . z_{2m-1}$ della equazione in z ed alla soluzione u dell'aggiunta, la z si ottiene dalla φ con una trasformazione del tipo* (27), *e precisamente mediante quella trasformazione che corrisponde alla soluzione particolare dell'equazione in φ ed a quelle dell'aggiunta* (*date dalle* (44)) *che il metodo di dimostrazione del Liouville fa conoscere* ".

Un teorema perfettamente analogo vale poi per le trasformazioni singolari; ed anche qui per quelle del tipo iperbolico ha luogo un'osservazione simile a quella già fatta per le trasformazioni differenziali.

Un altro risultato interessante segue dalle formule superiori. Dalla teoria della composizione delle trasformazioni differenziali colle integrali segue infatti che, indicando ad es. con ψ l'integral generale della equazione aggiunta di quella a cui la φ soddisfa, dalla funzione ψ (o meglio da una funzione proporzionale alla ψ) si ottiene l'integral generale u della $\Phi(u)=0$ mediante una trasformazione integrale generale dell'ordine m, che corrisponde alla soluzione particolare φ_0 della equazione in φ e alle $\psi_1, \psi_2 \ldots . \psi_{2m-1}$ dell'aggiunta. Ne deduciamo inversamente il teorema:

" *L'integral generale ψ della equazione aggiunta di quella a cui la φ soddisfa, si deduce dall'integral generale u della* $\Phi(u)=0$

mediante una trasformazione del tipo (27), *la quale corrisponde alla soluzione particolare* u_0 *della* $\Phi(u) = 0$ *e alle* $z_1 \ldots . z_{2m-1}$ *della* $\Omega(z) = 0$ *che hanno fatto passare dalla* z *alla* φ „.

Ed un teorema analogo vale per le trasformazioni singolari.

53. Gli sviluppi superiori ci mettono in grado di dimostrare con esattezza e rigore un punto che in fondo abbiamo ammesso al §. III, n. 38. Parlando ivi del teorema di permutabilità di una trasformazione integrale con una differenziale, abbiamo detto che, eseguendo prima sulla z una trasformazione differenziale dell'ordine m, quindi su questa una integrale del 1.° ordine, corrispondente alla soluzione particolare u della $\Phi(u) = 0$ (e più precisamente a quella ϑ che deriva dalla u), si otteneva una trasformazione integrale dell'ordine $m+1$ *corrispondente alla soluzione* u *della* $\Phi(u) = 0$, e naturalmente poi anche alle soluzioni particolari dell'equazione in z che individuavano le due trasformazioni. L'ultima di queste affermazioni è evidente: la prima risulta in modo rigoroso dalle considerazioni seguenti:

Sia dunque:

$$\theta = [z, z_1, z_2 \ldots . z_{2m}] \tag{45}$$

una trasformata differenziale della z di ordine m (che supponiamo generale, poichè un ragionamento perfettamente analogo vale per le trasformazioni singolari): saranno allora le funzioni ϑ_i date dalle relazioni:

$$\sum \vartheta_i \, (z_i)_{rs} = 0 \qquad 0 \leq r+s \leq m-1 \tag{46}$$

le soluzioni particolari dell'equazione aggiunta a quella in θ, date dal metodo di Liouville; e

$$\vartheta = \sum \vartheta_i \, A^i = \sum \vartheta_i \int \{u\,\Omega_2(z_i) - z_i\,\Phi_2(u)\}\,dx - \{u\,\Omega_1(z_i) - z_i\,\Phi_1(u)\}\,dy \tag{47}$$

l'integral generale di questa equazione.

Chiamando allora con $P(\theta)=0$, $Q(\vartheta)=0$ queste due equazioni e ponendo:

(48) $$M=\int \{\vartheta\, P_2(\theta)-\theta\, Q_2(\vartheta)\}\, dx - \{\vartheta\, P_1(\theta)-\theta\, Q_1(\vartheta)\}\, dy\,,$$

sarà:

(49) $$\varphi=\theta\, M^{2m}-M\,\theta_{2m}$$

la trasformata integrale della θ corrispondente alle soluzioni (z_{2m}, u) dell'equazione in z nell'aggiunta.

Si osservi ora che posto:

(50) $$M_i=\int \{\vartheta_i\, P_2(\theta)-\theta\, Q_2(\vartheta_i)\}\, dx - \{\vartheta_i\, P_1(\theta)-\theta\, Q_1(\vartheta_i)\}\, dy\,,$$

a causa della (47) sarà, integrando per parti:

(51) $$M=\left\{\sum_i A^i M_i - \int \left\{(M_i+b\,\theta\,\vartheta_i)\frac{\partial A^i}{\partial x}+c\,\theta\,\vartheta_i\frac{\partial A^i}{\partial y}\right\}dx - \right.$$
$$\left. -\left\{a\,\theta\,\vartheta_i\frac{\partial A^i}{\partial x}+(b\,\theta\,\vartheta_i-M_i)\frac{\partial A^i}{\partial y}\right\}dy\right\}$$

(e per $m\geq 2$:

(51*) $$M=\sum_i A^i M_i-\sum_i \int M_i\, dA^i)\ .$$

Ora le funzioni M_i non sono che quelle che abbiamo indicato con v_i nella dimostrazione di Liouville relativa alla funzione z (cf. §. II, n. 18), aumentate di una quantità proporzionale a z; esse sono dunque funzioni lineari omogenee in z e nelle sue derivate fino all'ordine m (senza alcun segno integrale); ed allora scritto φ sotto la forma:

(52) $$\varphi=\theta\, M^{2m}-\theta_{2m}\sum A^i M_i+\theta_{2m}\int M_i\, dA^i$$

è chiaro che essa contiene linearmente ed omogeneamente le derivate di z fino all'ordine m (al più) e un integrale A, che corrisponde appunto alla soluzione u della $\Phi(u)=0$. È chiaro poi anche che φ si annulla, come θ, per $z_1, \ldots. z_{2m}$ ed anche per z_{2m+1}; e questo dimostra con tutto rigore il teorema enunciato al n. 38 della permutabilità di una trasformazione differenziale con una integrale del 1.º ordine e quindi anche con una di ordine qualunque.

54. Diamo infine un cenno di ulteriori ricerche.

Le trasformazioni inverse delle trasformazioni differenziali ed integrali ci danno un esempio di una nuova classe di trasformazioni delle equazioni lineari del 2.º ordine, che comprende come casi particolari la teoria delle trasformazioni differenziali ed integrali. Lo studio di queste trasformazioni generali [1]) coincide colla risoluzione del problema seguente:

" *Indicando ancora con* z *l' integral generale della* $\Omega(z) = 0$, *determinare tutte le espressioni:*

$$\omega = \sum \alpha_{ik} z_{ik} + \sum \beta_i A_i$$

(dove:

$$A_i = \int P_i\, dx + Q_i\, dy$$

e le P_i *e* Q_i *sono funzioni lineari omogenee di* z *e delle sue derivate) le quali per ogni valore di* z *integrale della equazione data soddisfano anche esse ad un' equazione lineare omogenea del secondo ordine* ".

La teoria già svolta è suscettibile inoltre di svariate applicazioni di indole geometrica ed analitica, tra le quali voglio ricordare esplicitamente quella relativa alla costruzione di tutte le equazioni di Laplace con integrale generale esplicito (che si può

[1]) Ad esse è dedicato un altro mio lavoro, collo stesso titolo del presente ora in pubblicazione negli *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino* (maggio e giugno 1897).

Alla teoria di queste trasformazioni più generali si riconduce anche lo studio della composizione delle trasformazioni integrali ed il teorema della loro permutabilità, da me omessi nel presente lavoro.

riguardare come la ricostruzione della seconda parte della celebre memoria di Moutard bruciata negli incendi della Comune del 1871[1])). Un altro punto molto interessante della teoria delle trasformazioni è quello di vedere quale influenza abbia la conoscenza di una particolare trasformazione di un'equazione (in particolare di una sua trasformazione infinitesima) per la sua integrazione o per lo meno per la determinazione di alcuni suoi integrali particolari.

Ma il problema di gran lunga il più interessante di tutti quelli che la teoria svolta fin qui può suggerire, e che devo limitarmi soltanto ad enunciare, è il seguente: " *Date due equazioni lineari omogenee del secondo ordine e della medesima classe, riconoscere per mezzo di un numero* finito *di operazioni algebriche, differenziali o di quadrature, se l'una di esse si possa o no dedurre dall'altro con una delle trasformazioni sinora studiate* ". Questo problema, di cui è manifesta l'importanza grandissima, ma la cui difficoltà è, a mio parere, pari alla sua importanza, darà in particolare il modo di riconoscere con un numero *finito* di operazioni *(il che invece ora non è possibile)* se una data equazione lineare del secondo ordine appartenga a quelle che Ampère ha detto della prima classe, che hanno cioè un integrale generale esplicito nelle funzioni arbitrarie. Questo solo caso particolare offre già tanto interesse e la sua risoluzione segnerebbe un tale progresso nella teoria dell'integrazione delle equazioni del secondo ordine, che basta da solo a rendere degno il problema generale enunciato di uno studio accurato e profondo. Ho voluto quindi proporlo agli studiosi, colla speranza e l'augurio che qualcuno voglia affrontarlo con migliori forze e miglior successo del mio.

---

[1]) Cf. due mie note ai Lincei (maggio 1897). *Sulle equazioni del secondo ordine la cui serie di Laplace è finita.*

NOTA AL N. 45

Al principio del n. 45 abbiamo ammesso senza dimostrazione un punto non del tutto evidente; cioè che le relazioni (1), quando le z_i siano linearmente indipendenti, non possano mai formare un sistema indeterminato e siano quindi sempre sufficienti a dare i rapporti delle funzioni ϑ_i.

Questo punto vogliamo ora chiarire.

Supponiamo perciò più in generale che, essendo sempre le z_i $(i=1, 2 \dots . p)$ soluzioni particolari della $\Omega(z)=0$, con $p \geq 2m+2$, si abbiano le relazioni:

$$(\alpha) \qquad \sum_1^p {}_i \, (z_i)_{tu} \, \vartheta_i = 0 \qquad 0 \leq t+u \leq m-1 .$$

Se le z_i sono linearmente indipendenti, le (α) si riducono precisamente a $2m+1$ relazioni *algebricamente* indipendenti. Supponiamo infatti che questo non sia e che la caratteristica della matrice della z_i e delle loro derivate fino all'ordine m (matrice formata in modo analogo ai determinanti del n. 17) sia inferiore a $2m+1$. Sarà in particolare nullo il determinante:

$$[1, 2, 3 \dots . . 2m+1] ;$$

potranno quindi determinarsi delle *funzioni* λ_i, tali che si abbia:

$$(\beta) \qquad (z_{2m+1})_{hk} = \sum_1^{2m} {}_i \, \lambda_i \, (z_i)_{hk} \quad ; \quad 0 \leq h+k \leq m .$$

Dalle (β) derivando abbiamo:

$$(\gamma) \qquad \sum_1^{2m} {}_i \, (z_i)_{tu} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \sum_1^{2m} {}_i \, (z_i)_{tu} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} = 0 \quad ; \quad 0 \leq t+u \leq m-1$$

$$(\delta) \qquad \sum_1^{2m} {}_i \left\{ (z_i)_{m-k,\, k} \frac{\partial \lambda_i}{\partial y} - (z_i)_{m-k-1,\, k+1} \frac{\partial \lambda_i}{\partial x} \right\} = 0 \quad ; \quad k=0, 1 \dots . m-1 .$$

Possiamo inoltre supporre che nelle (γ) sia ad es. il determinante $[1, 2, 3 \ldots. 2m-1]$ diverso da zero, altrimenti faremmo per le $z_1, z_2 \ldots. z_{2m-1}$ lo stesso ragionamento che ora per le $z_1, z_2 \ldots. z_{2m+1}$: allora (cf. n. 18) potremo eliminare dalle (γ) e (δ) le derivate delle prime $2m-1$ funzioni λ, e pervenire a relazioni della forma:

$$(\varepsilon) \qquad (1, 2 \ldots 2m)_k \frac{\partial \lambda_{2m}}{\partial y} - (12 \ldots. 2m)_{k+1} \frac{\partial \lambda_{2m}}{\partial x} = 0 .$$

Le (ε) si riducono a due (e non più) indipendenti: infatti, ove così non fosse, indicando con μ un conveniente fattore di proporzionalità, dovrebbe aversi per ogni valore di r:

$$(12 \ldots 2m)_r = \mu\, (12 \ldots 2m)_{r+1} ,$$

donde, tenendo conto delle equazioni a cui le z_i soddisfano, deducesi facilmente essere le $z_1 \ldots z_{2m}$ linearmente dipendenti. Se dunque questo non accade, le (ε) si ridurranno allora a due indipendenti; esse dovranno allora $\frac{\partial \lambda_m}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_m}{\partial y} = 0$ e quindi λ_m e tutte le altre λ sono **costanti**: cioè le $z_1, z_2 \ldots. z_{2m+1}$ sono linearmente dipendenti.

Un ragionamento analogo vale nei casi singolari (cf. Darboux — *Leçons,* vol. II, pag. 184).

Errata-Corrige

Pag.	linea	invece di:	leggi:
5	21	$\theta = az + \beta p + \gamma q$	$\theta = \alpha z + \beta p + \gamma q$
» 13	» 20	tutto	tutte
» 22	» 7	$\dfrac{\partial z^{i+k}}{\partial x^i\ \partial y^k}$	$\dfrac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i\ \partial y^k}$
» 23	» 12	$0\quad \gamma\quad \beta$	$\theta\quad \beta\quad \gamma$
» 25	» 7	(9)	(9) e (9*)
» 39	» 3	$-\dfrac{m(m+1)}{2}$	$-\dfrac{m(m-1)}{2}$
» 44	» 23	m	$2m$
» 48	» 6	$2m+1$	$2m-1$
» 68	» 13	o	è
» »	» 19	e	E
» 88	» 18	v e z	φ e z
» 110	» 10	*trasformazione generale*	*trasformazione differenziale generale*
» 111	» 3	$-\{u\,\Omega_1(z^{(i)})-z^{(i)})\,\Phi_1(u)\}\,dy$	$-\{u\,\Omega_1(z^{(i)})-z^{(i)}\,\Phi_1(u)\}\,dy$
» »	» 18	$4m-1$	$4m-2$
» 112	» 12		*aggiungere in fine:* $0 \leq t+u \leq m-2$.