ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIUSEPPE LAURICELLA

Equilibrio dei corpi elastici isotropi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 7 (1895), exp. nº 6, p. 1-120

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1895_1_7__A6_0>

Dott. **GIUSEPPE LAURICELLA**

EQUILIBRIO DEI CORPI ELASTICI ISOTROPI

PRESENTATO ALLA R. SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

PER L' ABILITAZIONE ALL' INSEGNAMENTO

Il professore SOMIGLIANA nella sua memoria *Sulle equazioni dell'Elasticità* (Annali di Matematica pura ed applicata, T. XVII, Serie 2.ª), trova tre formole, le quali dànno le componenti degli spostamenti dei punti di un corpo elastico isotropo in equilibrio in una deformazione qualsiasi in funzione delle forze esterne, delle tensioni al contorno e degli spostamenti pure al contorno. Ora per la determinazione di dette componenti, non è necessaria la conoscenza di tutti gli elementi che compariscono nelle formule del SOMIGLIANA; per cui è naturale di ricercare se è possibile la eliminazione da queste formole di quegli elementi, che sono superflui.

Bisogna osservare che le menzionate formule del SOMIGLIANA sono la naturale estensione della formola di GREEN relativa all'equazione

$$\Delta^2 u = f$$

al caso delle equazioni dell'elasticità. Ora, come è noto, la formola di GREEN ci dà il valore della funzione u in un punto qualsiasi del corpo che si considera, in funzione dei valori di u nei punti della superficie limitante il corpo e dei valori della derivata di u rispetto alla normale in questi stessi punti, mentre la u è determinata dai soli valori di questa funzione nei punti della superficie; però l'inconveniente si toglie subito, introducendo la nota funzione di GREEN. Una cosa analoga si può fare, come ha osservato il prof. VOLTERRA in un corso di lezioni di fisica-matematica, nel caso dell' elasticità, quando si faccia uso delle formole del SOMIGLIANA; basterà infatti trovare dei convenienti integrali particolari delle equazioni dell'equilibrio e fare uso del teorema del BETTI.

In questo lavoro io esporrò il metodo del prof. VOLTERRA, discutendolo nei quattro diversi problemi che si presentano nella teoria dell'equilibrio dei corpi elastici ed illustrandolo con l' esempio del corpo elastico indefinito limitato da un piano. Questo esempio è stato studiato di già dal prof. CERRUTI (1) e dal SOMIGLIANA (2) con il metodo del BETTI (3) più o meno modificato; però il suddetto metodo del VOLTERRA ha il vantaggio di darci volta per volta tutto ciò che è determinato con integrali semplici di spazio o di superficie, mentre i vecchi metodi dànno luogo in generale ad integrali doppî di superficie o di spazio.

L' analogia delle formule del SOMIGLIANA colla formula di GREEN risulta ancora più evidente, dal fatto che si

---

(1) *Ricerche intorno all' equilibrio ecc.* — Atti della R. Accademia dei Lincei, Memorie della Classe di sc. fis. mat. e nat., serie 3.ª t. XIII.

Sulla deformazione di un corpo elastico ecc. — Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Classe di sc. fis. mat. e nat. t. IV, 1.º sem.

(2) *Sopra l' equilibrio di un corpo elastico isotropo.* — Nuovo Cimento, Vol. XVII, XVIII, XIX.

3) *Teoria della elasticità.* — Nuovo Cimento, Vol. VII, VIII, IX, X.

possono dimostrare per le prime alcune proprietà analoghe a quelle che si sogliono dimostrare per la seconda nella teoria delle funzioni armoniche. Così dimostrai (1) per gli integrali di spazio, che compariscono nelle formole del SOMIGLIANA, un teorema analogo a quello del POISSON, e qui dimostrerò per gli integrali di superficie dei teoremi analoghi a quelli relativi alla funzione potenziale di una distribuzione in superficie ed ai doppî strati.

Il metodo del VOLTERRA ed i metodi del BETTI, del CERRUTI e del SOMIGLIANA non può dirsi effettivamente che risolvano sempre i quattro problemi dell'equilibrio; perchè essi si basano tutti quanti sulla esistenza di alcuni integrali particolari delle equazioni dell'equilibrio, aventi proprietà analoghe a quelle di cui gode la nota funzione di GREEN. Ora in alcuni casi speciali si riesce a trovare questi integrali particolari, ma in generale questa ricerca è pressochè impossibile.

Nel caso in cui sono date le componenti degli spostamenti dei punti della superficie, che limita il corpo elastico, il problema dell'elasticità equivale evidentemente al noto problema di DIRICHLET della teoria delle funzioni armoniche. Guidato da questa analogia, ho potuto, con un metodo simile a quello del NEUMANN, risolvere per mezzo di serie l'accennato problema dell'elasticità, relativo ad un corpo elastico limitato da una superficie convessa qualsiasi, quando le velocità di vibrazioni longitudinali e trasversali differiscono in valore assoluto sufficientemente poco tra di loro. Ora nei corpi elastici isotropi la differenza tra le velocità di vibrazioni trasversali e lon-

(1) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei; Vol. II, anno 1893.

gitudinali si mantiene in valore assoluto superiore ad una certa quantità; sicchè, quando per la validità del metodo accennato, questa quantità non può essere superata, il problema analitico risoluto non corrisponde ad alcun caso di corpo elastico isotropo.

Prima di arrivare ai risultati testè accennati, ho risoluto il problema dell'equilibrio di un corpo elastico sferico, con un metodo diverso da quello tenuto dal CERRUTI (1) e dal SOMIGLIANA (2); ed ho dimostrato un teorema, sulle serie di integrali delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, che è l'estensione di quello dimostrato dal VOLTERRA sulle serie di funzioni armoniche.

(1) *Ass. franc. pour l'avanc. des Sciences.* Compte-Rendu de la 14.e Session. Grenoble, 1885; 2.e partie, p. 68-79.
Nuovo Cimento, Serie 3. Vol XXXII.

(2) Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1887.

CAPITOLO I.

Metodo per integrare le equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici

1. Indichiamo con S un corpo elastico isotropo limitato dalla superficie σ; con ρ la sua densità; con X, Y, Z le componenti delle forze che agiscono sui punti della massa del corpo, che diremo componenti delle forze esterne; con u, v, w le componenti degli spostamenti corrispondenti ad una certa deformazione; con X_σ, Y_σ, Z_σ le componenti delle tensioni corrispondenti; con a, b le velocità di vibrazioni trasversali e longitudinali; con r la distanza di un dato punto (x_1, y_1, z_1) del corpo elastico ad un altro punto qualsiasi; con n la direzione positiva della normale a σ. Posto:

$$L = -\rho\, a^2 \quad , \quad K = \rho\, (2\, a^2 - b^2) \quad , \quad \alpha = \frac{a^2 - b^2}{b^2} \,,$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \,, \quad \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \,,$$

$$(1)\left\{ \gamma_{11} = \frac{\partial u}{\partial x} \,, \gamma_{22} = \frac{\partial v}{\partial y} \,, \gamma_{33} = \frac{\partial w}{\partial z} \,, \gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \,, \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \,, \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \,,\right.$$

le equazioni indefinite dell'equilibrio saranno:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \rho\, X &= L\, \Delta^2 u + (L+K) \frac{\partial \theta}{\partial x} \,, \\ \rho\, Y &= L\, \Delta^2 v + (L+K) \frac{\partial \theta}{\partial y} \,, \\ \rho\, Z &= L\, \Delta^2 w + (L+K) \frac{\partial \theta}{\partial z} \,, \end{aligned} \right.$$

quelle di superficie:

$$(3)\quad \begin{cases} X_\sigma = (K\,\theta + 2\,L\,\gamma_{11})\,\dfrac{\partial x}{\partial n} + L\,\gamma_{12}\,\dfrac{\partial y}{\partial n} + L\,\gamma_{13}\,\dfrac{\partial z}{\partial n}\,, \\ Y_\sigma = L\,\gamma_{21}\,\dfrac{\partial x}{\partial n} + (K\,\theta + 2\,L\,\gamma_{22})\,\dfrac{\partial y}{\partial n} + L\,\gamma_{23}\,\dfrac{\partial z}{\partial n}\,, \\ Z_\sigma = L\,\gamma_{31}\,\dfrac{\partial x}{\partial n} + L\,\gamma_{32}\,\dfrac{\partial y}{\partial n} + (K\,\theta + 2\,L\,\gamma_{33})\,\dfrac{\partial z}{\partial n}\,. \end{cases}$$

I tre sistemi di funzioni:

$$(4)\quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}\,, \quad v_1 = \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}\,, \quad w_1 = \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}\,; \\ u_2 = \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial x}\,, \quad v_2 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2}\,, \quad w_2 = \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{\partial^2 r}{\partial y\,\partial z}\,; \\ u_3 = \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial x}\,, \quad v_3 = \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{\partial^2 r}{\partial z\,\partial y}\,, \quad w_3 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\alpha}{2}\,\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2} \end{cases}$$

sono tre sistemi di integrali delle equazioni (2) corrispondenti a $\rho\,X = \rho\,Y = \rho\,Z = 0$, mediante i quali il prof. Somigliana è arrivato alle sue formole:

$$(5)\quad \begin{cases} -4\,\pi\,L\,u_0 = \displaystyle\int_S \Sigma\,\rho\,X\,u_1\,dS + \int_\sigma \Sigma\,X_\sigma\,u_1\,d\sigma - \int_\sigma \Sigma\,X_\sigma^{(1)}\,u\,d\sigma\,, \\ -4\,\pi\,L\,v_0 = \displaystyle\int_S \Sigma\,\rho\,X\,u_2\,dS + \int_\sigma \Sigma\,X_\sigma\,u_2\,d\sigma - \int_\sigma \Sigma\,X_\sigma^{(2)}\,u\,d\sigma\,, \\ -4\,\pi\,L\,w_0 = \displaystyle\int_S \Sigma\,\rho\,X\,u_3\,dS + \int_\sigma \Sigma\,X_\sigma\,u_3\,d\sigma - \int_\sigma \Sigma\,X_\sigma^{(3)}\,u\,d\sigma\,, \end{cases}$$

nelle quali u_0, v_0, w_0 sono rispettivamente i valori di u, v, w nel punto (x_1, y_1, z_1) del corpo elastico ed $X_\sigma^{(1)}$, $Y_\sigma^{(1)}$, $Z_\sigma^{(1)}$; $X_\sigma^{(2)}, \ldots$; $X_\sigma^{(3)}, \ldots$ sono le tensioni al contorno σ, corrispondenti rispettivamente ai tre sistemi di spostamenti rappresentati dalle (4).

Osserviamo quì che le formule (5) il SOMIGLIANA le aveva dedotte dapprima per il solo caso che lo spazio S fosse finito; però egli in seguito in una Nota inserita nel vol. XXIII, serie II, fasc. XX dei Rendiconti del R. Istituto Lombardo (*Formole generali per la rappresentazione di un campo di forza....*) le estese al caso di un corpo elastico indefinito, facendo notare che allora bisogna ammettere che le forze esterne agiscano soltanto sopra una porzione finita del corpo e che le u, v, w divengano all'infinito infinitesime del primo ordine.

2. Prima di esporre il metodo del VOLTERRA, sarà bene stabilire alcuni risultati che ci saranno molto utili in seguito.

Le equazioni generali dell'equilibrio dei corpi elastici si possono scrivere (v. BETTI l. c., form. (12), (13)) sotto la forma:

$$(6)\qquad \begin{cases} \rho\, X = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{11}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{12}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{13}}, \\[2ex] \rho\, Y = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{21}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{22}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{23}}, \\[2ex] \rho\, Z = \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{31}} + \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{32}} + \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{33}}, \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} X_\sigma = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{11}} \cos(nx) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{12}} \cos(ny) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{13}} \cos(nz), \\[2ex] Y_\sigma = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{21}} \cos(nx) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{22}} \cos(ny) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{23}} \cos(nz), \\[2ex] Z_\sigma = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{31}} \cos(nx) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{32}} \cos(ny) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \gamma_{33}} \cos(nz), \end{cases}$$

in cui φ rappresenta il potenziale delle forze elastiche.

Moltiplichiamo le (6) rispettivamente per $u\, dS$, $v\, dS$, $w\, dS$, sommiamo ed integriamo a tutto lo spazio S occupato dal corpo elastico. Avremo, facendo delle integrazioni per parti:

$$\int_S \rho\,(X\,u + Y\,v + Z\,w)\,dS = -\int_\sigma (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w)\,d\sigma -$$

$$-\int_S \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{11}}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{12}}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{13}}\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{21}}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{22}}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{23}}\frac{\partial v}{\partial z}\right) +$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{31}}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{32}}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{33}}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \right\} dS\,,$$

e per le (1):

$$\int_S \rho\,(X\,u + Y\,v + Z\,w)\,dS + \int_\sigma (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w)\,d\sigma +$$

$$+\int_S \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{11}}\gamma_{11} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{22}}\gamma_{22} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{33}}\gamma_{33} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{23}}\gamma_{23} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{31}}\gamma_{31} + \frac{\partial\varphi}{\partial\gamma_{12}}\gamma_{12}\right) dS = 0\,;$$

ossia, poichè φ è una forma omogenea di 2.° grado nelle γ_{rs} (Betti; l. c., §. 2):

$$(8)\quad \int_S \rho\,(X\,u + Y\,v + Z\,w)\,dS + \int_\sigma (X_\sigma u + Y_\sigma v + Z_\sigma w)\,d\sigma + 2\int_S \varphi\,dS = 0.$$

Se supponiamo di avere

$$X = Y = Z = 0\,,$$

ed al contorno una volta:

$$(9)\qquad u = v = w = 0\,,$$

una seconda volta:

$$(10)\qquad X_\sigma = v = w = 0\,,$$

una terza volta:

$$(11)\qquad u = Y_\sigma = Z_\sigma = 0\,,$$

ed una quarta:

$$(12)\qquad X_\sigma = Y_\sigma = Z_\sigma = 0\,;$$

la (8) ci darà sempre:

$$\int_S \varphi \, dS = 0\,;$$

e poichè φ è una forma definita negativa nelle γ_{rs} (Betti; l. c.), così dovremo sempre avere:

$$\gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = \gamma_{12} = 0\,,$$

ossia:

$$(13)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0\,,\ \frac{\partial v}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,,\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,,\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0\,.$$

Indicando con K_1, K_2, K_3, C_1, C_2, C_3 sei costanti arbitrarie, si avrà dalle (13):

$$(14)\quad u = K_1 + C_2 z - C_3 y\,,\ v = K_2 + C_3 x - C_1 z\,,\ w = K_3 + C_1 y - C_2 x\,.$$

Ora nell'ipotesi (9) abbiamo in tutti i punti di σ:

$$u = K_1 + C_2 z - C_3 y = 0\,,\ v = K_2 + C_3 x - C_1 z = 0\,,\ w = K_3 + C_1 y - C_2 x = 0;$$

sarà allora:

$$K_1 = K_2 = K_3 = C_1 = C_2 = C_3 = 0\,,$$

e per le (14) si avrà in tutti i punti di S:

$$u = 0 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = 0\,.$$

Di qui ne deduciamo che *note le forze esterne e le componenti degli spostamenti nei punti del contorno* σ, *le componenti degli spostamenti nei punti di* S *sono completamente determinate.*

L'ipotesi (10) ci dà per i punti di σ:

$$v = K_2 + C_3 x - C_1 z = 0 \quad , \quad w = K_3 + C_1 y - C_2 x = 0\,;$$

quindi:

$$K_2 = K_3 = C_3 = C_2 = C_1 = 0\,,$$

e per le (14):

$$u = K_1 \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = 0$$

in tutti i punti di S. Questo risultato si può interpretrare nel seguente modo: *Note le forze esterne, la componente delle tensioni al contorno nella direzione x e le componenti degli spostamenti al contorno nelle direzioni y, z, gli spostamenti dei punti del corpo* S *sono determinati a meno di una traslazione infinitesima nella direzione x, che non altera la forma del corpo.*

Nell'ipotesi (11) si ha invece al contorno:

$$u = K_1 + C_2 z - C_3 y = 0 ;$$

per cui sarà sempre:

$$K_1 = C_2 = C_3 = 0 ,$$

e per le (14):

$$u = 0 \quad , \quad v = K_2 - C_1 z \quad , \quad w = K_3 + C_1 y .$$

Quest'altro risultato ci dice che *note le forze esterne, le componenti delle tensioni al contorno nelle direzioni y, z e la componente degli spostamenti al contorno nella direzione x, gli spostamenti sono determinati in tutti i punti del corpo elastico a meno di due traslazioni infinitesime nelle direzioni y, z e di una rotazione infinitesima attorno all'asse x, che non alterano la forma del corpo.*

Finalmente nell'ipotesi (12) abbiamo su σ:

$$u = K_1 + C_2 z - C_3 y \quad , \quad v = K_2 + C_3 x - C_1 z \quad , \quad w = K_3 + C_1 y - C_2 x$$

con K_1, K_2, K_3, C_1, C_2, C_3 in generale differenti da zero, e quindi anche nei punti di S. Avremo perciò che *note le forze esterne e le tensioni al contorno, le componenti degli spostamenti nei punti del corpo* S *sono determinati a meno di un movimento infinitesimo, che avviene come se il corpo fosse rigido* (1).

3. Ciò premesso, supponiamo dapprima di volere *risolvere il problema dell'elasticità, nel caso in cui sieno date le forze esterne e le componenti degli spostamenti dei punti della superficie σ.*

---

(1) Il metodo che abbiamo tenuto per stabilire i quattro risultati precedenti, è lo stesso di quello tenuto dal Betti (l. c., §. 3) per stabilire il primo di essi.

In questo caso, come risulta da quanto si è visto nel § precedente, le componenti u, v, w sono completamente determinate in tutti i punti del corpo elastico S. Per trovarle ammettiamo di conoscere *tre* sistemi di integrali delle equazioni (2):

$$a_1\,,\ b_1\,,\ c_1\ ;\ a_2\,,\ b_2\,,\ c_2\ ;\ a_3\,,\ b_3\,,\ c_3$$

corrispondenti a forze esterne nulle, regolari in tutto lo spazio S e tali che su σ soddisfino alle relazioni:

$$\left\{\begin{array}{lll} u_1 + a_1 = 0\ , & v_1 + b_1 = 0\ , & w_1 + c_1 = 0\ , \\ u_2 + a_2 = 0\ , & v_2 + b_2 = 0\ , & w_2 + c_2 = 0\ , \\ u_3 + a_3 = 0\ , & v_3 + b_3 = 0\ , & w_3 + c_3 = 0\ . \end{array}\right. \tag{15}$$

Se indichiamo con $A_\sigma^{(1)}$, $B_\sigma^{(1)}$, $C_\sigma^{(1)}$; $A_\sigma^{(2)}$, $B_\sigma^{(2)}$, $C_\sigma^{(2)}$; $A_\sigma^{(3)}$, $B_\sigma^{(3)}$, $C_\sigma^{(3)}$ le componenti delle tensioni corrispondenti ai tre sistemi di integrali che abbiamo supposto di conoscere, avremo per il teorema del Betti (l. c., §. 6):

$$0 = \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma\, a_1\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(1)}\, u\, d\sigma + \int_S \Sigma\, \rho\, X\, a_1\, dS\ ,$$

$$0 = \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma\, a_2\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(2)}\, u\, d\sigma + \int_S \Sigma\, \rho\, X\, a_2\, dS\ ,$$

$$0 = \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma\, a_3\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(3)}\, u\, d\sigma + \int_S \Sigma\, \rho\, X\, a_3\, dS\ ;$$

e se sommiamo ordinatamente queste relazioni membro a membro con le (5), si avrà dalle (15):

$$\left\{\begin{array}{l} -4\pi L\, u_0 = -\displaystyle\int_\sigma \Sigma\,(A_\sigma^{(1)} + X_\sigma^{(1)})\, u\, d\sigma + \int_S \rho\, \Sigma\,(u_1 + a_1)\, X\, dS\ , \\ -4\pi L\, v_0 = -\displaystyle\int_\sigma \Sigma\,(A_\sigma^{(2)} + X_\sigma^{(2)})\, u\, d\sigma + \int_S \rho\, \Sigma\,(u_2 + a_2)\, X\, dS\ , \\ -4\pi L\, w_0 = -\displaystyle\int_\sigma \Sigma\,(A_\sigma^{(3)} + X_\sigma^{(3)})\, u\, d\sigma + \int_\sigma \rho\, \Sigma\,(u_3 + a_3)\, X\, dS\ . \end{array}\right. \tag{16}$$

Queste formole, come si vede, ci risolvono il problema proposto nel modo previsto.

4. Supponiamo ora di volere *risolvere il problema dell' elasticità nel caso in cui siano date le componenti degli spostamenti nelle due direzioni y, z e la componente delle tensioni nella direzione x.*

Per questo osserveremo dapprima, che posto:

$$u_{r\,r} = \frac{\partial u_r}{\partial x_r} \quad , \quad u_{r\,s} = \frac{\partial u_r}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \, ,$$

$$X_\sigma^{(r\,r)} = \frac{\partial X_\sigma^{(r)}}{\partial x_r} \quad , \quad X_\sigma^{(r\,s)} = \frac{\partial X_\sigma^{(r)}}{\partial x_s} + \frac{\partial X_\sigma^{(s)}}{\partial x_r} \, ,$$

$$\left\{ (r, s = 1, 2, 3) \quad , \quad (x_1 = x_1 \ , \ x_2 = y_1 \ , \ x_3 = z_1) \right\}$$

e supposto:

$$\rho\, X = \rho\, Y = \rho\, Z = 0 \, , \tag{17}$$

si ha dalle formole (5) del Somigliana con convenienti derivazioni:

$$- 4 \pi L \gamma_{r\,s}^{(0)} = \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma u_{r\,s}\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma^{(r\,s)} u \, d\sigma \, , \tag{18}$$

in cui $\gamma_{r\,s}^{(0)}$ indica il valore di $\gamma_{r\,s}$ nel punto (x_1, y_1, z_1).

L' ipotesi (17) non porta nessuna restrizione, perchè, come sarà dimostrato nel cap. III. (§. 2), il problema generale dell' elasticità può sempre ridursi ad un problema analogo nel quale le forze esterne sono nulle.

Siano ora $a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3; a_{11}, b_{11}, c_{11}; a_{12}, b_{12}, c_{12}; a_{13}, b_{13}, c_{13}$ *cinque* sistemi di integrali delle equaz. (2) relativi a $\rho X = \rho Y = \rho Z = 0$, regolari in tutto S, ed $A_\sigma^{(2)}, B_\sigma^{(2)}, C_\sigma^{(2)}; A_\sigma^{(3)}, \ldots; A_\sigma^{(11)}, \ldots; A_\sigma^{(12)}, \ldots; A_\sigma^{(13)}, \ldots.$ le tensioni corrispondenti; e questi integrali siano poi tali che si abbia nei punti di σ:

$$
(19)\quad \left\{\begin{array}{lll}
X_\sigma^{(2)} + A_\sigma^{(2)} = 0\ , & v_2 + b_2 = 0\ , & w_2 + c_2 = 0\ ; \\
X_\sigma^{(3)} + A_\sigma^{(3)} = 0\ , & v_3 + b_3 = 0\ , & w_3 + c_3 = 0\ ; \\
X_\sigma^{(11)} + A_\sigma^{(11)} = 0\ , & v_{11} + b_{11} = 0\ , & w_{11} + c_{11} = 0\ ; \\
X_\sigma^{(12)} + A_\sigma^{(12)} = 0\ , & v_{12} + b_{12} = 0\ , & w_{12} + c_{12} = 0\ ; \\
X_\sigma^{(13)} + A_\sigma^{(13)} = 0\ , & v_{13} + b_{13} = 0\ , & w_{13} + c_{13} = 0\ .
\end{array}\right.
$$

Avremo per il teorema del Betti:

$$0 = \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_2\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(2)}\, u\, d\sigma\,,$$

$$0 = \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_3\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(3)}\, u\, d\sigma\,,$$

$$0 = \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_{11}\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(11)}\, u\, d\sigma\,,$$

$$0 = \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_{12}\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(12)}\, u\, d\sigma\,,$$

$$0 = \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_{13}\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(13)}\, u\, d\sigma\,.$$

Sommiamo le prime due di queste relazioni membro a membro con le ultime due delle (5) e le rimanenti membro a membro con quelle che si ottengono dalla (18) facendo successivamente: $r=1$, $s=1$; $r=1$, $s=2$; $r=1$, $s=3$. Si avrà tenendo conto delle (19):

$$
(20)\quad \left\{\begin{array}{l}
-4\pi\, L\, v_0 = \displaystyle\int_\sigma X_\sigma (u_2 + a_2)\, d\sigma - \int_\sigma \left\{ (Y_\sigma^{(2)} + B_\sigma^{(2)})\, v + (Z_\sigma^{(2)} + C_\sigma^{(2)})\, w \right\} d\sigma, \\
-4\pi\, L\, w_0 = \displaystyle\int_\sigma X_\sigma (u_3 + a_3)\, d\sigma - \int_\sigma \left\{ (Y_\sigma^{(3)} + B_\sigma^{(3)})\, v + (Z_\sigma^{(3)} + C_\sigma^{(3)})\, w \right\} d\sigma,
\end{array}\right.
$$

$$(21)\begin{cases} -4\pi\,\mathrm{L}\,\gamma_{11}^{(0)}=\int_\sigma \mathrm{X}_\sigma(u_{11}+a_{11})\,d\sigma-\int_\sigma\left\{(\mathrm{Y}_\sigma^{(11)}+\mathrm{B}_\sigma^{(11)})\,v+(\mathrm{Z}_\sigma^{(11)}+\mathrm{C}_\sigma^{(11)})\,w\right\}d\sigma,\\ -4\pi\,\mathrm{L}\,\gamma_{12}^{(0)}=\int_\sigma \mathrm{X}_\sigma(v_{12}+a_{12})\,d\sigma-\int_\sigma\left\{(\mathrm{Y}_\sigma^{(12)}+\mathrm{B}_\sigma^{(12)})\,v+(\mathrm{Z}_\sigma^{(12)}+\mathrm{C}_\sigma^{(12)})\,w\right\}d\sigma,\\ -4\pi\,\mathrm{L}\,\gamma_{13}^{(0)}=\int_\sigma \mathrm{X}_\sigma(u_{13}+a_{13})\,d\sigma-\int_\sigma\left\{(\mathrm{Y}_\sigma^{(13)}+\mathrm{B}_\sigma^{(13)})\,v+(\mathrm{Z}_\sigma^{(13)}+\mathrm{C}_\sigma^{(13)})\,w\right\}d\sigma. \end{cases}$$

Ora si ha dalle (1):

$$\gamma_{11}^{(0)}=\frac{\partial u_0}{\partial x_1}\,,\quad \gamma_{12}^{(0)}=\frac{\partial u_0}{\partial y_1}+\frac{\partial v_0}{\partial x_1}\,,\quad \gamma_{13}^{(0)}=\frac{\partial u_0}{\partial z_1}+\frac{\partial w_0}{\partial x_1}\,,$$

onde si avrà:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1}=\gamma_{11}^{(0)}\,,\quad \frac{\partial u_0}{\partial y_1}=\gamma_{12}^{(0)}-\frac{\partial v_0}{\partial x_1}\,,\quad \frac{\partial u_0}{\partial z_1}=\gamma_{13}^{(0)}-\frac{\partial w_0}{\partial x_1}\,;$$

e quindi:

$$(22)\quad u_0=\int\left\{\gamma_{11}^{(0)}\,dx_1+\left(\gamma_{12}^{(0)}-\frac{\partial v_0}{\partial x_1}\right)dy_1+\left(\gamma_{13}^{(0)}-\frac{\partial w_0}{\partial x_1}\right)dz_1\right\}+\mathrm{K}_1\,.$$

Così viene risoluto il problema proposto in conformità dei risultati del §. 2.

Osservazione. — Il processo che abbiamo tenuto per il calcolo di v_0 e w_0, non si è tenuto per calcolare la u_0, perchè le $\mathrm{A}_\sigma^{(1)}$, $\mathrm{B}_\sigma^{(1)}$, $\mathrm{C}_\sigma^{(1)}$ che si sarebbero trovate non soddisfano *alle sei equazioni dell'equilibrio di un sistema rigido.* Ciò del resto è giustificato dal fatto che in questo modo la u_0 verrebbe ad essere determinata completamente, mentre che, come abbiamo veduto, essa è determinata soltanto a meno di una costante.

5. *Siano ora date le componenti delle tensioni al contorno nelle direzioni y, z e la componente degli spostamenti dei punti del contorno nella direzione x.*

Per trovare in questo caso le formole che ci danno le componenti u_0, v_0, w_0 degli spostamenti dei punti di S, supponiamo di conoscere *sei* sistemi di integrali delle equazioni dell'equilibrio corrispondenti a forze esterne nulle:

$$a_1, b_1, c_1; a_{22}, b_{22}, c_{22}; a_{33}, b_{33}, c_{33}; a_{12}, b_{12}, c_{12}; a_{13}, b_{13}, c_{13}; a_{23}, b_{23}, c_{23},$$

ed indichiamo rispettivamente con $A_\sigma^{(1)}$, $B_\sigma^{(1)}$, $C_\sigma^{(1)}$; $A_\sigma^{(22)}$, $B_\sigma^{(22)}$, $C_\sigma^{(22)}$; $A_\sigma^{(33)}$, $B_\sigma^{(33)}$, $C_\sigma^{(33)}$; $A_\sigma^{(12)}$, $B_\sigma^{(12)}$, $C_\sigma^{(12)}$; $A_\sigma^{(13)}$, $B_\sigma^{(13)}$, $C_\sigma^{(13)}$; $A_\sigma^{(23)}$, $B_\sigma^{(23)}$, $C_\sigma^{(23)}$ le componenti delle tensioni corrispondenti. Per il teorema del BETTI si avrà:

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned}
0 &= \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_1 \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(1)} u \, d\sigma ,\\
0 &= \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_{22} \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(22)} u \, d\sigma ,\\
0 &= \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_{33} \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(33)} u \, d\sigma ,\\
0 &= \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_{12} \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(12)} u \, d\sigma ,\\
0 &= \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_{13} \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(13)} u \, d\sigma ,\\
0 &= \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma a_{23} \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, A_\sigma^{(23)} u \, d\sigma ;
\end{aligned}\right.$$

e se supponiamo che i sei sistemi di integrali sopra menzionati siano tali che si abbia in tutti i punti di σ:

$$(24)\quad\begin{cases} u_1 + a_1 = 0 \ , \ Y_\sigma^{(1)} + B_\sigma^{(1)} = 0 \ , \ Z_\sigma^{(1)} + C_\sigma^{(1)} = 0 \ ; \\ u_{22} + a_{22} = 0 \ , \ Y_\sigma^{(22)} + B_\sigma^{(22)} = 0 \ , \ Z_\sigma^{(22)} + C_\sigma^{(22)} = 0 \ ; \\ u_{33} + a_{33} = 0 \ , \ Y_\sigma^{(33)} + B_\sigma^{(33)} = 0 \ , \ Z_\sigma^{(33)} + C_\sigma^{(33)} = 0 \ ; \\ u_{12} + a_{12} = 0 \ , \ Y_\sigma^{(12)} + B_\sigma^{(12)} = 0 \ , \ Z_\sigma^{(12)} + C_\sigma^{(12)} = 0 \ ; \\ u_{13} + a_{13} = 0 \ , \ Y_\sigma^{(13)} + B_\sigma^{(13)} = 0 \ , \ Z_\sigma^{(13)} + C_\sigma^{(13)} = 0 \ ; \\ u_{23} + a_{23} = 0 \ , \ Y_\sigma^{(23)} + B_\sigma^{(23)} = 0 \ , \ Z_\sigma^{(23)} + C_\sigma^{(23)} = 0 \ , \end{cases}$$

avremo, sommando la prima delle (23) con la prima delle (5) e le altre ordinatamente con quelle che si ottengono dalla (18) facendo successivamente $r=2$, $s=2$; $r=3$, $s=3$; $r=1$, $s=2$; $r=1$, $s=3$; $r=2$, $s=3$,

$$(25)\quad\begin{cases} -4\pi L\, u_0 = \int_\sigma \left\{ Y_\sigma (v_1 + b_1) + Z_\sigma (w_1 + c_1) - (X_\sigma^{(1)} + A_\sigma^{(1)})\, u \right\} d\sigma , \\ -4\pi L\, \gamma_{22}^{(0)} = \int_\sigma \left\{ Y_\sigma (v_{22} + b_{22}) + Z_\sigma (w_{22} + c_{22}) - (X_\sigma^{(22)} + A_\sigma^{(22)})\, u \right\} d\sigma , \\ -4\pi L\, \gamma_{33}^{(0)} = \int_\sigma \left\{ Y_\sigma (v_{33} + b_{33}) + Z_\sigma (w_{33} + c_{33}) - (X_\sigma^{(33)} + A_\sigma^{(33)})\, u \right\} d\sigma , \\ -4\pi L\, \gamma_{12}^{(0)} = \int_\sigma \left\{ Y_\sigma (v_{12} + b_{12}) + Z_\sigma (w_{12} + c_{12}) - (X_\sigma^{(12)} + A_\sigma^{(12)})\, u \right\} d\sigma , \\ -4\pi L\, \gamma_{13}^{(0)} = \int_\sigma \left\{ Y_\sigma (v_{13} + b_{13}) + Z_\sigma (w_{13} + c_{13}) - (X_\sigma^{(13)} + A_\sigma^{(13)})\, u \right\} d\sigma , \\ -4\pi L\, \gamma_{23}^{(0)} = \int_\sigma \left\{ Y_\sigma (v_{23} + b_{23}) + Z_\sigma (w_{23} + c_{23}) - (X_\sigma^{(23)} + A_\sigma^{(23)})\, u \right\} d\sigma . \end{cases}$$

Come si vede, la prima di queste formole ci dà la componente degli spostamenti nella direzione x dei punti di S. Per avere le altre componenti v_0, w_0 poniamo:

$$A = \frac{\partial v_0}{\partial z_1} - \frac{\partial w_0}{\partial y_1} \ ;$$

si avrà allora:

$$\frac{\partial v_0}{\partial x_1}=\gamma_{12}^{(0)}-\frac{\partial u_0}{\partial y_1},\ \frac{\partial v_0}{\partial z_1}=\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\gamma_{23}^{(0)}),\ \frac{\partial w_0}{\partial x_1}=\gamma_{13}^{(0)}-\frac{\partial u_0}{\partial z_1},\ \frac{\partial w_0}{\partial y_1}=\frac{1}{2}(\gamma_{23}^{(0)}-\mathrm{A}),$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1\,\partial z_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_1}+\frac{\partial \gamma_{23}^{(0)}}{\partial x_1}\right)=\frac{\partial \gamma_{12}^{(0)}}{\partial z_1}-\frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1\,\partial z_1},$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial y_1\,\partial z_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y_1}+\frac{\partial \gamma_{23}^{(0)}}{\partial y_1}\right)=\frac{\partial \gamma_{22}^{(0)}}{\partial z_1},$$

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial y_1\,\partial z_1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \gamma_{23}^{(0)}}{\partial z_1}-\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z_1}\right)=\frac{\partial \gamma_{33}^{(0)}}{\partial y_1},$$

e quindi:

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial x_1}=2\frac{\partial \gamma_{12}^{(0)}}{\partial z_1}-2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1\,\partial z_1}-\frac{\partial \gamma_{23}^{(0)}}{\partial x_1},\quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial y_1}=2\frac{\partial \gamma_{22}^{(0)}}{\partial z_1}-\frac{\partial \gamma_{23}^{(0)}}{\partial y_1},\quad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial z_1}=\frac{\partial \gamma_{23}^{(0)}}{\partial z_1}-2\frac{\partial \gamma_{33}^{(0)}}{\partial y_1}.$$

Si avrà dunque:

$$\mathrm{A}=\int\left\{\left(2\frac{\partial \gamma_{12}^{(0)}}{\partial z_1}-2\frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1\,\partial z_1}-\frac{\partial \gamma_{23}^{(0)}}{\partial x_1}\right)dx_1+\left(2\frac{\partial \gamma_{22}^{(0)}}{\partial z_1}-\frac{\partial \gamma_{23}^{(0)}}{\partial y_1}\right)dy_1+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial \gamma_{23}^{(0)}}{\partial z_1}-2\frac{\partial \gamma_{33}^{(0)}}{\partial y_1}\right)dz_1\right\}-2\,\mathrm{C}_1=\mathrm{A}_1-2\,\mathrm{C}_1$$

con C_1 costante arbitraria; e finalmente:

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned} v_0&=\int\left\{\left(\gamma_{12}^{(0)}-\frac{\partial u_0}{\partial y_1}\right)dx_1+\gamma_{22}^{(0)}\,dy_1+\frac{1}{2}(\mathrm{A}_1+\gamma_{23}^{(0)})\,dz_1\right\}-\mathrm{C}_1\,z_1+\mathrm{K}_2,\\ w_0&=\int\left\{\left(\gamma_{13}^{(0)}-\frac{\partial u_0}{\partial z_1}\right)dx_1+\frac{1}{2}(\gamma_{23}^{(0)}-\mathrm{A}_1)\,dy_1+\gamma_{33}^{(0)}\,dz_1\right\}+\mathrm{C}_1\,y_1+\mathrm{K}_3,\end{aligned}\right.$$

con K_2, K_3 pure costanti arbitrarie. (Cfr. §. 2).

6. Si voglia finalmente *risolvere il problema dell' elasticità nel caso che siano note le componenti delle tensioni al contorno.*

In questo caso bisogna supporre noti *sei* sistemi di integrali delle equazioni dell' equilibrio:

$$a_{rs}\ ,\quad b_{rs}\ ,\quad c_{rs}\qquad\qquad \left\{r=1,2\ ;\ s=1,2,3\right\}$$

corrispondenti a forze esterne nulle e tali che se

$$A_\sigma^{(rs)} \quad , \; B_\sigma^{(rs)} \quad , \; C_\sigma^{(rs)} \qquad \left\{ r = 1, 2 \; ; \; s = 1, 2, 3 \right\}$$

sono le componenti delle *sei* tensioni corrispondenti, si abbia su σ:

(27) $$X_\sigma^{(rs)} + A_\sigma^{(rs)} = 0, \; Y_\sigma^{(rs)} + B_\sigma^{(rs)} = 0, \; Z_\sigma^{(rs)} + C_\sigma^{(rs)} = 0$$

$$\left\{ r = 1, 2 \; ; \; s = 1, 2, 3 \right\} .$$

Ciò posto, avremo per il teorema del Betti:

$$0 = \int_\sigma \Sigma \, X_\sigma \, a_{rs} \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma \, A_\sigma^{(rs)} \, u \, d\sigma \quad ; \quad \left\{ r = 1, 2 \; ; \; s = 1, 2, 3 \right\}$$

e se sommiamo questa membro a membro con la (18) si otterrà:

(28) $$-4 \pi \, L \, \gamma_{rs}^{(0)} = \int_\sigma \Sigma \, X_\sigma \, (u_{rs} + a_{rs}) \, d\sigma \; . \left\{ r = 1, 2 \; ; \; s = 1, 2, 3 \right\} .$$

Per avere u_0, v_0, w_0, poniamo:

(29) $$A = \frac{\partial v_0}{\partial z_1} - \frac{\partial w_0}{\partial y_1} \, , \quad B = \frac{\partial w_0}{\partial x_1} - \frac{\partial u_0}{\partial z_1} \, , \quad C = \frac{\partial u_0}{\partial y_1} - \frac{\partial v_0}{\partial x_1} \, ;$$

sarà evidentemente:

(30) $$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial x_1} = \dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x_1 \partial z_1} - \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x_1 \partial y_1} \, , \; \dfrac{\partial A}{\partial y_1} = \dfrac{\partial^2 v_0}{\partial y_1 \partial z_1} - \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y_1^2} \, , \; \dfrac{\partial A}{\partial z_1} = \dfrac{\partial^2 v_0}{\partial z_1^2} - \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y_1 \partial z_1} \, , \\ \dfrac{\partial B}{\partial x_1} = \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_1 \partial z_1} \, , \; \dfrac{\partial B}{\partial y_1} = \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y_1 \partial x_1} - \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial y_1 \partial z_1} \, , \; \dfrac{\partial B}{\partial z_1} = \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial z_1 \partial x_1} - \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial z_1^2} \, , \\ \dfrac{\partial C}{\partial x_1} = \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_1 \partial y_1} - \dfrac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2} \, , \; \dfrac{\partial C}{\partial y_1} = \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial y_1^2} - \dfrac{\partial^2 v_0}{\partial y_1 \partial x_1} \, , \; \dfrac{\partial C}{\partial z_1} = \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial z_1 \partial y_1} - \dfrac{\partial^2 v_0}{\partial z_1 \partial x_1} \, , \end{cases}$$

ed inoltre:

$$
(31)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial\gamma^{(0)}_{23}}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1\,\partial z_1}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1\,\partial y_1}\,, &&\frac{\partial\gamma^{(0)}_{23}}{\partial y_1}=\frac{\partial^2 v_0}{\partial y_1\,\partial z_1}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y_1^2}=\frac{\partial\gamma^{(0)}_{22}}{\partial z_1}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y_1^2}\,,\\
& &&\frac{\partial\gamma^{(0)}_{23}}{\partial z_1}=\frac{\partial^2 v_0}{\partial z_1^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y_1\,\partial z_1}=\frac{\partial^2 v_0}{\partial z_1^2}+\frac{\partial\gamma^{(0)}_{33}}{\partial y_1}\,,\\
&\frac{\partial\gamma^{(0)}_{31}}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1\,\partial z_1}=\frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial\gamma^{(0)}_{11}}{\partial z_1}\,, &&\frac{\partial\gamma^{(0)}_{31}}{\partial y_1}=\frac{\partial^2 w_0}{\partial y_1\,\partial x_1}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1\,\partial z_1}\,,\\
& &&\frac{\partial\gamma^{(0)}_{31}}{\partial z_1}=\frac{\partial^2 w_0}{\partial z_1\,\partial x_1}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial z_1^2}=\frac{\partial\gamma^{(0)}_{33}}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial z_1^2}\,,\\
&\frac{\partial\gamma^{(0)}_{12}}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1\,\partial y_1}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}=\frac{\partial\gamma^{(0)}_{11}}{\partial y_1}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}\,, &&\frac{\partial\gamma^{(0)}_{12}}{\partial y_1}=\frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial y_1\,\partial x_1}=\frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1^2}+\frac{\partial\gamma^{(0)}_{22}}{\partial x_1}\,,\\
& &&\frac{\partial\gamma^{(0)}_{12}}{\partial z_1}=\frac{\partial^2 u_0}{\partial z_1\,\partial y_1}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial z_1\,\partial x_1}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Abbiamo così 18 equazioni lineari nelle 18 incognite:

$$
\frac{\partial A}{\partial x_1}\,,\ \frac{\partial A}{\partial y_1}\,,\ \frac{\partial A}{\partial z_1}\,;\ \frac{\partial B}{\partial x_1}\,,\ldots\ldots;\ \frac{\partial C}{\partial x_1}\,,\ldots\ldots;\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1\,\partial z_1}\,,\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial z_1\,\partial x_1}\,,\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1\,\partial y_1}\,,
$$
$$
\frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1^2}\,,\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial z_1^2}\,,\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial z_1^2}\,,\ \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}\,,\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x_1^2}\,,\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y_1^2}\,,
$$

che risolute rispetto alle prime nove, ci dànno:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial x_1}=\frac{\partial\gamma^{(0)}_{12}}{\partial z_1}-\frac{\partial\gamma^{(0)}_{13}}{\partial y_1}\,, &&\frac{\partial A}{\partial y_1}=2\frac{\partial\gamma^{(0)}_{22}}{\partial z_1}-\frac{\partial\gamma^{(0)}_{23}}{\partial y_1}\,, &&\frac{\partial A}{\partial z_1}=\frac{\partial\gamma^{(0)}_{32}}{\partial z_1}-2\frac{\partial\gamma^{(0)}_{33}}{\partial y_1}\,,\\
&\frac{\partial B}{\partial x_1}=\frac{\partial\gamma^{(0)}_{13}}{\partial x_1}-2\frac{\partial\gamma^{(0)}_{11}}{\partial z_1}\,, &&\frac{\partial B}{\partial y_1}=\frac{\partial\gamma^{(0)}_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial\gamma^{(0)}_{21}}{\partial z_1}\,, &&\frac{\partial B}{\partial z_1}=2\frac{\partial\gamma^{(0)}_{33}}{\partial x_1}-\frac{\partial\gamma^{(0)}_{31}}{\partial z_1}\,,\\
&\frac{\partial C}{\partial x_1}=2\frac{\partial\gamma^{(0)}_{11}}{\partial y_1}-\frac{\partial\gamma^{(0)}_{12}}{\partial x_1}\,, &&\frac{\partial C}{\partial y_1}=\frac{\partial\gamma^{(0)}_{21}}{\partial y_1}-2\frac{\partial\gamma^{(0)}_{22}}{\partial x_1}\,, &&\frac{\partial C}{\partial z_1}=\frac{\partial\gamma^{(0)}_{31}}{\partial y_1}-\frac{\partial\gamma^{(0)}_{32}}{\partial x_1}\,.
\end{aligned}
$$

Avremo dunque:

$$
\begin{aligned}
A=\int\left\{\left(\frac{\partial\gamma^{(0)}_{12}}{\partial z_1}-\frac{\partial\gamma^{(0)}_{13}}{\partial y_1}\right)dx_1+\left(2\frac{\partial\gamma^{(0)}_{22}}{\partial z_1}-\frac{\partial\gamma^{(0)}_{23}}{\partial y_1}\right)dy_1+\left(\frac{\partial\gamma^{(0)}_{32}}{\partial z_1}-2\frac{\partial\gamma^{(0)}_{33}}{\partial y_1}\right)dz_1\right\}-&\\
-2\,C_1=M-2\,C_1\,,&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B=\int\left\{\left(\frac{\partial\gamma^{(0)}_{13}}{\partial x_1}-2\frac{\partial\gamma^{(0)}_{11}}{\partial z_1}\right)dx_1+\left(\frac{\partial\gamma^{(0)}_{23}}{\partial x_1}-\frac{\partial\gamma^{(0)}_{21}}{\partial z_1}\right)dy_1+\left(2\frac{\partial\gamma^{(0)}_{33}}{\partial x_1}-\frac{\partial\gamma^{(0)}_{31}}{\partial z_1}\right)dz_1\right\}-&\\
-2\,C_2=N-2\,C_2\,,&
\end{aligned}
$$

$$C=\int\left\{\left(2\frac{\partial\gamma_{11}^{(0)}}{\partial y_1}-\frac{\partial\gamma_{12}^{(0)}}{\partial x_1}\right)dx_1+\left(\frac{\partial\gamma_{21}^{(0)}}{\partial y_1}-2\frac{\partial\gamma_{22}^{(0)}}{\partial x_1}\right)dy_1+\left(\frac{\partial\gamma_{31}^{(0)}}{\partial y_1}-\frac{\partial\gamma_{32}^{(0)}}{\partial x_1}\right)dz_1\right\}-$$
$$-2\,C_3=P-2\,C_3\,,$$

con C_1, C_2, C_3 costanti arbitrarie.

Dalle (29) e dalle altre:

$$\gamma_{23}^{(0)}=\frac{\partial v_0}{\partial z_1}+\frac{\partial w_0}{\partial y_1}\,,\;\gamma_{31}^{(0)}=\frac{\partial w_0}{\partial x_1}+\frac{\partial u_0}{\partial z_1}\,,\;\gamma_{12}^{(0)}=\frac{\partial u_0}{\partial y_1}+\frac{\partial v_0}{\partial x_1}$$

si ha ovviamente:

$$\frac{\partial u_0}{\partial y_1}=\frac{1}{2}\,(\gamma_{12}^{(0)}+C)\,,\;\frac{\partial u_0}{\partial z_1}=\frac{1}{2}\,(\gamma_{13}^{(0)}-B)\,,\;\frac{\partial v_0}{\partial z_1}=\frac{1}{2}\,(\gamma_{23}^{(0)}+A)\,,$$
$$\frac{\partial v_0}{\partial x_1}=\frac{1}{2}\,(\gamma_{21}^{(0)}-C)\,,\;\frac{\partial w_0}{\partial x_1}=\frac{1}{2}\,(\gamma_{31}^{(0)}+B)\,,\;\frac{\partial w_0}{\partial y_1}=\frac{1}{2}\,(\gamma_{32}^{(0)}-A)\,;$$

e poichè

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_1}=\gamma_{11}^{(0)}\,,\;\frac{\partial v_0}{\partial y_1}=\gamma_{22}^{(0)}\,,\;\frac{\partial w_0}{\partial z_1}=\gamma_{33}^{(0)}\,,$$

sarà finalmente:

$$(32)\;\left\{\begin{aligned}u_0&=\int\left\{\gamma_{11}^{(0)}\,dx_1+\frac{1}{2}\,(\gamma_{12}^{(0)}+P)\,dy_1+\frac{1}{2}\,(\gamma_{13}^{(0)}-N)\,dz_1\right\}+C_2\,z_1-C_3\,y_1+K_1\,,\\ v_0&=\int\left\{\frac{1}{2}\,(\gamma_{21}^{(0)}-P)\,dx_1+\gamma_{22}^{(0)}\,dy_1+\frac{1}{2}(\gamma_{23}^{(0)}+M)\,dz_1\right\}+C_3\,x_1-C_1\,z_1+K_2\,,\\ w_0&=\int\left\{\frac{1}{2}(\gamma_{31}^{(0)}+N)\,dx_1+\frac{1}{2}\,(\gamma_{32}^{(0)}-M)\,dy_1+\gamma_{33}^{(0)}\,dz_1\right\}+C_1\,y_1-C_2\,x_1+K_3\,,\end{aligned}\right.$$

con K_1, K_2, K_3 costanti arbitrarie. Il problema proposto viene così risoluto nel modo previsto alla fine del §. 2.

Anche qui potremmo fare una osservazione analoga a quella che si fece alla fine del §. 4.

CAPITOLO II.

Equilibrio di un corpo elastico indefinito limitato da un piano

1. Passiamo ad applicare i risultati precedenti al caso di un corpo elastico indefinito limitato da un solo piano, che, senza portare alcuna restrizione, potremo supporre essere il piano $x=0$.

Prima però sarà giusto osservare che nel caso di un corpo elastico indefinito, ammesse le condizioni poste alla fine del §. 1 circa alla natura delle forze esterne e degli spostamenti, il teorema di reciprocità del Betti sussiste ancora. Per dimostrarlo basterà usare il medesimo procedimento che il Somigliana usa, nella citata Nota dei Rendiconti del R. Istituto Lombardo, per estendere le sue formole al caso di un corpo elastico indefinito.

Ciò posto, *supponiamo date le componenti degli spostamenti dei punti del piano* $x=0$ *e le componenti delle forze esterne.*

Se $P \equiv (x_1, y_1, z_1)$ è al solito il punto del corpo elastico indefinito che si considera, la sua immagine rispetto al piano $x=0$ sarà $P_1 \equiv (-x_1, y_1, z_1)$, e si avrà evidentemente, indicando con r_1 la distanza del punto P_1 ad un altro punto qualsiasi (x, y, z),

$$r_1 = \sqrt{(x+x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\,.$$

Chiamiamo (2') il sistema delle equazioni (2) del capitolo precedente per $\rho X = \rho Y = \rho Z = 0$. Le *sette* terne di funzioni:

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{r_1}+\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2}, & \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial x\,\partial z}\\
\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial y\,\partial x}, & \frac{1}{r_1}+\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2}, & \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial y\,\partial z}\\
\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial z\,\partial x}, & \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial z\,\partial y}, & \frac{1}{r_1}+\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial z^2}
\end{array}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} + \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2}, \quad \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial y}, \quad \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial z}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} + \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial y}, \quad \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2}, \quad \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z}$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} + \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial z}, \quad \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z}, \quad \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2}$$

in cui $\mathrm{M} = \dfrac{2}{\alpha + 2}$, sono *sette* sistemi di integrali delle equazioni (2′) regolari in tutti i punti dello spazio S, dati rispettivamente i primi tre dal Somigliana, il quarto dal Betti, i rimanenti dal Cerruti (l. c.); per cui anche le funzioni:

$$(1) \left\{ \begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{r_1} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} - \alpha x_1 \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2}, \quad b_1 = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial x \, \partial y} + \alpha x_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} - \alpha x_1 \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial y}, \\
c_1 &= -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial x \, \partial z} + \alpha x_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} - \alpha x_1 \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial z}; \\
a_2 &= -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial x \, \partial y} + \alpha x_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} + \alpha x_1 \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial y}, \quad b_2 = -\frac{1}{r_1} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2} + \alpha x_1 \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2}, \\
c_2 &= -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial y \, \partial z} + \alpha x_1 \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z}; \\
a_3 &= -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial x \, \partial z} + \alpha x_1 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} + \alpha x_1 \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial z}, \quad b_3 = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial y \, \partial z} + \alpha x_1 \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z}, \\
c_3 &= -\frac{1}{r_1} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial z^2} + \alpha x_1 \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2}
\end{aligned} \right.$$

formeranno tre sistemi di integrali delle equazioni (2′) regolari in tutto S.

Ora si ha, come si verifica facilmente, per $x=0$:

$$u_1+a_1=0 \;,\quad v_1+b_1=0 \;,\quad w_1+c_1=0$$

$$u_2+a_2=0 \;,\quad v_2+b_2=0 \;,\quad w_2+c_2=0$$

$$u_3+a_3=0 \;,\quad v_3+b_3=0 \;,\quad w_3+c_3=0 \,.$$

Gli integrali (1) sono dunque quelli che secondo i risultati del §. 3 (cap. I) ci portano alla soluzione completa del problema proposto.

Poichè nel caso nostro si ha:

$$\frac{\partial x}{\partial n}=1 \;,\quad \frac{\partial y}{\partial n}=0 \;,\quad \frac{\partial z}{\partial n}=0 \,,$$

avremo servendosi delle (3) del capitolo precedente:

$$X_\sigma^{(1)} = \mathrm{L}\left\{(1-2\,\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^3}\right\} \,,\quad Y_\sigma^{(1)} = \mathrm{L}\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}+\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y}\right\} \,,$$

$$Z_\sigma^{(1)} = \mathrm{L}\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}+\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z}\right\} \,;$$

$$X_\sigma^{(2)} = -\mathrm{L}\left\{(1+2\,\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}-\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y}\right\} \,,\quad Y_\sigma^{(2)} = \mathrm{L}\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y^2}\right\} \,,$$

$$Z_\sigma^{(2)} = \mathrm{L}\,\alpha\,\frac{\partial^3 r}{\partial x\,\partial y\,\partial z} \,;$$

$$X_\sigma^{(3)} = -\mathrm{L}\left\{(1+2\,\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}-\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z}\right\} \,,\quad Y_\sigma^{(3)} = \mathrm{L}\,\alpha\,\frac{\partial^3 r}{\partial x\,\partial y\,\partial z} \,,$$

$$Z_\sigma^{(3)} = \mathrm{L}\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial z^2}\right\} \,;$$

$$A_\sigma^{(1)} = -L\left\{\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}+\frac{\alpha x_1}{2}(1+M)\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x^2}\right\},\ B_\sigma^{(1)} = -L\left\{(1+\alpha)\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}+\alpha x_1 M\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y}\right\},$$

$$C_\sigma^{(1)} = -L\left\{(1+\alpha)\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}+\alpha x_1 M\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z}\right\};$$

$$A_\sigma^{(2)} = L\left\{(1+\alpha)\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial y}-\alpha x_1 M\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\partial y}\right\},\ B_\sigma^{(2)} = -L\left\{\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}-\alpha x_1 M\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial y^2}\right\},$$

$$C_\sigma^{(2)} = L\,\alpha\, x_1 M\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z};$$

$$A_\sigma^{(3)} = L\left\{(1+\alpha)\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial z}-\alpha x_1 M\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\partial z}\right\},\ B_\sigma^{(3)} = L\,\alpha\, x_1 M\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z},$$

$$C_\sigma^{(3)} = -L\left\{\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial x}-\alpha x_1 M\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial z^2}\right\}.$$

Per avere poi le u_0, v_0, w_0 basterà sostituire questi valori di $X_\sigma^{(1)}$, $Y_\sigma^{(1)}$, $Z_\sigma^{(1)}$; $X_\sigma^{(2)}, \ldots$; $X_\sigma^{(3)}, \ldots$; $A_\sigma^{(1)}$, $B_\sigma^{(1)}$, $C_\sigma^{(1)}$; $A_\sigma^{(2)}, \ldots$; $A_\sigma^{(3)}, \ldots$ nelle (16) del capitolo precedente.

Perchè risultino soddisfatte le condizioni richieste per la validità dei calcoli del §. 3 (cap. I) al caso nostro di un corpo elastico indefinito, basterà evidentemente ammettere che le forze esterne ρX, ρY, ρZ agiscano per una porzione finita del corpo elastico e che le funzioni u, v, w dei punti del piano $x=0$ divengano a distanza infinita infinitesime del primo ordine.

2. *Supponiamo ora note sul piano $x=0$ la componente delle tensioni nella direzione x e le componenti degli spostamenti nelle direzioni y e z.*

Per risolvere il problema dell' elasticità in questo caso consideriamo gli integrali seguenti delle equazioni (2') regolari in tutto S:

$$a_2 = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial x\,\partial y}\ ,\quad b_2 = -\frac{1}{r_1}-\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial y^2}\ ,\quad c_2 = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial y\,\partial z}\ ;$$

$$a_3 = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial x\,\partial z}\ ,\quad b_3 = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial y\,\partial z}\ ,\quad c_3 = -\frac{1}{r_1}-\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial z^2}\ ;$$

$$a_{11} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}+\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial x^3}\ ,\quad b_{11} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2\partial y}\ ,\quad c_{11} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2\partial z}\ ;$$

$$a_{12} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}-\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2\partial y}\ ,\quad b_{12} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x\partial y^2}\ ,\quad c_{12} = -\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\ ;$$

$$a_{13} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}-\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2\partial z}\ ,\quad b_{13} = -\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\ ,\quad c_{13} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}-\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x\partial z^2}\ .$$

Le tensioni corrispondenti calcolate mediante le (3) (cap. I) sono, poichè su σ si ha $x=0$,

$$A_\sigma^{(2)} = L\left\{(2\alpha+1)\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}-\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2\partial y}\right\}\ ,\quad B_\sigma^{(2)} = -L\left\{\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x\partial y^2}\right\}\ ,$$

$$C_\sigma^{(2)} = -L\,\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\ ;$$

$$A_\sigma^{(3)} = L\left\{(2\alpha+1)\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}-\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2\partial z}\right\}\ ,\quad B_\sigma^{(2)} = -L\,\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\ ,$$

$$C_\sigma^{(3)} = -L\left\{\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^3 r_1}{\partial x\partial z^2}\right\}\ ;$$

$$A_\sigma^{(11)} = L\left\{(1-2\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^4}\right\}\ ,\quad B_\sigma^{(11)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y}+\alpha\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^3\partial y}\right\}\ ,$$

$$C_\sigma^{(11)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z}+\alpha\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^3\partial z}\right\}\ ;$$

$$A_\sigma^{(12)} = 2\,L\left\{2\,\alpha\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y} - \alpha\,\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^3 \partial y}\right\},\quad B_\sigma^{(12)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} + 2\,\alpha\,\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial y^2}\right\},$$

$$C_\sigma^{(12)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z} + 2\,\alpha\,\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial y\,\partial z}\right\};$$

$$A_\sigma^{(13)} = 2\,L\left\{2\,\alpha\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z} - \alpha\,\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^3 \partial z}\right\},\quad B_\sigma^{(13)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z} + 2\,\alpha\,\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial y\,\partial z}\right\},$$

$$C_\sigma^{(13)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} + 2\,\alpha\,\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial z^2}\right\}.$$

Ora abbiamo:

$$u_{11} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial^3 r}{\partial x^3},\quad v_{11} = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y},\quad w_{11} = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z};$$

$$u_{12} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \alpha\,\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y},\quad v_{12} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \alpha\,\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y^2},\quad w_{12} = -\alpha\,\frac{\partial^3 r}{\partial x\,\partial y\,\partial z};$$

$$u_{13} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \alpha\,\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z},\quad v_{13} = -\alpha\,\frac{\partial^3 r}{\partial x\,\partial y\,\partial z},\quad w_{13} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \alpha\,\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial z^2};$$

$$X_\sigma^{(11)} = L\left\{(2\,\alpha - 1)\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} - \alpha\,\frac{\partial^4 r}{\partial x^4}\right\},\quad Y_\sigma^{(11)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} + \alpha\,\frac{\partial^4 r}{\partial x^3 \partial y}\right\},$$

$$Z_\sigma^{(11)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z} + \alpha\,\frac{\partial^4 r}{\partial x^3 \partial z}\right\};$$

$$X_\sigma^{(12)} = 2\,L\left\{2\,\alpha\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} - \alpha\,\frac{\partial^4 r}{\partial x^3 \partial y}\right\},\quad Y_\sigma^{(12)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + 2\,\alpha\,\frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial y^2}\right\},$$

$$Z_\sigma^{(12)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + 2\,\alpha\,\frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial y \partial z}\right\};$$

$$X_\sigma^{(13)} = 2\,L\left\{2\,\alpha\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z} - \alpha\,\frac{\partial^4 r}{\partial x^3\,\partial z}\right\},\quad Y_\sigma^{(13)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z} + 2\,\alpha\,\frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial y\,\partial z}\right\};$$

$$Z_\sigma^{(13)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} + 2\,\alpha\,\frac{\partial^4 r}{\partial x^2\,\partial z^2}\right\};$$

si avrà quindi per $x=0$:

$$u_2 + a_2 = 2\,u_2\ ,\quad v_2 + b_2 = 0\ ,\quad w_2 + c_2 = 0\ ,$$
$$X_\sigma^{(2)} + A_\sigma^{(2)} = 0\ ,\quad Y_\sigma^{(2)} + B_\sigma^{(2)} = 2\,Y_\sigma^{(2)}\ ,\quad Z_\sigma^{(2)} + C_\sigma^{(2)} = 2\,Z_\sigma^{(2)}\,;$$

$$u_3 + a_3 = 2\,u_3\ ,\quad v_3 + b_3 = 0\ ,\quad w_3 + c_3 = 0\ ,$$
$$X_\sigma^{(3)} + A_\sigma^{(3)} = 0\ ,\quad Y_\sigma^{(3)} + B_\sigma^{(3)} = 2\,Y_\sigma^{(3)}\ ,\quad Z_\sigma^{(3)} + C_\sigma^{(3)} = 2\,Z_\sigma^{(3)}\,;$$

$$u_{11} + a_{11} = 2\,u_{11}\ ,\quad v_{11} + b_{11} = 0\ ,\quad w_{11} + c_{11} = 0\ ,$$
$$X_\sigma^{(11)} + A_\sigma^{(11)} = 0\ ,\quad Y_\sigma^{(11)} + B_\sigma^{(11)} = 2\,Y_\sigma^{(11)}\ ,\quad Z_\sigma^{(11)} + C_\sigma^{(11)} = 2\,Z_\sigma^{(11)}\,;$$

$$u_{12} + a_{12} = 2\,u_{12}\ ,\quad v_{12} + b_{12} = 0\ ,\quad w_{12} + c_{12} = 0\ ,$$
$$X_\sigma^{(12)} + A_\sigma^{(12)} = 0\ ,\quad Y_\sigma^{(12)} + B_\sigma^{(12)} = 2\,Y_\sigma^{(12)}\ ,\quad Z_\sigma^{(12)} + C_\sigma^{(12)} = 2\,Z_\sigma^{(12)}\,;$$

$$u_{13} + a_{13} = 2\,u_{13}\ ,\quad v_{13} + b_{13} = 0\ ,\quad w_{13} + c_{13} = 0\ ,$$
$$X_\sigma^{(13)} + A_\sigma^{(13)} = 0\ ,\quad Y_\sigma^{(13)} + B_\sigma^{(13)} = 2\,Y_\sigma^{(13)}\ ,\quad Z_\sigma^{(13)} + C_\sigma^{(13)} = 2\,Z_\sigma^{(13)}\,;$$

e quindi per le (20), (21) del §. 4 (cap. I);

$$-4\,\pi\,L\,v_0 = \int_\sigma \left\{2\,u_2\,X_\sigma - 2\,Y_\sigma^{(2)}\,v - 2\,Z_\sigma^{(2)}\,w\right\} d\sigma\,,$$

$$-4\,\pi\,L\,w_0 = \int_\sigma \left\{2\,u_3\,X_\sigma - 2\,Y_\sigma^{(3)}\,v - 2\,Z_\sigma^{(3)}\,w\right\} d\sigma\,,$$

$$-4\,\pi\,L\,\gamma_{11}^{(0)} = \int_\sigma \left\{2\,u_{11}\,X_\sigma - 2\,Y_\sigma^{(11)}\,v - 2\,Z_\sigma^{(11)}\,w\right\} d\sigma\,,$$

$$-4\,\pi\,L\,\gamma_{12}^{(0)} = \int_\sigma \left\{2\,u_{12}\,X_\sigma - 2\,Y_\sigma^{(12)}\,v - 2\,Z_\sigma^{(12)}\,w\right\} d\sigma\,,$$

$$-4\,\pi\,L\,\gamma_{13}^{(0)} = \int_\sigma \left\{2\,u_{13}\,X_\sigma - 2\,Y_\sigma^{(13)}\,v - 2\,Z_\sigma^{(13)}\,w\right\} d\sigma\,.$$

Queste mediante la (22) (cap. I) ci danno anche l'altra componente u_0.

Osservazione. — Abbiamo detto che nel caso di un corpo elastico indefinito le componenti u, v, w devono a distanza infinita diventare quantità infinitesime del primo ordine; allora per le (3) (cap. I) le X_σ, Y_σ, Z_σ devono a distanza infinita divenire infinitesime del secondo ordine. Segue quindi che nel caso del problema testè considerato, basterà ammettere per la validità delle formole trovate, che la funzione arbitraria X_σ dei punti del piano $x = 0$ divenga a distanza infinita infinitesima del secondo ordine e che le funzioni v, w degli stessi punti divengano a distanza infinita infinitesime del primo ordine.

3. *Siano ora date le componenti delle tensioni nelle direzioni y, z e la componente degli spostamenti nella direzione x.*

Incominciamo a considerare gli integrali delle (2') regolari in tutto lo spazio S:

$$a_1 = -\frac{1}{r_1} - \frac{\partial^2 r_1}{\partial x^2} \quad , \quad b_1 = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial x \partial y} \quad , \quad c_1 = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r_1}{\partial x \partial z} \; ;$$

$$a_{22} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial x \partial y^2} \quad , \quad b_{22} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial y^3} \quad , \quad c_{22} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial y^2 \partial z} \; ;$$

$$a_{33} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial x \partial z^2} \quad , \quad b_{33} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial y \partial z^2} \quad , \quad c_{33} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial z^3} \; ;$$

$$a_{12} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} + \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2 \partial y} \quad , \quad b_{12} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x \partial y^2} \quad , \quad c_{12} = \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x \, \partial y \, \partial z} \; ;$$

$$a_{13} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} + \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2 \partial z} \quad , \quad b_{13} = \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x \, \partial y \, \partial z} \quad , \quad c_{13} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x \partial z^2} \; ;$$

$$a_{23} = -\alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x \, \partial y \, \partial z} \quad , \quad b_{23} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} - \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial y^2 \partial z} \quad , \quad c_{23} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} - \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial y \partial z^2} \, .$$

Per i punti del piano $x=0$ questi integrali si possono scrivere nel seguente modo:

$$a_1 = -\frac{1}{r} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\quad, \quad b_1 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}\quad, \quad c_1 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}\,;$$

$$a_{22} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y^2}\quad, \quad b_{22} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial y^3}\quad, \quad c_{22} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial y^2 \partial z}\,;$$

$$a_{33} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial x\, \partial z^2}\quad, \quad b_{33} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial y\, \partial z^2}\quad, \quad c_{33} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial z^3}\,;$$

$$a_{12} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y}\quad, \quad b_{12} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y^2}\quad, \quad c_{12} = -\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\,,$$

$$a_{13} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial z}\quad, \quad b_{13} = -\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\quad, \quad c_{13} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial z^2}\,;$$

$$a_{23} = \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x\, \partial y\, \partial z}\quad, \quad b_{23} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial y^2 \partial z}\quad, \quad c_{23} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial y\, \partial z^2}\,;$$

le tensioni corrispondenti saranno rispettivamente:

$$A_\sigma^{(1)} = L\left\{(1-2\,\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^3}\right\}\,,\quad B_\sigma^{(1)} = -L\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^2 \partial y}\right\}\,,$$

$$C_\sigma^{(1)} = -L\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^2\, \partial z}\right\}\,;$$

$$A_\sigma^{(22)} = L\left\{(1+2\,\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial y^2}\right\}\,,\quad B_\sigma^{(22)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial y} + \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\, \partial y^3}\right\}\,,$$

$$C_\sigma^{(22)} = L\,\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x \partial y^2 \partial z}\,;$$

$$A_\sigma^{(33)} = L\left\{(1+2\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} - \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial z^2}\right\}, \quad B_\sigma^{(33)} = L\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x \partial y \partial z^2},$$

$$C_\sigma^{(33)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x \partial z^3}\right\};$$

$$A_\sigma^{(12)} = 2L\left\{2\alpha\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} - \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^3 \partial y}\right\}, \quad B_\sigma^{(12)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + 2\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial y^2}\right\},$$

$$C_\sigma^{(12)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + 2\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial y \partial z}\right\};$$

$$A_\sigma^{(13)} = 2L\left\{2\alpha\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} - \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^3 \partial z}\right\}, \quad B_\sigma^{(13)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + 2\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial y \partial z}\right\},$$

$$C_\sigma^{(13)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} + 2\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial z^2}\right\};$$

$$A_\sigma^{(23)} = 2L\left\{(1+2\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} - \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial y \partial z}\right\}, \quad B_\sigma^{(23)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + 2\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x \partial y^2 \partial z}\right\},$$

$$C_\sigma^{(23)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + 2\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x \partial y \partial z^2}\right\}.$$

Poichè si ha:

$$u_{22} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y^2}, \quad v_{22} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial y^3}, \quad w_{22} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial y^2 \partial z};$$

$$u_{33} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial z^2}, \quad v_{33} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial y \partial z^2}, \quad w_{33} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r}{\partial z^3};$$

$$u_{23} = -\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x \partial y \partial z}, \quad v_{23} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial y^2 \partial z}, \quad w_{23} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \alpha\frac{\partial^3 r}{\partial y \partial z^2};$$

$$X_\sigma^{(1)} = L\left\{(1-2\alpha)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^3}\right\},\quad Y_\sigma^{(1)} = L\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^2\partial y}\right\},$$

$$Z_\sigma^{(1)} = L\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}+\alpha\frac{\partial^3 r}{\partial x^2\partial z}\right\};$$

$$X_\sigma^{(22)} = L\left\{(1+2\alpha)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2}-\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2\partial y^2}\right\},\quad Y_\sigma^{(22)} = -L\left\{\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y}+\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\partial y^3}\right\},$$

$$Z_\sigma^{(22)} = -L\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\partial y^2\partial z};$$

$$X_\sigma^{(33)} = L\left\{(1+2\alpha)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}-\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2\partial z^2}\right\},\quad Y_\sigma^{(33)} = -L\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\partial y\partial z^2},$$

$$Z_\sigma^{(33)} = -L\left\{\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}+\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\partial z^3}\right\};$$

$$X_\sigma^{(23)} = 2L\left\{(1+2\alpha)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y\partial z}-\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2\partial y\partial z}\right\},\quad Y_\sigma^{(23)} = -L\left\{\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}+2\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\partial y^2\partial z}\right\},$$

$$Z_\sigma^{(23)} = -L\left\{\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y}+2\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\partial y\partial z^2}\right\},$$

avremo sul piano $x=0$:

$$u_1+a_1=0\ ,\quad v_1+b_1=2v_1\ ,\quad w_1+c_1=2w_1\ ,$$
$$X_\sigma^{(1)}+A_\sigma^{(1)}=2X_\sigma^{(1)}\ ,\quad Y_\sigma^{(1)}+B_\sigma^{(1)}=0\ ,\quad Z_\sigma^{(1)}+C_\sigma^{(1)}=0\ ;$$

$$u_{22}+a_{22}=0\ ,\quad v_{22}+b_{22}=2v_{22}\ ,\quad w_{22}+c_{22}=2w_{22}\ ,$$
$$X_\sigma^{(22)}+A_\sigma^{(22)}=2X_\sigma^{(22)}\ ,\quad Y_\sigma^{(22)}+B_\sigma^{(22)}=0\ ,\quad Z_\sigma^{(22)}+C_\sigma^{(22)}=0\ ;$$

$$u_{33}+a_{33}=0\ ,\quad v_{33}+b_{33}=2v_{33}\ ,\quad w_{33}+c_{33}=2w_{33}\ ,$$
$$X_\sigma^{(33)}+A_\sigma^{(33)}=2X_\sigma^{(33)}\ ,\quad Y_\sigma^{(33)}+B_\sigma^{(33)}=0\ ,\quad Z_\sigma^{(33)}+C_\sigma^{(33)}=0\ ;$$

$$u_{12}+a_{12}=0\quad,\quad v_{12}+b_{12}=2\,v_{12}\quad,\quad w_{12}+c_{12}=2\,w_{12}\,,$$

$$X_\sigma^{(12)}+A_\sigma^{(12)}=2\,X_\sigma^{(12)}\quad,\quad Y_\sigma^{(12)}+B_\sigma^{(12)}=0\quad,\quad Z_\sigma^{(12)}+C_\sigma^{(12)}=0\;;$$

$$u_{13}+a_{13}=0\quad,\quad v_{13}+b_{13}=2\,v_{13}\quad,\quad w_{13}+c_{13}=2\,w_{13}\,,$$

$$X_\sigma^{(13)}+A_\sigma^{(13)}=2\,X_\sigma^{(13)}\quad,\quad Y_\sigma^{(13)}+B_\sigma^{(13)}=0\quad,\quad Z_\sigma^{(13)}+C_\sigma^{(13)}=0\;;$$

$$u_{23}+a_{23}=0\quad,\quad v_{23}+b_{23}=2\,v_{23}\quad,\quad w_{23}+c_{23}=2\,w_{23}\,,$$

$$X_\sigma^{(23)}+A_\sigma^{(23)}=2\,X_\sigma^{(23)}\quad,\quad Y_\sigma^{(23)}+B_\sigma^{(23)}=0\quad,\quad Z_\sigma^{(23)}+C_\sigma^{(23)}=0\;;$$

Le formule (25) (cap. I) ci dànno dunque:

$$-4\pi L\,u_0=\int_\sigma\left\{2\,v_1\,Y_\sigma+2\,w_1\,Z_\sigma-2\,X_\sigma^{(1)}\,u\right\}d\sigma\,,$$

$$-4\pi L\,\gamma_{22}^{(0)}=\int_\sigma\left\{2\,v_{22}\,Y_\sigma+2\,w_{22}\,Z_\sigma-2\,X_\sigma^{(22)}\,u\right\}d\sigma\,,$$

$$-4\pi L\,\gamma_{33}^{(0)}=\int_\sigma\left\{2\,v_{33}\,Y_\sigma+2\,w_{33}\,Z_\sigma-2\,X_\sigma^{(33)}\,u\right\}d\sigma\,,$$

$$-4\pi L\,\gamma_{12}^{(0)}=\int_\sigma\left\{2\,v_{12}\,Y_\sigma+2\,w_{12}\,Z_\sigma-2\,X_\sigma^{(12)}\,u\right\}d\sigma\,,$$

$$-4\pi L\,\gamma_{13}^{(0)}=\int_\sigma\left\{2\,v_{13}\,Y_\sigma+2\,w_{13}\,Z_\sigma-2\,X_\sigma^{(13)}\,u\right\}d\sigma\,,$$

$$-4\pi L\,\gamma_{23}^{(0)}=\int_\sigma\left\{2\,v_{23}\,Y_\sigma+2\,w_{23}\,Z_\sigma-2\,X_\sigma^{(23)}\,u\right\}d\sigma\,.$$

Dalle precedenti poi per mezzo delle (26) (cap. I) si hanno, operando nel modo indicato nel §. 5 del precedente capitolo, le altre due componenti v_0, w_0.

Anche qui basterà che le fuzioni u, Y_σ, Z_σ dei punti del piano $x=0$, divengano a distanza infinita la prima infinitesima del primo ordine, le altre due infinitesime del secondo ordine.

4. *Supponiamo finalmente di conoscere le tre componenti delle tensioni nei punti del piano* $x=0$.

Per trovare le $\gamma_{rs}^{(0)}$, consideriamo dapprima il seguente sistema di integrali delle (2'):

$$p_{11} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} + \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(1+\mathrm{M}) \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}$$

$$q_{11} = \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2}(1+\mathrm{M}) \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}$$

$$r_{11} = \mathrm{M}x \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2}(1+\mathrm{M}) \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}.$$

Per $x=0$ si ha evidentemente per questi integrali:

$$\theta = (1+\mathrm{M}) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2}, \quad \gamma_{11} = \frac{1}{2}(1+\mathrm{M}) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2}, \quad \gamma_{12} = 0, \quad \gamma_{13} = 0;$$

e quindi avremo per le corrispondenti tensioni:

$$\mathrm{P}_\sigma^{(11)} = (1+\mathrm{M})(\mathrm{K}+\mathrm{L}) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} = -2\,\mathrm{L}\,\mathrm{M} \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2}, \quad \mathrm{Q}_\sigma^{(11)} = 0, \quad \mathrm{R}_\sigma^{(11)} = 0,$$

Similmente se si considerano gli integrali:

$$p'_{11} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} + \mathrm{M}x \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x^3} - \frac{1}{2}(1+\mathrm{M}) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2}$$

$$q'_{11} = \mathrm{M}x \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{2}(1+\mathrm{M}) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y}$$

$$r'_{11} = \mathrm{M}x \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2 \partial z} - \frac{1}{2}(1+\mathrm{M}) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial z},$$

avremo per le tensioni corrispondenti sul piano $x=0$:

$$P'^{(11)}_{\sigma} = -2\,L\,M \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x^3}\,, \quad Q'^{(11)}_{\sigma} = 0\,, \quad R'^{(11)}_{\sigma} = 0\,.$$

Dunque le tre funzioni regolari in tutto S:

$$a_{11} = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial x^3} - \frac{1+\alpha}{M}\,p_{11} - \frac{\alpha\,x_1}{M}\,p'_{11}\,,$$

$$b_{11} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2\,\partial y} - \frac{1+\alpha}{M}\,q_{11} - \frac{\alpha\,x_1}{M}\,q'_{11}\,,$$

$$c_{11} = -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2\,\partial z} - \frac{1+\alpha}{M}\,r_{11} - \frac{\alpha\,x_1}{M}\,r'_{11}$$

rappresentano un sistema di integrali delle equazioni (2′) le cui tensioni corrispondenti sono per $x=0$:

$$A^{(11)}_{\sigma} = -L\left\{(1-2\,\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^4} - 2\,(1+\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} - 2\,\alpha\,x_1\frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x^3}\right\},$$

$$B^{(11)}_{\sigma} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y} + \alpha\,\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^3\,\partial y}\right\},$$

$$C^{(11)}_{\sigma} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z} + \alpha\,\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^3\,\partial z}\right\};$$

e poichè:

$$X^{(11)}_{\sigma} = L\left\{(2\,\alpha-1)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^4}\right\} = -L\left\{(1+\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} - \alpha\,x_1\frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^3}\right\},$$

$$Y_\sigma^{(11)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial^4 r}{\partial x^3 \partial y}\right\},$$

$$Z_\sigma^{(11)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} + \alpha \frac{\partial^4 r}{\partial x^3 \partial z}\right\},$$

avremo evidentemente:

$$X_\sigma^{(11)} + A_\sigma^{(11)} = 0 \ , \ Y_\sigma^{(11)} + B_\sigma^{(11)} = 0 \ , \ Z_\sigma^{(11)} + C_\sigma^{(11)} = 0 \ .$$

Il sistema di integrali delle equazioni (2'):

$$p'_{12} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y} + Mx \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{2}(1+M)\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y} \ , \ q'_{12} = Mx \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y^2} - \frac{1}{2}(1+M)\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} \ ,$$

$$r'_{12} = Mx \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{1}{2}(1+M)\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \partial z}$$

ci dà:

$$P'^{(12)}_\sigma = -2\,L\,M \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2 \partial y} \ , \ Q'^{(12)}_\sigma = 0 \ , \ R'^{(12)}_\sigma = 0 \ .$$

Se consideriamo quindi gli integrali seguenti delle equazioni (2')

$$a_{12} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} + \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2 \partial y} + \frac{2\alpha x_1}{M} p'_{12} \ , \ b_{12} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{2\alpha x_1}{M} q'_{12} ,$$

$$c_{12} = \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x \partial y \partial z} + \frac{2\,\alpha\, x_1}{M} r'_{12} ,$$

avremo per $x = 0$:

$$A_\sigma^{(12)} = -2\,L\left\{ 2\,\alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y} - \alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x^3 \partial y} + 2\,\alpha\, x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2 \partial y}\right\},$$

$$B_\sigma^{(12)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} + 2\,\alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial y^2}\right\} , \ C_\sigma^{(12)} = L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \partial z} + 2\,\alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial y \partial z}\right\} ;$$

e poichè:

$$X_\sigma^{(12)} = 2\,L \left\{ 2\alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} - \alpha \frac{\partial^4 r}{\partial x^3\,\partial y} \right\} = 2\,L\,\alpha\, x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial x^2\,\partial y}\,,$$

$$Y_\sigma^{(12)} = -L \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + 2\alpha \frac{\partial^4 r}{\partial x^2\,\partial y^2} \right\},\quad Z_\sigma^{(12)} = -L \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z} + 2\alpha \frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial y\,\partial z} \right\},$$

sarà:

$$X_\sigma^{(12)} + A_\sigma^{(12)} = 0\,,\quad Y_\sigma^{(12)} + B_\sigma^{(12)} = 0\,,\quad Z_\sigma^{(12)} + C_\sigma^{(12)} = 0\,.$$

Analogamente se si prende:

$$a_{13} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} + \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x^2\,\partial z} + \frac{2\,\alpha\, x_1}{M} p'_{13}\,,\quad b_{13} = \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z} + \frac{2\,\alpha\,x_1}{M} q'_{13},$$

$$c_{13} = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x\,\partial z^2} + \frac{2\,\alpha\,x_1}{M} r'_{13}\,,$$

con

$$p'_{13} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z} + M x \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2\,\partial z} - \frac{1}{2}(1+M) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z}\,,$$

$$q'_{13} = M x \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y\,\partial z} - \frac{1}{2}(1+M) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z}\,,\quad r'_{13} = M x \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z^2} - \frac{1}{2}(1+M) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2}\,,$$

avremo:

$$A_\sigma^{(13)} = -2\,L \left\{ 2\alpha \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z} - \alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x^3\,\partial z} + 2\,\alpha\, x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2\,\partial z} \right\},$$

$$B_\sigma^{(13)} = L \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z} + 2\alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial y \partial z} \right\},\quad C_\sigma^{(13)} = L \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} + 2\alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial z^2} \right\},$$

e quindi:

$$X_\sigma^{(13)} + A_\sigma^{(13)} = 0\,,\quad Y_\sigma^{(13)} + B_\sigma^{(13)} = 0\,,\quad Z_\sigma^{(13)} + C_\sigma^{(13)} = 0\,.$$

Poichè le tre funzioni:

$$\mathrm{M}y\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y}\;,\quad \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}+\mathrm{M}y\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2}\;,\quad \mathrm{M}y\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z}$$

sono integrali delle equazioni (2′), saranno integrali di queste stesse equazioni le altre funzioni:

$$p_1=\mathrm{M}\left(y\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y}-y_1\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}\right),$$

$$q_1=\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}+\mathrm{M}\left(y\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2}-y_1\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2}+\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}\right),$$

$$r_1=\mathrm{M}\left(y\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z}-y_1\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}\right).$$

Le tensioni ad esse corrispondenti calcolate mediante le (3) (cap. I) sono, poichè su σ si ha $x=0$ (1),

$$\text{(2)}\qquad \mathrm{P}^{(1)}_\sigma=\mathrm{L}\left\{(1+\mathrm{M})\,\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2}+2\,\mathrm{M}x_1\frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y^2}\right\},$$

$$\mathrm{Q}^{(1)}_\sigma=\mathrm{L}\left\{(1-\mathrm{M})\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y}+2\,\mathrm{M}x_1\frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial y^3}\right\},\quad \mathrm{R}^{(1)}_\sigma=2\,\mathrm{L}\,\mathrm{M}x_1\,\frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2\,\partial z}.$$

Se consideriamo il sistema di integrali delle equazioni (2′):

$$p_2=-\frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial^3 r_1}{\partial x\,\partial y^2}\;,\quad q_2=-\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}-\frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial^3 r_1}{\partial y^3}\;,\quad r_2=-\frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial^3 r_1}{\partial y^2\,\partial z}\;,$$

(1) Ometto i calcoli necessarî per arrivare alle formole (2), perchè quantunque laboriosi, pure non possono offrire nessuna difficoltà.

avremo per le corrispondenti tensioni sul piano σ $(x=0)$:

$$P_\sigma^{(2)} = L \left\{ (1+2\alpha) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} - \alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial y^2} \right\} = L \left\{ (1+\alpha) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} - \alpha\, r_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x\, \partial y^2} \right\},$$

$$Q_\sigma^{(2)} = -L \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\, \partial y} + \alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x\, \partial y^3} \right\} = -L \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\, \partial y} + \alpha\, x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial y^3} \right\},$$

$$R_\sigma^{(2)} = -L\, \alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x\, \partial y^2\, \partial z} = -L\, \alpha\, x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2\, \partial z}.$$

Prendendo allora gli integrali:

$$p_{22} = -\frac{1}{2\,M} (\alpha\, p_1 + 2\,M\, p_2) \quad , \quad q_{22} = -\frac{1}{2\,M} (\alpha\, q_1 + 2\,M\, q_2) \quad ,$$

$$r_{22} = -\frac{1}{2\,M} (\alpha\, r_1 + 2\,M\, r_2) \quad ,$$

le corrispondenti tensioni saranno, poichè $\alpha\,(1-M) - 2\,M = 0$, $2\,M\,(1+\alpha) + \alpha\,(1+M) = 4\,M\,(1+\alpha)$:

$$P_\sigma^{(22)} = -2\,L\,(1+\alpha) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} \; , \; Q_\sigma^{(22)} = 0 \; , \; R_\sigma^{(22)} = 0 \; .$$

Similmente considerando gli integrali delle (2'):

$$p_{221} = \frac{x_1}{1+M} \left(\alpha \frac{\partial p_1}{\partial x} + 2\,M \frac{\partial p_2}{\partial x} \right), \; q_{221} = \frac{x_1}{1+M} \left(\alpha \frac{\partial q_1}{\partial x} + 2\,M \frac{\partial q_2}{\partial x} \right),$$

$$r_{221} = \frac{x_1}{1+M} \left(\alpha \frac{\partial r_1}{\partial x} + 2\,M \frac{\partial r_2}{\partial x} \right),$$

avremo, poichè $2\,M\,(1+\alpha) + \alpha\,(1+M) = 2\,\alpha\,(1+M)$:

$$P_\sigma^{(221)} = 2\,L\,\alpha\, x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x\, \partial y^2} \; , \; Q_\sigma^{(221)} = 0 \; , \; R_\sigma^{(221)} = 0 \; .$$

Prendiamo dunque per integrali a_{22}, b_{22}, c_{22} le tre seguenti funzioni regolari in tutto S:

$$a_{22} = p_2 + p_{22} + p_{221}\ ,\quad b_{22} = q_2 + q_{22} + q_{221}\ ,\quad c_{22} = r_2 + r_{22} + r_{221}\ ;$$

allora si avrà per $x=0$:

$$A_\sigma^{(22)} = -L\left\{(1+\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} - \alpha x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y^2}\right\} = -L\left\{(1+2\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} - \alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial y^2}\right\},$$

$$B_\sigma^{(22)} = \qquad = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x\, \partial y^3}\right\},$$

$$C_\sigma^{(22)} = \qquad = -L\, \alpha\, \frac{\partial^4 r_1}{\partial x\, \partial y^2\, \partial z}\ ;$$

e poichè:

$$X_\sigma^{(22)} = L\left\{(1+2\,\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \alpha \frac{\partial^4 r}{\partial x^2 \partial y^2}\right\},\quad Y_\sigma^{(22)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + \alpha \frac{\partial^4 r}{\partial x\, \partial y^3}\right\},$$

$$Z_\sigma^{(22)} = -L\, \alpha\, \frac{\partial^4 r}{\partial x\, \partial y^2\, \partial z}\ ,$$

sarà:

$$X_\sigma^{(22)} + A_\sigma^{(22)} = 0\ ,\quad Y_\sigma^{(22)} + B_\sigma^{(22)} = 0\ ,\quad Z_\sigma^{(22)} + C_\sigma^{(22)} = 0\,.$$

Analogamente posto:

$$p'_1 = M\left(z\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial z} - z_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial x}\right),\quad q'_1 = M\left(z\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \partial z} - z_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y}\right),$$

$$r'_1 = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} + M\left(z\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} - z_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z}\right);$$

$$p'_2 = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial^3 r_1}{\partial x\, \partial z^2}\ ,\quad q'_2 = -\frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial^3 r_1}{\partial y\, \partial z^2}\ ,\quad r'_2 = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} - \frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial^3 r_1}{\partial z^3}\ ;$$

$$p'_{22} = -\frac{1}{2\,\mathrm{M}}(\alpha\, p'_1 + 2\,\mathrm{M}\, p'_2)\ ,\quad q'_{22} = -\frac{1}{2\,\mathrm{M}}(\alpha\, q'_1 + 2\,\mathrm{M}\, q'_2)\ ,$$

$$r'_{22} = -\frac{1}{2\,\mathrm{M}}(\alpha\, r'_1 + 2\,\mathrm{M}\, r'_2)\ ;$$

$$p'_{221} = \frac{x_1}{1+\mathrm{M}}\left(\alpha\frac{\partial p'_1}{\partial x} + 2\,\mathrm{M}\frac{\partial p'_2}{\partial x}\right)\ ,\quad q'_{221} = \frac{x_1}{1+\mathrm{M}}\left(\alpha\frac{\partial q'_1}{\partial x} + 2\,\mathrm{M}\frac{\partial q'_2}{\partial x}\right)\ ,$$

$$r'_{221} = \frac{x_1}{1+\mathrm{M}}\left(\alpha\frac{\partial r'_1}{\partial x} + 2\,\mathrm{M}\frac{\partial r'_2}{\partial x}\right)\ ;$$

$$a_{33} = p'_2 + p'_{22} + p'_{221}\ ,\quad b_{33} = q'_2 + q'_{22} + q'_{221}\ ,\quad c_{33} = r'_2 + r'_{22} + r'_{221}\ ,$$

avremo per $x=0$:

$$\mathrm{A}_\sigma^{(33)} = -\mathrm{L}\left\{(1+2\,\alpha)\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial z^2} - \alpha\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2\,\partial z^2}\right\}\ ,\quad \mathrm{B}_\sigma^{(33)} = -\mathrm{L}\,\alpha\frac{\partial^4 r_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z^2}\ ,$$

$$\mathrm{C}_\sigma^{(33)} = -\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z} + \alpha\frac{\partial^4 r_1}{\partial x\,\partial z^3}\right\}\ ;$$

e poichè:

$$\mathrm{X}_\sigma^{(33)} = \mathrm{L}\left\{(1+2\,\alpha)\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2} - \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2\,\partial z^2}\right\}\ ,\quad \mathrm{Y}_\sigma^{(33)} = -\mathrm{L}\,\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\,\partial y\,\partial z^2}\ ,$$

$$\mathrm{Z}_\sigma^{(33)} = -\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z} + \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\,\partial z^3}\right\}\ ,$$

avremo anche qui:

$$\mathrm{X}_\sigma^{(33)} + \mathrm{A}_\sigma^{(33)} = 0\ ,\quad \mathrm{Y}_\sigma^{(33)} + \mathrm{B}_\sigma^{(33)} = 0\ ,\quad \mathrm{Z}_\sigma^{(33)} + \mathrm{C}_\sigma^{(33)} = 0\,.$$

Finalmente consideriamo gli integrali delle (2'):

$$p''_1 = \mathrm{M}\left(y\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z} - y_1\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z} + z\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y} - z_1\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y}\right)\ ,$$

$$q''_1 = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} + M \left(y \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z} - y_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z} + z \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} - z_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2} \right),$$

$$r''_1 = \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} + M \left(y \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} - y_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z} - z_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z} \right);$$

si avrà per le tensioni sul piano $x=0$:

$$P''^{(1)}_\sigma = L \left\{ 2(1+M) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z} + 4 M x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial y \, \partial z} \right\},$$

$$Q''^{(1)}_\sigma = L \left\{ (1-M) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial z} + 4 M x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2 \, \partial z} \right\},$$

$$R''^{(1)}_\sigma = L \left\{ (1-M) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial y} + 4 M x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z^2} \right\}.$$

Le tre funzioni integrali delle (2'):

$$p''_2 = -\alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial x \, \partial y \, \partial z}, \quad q''_2 = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z} - \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial y^2 \, \partial z}, \quad r''_2 = -\frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial y} - \alpha \frac{\partial^3 r_1}{\partial y \, \partial z^2}$$

ci dànno poi:

$$P''^{(2)}_\sigma = 2L \left\{ (1+2\alpha) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z} - \alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2 \partial y \, \partial z} \right\} = 2L \left\{ (1+\alpha) \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z} - \alpha x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial x \partial y \partial z} \right\},$$

$$Q''^{(2)}_\sigma = -L \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial z} + 2\alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x \, \partial y^2 \partial z} \right\} = -L \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial z} + 2\alpha x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial y^2 \, \partial z} \right\},$$

$$R''^{(2)}_\sigma = -L \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial y} + 2\alpha \frac{\partial^4 r_1}{\partial x \, \partial y \, \partial z^2} \right\} = -L \left\{ \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x \, \partial y} + 2\alpha x_1 \frac{\partial^3 \frac{1}{r_1}}{\partial y \, \partial z^2} \right\}.$$

Dunque se si prendono gli integrali seguenti delle equazioni (2'):

$$p''_{22}=-\frac{1}{2\,M}(\alpha\,p''_1+2\,M\,p''_2)\ ,\ q''_{22}=-\frac{1}{2\,M}(\alpha\,q''_1+2\,M\,q''_2)\ ,$$

$$r''_{22}=-\frac{1}{2\,M}(\alpha\,r''_1+2\,M\,r''_2)\ ,$$

avremo per le corrispondenti tensioni:

$$P''^{(22)}_\sigma=-4\,L\,(1+\alpha)\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z}\ ,\ Q''^{(22)}_\sigma=0\ ,\ R''^{(22)}_\sigma=0\ .$$

Nello stesso modo se si prendono per integrali delle equazioni (2') le tre funzioni:

$$p''_{221}=\frac{x_1}{1+M}\left(\alpha\frac{\partial p''_1}{\partial x}+2\,M\frac{\partial p''_2}{\partial x}\right)\ ,\ q''_{221}=\frac{x_1}{1+M}\left(\alpha\frac{\partial q''_1}{\partial x}+2\,M\frac{\partial q''_2}{\partial x}\right)\ ,$$

$$r''_{221}=\frac{x_1}{1+M}\left(\alpha\frac{\partial r''_1}{\partial x}+2\,M\frac{\partial r''_2}{\partial x}\right)\ ,$$

si avrà per le corrispondenti tensioni:

$$P''^{(221)}_\sigma=4\,L\,\alpha\,x_1\frac{\partial^3\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\ ,\ Q''^{(221)}_\sigma=0\ ,\ R''^{(221)}_\sigma=0\ .$$

Posto allora:

$$a_{23}=p''_2+p''_{22}+p''_{221}\ ,\ b_{23}=q''_2+q''_{22}+q''_{221}\ ,\ c_{23}=r''_2+r''_{22}+r''_{221}\ ,$$

avremo tre funzioni regolari in tutti i punti dello spazio S, le quali soddisfano alle equazioni (2') dell'equilibrio e per le quali le corrispondenti tensioni sono:

$$A^{(23)}_\sigma=-2\,L\left\{(1+\alpha)\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z}-\alpha\,x_1\frac{\partial^3\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y\,\partial z}\right\}=-2\,L\left\{(1+2\,\alpha)\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z}-\alpha\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z}\right\}\ ,$$

$$B^{(23)}_\sigma=\qquad=-L\left\{\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z}+2\,\alpha\frac{\partial^4 r_1}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z}\right\}\ ,$$

$$C^{(23)}_\sigma=\qquad=-L\left\{\frac{\partial^2\frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y}+2\,\alpha\frac{\partial^4 r_1}{\partial x\,\partial y\,\partial z^2}\right\}\ .$$

Ora si ha:

$$X_\sigma^{(23)} = 2\,L\left\{(1+2\,\alpha)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z} - \alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x^2\,\partial y\,\partial z}\right\},$$

$$Y_\sigma^{(23)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z} + 2\,\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z}\right\},$$

$$Z_\sigma^{(23)} = -L\left\{\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} + 2\,\alpha\frac{\partial^4 r}{\partial x\,\partial y\,\partial z^2}\right\};$$

quindi, poichè su σ è

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}\,,\quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial z} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\,,\quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r_1}}{\partial x\,\partial y} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial^4 r_1}{\partial x^2\partial y\partial z} = \frac{\partial^4 r}{\partial x^2\partial y\,\partial z}\,,\quad \frac{\partial^4 r_1}{\partial x\partial y^2\partial z} = -\frac{\partial^4 r}{\partial x\,\partial y^2\partial z}\,,\quad \frac{\partial^4 r_1}{\partial x\partial y\,\partial z^2} = -\frac{\partial^4 r}{\partial x\,\partial y\,\partial z^2}\,,$$

avremo:

$$X_\sigma^{(23)} + A_\sigma^{(23)} = 0\ ,\quad Y_\sigma^{(23)} + B_\sigma^{(23)} = 0\ ,\quad Z_\sigma^{(23)} + C_\sigma^{(23)} = 0\,.$$

Sostituendo nella (28) (cap. I) alle tre funzioni a_{rs}, b_{rs}, c_{rs} successivamente le sei terne di funzioni a_{11}, b_{11}, c_{11}; a_{12}, b_{12}, c_{12}; a_{13}, b_{13}, c_{13}; a_{22}, b_{22}, c_{22}; a_{33}, b_{33}, c_{33}; a_{23}, b_{23}, c_{23} trovate in questo paragrafo otterremo le $\gamma_{11}^{(0)}$, $\gamma_{12}^{(0)}$, $\gamma_{13}^{(0)}$, $\gamma_{22}^{(0)}$, $\gamma_{33}^{(0)}$, $\gamma_{23}^{(0)}$, e quindi, col processo indicato al §. 6 del capitolo precedente, avremo dalle (32) le u_0, v_0, w_0.

Qui bisogna naturalmente ammettere che le funzioni arbitrarie X_σ, Y_σ, Z_σ dei punti del piano $x=0$ diventino a distanza infinita infinitesime del secondo ordine.

CAPITOLO III

Studio degli integrali che compariscono nelle formule del Somigliana

1. È noto che il secondo membro della formula di Green può essere interpretato come la somma di tre funzioni potenziali: una di spazio, una di doppio strato ed una di superficie. Ora nelle formole del Somigliana gli integrali analoghi alla funzione potenziale di spazio sono:

$$(1) \qquad \int_S \Sigma \rho X u_i \, dS \quad , \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gli integrali analoghi alla funzione potenziale di un doppio strato sono:

$$(2) \qquad \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(i)} u \, d\sigma \quad , \qquad (i = 1, 2, 3)$$

e quelli analoghi alla funzione potenziale di una distribuzione superficiale sono:

$$(3) \qquad \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_i \, d\sigma \quad , \qquad (i = 1, 2, 3) .$$

Per gli integrali (1) dimostrai già in una Nota [1] dei Ren-

[1] Nel vol. XXXIV, anno 1893, del (Nuovo Cimento) ho riprodotta questa Nota, aggiungendovi alcuni sviluppi che nei (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei) avevo dovuto trascurare per ristrettezza di spazio.

diconti della R. Accademia dei Lincei (vol. II, anno 1893) un teorema analogo a quello del Poisson. Posto cioè:

$$M = -\frac{1}{4\pi L}\int_S \Sigma\, \rho\, X\, u_1\, dS \ , \quad N = -\frac{1}{4\pi L}\int_S \Sigma\, \rho\, X\, u_2\, dS \ ,$$

$$P = -\frac{1}{4\pi L}\int_S \Sigma\, \rho\, X\, u_3\, dS$$

ed *ammesso che le funzioni* ρX, ρY, ρZ *oltre a soddisfare alla condizione di essere integrabili lungo qualunque segmento rettilineo dello spazio* S, *siano tali che gli integrali:*

$$\int_0^r \frac{\rho X - \rho_0 X_0}{r}\, dr \ , \quad \int_0^r \frac{\rho Y - \rho_0 Y_0}{r}\, dr \ , \quad \int_0^r \frac{\rho Z - \rho_0 Z_0}{r}\, dr$$

si mantengano determinati e finiti lungo ogni raggio rettore uscente da (x_1, y_1, z_1), dimostrai che *le tre funzioni* M, N, P *soddisfano alle seguenti equazioni:*

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & L\,\Delta^2 M + (L+K)\frac{\partial\Theta}{\partial x_1} = \rho X \\ & L\,\Delta^2 N + (L+K)\frac{\partial\Theta}{\partial y_1} = \rho Y \\ & L\,\Delta^2 P + (L+K)\frac{\partial\Theta}{\partial z_1} = \rho Z\,. \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \Theta = \frac{\partial M}{\partial x_1} + \frac{\partial N}{\partial y_1} + \frac{\partial P}{\partial z_1} \right\}$$

Da questo teorema segue, poichè le espressioni:

$$\int_\sigma \Sigma\, X_\sigma\, u_1\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma^{(1)}\, u\, d\sigma \ ,$$

$$\int_\sigma \Sigma\, X_\sigma\, u_2\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma^{(2)}\, u\, d\sigma \ ,$$

$$\int_\sigma \Sigma\, X_\sigma\, u_3\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma\, X_\sigma^{(3)}\, u\, d\sigma$$

soddisfano alle equazioni (4) per $\rho\,X=\rho\,Y=\rho\,Z=0$ (v. SOMIGLIANA, l. c., §. 1), che le formole del SOMIGLIANA valgono anche quando le funzioni $\rho\,X$, $\rho\,Y$, $\rho\,Z$ soddisfano alle sole condizioni precedentemente poste.

2. Nel cap. I si era ammesso che il problema più generale dell'elasticità può sempre ridursi al caso più semplice di un problema analogo in cui mancano le forze esterne. Ora questo teorema, dimostrato per la prima volta dal BETTI (l. c., §. 5), risulta, come ha fatto osservare il prof. VOLTERRA, molto facilmente dalle formole (4).

Per vederlo indichiamo con u, v, w le componenti degli spostamenti corrispondenti ad una data deformazione con Γ_{rs} le espressioni analoghe alle γ_{rs} formate con le funzioni M, N, P; e poniamo:

$$(5)\qquad \begin{cases} u = \mathrm{M} + u' \;,\quad v = \mathrm{N} + v' \;,\quad w = \mathrm{P} + w' \\ \theta = \Theta + \theta' \;,\quad \gamma_{rs} = \Gamma_{rs} + \gamma'_{rs} \,. \end{cases}$$

Ponendo nelle (4) e nelle funzioni M, N, P le variabili x, y, z in luogo delle altre x_1, y_1, z_1, avremo:

$$\mathrm{L}\,\Delta^2(\mathrm{M}+u') + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\frac{\partial(\Theta+\theta')}{\partial x} = \rho\,\mathrm{X}$$

$$\mathrm{L}\,\Delta^2(\mathrm{N}+v') + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\frac{\partial(\Theta+\theta')}{\partial y} = \rho\,\mathrm{Y}$$

$$\mathrm{L}\,\Delta^2(\mathrm{P}+w') + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\frac{\partial(\Theta+\theta')}{\partial z} = \rho\,\mathrm{Z}\,,$$

$$\mathrm{L}\,\Delta^2\mathrm{M} + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\frac{\partial\Theta}{\partial x} = \rho\,\mathrm{X}$$

$$\mathrm{L}\,\Delta^2\mathrm{N} + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\frac{\partial\Theta}{\partial y} = \rho\,\mathrm{Y}$$

$$\mathrm{L}\,\Delta^2\mathrm{P} + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \rho\,\mathrm{Z}\,;$$

e quindi:

$$
(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{L}\,\Delta^2 u' + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\frac{\partial \theta'}{\partial x} = 0\\
&\mathrm{L}\,\Delta^2 v' + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\frac{\partial \theta'}{\partial y} = 0\\
&\mathrm{L}\,\Delta^2 w' + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\frac{\partial \theta'}{\partial z} = 0\,.
\end{aligned}\right.
\qquad \left\{ \theta' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right\}
$$

Le condizioni al contorno che per le funzioni u, v, w erano:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{K}\,\theta + 2\,\mathrm{L}\,\gamma_{11})\,\frac{\partial x}{\partial n} + \mathrm{L}\,\gamma_{12}\,\frac{\partial y}{\partial n} + \mathrm{L}\,\gamma_{13}\,\frac{\partial z}{\partial n} = \mathrm{X}_\sigma\\
&\mathrm{L}\,\gamma_{21}\,\frac{\partial x}{\partial n} + (\mathrm{K}\,\theta + 2\,\mathrm{L}\,\gamma_{22})\,\frac{\partial y}{\partial n} + \mathrm{L}\,\gamma_{23}\,\frac{\partial z}{\partial n} = \mathrm{Y}_\sigma\\
&\mathrm{L}\,\gamma_{31}\,\frac{\partial x}{\partial n} + \mathrm{L}\,\gamma_{32}\,\frac{\partial y}{\partial n} + (\mathrm{K}\,\theta + 2\,\mathrm{L}\,\gamma_{33})\,\frac{\partial z}{\partial n} = \mathrm{Z}_\sigma\,,
\end{aligned}
$$

saranno ora per le u', v', w':

$$
(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(\mathrm{K}\,\theta' + 2\,\mathrm{L}\,\gamma'_{11})\,\frac{\partial x}{\partial n} + \mathrm{L}\,\gamma'_{12}\,\frac{\partial y}{\partial n} + \mathrm{L}\,\gamma'_{13}\,\frac{\partial z}{\partial n} = \mathrm{X}_\sigma -\\
&\qquad - \left\{ (\mathrm{K}\,\Theta + 2\,\mathrm{L}\,\Gamma_{11})\,\frac{\partial x}{\partial n} + \mathrm{L}\,\Gamma_{12}\,\frac{\partial y}{\partial n} + \mathrm{L}\,\Gamma_{13}\,\frac{\partial z}{\partial n} \right\}\\
&\mathrm{L}\,\gamma'_{21}\,\frac{\partial x}{\partial n} + (\mathrm{K}\,\theta' + 2\,\mathrm{L}\,\gamma'_{22})\,\frac{\partial y}{\partial n} + \mathrm{L}\,\gamma'_{23}\,\frac{\partial z}{\partial n} = \mathrm{Y}_\sigma -\\
&\qquad - \left\{ \mathrm{L}\,\Gamma_{21}\,\frac{\partial x}{\partial n} + (\mathrm{K}\,\Theta + 2\,\mathrm{L}\,\Gamma_{22})\,\frac{\partial y}{\partial n} + \mathrm{L}\,\Gamma_{23}\,\frac{\partial z}{\partial n} \right\}\\
&\mathrm{L}\,\gamma'_{31}\,\frac{\partial x}{\partial n} + \mathrm{L}\,\gamma'_{32}\,\frac{\partial y}{\partial n} + (\mathrm{K}\,\theta' + 2\,\mathrm{L}\,\gamma'_{33})\,\frac{\partial z}{\partial n} = \mathrm{Z}_\sigma -\\
&\qquad - \left\{ \mathrm{L}\,\Gamma_{31}\,\frac{\partial x}{\partial n} + \mathrm{L}\,\Gamma_{32}\,\frac{\partial y}{\partial n} + (\mathrm{K}\,\Theta + 2\,\mathrm{L}\,\Gamma_{33})\,\frac{\partial z}{\partial n} \right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Dunque per avere le u, v, w basterà calcolare prima gli integrali M, N, P, integrare poi le equazioni indefinite (6) colle condizioni al contorno (7) e servirsi in fine delle formole (5).

3. Studiamo ora le discontinuità degli integrali (2) che si hanno quando il punto che si considera attraversa la superficie, nello stesso modo che nella teoria delle funzioni armoniche si studia la discontinuità della funzione potenziale di un doppio strato.

Stabiliamo dapprima alcune formole che ci saranno molto utili in seguito.

Nella mia Nota, citata al §. 1, stabilii la formola:

$$\int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma \tag{8}$$

e le analoghe, supposto che il punto $P \equiv (x_1, y_1, z_1)$ non si trovasse sulla superficie σ. Ora le medesime formole valgono anche quando il punto (x_1, y_1, z_1) si trova su σ e in questo punto la superficie ammette un piano tangente ordinario.

Infatti indicata con u'_1 la funzione u_1 considerata nel punto $P' \equiv (x'_1, y'_1, z'_1)$ di σ, si può osservare che gli integrali:

$$\int_\sigma \frac{\partial u'_1}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma \quad , \quad \int_\sigma \frac{\partial u'_1}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma$$

sono uniformemente proprî, ossia che preso un numero ε piccolo ad arbitrio, si può isolare il punto P' con una porzione σ' di superficie σ talmente piccola che sia:

$$\int_{\sigma'} \frac{\partial u'_1}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma < \frac{\varepsilon}{2} \, , \quad \int_{\sigma'} \frac{\partial u'_1}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma < \frac{\varepsilon}{2} \, , \tag{9}$$

e che inoltre si abbia:

$$\int_{\sigma'} \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma < \frac{\varepsilon}{2} \, , \quad \int_{\sigma'} \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

anche coll'indefinito avvicinarsi del punto P al punto P' di σ.

L'espressione

$$\left| \int_{\sigma - \sigma'} \frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma - \int_{\sigma - \sigma'} \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma \right|$$

è una funzione del punto $P \equiv (x_1, y_1, z_1)$ che coll'avvicinarsi di questo punto al punto $P' \equiv (x'_1, y'_1, z'_1)$ di σ tende verso l'altra espressione determinata

$$\left| \int_{\sigma - \sigma'} \frac{\partial u'_1}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma - \int_{\sigma - \sigma'} \frac{\partial u'_1}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma \right| ;$$

ora essa per le (8), (10) si mantiene sempre inferiore ad ε, quindi anche il suo limite sarà inferiore a questa grandezza, ossia si avrà:

$$\left| \int_{\sigma - \sigma'} \frac{\partial u'_1}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma - \int_{\sigma - \sigma'} \frac{\partial u'_1}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma \right| < \varepsilon .$$

Da questa e dalle (9) avremo finalmente passando al limite per $\sigma' = 0$:

$$\int_{\sigma} \frac{\partial u'_1}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma - \int_{\sigma} \frac{\partial u'_1}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma .$$

Nello stesso modo si dimostrano le formole analoghe.

Dimostrate così la (8) e le analoghe in tutti i casi, avremo dovunque sia il punto (x_1, y_1, z_1) dal quale partono i raggi r:

$$\int_{\sigma} \left(\frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x^3} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x^2 \partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\sigma =$$

$$= \int_{\sigma} \left(\frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x^3} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x \partial z^2} \frac{\partial x}{\partial n} \right) d\sigma = \int_{\sigma} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} d\sigma ,$$

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x \partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\sigma =$$

$$= \int_\sigma \left(\frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x^3} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x \partial z^2} \frac{\partial y}{\partial n} \right) d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma ,$$

$$\int_\sigma \left(\frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x^2 \partial z} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x \partial y \partial z} \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x \partial z^2} \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\sigma =$$

$$= \int_\sigma \left(\frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x^3} \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{\partial^3 \frac{r}{2}}{\partial x \partial z^2} \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma .$$

Osservando quindi che si ha:

$$X_\sigma^{(1)} = 2\alpha L \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x^2} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} \right\} + L \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ,$$

$$Y_\sigma^{(1)} = 2\alpha L \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} \right\} + L \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} \right\} ,$$

$$Z_\sigma^{(1)} = 2\alpha L \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} \right\} + L \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} \right\} ,$$

risulta:

$$(11) \quad \int_\sigma X_\sigma^{(1)} d\sigma = L \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma , \quad \int_\sigma Y_\sigma^{(1)} d\sigma = 0 , \quad \int_\sigma Z_\sigma^{(1)} d\sigma = 0 \ (^1) .$$

4. Indichiamo rispettivamente con u_0, v_0, w_0 i valori, supposti

(1) Queste formole, per il caso di P interno al corpo elastico, furono dimostrate con un altro metodo dal prof. VOLTERRA nel suo *Corso di lezioni di fisica-matematica.*

finiti, di u, v, w nel punto P' della superficie σ. Avremo identicamente:

$$u = u_0 + (u - u_0) \ , \quad v = v_0 + (v - v_0) \ , \quad w = w_0 + (w - w_0) \ ,$$

e quindi per le (11):

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)} u \, d\sigma = u_0 \int_\sigma X_\sigma^{(1)} d\sigma + v_0 \int_\sigma Y_\sigma^{(1)} d\sigma + w_0 \int_\sigma Z_\sigma^{(1)} d\sigma +$$

$$+ \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)} (u - u_0) \, d\sigma = u_0 \mathrm{L} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma + \Sigma \int_\sigma X_\sigma^{(1)} (u - u_0) \, d\sigma \, .$$

Supponiamo che *la superficie σ abbia in* P' *la curvatura finita* e che *le funzioni u, v, w siano tali che le espressioni:*

$$\frac{|u - u_0|}{r_0} \ , \quad \frac{|v - v_0|}{r_0} \ , \quad \frac{|w - w_0|}{r_0} \ ,$$

in cui r_0 indica la distanza del punto P' da un altro punto qualsiasi, *siano integrabili a partire da* P' *lungo qualunque linea uscente da* P' *stesso.*

Osserviamo dapprima che per le ipotesi fatte l'integrale:

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)} (u - u_0) \, d\sigma \ ,$$

nel caso in cui il punto che si considera sia P', è proprio.

Per dimostrarlo stacchiamo da σ una regione σ' contenente P' nel suo interno e tale che sia incontrata una sola volta da ogni normale innalzata dai punti del piano tangente a σ in P'; allora poichè l'integrale che esaminiamo non presenta nessuna singolarità quando viene esteso a $\sigma - \sigma'$, basterà per il nostro scopo provare che l'integrale

$$\int_{\sigma'} \Sigma X_\sigma^{(1)} (u - u_0) \, d\sigma'$$

è proprio. Per questo osserviamo che facendo uso delle coordinate polari r_0, θ col polo nel punto P', si ha:

$$d\sigma' = r_0\, dr_0\, d\theta\ ;$$

e quindi, indicando con r'_0 i valori di r_0 corrispondenti ai punti del contorno di σ', avremo:

$$\int_{\sigma'} X_\sigma^{(1)} (u-u_0) d\sigma = \int \left[2\alpha L \left\{ -\frac{1}{2} \cos(rn) + \frac{3}{2} \cos^2(rx) \cos(rn) \right\} - \right.$$
$$\left. - L \cos(rn) \right] d\theta \int_0^{r'_0} \frac{u-u_0}{r_0}\, dr_0\,,$$

$$\int_{\sigma'} Y_\sigma^{(1)} (v-v_0) d\sigma = \int \left[2\alpha L \left\{ -\frac{1}{2} \cos(ry) \cos(nx) + \frac{3}{2} \cos(rx) \cos(ry) \cos(rn) \right\} - \right.$$
$$\left. - L \left\{ \cos(ry) \cos(nx) - \cos(rx) \cos(ny) \right\} \right] d\theta \int_0^{r'_0} \frac{v-v_0}{r_0}\, dr_0\,,$$

$$\int_{\sigma'} Z_\sigma^{(1)} (w-w_0) d\sigma = \int \left[2\alpha L \left\{ -\frac{1}{2} \cos(rz) \cos(nx) + \frac{3}{2} \cos(rx) \cos(rz) \cos(rn) \right\} - \right.$$
$$\left. - L \left\{ \cos(rz) \cos(nx) - \cos(rx) \cos(nz) \right\} \right] d\theta \int_0^{r'_0} \frac{w-w_0}{r_0}\, dr_0\,.$$

Ciò posto è facile dimostrare che l'integrale:

$$\int_\sigma \Sigma\, X_\sigma^{(1)} (u-u_0)\, d\sigma$$

è una funzione continua del punto P, anche quando questo punto attraversa la superficie σ passando per P'. Infatti, poichè quando P coincide con P' esso è proprio, sarà possibile staccare da σ una sua particella σ_1 racchiudente P' nel suo interno e talmente piccola che si abbia:

$$\left| \int_{\sigma_1} \Sigma\, X_\sigma^{(1)} (u-u_0)\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \tag{12}$$

dove ε è una quantità arbitrariamente piccola. È evidente poi che l'ineguaglianza precedente vale anche quando P non si trova su σ, Prendiamo ora due punti vicinissimi P_1, P_2 dello spazio ed indichiamo rispettivamente con $X_\sigma^{(1)'}$, $Y_\sigma^{(1)'}$, $Z_\sigma^{(1)'}$ e $X_\sigma^{(1)''}$, $Y_\sigma^{(1)''}$, $Z_\sigma^{(1)''}$ ciò che divengono le espressioni $X_\sigma^{(1)}$, $Y_\sigma^{(1)}$, $Z_\sigma^{(1)}$ in questi due punti. Posto $\sigma_2 = \sigma - \sigma_1$, avremo evidentemente:

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)'} (u-u_0)\, d\sigma = \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)'} (u-u_0)\, d\sigma_2 + \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(1)'} (u-u_0)\, d\sigma_1 ,$$

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)''} (u-u_0)\, d\sigma = \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(1)''} (u-u_0)\, d\sigma_2 + \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(1)''} (u-u_0)\, d\sigma_1 ,$$

e perciò:

$$\begin{aligned} &\left| \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)'} (u-u_0)\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)''} (u-u_0)\, d\sigma \right| = \\ = &\left| \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(1)'} (u-u_0)\, d\sigma_2 - \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(1)''} (u-u_0)\, d\sigma_2 \right| + \\ + &\left| \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(1)'} (u-u_0)\, d\sigma_1 - \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(1)''} (u-u_0)\, d\sigma_1 \right| . \end{aligned}$$

Facciamo avvicinare indefinitamente il punto P_1 al punto P_2 e vediamo che cosa accade al limite della espressione:

$$\left| \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)'} (u-u_0)\, d\sigma - \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)''} (u-u_0)\, d\sigma \right| ,$$

anche quando in tale avvicinamento il punto P_1 dovesse attraversare la superficie σ passando per P'. Poichè l'integrale

$$\int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(1)} (u-u_0)\, d\sigma_2$$

è una funzione continua dei punti di tutto lo spazio esclusi quelli di σ_2, avremo nel nostro caso per P_2 sufficientemente vicino a P_1:

$$\left| \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(1)'} (u-u_0)\, d\sigma_2 - \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(1)''} (u-u_0)\, d\sigma_2 \right| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

D'altra parte si ha per la (12) sempre nel caso nostro:

$$\left| \int_{\sigma_1} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)'} (u - u_0)\, d\sigma_1 - \int_{\sigma_1} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)''} (u - u_0)\, d\sigma_1 \right| < \frac{2\,\varepsilon}{3}.$$

Avremo dunque la diseguaglianza:

$$\left| \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)'} (u - u_0)\, d\sigma - \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)''} (u - u_0)\, d\sigma \right| < \varepsilon,$$

con ε quantità piccola ad arbitrio.

Dimostrata così la continuità dell'integrale

$$\int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)} (u - u_0)\, d\sigma$$

intesa nel modo da noi detto, è chiaro che se P_1 e P_2 sono due punti uno interno allo spazio S e l'altro esterno, avremo:

$$\lim_{P_1 P' = 0} \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)} (u - u_0)\, d\sigma = \lim_{P_2 P' = 0} \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)} (u - u_0)\, d\sigma = N;$$

per cui sarà:

$$\lim_{P_1 P' = 0} \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)} u\, d\sigma = 2\,\pi\, L\, u_0 + N,$$

$$\lim_{P_2 P' = 0} \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)} u\, d\sigma = -2\,\pi\, L\, u_0 + N,$$

e quindi:

$$\lim_{P_1 P' = 0} \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)} u\, d\sigma - \lim_{P_2 P' = 0} \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(1)} u\, d\sigma = 4\,\pi\, L\, u_0.$$

Nello stesso modo si avrà:

$$\lim_{P_1 P' = 0} \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(2)} u\, d\sigma - \lim_{P_2 P' = 0} \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(2)} u\, d\sigma = 4\,\pi\, L\, v_0,$$

$$\lim_{P_1 P' = 0} \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(3)} u\, d\sigma - \lim_{P_2 P' = 0} \int_{\sigma} \Sigma\, X_{\sigma}^{(3)} u\, d\sigma = 4\,\pi\, L\, w_0.$$

Queste formole determinano appunto le discontinuità che si hanno degli integrali:

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)} u \, d\sigma \quad , \quad \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(2)} u \, d\sigma \quad , \quad \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(3)} u \, d\sigma \, ,$$

quando il punto, al quale si riferiscono, attraversa la superficie σ in una direzione qualsiasi.

5. Si è visto nel § precedente che i tre integrali delle equazioni dell'equilibrio:

$$(13) \quad U = \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(1)} u \, d\sigma \quad , \quad V = \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(2)} u \, d\sigma \, , \quad W = \int_\sigma \Sigma X_\sigma^{(3)} u \, d\sigma$$

sono discontinui quando il punto, al quale si riferiscono, attraversa la superficie σ. Vediamo ora in che relazione stanno i valori delle tensioni corrispondenti a questi tre integrali dalle due parti di σ.

Per questo consideriamo un punto P di σ e scomponiamo questa superficie in due regioni σ_1 e σ_2, di cui la prima contenga P nel suo interno; avremo allora:

$$U = \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(1)} u \, d\sigma + \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(1)} u \, d\sigma \, , \quad V = \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(2)} u \, d\sigma + \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(2)} u \, d\sigma,$$

$$W = \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(3)} u \, d\sigma + \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(3)} u \, d\sigma.$$

Posto:

$$U_1 = \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(1)} u \, d\sigma \quad , \quad V_1 = \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(2)} u \, d\sigma \, , \quad W_1 = \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(3)} u \, d\sigma \, ,$$

$$U_2 = \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(1)} u \, d\sigma \quad , \quad V_2 = \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(2)} u \, d\sigma \, , \quad W_2 = \int_{\sigma_2} \Sigma X_\sigma^{(3)} u \, d\sigma \, ,$$

sarà:

$$U = U_1 + U_2 \quad , \quad V = V_1 + V_2 \quad , \quad W = W_1 + W_2 \, ;$$

e quindi, indicando con X_σ, Y_σ, Z_σ; X_{σ_1}, Y_{σ_1}, Z_{σ_1}; X_{σ_2}, Y_{σ_2}, Z_{σ_2} le tensioni corrispondenti ad U, V, W; U_1, V_1, W_1; U_2, V_2, W_2, si avrà in ogni punto di σ:

$$X_\sigma = X_{\sigma_1} + X_{\sigma_2} \quad , \quad Y_\sigma = Y_{\sigma_1} + Y_{\sigma_2} \quad , \quad Z_\sigma = Z_{\sigma_1} + Z_{\sigma_2} \, .$$

Mettendo un apice alle funzioni U , ... e X_σ , ... considerate nei punti della faccia esterna di σ, avremo:

$$X_\sigma - X'_\sigma = X_{\sigma_1} - X'_{\sigma_1} + X_{\sigma_2} - X'_{\sigma_2}\,,\quad Y_\sigma - Y'_\sigma = Y_{\sigma_1} - Y'_{\sigma_1} + Y_{\sigma_2} - Y'_{\sigma_2}\,,$$
$$Z_\sigma - Z'_\sigma = Z_{\sigma_1} - Z'_{\sigma_1} + Z_{\sigma_2} - Z'_{\sigma_2}.$$

Ora le espressioni X_{σ_2}, Y_{σ_2}, Z_{σ_2} hanno nel punto P dalle due parti di σ gli stessi valori, per cui sarà:

$$(14)\quad (X_{\sigma_2})_P - (X'_{\sigma_2})_P = (Y_{\sigma_2})_P - (Y'_{\sigma_2})_P = (Z_{\sigma_2})_P - (Z'_{\sigma_2})_P = 0\,.$$

Consideriamo lo spazio indefinito S limitato da due superficie η, η' infinitamente vicino alla superficie σ_1 che comprendono e ricongiungentesi lungo il suo contorno. Applicando le formole del Somigliana avremo per tutti i punti dello spazio S:

$$\left\{\begin{aligned}
-4\pi L\,U_1 &= \int_\eta \Sigma\,(X_{\sigma_1} u_1 - X_\sigma^{(1)} U_1)\,d\eta + \int_{\eta'} \Sigma\,(X_{\sigma_1} u_1 - X_\sigma^{(1)} U_1)\,d\eta'\,,\\
-4\pi L\,V_1 &= \int_\eta \Sigma\,(X_{\sigma_1} u_2 - X_\sigma^{(2)} U_1)\,d\eta + \int_{\eta'} \Sigma\,(X_{\sigma_1} u_2 - X_\sigma^{(2)} U_1)\,d\eta'\,,\\
-4\pi L\,W_1 &= \int_\eta \Sigma\,(X_{\sigma_1} u_3 - X_\sigma^{(3)} U_1)\,d\eta + \int_{\eta'} \Sigma\,(X_{\sigma_1} u_3 - X_\sigma^{(3)} U_1)\,d\eta'\,,
\end{aligned}\right.$$

Supponiamo che η ed η' si avvicinino indefinitamente alla superficie σ_1. Al limite i valori di X_{σ_1}, ... ; U_1, ... su η saranno quelli della faccia interna di σ_1, su η' saranno invece: $-X'_{\sigma_1}$, ... ; U'_1, ... ; i valori di $X_\sigma^{(1)}$, ... su η saranno quelli di σ_1, su η' quelli di σ_1 mutati di segno; e poichè:

$$U_1 - U'_1 = 4\pi L\,u\,,\quad V_1 - V'_1 = 4\pi L\,v\,,\quad W_1 - W'_1 = 4\pi L\,w\,,$$

avremo:

$$\left\{\begin{aligned}
-4\pi L\,U_1 &= -4\pi L\int_{\sigma_1} \Sigma\,X_\sigma^{(1)} u\,d\sigma + \int_{\sigma_1} \Sigma\,(X_{\sigma_1} - X'_{\sigma_1})\,u_1\,d\sigma\,,\\
-4\pi L\,V_1 &= -4\pi L\int_{\sigma_1} \Sigma\,X_\sigma^{(2)} u\,d\sigma + \int_{\sigma_1} \Sigma\,(X_{\sigma_1} - X'_{\sigma_1})\,u_2\,d\sigma\,,\\
-4\pi L\,W_1 &= -4\pi L\int_{\sigma_1} \Sigma\,X_\sigma^{(1)} u\,d\sigma + \int_{\sigma_1} \Sigma\,(X_{\sigma_1} - X'_{\sigma_1})\,u_3\,d\sigma\,.
\end{aligned}\right.$$

Da queste, poichè

$$U_1 = \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(1)} u \, d\sigma \;, \quad V_1 = \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(2)} u \, d\sigma \;, \quad W_1 = \int_{\sigma_1} \Sigma X_\sigma^{(3)} u \, d\sigma \;,$$

si avrà per tutti i punti dello spazio S:

$$R = \int_{\sigma_1} \Sigma \, (X_{\sigma_1} - X'_{\sigma_1}) \, u_1 \, d\sigma = 0 \;,$$

$$S = \int_{\sigma_1} \Sigma \, (X_{\sigma_1} - X'_{\sigma_1}) \, u_2 \, d\sigma = 0 \;,$$

$$T = \int_{\sigma_1} \Sigma \, (X_{\sigma_1} - X'_{\sigma_1}) \, u_3 \, d\sigma = 0 \;,$$

e quindi:

$$(15) \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \,.$$

Ora R, S, T sono evidentemente integrali delle equazioni dell'equilibrio corrispondente a forze esterne nulle: indicando con R_{σ_1}, S_{σ_1}, T_{σ_1} e R'_{σ_1}, S'_{σ_1}, T'_{σ_1} rispettivamente le tensioni corrispondenti nei punti della faccia interna di σ_1 e della faccia esterna di σ_1, avremo per le (15):

$$R_{\sigma_1} - R'_{\sigma_1} = S_{\sigma_1} - S'_{\sigma_1} = T_{\sigma_1} - T'_{\sigma_1} = 0 \,;$$

e poichè si ha, come dimostreremo in seguito (v. §. 9, form. (28), (28')):

$$R_{\sigma_1} - R'_{\sigma_1} = -4\pi L \left(X_{\sigma_1} - X'_{\sigma_1}\right) \,, \quad S_{\sigma_1} - S'_{\sigma_1} = -4\pi L \left(Y_{\sigma_1} - Y'_{\sigma_1}\right) \,,$$

$$T_{\sigma_1} - T'_{\sigma_1} = -4\pi L \left(Z_{\sigma_1} - Z'_{\sigma_1}\right) \,,$$

risulterà:

$$X_{\sigma_1} - X'_{\sigma_1} = Y_{\sigma_1} - Y'_{\sigma_1} = Z_{\sigma_1} - Z'_{\sigma_1} = 0$$

per qualsiasi punto di σ_1. Queste formole con le (14) ci dànno finalmente:

$$(X_\sigma)_P - (X'_\sigma)_P = 0 \;, \quad (Y_\sigma)_P - (Y'_\sigma)_P = 0 \;, \quad (Z_\sigma)_P - (Z'_\sigma)_P = 0 \,.$$

Poichè il ragionamento che si è fatto per il punto P si può ripetere per qualsiasi altro punto di σ, ne concluderemo che *le tensioni corrispondenti agli spostamenti* (13) *sono continue in tutto lo spazio.*

Questo teorema è evidentemente analogo al teorema della continuità delle derivate normali della funzione potenziale di un doppio strato.

6. Per gli integrali (3) dimostreremo un teorema che corrisponde in certo qual modo al teorema della discontinuità della derivata normale della funzione potenziale di superficie, quando il punto dal quale si contano le distanze r (punto potenziato) si avvicina indefinitamente alla superficie dalle due parti di essa.

È necessario, per lo studio che dobbiamo fare, di stabilire due formole analoghe alle altre:

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma = 4\pi\,,$$

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, d\sigma = 2\pi\,,$$

delle quali la prima vale quando il punto P_0 dal quale partono i raggi r è interno allo spazio finito racchiuso dalla superficie σ, la seconda invece quando detto punto si trova su σ.

Supposto dapprima il punto P_0 interno al corpo elastico S, si avrà, come risulta da calcoli fatti in fine della mia citata Nota,

$$(16) \qquad \mathrm{L}\,\Sigma\,\rho_0\,\mathrm{X}_0 \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n}\, d\sigma +$$

$$+ (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\Sigma\,\rho_0\,\mathrm{X}_0 \int_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n} \right) d\sigma = 4\pi\,\mathrm{L}\,\rho_0\,\mathrm{X}_0\,;$$

e se facciamo successivamente:

$$\rho_0\,\mathrm{X}_0 = 1\,,\quad \rho_0\,\mathrm{Y}_0 = 0\,,\quad \rho_0\,\mathrm{Z}_0 = 0\,;$$
$$\rho_0\,\mathrm{X}_0 = 0\,,\quad \rho_0\,\mathrm{Y}_0 = 1\,,\quad \rho_0\,\mathrm{Z}_0 = 0\,;$$
$$\rho_0\,\mathrm{X}_0 = 0\,,\quad \rho_0\,\mathrm{Y}_0 = 0\,,\quad \rho_0\,\mathrm{Z}_0 = 1$$

risulterà:

$$
(17)\left\{
\begin{aligned}
&L\int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n}\,d\sigma + (L+K)\int_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma = 4\pi L,\\
&L\int_\sigma \frac{\partial v_1}{\partial n}\,d\sigma + (L+K)\int_\sigma\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial v_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma = 0,\\
&L\int_\sigma \frac{\partial w_1}{\partial n}\,d\sigma + (L+K)\int_\sigma\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Queste formole non valgono più quando il punto P_0 si trova su σ, ma si possono dare anche in questo caso delle formole analoghe.

Per questo ricorderemo che, come si dimostrò nel §. 3, la formola

$$\int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial n}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}\,d\sigma$$

e le analoghe valgono anche quando il punto $P_0 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ si trova su σ. Allora potremo ripetere anche in questo caso i calcoli che, come dicevo, si sono fatti nella sopra rammentata mia Nota per giungere alla formola (16); sicchè potremo scrivere nell'ipotesi che P_0 sia su σ:

$$
\begin{aligned}
L\,\Sigma\,\rho_0 X_0\int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n}\,d\sigma + (L+K)\,\Sigma\,\rho_0 X_0\int_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma =\\
= L\,\rho_0 X_0\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,d\sigma = 2\pi L\,\rho_0 X_0\,,
\end{aligned}
$$

donde, ragionando come precedentemente:

$$
(18)\left\{
\begin{aligned}
&L\int_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n}\,d\sigma + (L+K)\int_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma = 2\pi L,\\
&L\int_\sigma \frac{\partial v_1}{\partial n}\,d\sigma + (L+K)\int_\sigma\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial v_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma = 0,\\
&L\int_\sigma \frac{\partial w_1}{\partial n}\,d\sigma + (L+K)\int_\sigma\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma = 0.
\end{aligned}\right.
$$

7. Sia P_0 il punto di σ che si vuole considerare, n_0 la direzione positiva della normale in questo punto ed n'_0 la direzione negativa. Indichiamo con $P \equiv (x_1, y_1, z_1)$ e $P' \equiv (x'_1, y'_1, z'_1)$ due punti variabili rispettivamente su n_0 ed n'_0, con M un punto variabile su σ, con r, r', r_0 rispettivamente le distanze P M, P' M, P_0 M.

Ciò posto stacchiamo dalla superficie σ una regione σ' contenente P_0 nel suo interno e tale che sia incontrata una sola volta da ogni raggio vettore che si parte da un punto qualsiasi di n_0 o di n'_0, e chiamiamo u'_1, v'_1, w'_1 rispettivamente ciò che divengono le u_1, v_1, w_1 per $r = r_0$; poichè gli integrali:

$$\int_{\sigma''} \frac{\partial u_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' \quad , \quad \int_{\sigma''} \frac{\partial v_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' \; , \quad \int_{\sigma''} \frac{\partial w_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' \; ,$$

$$\int_{\sigma''} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' \; , \; \ldots\ldots \; , \; \ldots\ldots\ldots \; ,$$

$$\int_{\sigma''} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' \; , \; \ldots\ldots \; , \; \ldots\ldots\ldots \; ,$$

$$\int_{\sigma''} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' \; , \; \ldots\ldots \; , \; \ldots\ldots\ldots \; ,$$

nei quali σ'' è uguale a $\sigma - \sigma'$, sono funzioni finite e continue dei punti della normale in P_0, avremo:

$$\lim_{P\,P_0 = 0} \int_{\sigma''} \frac{\partial u_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' = \int_{\sigma''} \frac{\partial u'_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' \; , \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; , \; \ldots\ldots \; ,$$

$$\lim_{P\,P_0 = 0} \int_{\sigma''} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' = \int_{\sigma''} \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' \; , \; \ldots\ldots \; , \; \ldots\ldots \; ,$$

$$\lim_{P\,P_0 = 0} \int_{\sigma''} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' = \int_{\sigma''} \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' \; , \; \ldots\ldots \; , \; \ldots\ldots \; ,$$

$$\lim_{P\,P_0 = 0} \int_{\sigma''} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' = \int_{\sigma''} \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' \; , \; \ldots\ldots \; , \; \ldots\ldots \; ,$$

Per calcolare il limite per $P P_0 = 0$ degli integrali

$$\int_{\sigma'} \frac{\partial u_1}{\partial n_0}\, d\sigma' = \int_{\sigma'} \left(\frac{\partial u_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_1}{\partial n} \right) d\sigma' - \int_{\sigma'} \frac{\partial u_1}{\partial n}\, d\sigma' , \ldots\ldots, \ldots,$$

$$\int_{\sigma'} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0}\, d\sigma' = \int_{\sigma'} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} \right) d\sigma' - \int_{\sigma'} \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n}\, d\sigma' , \ldots, \ldots,$$

$$\int_{\sigma'} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0}\, d\sigma' = \int_{\sigma'} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} \right) d\sigma' - \int_{\sigma'} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n}\, d\sigma' , \ldots, \ldots,$$

$$\int_{\sigma'} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0}\, d\sigma' = \int_{\sigma'} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} \right) d\sigma' - \int_{\sigma'} \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n}\, d\sigma' , \ldots, \ldots,$$

osserviamo dapprima che si ha:

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_0} = \frac{\partial}{\partial n_0} \left\{ \left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{r} - \frac{\alpha}{2} \frac{(x-x_1)^2}{r^3} \right\} = -\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n_0} + \alpha \frac{(x-x_1)}{r^3} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} +$$
$$+ \frac{3\alpha}{2} \frac{(x-x_1)^2}{r^4} \frac{\partial r}{\partial n_0} = \left\{ \left(1+\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3\alpha}{2} \cos^2(rx) \right\} \frac{\cos(rn_0)}{r^2} + \alpha \cos(rx) \frac{\cos(xn_0)}{r^2},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = -\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} - \alpha \frac{(x-x_1)}{r^3} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{3\alpha}{2} \frac{(x-x_1)^2}{r^4} \frac{\partial r}{\partial n} =$$
$$= \left\{ -\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{3\alpha}{2} \cos^2(rx) \right\} \frac{\cos(rn)}{r^2} - \alpha \cos(rx) \frac{\cos(xn)}{r^2} ,$$

. . . .

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} = \left\{ \left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \frac{(x-x_1)}{r^3} + \alpha \frac{(x-x_1)}{r^3} - \frac{3\alpha}{2} \frac{(x-x_1)^3}{r^5} \right\} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} =$$
$$= \left\{ \left(1+\frac{3\alpha}{2}\right) \cos(rx) - \frac{3\alpha}{2} \cos^3(rx) \right\} \frac{\cos(xn_0)}{r^2} ,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} = \left\{ -\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) \frac{(x-x_1)}{r^3} - \alpha \frac{(x-x_1)}{r^3} + \frac{3\alpha}{2} \frac{(x-x_1)^3}{r^5} \right\} \frac{\partial x}{\partial n} =$$
$$= \left\{ -\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right) \cos(rx) + \frac{3\alpha}{2} \cos^3(rx) \right\} \frac{\cos(xn)}{r^2} ,$$

. . . .

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{-\frac{\alpha}{2}\frac{(x-x_1)\,(y-y_1)}{r^3}\right\}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}=\left\{\frac{\alpha}{2}\frac{(y-y_1)}{r^3}-\frac{3\,\alpha}{2}\frac{(x-x_1)^2(y-y_1)}{r^5}\right\}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}=$$

$$=\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(ry)-\frac{3\,\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(ry)\right\}\frac{\cos(yn_0)}{r^2},$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}=\left\{-\frac{\alpha}{2}\frac{(y-y_1)}{r^3}+\frac{3\,\alpha}{2}\frac{(x-x_1)^2(y-y_1)}{r^5}\right\}\frac{\partial y}{\partial n}=$$

$$=\left\{-\frac{\alpha}{2}\cos(ry)+\frac{3\,\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(ry)\right\}\frac{\cos(yn)}{r^2},$$

. . . .

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{-\frac{\alpha}{2}\frac{(x-x_1)\,(z-z_1)}{r^3}\right\}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}=\left\{\frac{\alpha}{2}\frac{(z-z_1)}{r^3}-\frac{3\,\alpha}{2}\frac{(x-x_1)^2(z-z_1)}{r^5}\right\}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}=$$

$$=\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(rz)-\frac{3\,\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(rz)\right\}\frac{\cos(zn_0)}{r^2},$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}=\left\{-\frac{\alpha}{2}\frac{(z-z_1)}{r^3}+\frac{3\,\alpha}{2}\frac{(x-x_1)^2(z-z_1)}{r^5}\right\}\frac{\partial z}{\partial n}=$$

$$=\left\{-\frac{\alpha}{2}\cos(rz)+\frac{3\,\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(rz)\right\}\frac{\cos(zn)}{r^2},$$

. . . . , ...

in cui (rn_0), (xn_0), (yn_0), (zn_0) ed (rn), (xn), (yn), (zn) indicano gli angoli che le direzioni n_0 ed n fanno rispettivamente con le direzioni positive di r, x, y, z.

Abbiamo dunque:

$$\int_{\sigma'}\frac{\partial u_1}{\partial n_0}d\sigma'=-\int_{\sigma'}\frac{\partial u_1}{\partial n}d\sigma'+\int_{\sigma'}\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\right\}\frac{\cos(rn_0)-\cos(rn)}{r^2}d\sigma'+$$

$$+\int_{\sigma'}\alpha\cos(rx)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}d\sigma',$$

. . . .

$$\int_{\sigma'}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}d\sigma'=-\int_{\sigma'}\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}d\sigma'+$$

$$+\int_{\sigma'}\left\{\left(1+\frac{3\,\alpha}{2}\right)\cos(rx)-\frac{3\,\alpha}{2}\cos^3(rx)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}d\sigma',$$

. . . .

$$\int_{\sigma'} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0} d\sigma' = - \int_{\sigma'} \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma' +$$

$$+ \int_{\sigma'} \left\{ \frac{\alpha}{2} \cos(ry) - \frac{3\alpha}{2} \cos^2(rx) \cos(ry) \right\} \frac{\cos(yn_0) - \cos(yn)}{r^2} d\sigma' ,$$

. . . .

$$\int_{\sigma'} \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0} d\sigma' = - \int_{\sigma'} \frac{\partial u_3}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma' +$$

$$+ \int_{\sigma'} \left\{ \frac{\alpha}{2} \cos(rz) - \frac{3\alpha}{2} \cos^2(rx) \cos(rz) \right\} \frac{\cos(zn_0) - \cos(zn)}{r^2} d\sigma' ,$$

. . . .

Ammesso che la prima curvatura di ogni linea di σ uscente da P_0 sia finita, si avrà che il rapporto $\frac{(n\, n_0)}{r_0}$ tenderà verso un limite determinato e finito coll'avvicinarsi di M a P_0 in una direzione qualsiasi. Allora l'espressione

$$\frac{\cos(rn_0) - \cos(rn)}{r_0}$$

non può crescere indefinitamente col muoversi di M su σ' e di P su n_0 (v. Morera, *Derivate normali della funzione potenziale di superficie*. Rendiconti dell'Istituto Lombardo, t. XX, serie II); inoltre se prendiamo gli assi x, y, z coll'origine nel punto P_0 e con l'asse x diretto secondo n_0, avremo:

$$\lim_{MP_0=0} \frac{\cos(xn_0) - \cos(xn)}{r_0} = \lim_{MP_0=0} \frac{1 - \cos(n\,n_0)}{r_0} =$$

$$= \lim_{MP_0=0} \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (n\, n_0)}{r_0} = \lim_{MP_0=0} \frac{(n\,n_0)}{r_0} \cdot \lim_{MP_0=0} \operatorname{sen} \frac{(n\, n_0)}{2} = 0 ,$$

$$\lim_{MP_0=0} \frac{\cos(yn_0) - \cos(yn)}{r_0} =$$

$$= \lim_{MP_0=0} -\frac{\cos(yn)}{r_0} \leq \lim_{MP_0=0} \left|\frac{\operatorname{sen}(xn)}{r_0}\right| = \lim_{MP_0=0} \left|\frac{(n\,n_0)}{r_0}\right| ,$$

$$\lim_{MP_0=0} \frac{\cos(zn_0) - \cos(zn)}{r_0} \leq \lim_{MP_0=0} \left|\frac{(n\,n_0)}{r_0}\right| ;$$

e siccome

$$\left|\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\right| \leq 1+2\,|\alpha| \ , \quad \left|\alpha\cos(rx)\right| \leq |\alpha| \ ,$$

$$\left|\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(rx) - \frac{3\alpha}{2}\cos^3(rx)\right| \leq 1+3\,|\alpha| \ ,$$

$$\left|\frac{\alpha}{2}\cos(ry) - \frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(ry)\right| \leq 2\,|\alpha| \ ,$$

$$\left|\frac{\alpha}{2}\cos(rz) - \frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(rz)\right| \leq 2\,|\alpha| \ ,$$

le espressioni:

$$\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\right\}\frac{\cos(rn_0)-\cos(rn)}{r} + \alpha\cos(rx)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r},$$

$$\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(rx) - \frac{3\alpha}{2}\cos^3(rx)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r} ,$$

$$\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(ry) - \frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(ry)\right\}\frac{\cos(yn_0)-\cos(yn)}{r} ,$$

$$\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(rz) - \frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(rz)\right\}\frac{\cos(zn_0)-\cos(zn)}{r}$$

si manterranno in valore assoluto, col muoversi di M su σ' e di P su n_0, sempre inferiori ad una determinata quantità finita A. Di qui risulta che gli integrali:

$$\int_{\sigma'}\left[\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\right\}\frac{\cos(rn_0)-\cos(rn)}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \alpha\cos(rx)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}\right] d\sigma', \ldots, \ldots,$$

$$\int_{\sigma'}\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(rx) - \frac{3\alpha}{2}\cos^3(rx)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}\, d\sigma', \ldots, \ldots,$$

$$\int_{\sigma'}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(ry) - \frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(ry)\right\}\frac{\cos(yn_0)-\cos(yn)}{r^2}\, d\sigma', \ldots, \ldots,$$

$$\int_{\sigma'}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(rz) - \frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(rz)\right\}\frac{\cos(zn_0)-\cos(zn)}{r^2}\, d\sigma', \ldots, \ldots.$$

sono proprî anche quando P coincide con P_0.

Ora se indichiamo con u le proiezioni uguali di MP e di MP_0 sul piano tangente a σ nel punto P_0, risulterà:

$$\frac{r_0}{r} \leq \frac{r_0}{u} = \frac{1}{|\text{sen}\,(r_0\, n_0)|}\,.$$

Ciò posto dividiamo σ' in due parti σ'_1, σ'_2, di cui σ'_1 contenga P_0 nel suo interno e sia tale che per tutti i punti M di essa si abbia:

$$|\text{sen}\,(r_0\, n_0)| \geq \tau\,,$$

dove τ indica una quantità maggiore di *zero* e minore dell'*unità* che può sempre determinarsi, e che inoltre venga:

$$\frac{A}{\tau^2}\int_{\sigma'_1}\frac{d\sigma'}{r_0} < \frac{\varepsilon}{3}$$

con ε quantità positiva piccola ad arbitrio. Segue allora:

$$
(19)\left\{\begin{aligned}
&\left|\int_{\sigma'_1}\left[\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\right\}\frac{\cos(rn_0)-\cos(rn)}{r^2}+\alpha\cos(rx)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}\right]d\sigma'\right|=\\
&=\left|\int_{\sigma'_1}\left[\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\right\}\frac{\cos(rn_0)-\cos(rn)}{r_0}+\alpha\cos(rx)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r_0}\right]\frac{r_0^2}{r^2}\frac{d\sigma'}{r_0}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left|\int_{\sigma'_1}\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(rx)-\frac{3\alpha}{2}\cos^3(rx)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}d\sigma'\right|=\\
&=\left|\int_{\sigma'_1}\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(rx)-\frac{3\alpha}{2}\cos^3(rx)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r_0}\frac{r_0^2}{r^2}\frac{d\sigma'}{r_0}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left|\int_{\sigma'_1}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(ry)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(ry)\right\}\frac{\cos(yn_0)-\cos(yn)}{r^2}d\sigma'\right|=\\
&=\left|\int_{\sigma'_1}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(ry)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(ry)\right\}\frac{\cos(yn_0)-\cos(yn)}{r_0}\frac{r_0^2}{r^2}\frac{d\sigma'}{r_0}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left|\int_{\sigma'_1}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(rz)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(rz)\right\}\frac{\cos(zn_0)-\cos(zn)}{r^2}d\sigma'\right|=\\
&=\left|\int_{\sigma'_1}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(rz)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(rz)\right\}\frac{\cos(zn_0)-\cos(zn)}{r_0}\frac{r_0^2}{r^2}\frac{d\sigma'}{r_0}\right|<\frac{\varepsilon}{3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left|\int_{\sigma'_1}\left[\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\right\}\frac{\cos(r_0n_0)-\cos(r_0n)}{r_0^2}+\alpha\cos(r_0x)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r_0^2}\right]d\sigma'\right|<\frac{\varepsilon}{3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left|\int_{\sigma'_1}\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(r_0x)-\frac{3\alpha}{2}\cos^3(r_0x)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r_0^2}d\sigma'\right|<\frac{\varepsilon}{3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left|\int_{\sigma'_1}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(r_0y)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\cos(r_0y)\right\}\frac{\cos(yn_0)-\cos(yn)}{r_0^2}d\sigma'\right|<\frac{\varepsilon}{3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left|\int_{\sigma'_1}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(r_0z)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\cos(r_0z)\right\}\frac{\cos(zn_0)-\cos(zn)}{r_0^2}d\sigma'\right|<\frac{\varepsilon}{3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.
$$

Gli integrali:

$$\int_{\sigma'_2}\left[\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\right\}\frac{\cos(rn_0)-\cos(rn)}{r^2}+\right.$$
$$\left.+\alpha\cos(rx)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}\right]d\sigma',\ \ldots,\ \ldots,$$

$$\int_{\sigma'_2}\left[\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(rx)-\frac{3\alpha}{2}\cos^3(rx)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}\right]d\sigma',\ \ldots,\ \ldots,$$

$$\int_{\sigma'_2}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(ry)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(ry)\right\}\frac{\cos(yn_0)-\cos(yn)}{r^2}d\sigma',\ \ldots,\ \ldots,$$

$$\int_{\sigma'_2}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(rz)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(rz)\right\}\frac{\cos(zn_0)-\cos(zn)}{r^2}d\sigma',\ \ldots,\ \ldots.$$

sono funzioni sempre finite e continue dei punti di n_0, quindi avremo per P sufficientemente vicino a P_0:

(20)
$$\left|\int_{\sigma'_2}\left[\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\right\}\frac{\cos(rn_0)-\cos(rn)}{r^2}+\alpha\cos(rx)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}\right]d\sigma'-\right.$$
$$\left.-\int_{\sigma'_2}\left[\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\right\}\frac{\cos(r_0n_0)-\cos(r_0n)}{r_0^2}+\alpha\cos(r_0x)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r_0^2}\right]d\sigma'\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

. . . .

$$\left|\int_{\sigma'_2}\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(rx)-\frac{3\alpha}{2}\cos^3(rx)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}d\sigma'-\right.$$
$$\left.-\int_{\sigma'_2}\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(r_0x)-\frac{3\alpha}{2}\cos^3(r_0x)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r_0^2}d\sigma'\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

. . . .

$$\left|\int_{\sigma'_2}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(ry)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(ry)\right\}\frac{\cos(yn_0)-\cos(yn)}{r^2}d\sigma'-\right.$$
$$\left.-\int_{\sigma'_2}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(r_0y)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\cos(r_0y)\right\}\frac{\cos(yn_0)-\cos(yn)}{r_0^2}d\sigma'\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

. . . .

$$\left|\int_{\sigma'_2}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(rz)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(rz)\right\}\frac{\cos(zn_0)-\cos(zn)}{r^2}d\sigma'-\right.$$
$$\left.-\int_{\sigma'_2}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(r_0z)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\cos(r_0z)\right\}\frac{\cos(zn_0)-\cos(zn)}{r_0^2}d\sigma'\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

. . . .

Dalle (19), (20) segue immediatamente:

$$\lim_{PP_0=0}\int_{\sigma'}\left[\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\right\}\frac{\cos(rn_0)-\cos(rn)}{r^2}+\alpha\cos(rx)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}\right]d\sigma'=$$

$$=\int_{\sigma'}\left[\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\right\}\frac{\cos(r_0n_0)-\cos(r_0n)}{r_0^2}+\alpha\cos(r_0x)\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r_0^2}\right]d\sigma'=\Theta_{u_1},$$

. . . .

$$\lim_{PP_0=0}\int_{\sigma'}\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(rx)-\frac{3\alpha}{2}\cos^3(rx)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r^2}\,d\sigma'=$$

$$=\int_{\sigma'}\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(r_0x)-\frac{3\alpha}{2}\cos^3(r_0x)\right\}\frac{\cos(xn_0)-\cos(xn)}{r_0^2}\,d\sigma'=\Theta_{u_{11}},$$

. . . .

$$\lim_{PP_0=0}\int_{\sigma'}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(ry)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(ry)\right\}\frac{\cos(yn_0)-\cos(yn)}{r^2}\,d\sigma'=$$

$$=\int_{\sigma'}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(r_0y)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\cos(r_0y)\right\}\frac{\cos(yn_0)-\cos(yn)}{r_0^2}\,d\sigma'=\Theta_{u_{21}},$$

. . . .

$$\lim_{PP_0=0}\int_{\sigma'}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(rz)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(rx)\cos(rz)\right\}\frac{\cos(zn_0)-\cos(zn)}{r^2}\,d\sigma'=$$

$$=\int_{\sigma'}\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(r_0z)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\cos(r_0z)\right\}\frac{\cos(zn_0)-\cos(zn)}{r_0^2}\,d\sigma'=\Theta_{u_{31}},$$

. . . .

Passiamo ora a calcolare i limiti delle espressioni:

$$L\int_{\sigma'}\frac{\partial u_1}{\partial n}\,d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma',$$

$$L\int_{\sigma'}\frac{\partial v_1}{\partial n}\,d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial v_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma',$$

$$L\int_{\sigma'}\frac{\partial w_1}{\partial n}\,d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'$$

per $P P_0 = 0$. Per questo consideriamo una superficie σ''' che limiti assieme a σ' uno spazio S', il quale contenga nel suo interno il punto P avvicinantesi indefinitamente a P_0; allora avremo per le (17):

$$L\int_{\sigma'+\sigma'''}\frac{\partial u_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'+\sigma'''}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'=4\pi L,$$

$$L\int_{\sigma'+\sigma'''}\frac{\partial v_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'+\sigma'''}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial v_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'=0,$$

$$L\int_{\sigma'+\sigma'''}\frac{\partial w_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'+\sigma'''}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'=0,$$

e per le (18):

$$L\int_{\sigma'+\sigma'''}\frac{\partial u'_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'+\sigma'''}\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'=2\pi L,$$

$$L\int_{\sigma'+\sigma'''}\frac{\partial v'_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'+\sigma'''}\left(\frac{\partial v'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial v'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'=0,$$

$$L\int_{\sigma'+\sigma'''}\frac{\partial w'_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'+\sigma'''}\left(\frac{\partial w'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial w'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'=0.$$

Tutte queste formole ci dànno:

$$\lim_{P P_0=0}\left[L\int_{\sigma'}\frac{\partial u_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'=\right.$$

$$=4\pi L-\left[L\int_{\sigma'''}\frac{\partial u'_1}{\partial n}d\sigma'''+(L+K)\int_{\sigma'''}\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'''\right]=$$

$$=2\pi L+L\int_{\sigma'}\frac{\partial u'_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma',$$

$$\lim_{PP_0=0}\left[L\int_{\sigma'}\frac{\partial v_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial v_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'\right]=$$

$$=-\left[L\int_{\sigma'''}\frac{\partial v'_1}{\partial n}d\sigma'''+(L+K)\int_{\sigma'''}\left(\frac{\partial v'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial v'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'''\right]=$$

$$=L\int_{\sigma'}\frac{\partial v'_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial v'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial v'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma',$$

$$\lim_{PP_0=0}\left[L\int_{\sigma'}\frac{\partial w_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial w_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'\right]=$$

$$=-\left[L\int_{\sigma'''}\frac{\partial w'_1}{\partial n}d\sigma'''+(L+K)\int_{\sigma'''}\left(\frac{\partial w'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial w'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'''\right]=$$

$$=L\int_{\sigma'}\frac{\partial w'_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial w'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial w'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma',$$

e posto:

$$\begin{aligned}
L\,\Theta_{u_1}+(L+K)\,(\Theta_{u_{11}}+\Theta_{u_{21}}+\Theta_{u_{31}})&=\Theta^{(1)}_u,\\
L\,\Theta_{v_1}+(L+K)\,(\Theta_{v_{11}}+\Theta_{v_{21}}+\Theta_{v_{31}})&=\Theta^{(1)}_v,\\
L\,\Theta_{w_1}+(L+K)\,(\Theta_{w_{11}}+\Theta_{w_{21}}+\Theta_{w_{31}})&=\Theta^{(1)}_w,
\end{aligned}$$

avremo finalmente:

$$(21)\left\{\begin{aligned}
&\lim_{PP_0=0}\left[L\int_{\sigma'}\frac{\partial u_1}{\partial n_0}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma'\right]=\\
&=\Theta^{(1)}_u-2\pi L-L\int_{\sigma'}\frac{\partial u'_1}{\partial n}d\sigma'-(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma',\\
&\lim_{PP_0=0}\left[L\int_{\sigma'}\frac{\partial v_1}{\partial n_0}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma'\right]=\\
&=\Theta^{(1)}_v-L\int_{\sigma'}\frac{\partial v'_1}{\partial n}d\sigma'-(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial v'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial v'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial v'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma',\\
&\lim_{PP_0=0}\left[L\int_{\sigma'}\frac{\partial w_1}{\partial n_0}d\sigma'+(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial w_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma'\right]=\\
&=\Theta^{(1)}_w-L\int_{\sigma'}\frac{\partial w'_1}{\partial n}d\sigma'-(L+K)\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial w'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial w'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial w'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'.
\end{aligned}\right.$$

8. Indicando rispettivamente con X'_σ, Y'_σ, Z'_σ i valori di X_σ, Y_σ, Z_σ nel punto P_0, avremo:

$$X_\sigma = X'_\sigma + (X_\sigma - X'_\sigma) \quad , \quad Y_\sigma = Y'_\sigma + (Y_\sigma - Y'_\sigma) \ ,$$
$$Z_\sigma = Z'_\sigma + (Z_\sigma - Z'_\sigma) \ ,$$

e quindi:

$$(22)\left\{\begin{aligned}
&L\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n_0}\, d\sigma + (L+K)\int_\sigma \Sigma X_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right) d\sigma =\\
&= L\,\Sigma X'_\sigma \int_{\sigma'} \frac{\partial u_1}{\partial n_0}\, d\sigma' + (L+K)\,\Sigma X'_\sigma \int_{\sigma'} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right) d\sigma' +\\
&+ L\int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma)\frac{\partial u_1}{\partial n_0}\, d\sigma' + (L+K)\int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right) d\sigma' +\\
&+ L\int_{\sigma''} \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n_0}\, d\sigma'' + (L+K)\int_{\sigma''} \Sigma X_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right) d\sigma'' .
\end{aligned}\right.$$

Poniamo ora che *oltre alle funzioni* X_σ, Y_σ, Z_σ *anche le espressioni:*

$$\frac{|X_\sigma - X'_\sigma|}{r_0} \ , \quad \frac{|Y_\sigma - Y'_\sigma|}{r_0} \ , \quad \frac{|Z_\sigma - Z'_\sigma|}{r_0}$$

siano integrabili lungo ogni linea uscente da P_0 *e* che *i valori* X'_σ, Y'_σ, Z'_σ *siano determinati e finiti* (1). Allora gli integrali che compariscono nell' espressione:

$$L\int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma)\, \frac{\partial u'_1}{\partial n_0}\, d\sigma' +$$
$$+ (L+K)\int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma)\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right) d\sigma'$$

---

(1) I calcoli di questo § e del precedente sono analoghi a quelli che il Morera fa nello studio delle *Derivate normali della funzione potenziale di superficie.* (Rendiconti dell' Istituto Lombardo, t. XX, serie II).

sono proprî; infatti introdotte le coordinate polari r_0, θ col polo nel punto P_0, sarà:

$$d\sigma = r_0\, dr_0\, d\theta\,,$$

e quindi:

$$\mathrm{L}\int_{\sigma'}\Sigma(\mathrm{X}_\sigma-\mathrm{X}'_\sigma)\frac{\partial u'_1}{\partial n_0}d\sigma'+(\mathrm{L+K})\int_{\sigma'}\Sigma(\mathrm{X}_\sigma-\mathrm{X}'_\sigma)\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma'=$$

$$=\int\Bigg[\mathrm{L}\left(\left\{\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\right\}\cos(r_0n_0)+\alpha\cos(r_0x)\cos(xn_0)\right)+$$

$$+(\mathrm{L+K})\left(\left\{\left(1+\frac{3\alpha}{2}\right)\cos(r_0x)-\frac{3\alpha}{2}\cos^3(r_0x)\right\}\cos(xn_0)+\right.$$

$$+\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(r_0y)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\cos(r_0y)\right\}\cos(yn_0)+$$

$$\left.+\left\{\frac{\alpha}{2}\cos(r_0z)-\frac{3\alpha}{2}\cos^2(r_0x)\cos(r_0z)\right\}\cos(zn_0)\right)\Bigg]d\theta\int_0^{r_0}\frac{\mathrm{X}_\sigma-\mathrm{X}'_\sigma}{r_0}\,dr_0,$$

. . . .

Ciò posto, potremo togliere da σ' una porzione σ'_1 di superficie racchiudente P_0 nel suo interno e talmente piccola che, indicando al solito con ε una grandezza positiva piccola ad arbitrio, si abbia:

$$\left|\mathrm{L}\int_{\sigma'_1}\Sigma\,(\mathrm{X}_\sigma-\mathrm{X}'_\sigma)\,\frac{\partial u'_1}{\partial n_0}\,d\sigma'+\right.$$

$$\left.+(\mathrm{L+K})\int_{\sigma'_1}\Sigma\,(\mathrm{X}_\sigma-\mathrm{X}'_\sigma)\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma'\right|<\frac{\varepsilon}{3}\,,$$

$$\left|\mathrm{L}\int_{\sigma'_1}\Sigma\,(\mathrm{X}_\sigma-\mathrm{X}'_\sigma)\,\frac{\partial u_1}{\partial n_0}\,d\sigma'+\right.$$

$$\left.+(\mathrm{L+K})\int_{\sigma'_1}\Sigma\,(\mathrm{X}_\sigma-\mathrm{X}'_\sigma)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma'\right|<\frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Inoltre poichè i punti P e P_0 sono sempre esterni alla superficie $\sigma' - \sigma'_1 = \sigma'_2$, potremo supporre P talmente vicino a P_0 da avere:

$$\left| L \int_{\sigma'_2} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \frac{\partial u_1}{\partial n_0} d\sigma' + \right.$$

$$+ (L+K) \int_{\sigma'_2} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0} \right) d\sigma' -$$

$$- L \int_{\sigma'_2} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \frac{\partial u'_1}{\partial n_0} d\sigma' -$$

$$\left. - (L+K) \int_{\sigma'_2} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0} \right) d\sigma' \right| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Segue quindi, per P sufficientemente vicino a P_0:

$$\left| L \int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \frac{\partial u_1}{\partial n_0} d\sigma' + \right.$$

$$+ (L+K) \int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0} \right) d\sigma' -$$

$$- L \int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \frac{\partial u'_1}{\partial n_0} d\sigma' -$$

$$\left. - (L+K) \int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0} \right) d\sigma' \right| < \varepsilon ,$$

e per conseguenza:

$$\lim_{P P_0 = 0} \left[L \int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \frac{\partial u_1}{\partial n_0} d\sigma' + \right.$$

$$\left. + (L+K) \int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0} \right) d\sigma' \right] =$$

$$= L \int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \frac{\partial u'_1}{\partial n_0} d\sigma' +$$

$$+ (L+K) \int_{\sigma'} \Sigma (X_\sigma - X'_\sigma) \left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u'_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0} \right) d\sigma' .$$

Ora si ha dalle (21):

$$\lim_{\mathrm{P\,P_0}=0}\Bigg[\mathrm{L}\,\Sigma\,\mathrm{X}'_{\sigma}\int_{\sigma'}\frac{\partial u_1}{\partial n_0}\,d\sigma' +$$

$$+(\mathrm{L+K})\,\Sigma\,\mathrm{X}'_{\sigma}\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma'\Bigg] =$$

$$= -2\pi\,\mathrm{L}\,\mathrm{X}'_{\sigma}+\Sigma\,\mathrm{X}'_{\sigma}\,\Theta^{(1)}_{u} -$$

$$-\mathrm{L}\,\Sigma\,\mathrm{X}'_{\sigma}\int_{\sigma'}\frac{\partial u'_1}{\partial n}\,d\sigma' - (\mathrm{L+K})\,\Sigma\,\mathrm{X}'_{\sigma}\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma';$$

e quindi dalla (22):

$$(23)\left\{\begin{aligned}
&\lim_{\mathrm{P\,P_0}=0}\Bigg[\mathrm{L}\int_{\sigma}\Sigma\,\mathrm{X}_{\sigma}\frac{\partial u_1}{\partial n_0}\,d\sigma+(\mathrm{L+K})\int_{\sigma}\Sigma\,\mathrm{X}_{\sigma}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma\Bigg]=\\
&= -2\,\pi\,\mathrm{L}\,\mathrm{X}'_{\sigma}+\Sigma\,\mathrm{X}'_{\sigma}\,\Theta^{(1)}_{u} -\\
&-\mathrm{L}\,\Sigma\,\mathrm{X}'_{\sigma}\int_{\sigma'}\frac{\partial u'_1}{\partial n}\,d\sigma' - (\mathrm{L+K})\,\Sigma\,\mathrm{X}'_{\sigma}\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u'_2}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u'_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma' +\\
&+\mathrm{L}\int_{\sigma'}\Sigma\,(\mathrm{X}_{\sigma}-\mathrm{X}'_{\sigma})\,\frac{\partial u'_1}{\partial n_0}\,d\sigma' +\\
&+(\mathrm{L+K})\int_{\sigma'}\Sigma\,(\mathrm{X}_{\sigma}-\mathrm{X}'_{\sigma})\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma' +\\
&+\mathrm{L}\int_{\sigma''}\Sigma\,\mathrm{X}_{\sigma}\frac{\partial u'_1}{\partial n_0}\,d\sigma''+(\mathrm{L+K})\int_{\sigma''}\Sigma\,\mathrm{X}_{\sigma}\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma''.
\end{aligned}\right.$$

Similmente si troverebbe:

$$\lim_{P'P_0=0}\left[L\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n'_0}d\sigma+(L+K)\int_\sigma \Sigma X_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n'_0}\right)d\sigma\right]=$$

$$(24)\left\{\begin{aligned}
&= -2\pi L X'_\sigma - \Sigma X'_\sigma \Theta^{(1)}_u +\\
&+L\Sigma X'_\sigma\int_{\sigma'}\frac{\partial u'_1}{\partial n}d\sigma'+(L+K)\,\Sigma X'_\sigma\int_{\sigma'}\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u'_2}{\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u'_3}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial n}\right)d\sigma'-\\
&-L\int_{\sigma'}\Sigma\,(X_\sigma - X'_\sigma)\,\frac{\partial u'_1}{\partial n_0}\,d\sigma' -\\
&-(L+K)\int_\sigma \Sigma\,(X_\sigma - X'_\sigma)\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_2}{\partial x_1}\,\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma' -\\
&-L\int_{\sigma''}\Sigma X_\sigma\frac{\partial u'_1}{\partial n_0}\,d\sigma''-(L+K)\int_{\sigma''}\Sigma X_\sigma\left(\frac{\partial u'_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_2}{\partial x_1}\,\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u'_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma''.
\end{aligned}\right.$$

Sommando le (23), (24) membro a membro tra di loro, si ottiene finalmente:

$$(25)\left\{\begin{aligned}
&\lim_{P\,P_0=0}\left[\,L\int_\sigma \Sigma X_\sigma\frac{\partial u_1}{\partial n_0}\,d\sigma\, +\right.\\
&\left.+\,(L+K)\int_\sigma \Sigma X_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\,\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma\right]+\\
&+\lim_{P'P_0=0}\left[\,L\int_\sigma \Sigma X_\sigma\frac{\partial u_1}{\partial n'_0}\,d\sigma\, +\right.\\
&\left.+\,(L+K)\int_\sigma \Sigma X_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\,\frac{\partial y_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\,\frac{\partial z_1}{\partial n'_0}\right)d\sigma\right] = -4\pi L X'_\sigma.
\end{aligned}\right.$$

Analogamente:

$$
(25')\left\{\begin{aligned}
&\lim_{\mathrm{P\,P_0}=0}\left[\mathrm{L}\int_\sigma \Sigma\,\mathrm{X}_\sigma \frac{\partial u_2}{\partial n_0}\,d\sigma+\right.\\
&\left.+(\mathrm{L}+\mathrm{K})\int_\sigma \Sigma\,\mathrm{X}_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial y_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma\right]+\\
+&\lim_{\mathrm{P'P_0}=0}\left[\mathrm{L}\int_\sigma \Sigma\,\mathrm{X}_\sigma \frac{\partial u_2}{\partial n'_0}\,d\sigma+\right.\\
&\left.+(\mathrm{L}+\mathrm{K})\int_\sigma \Sigma\,\mathrm{X}_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\frac{\partial x_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_3}{\partial y_1}\frac{\partial z_1}{\partial n'_0}\right)d\sigma\right]=-4\,\pi\,\mathrm{L\,Y'}_\sigma,\\
+&\lim_{\mathrm{P\,P_0}=0}\left[\mathrm{L}\int_\sigma \Sigma\,\mathrm{X}_\sigma \frac{\partial u_3}{\partial n_0}\,d\sigma+\right.\\
&\left.+(\mathrm{L}+\mathrm{K})\int_\sigma \Sigma\,\mathrm{X}_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial z_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma\right]+\\
+&\lim_{\mathrm{P'P_0}=0}\left[\mathrm{L}\int_\sigma \Sigma\,\mathrm{X}_\sigma \frac{\partial u_3}{\partial n'_0}\,d\sigma+\right.\\
&\left.+(\mathrm{L}+\mathrm{K})\int_\sigma \Sigma\,\mathrm{X}_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\frac{\partial x_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_2}{\partial z_1}\frac{\partial y_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_3}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial n'_0}\right)d\sigma\right]=-4\,\pi\,\mathrm{L\,Z'}_\sigma.
\end{aligned}\right.
$$

Queste formole, come si vede, sono nel caso nostro la naturale estensione delle formole che nella teoria delle forze newtoniane dànno le discontinuità delle derivate prime della funzione potenziale di una superficie, quando il punto potenziato attraversa la superficie nella direzione della normale nel punto di passaggio ([1]).

È naturale poi che esse valgono per tutti quei punti nei quali la superficie ammette un piano tangente determinato, la curvatura è finita (Cfr. §. 7) e le funzioni X_σ, Y_σ, Z_σ soddisfano alle condizioni poste in principio di questo §. Queste ultime condizioni sono certamente soddisfatte in particolare in tutti quei punti nei quali le funzioni X_σ, Y_σ, Z_σ sono finite e continue.

([1]) v. Betti, *Teorica delle Forze Newtoniane,* §. VIII, form. (7).

9. Costruiamo le tensioni U_σ, V_σ, W_σ; U'_σ, V'_σ, W'_σ, corrispondenti agli spostamenti

$$(26)\qquad \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_1\,d\sigma\ ,\quad \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_2\,d\sigma\ ,\quad \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_3\,d\sigma,$$

considerate rispettivamente da una parte e dall'altra della superficie σ. Avremo nel punto P_0 di σ, facendo uso delle formole (3) del cap. I:

$$U_\sigma=\left\{K\left(\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,d\sigma+\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_2}{\partial y_1}\,d\sigma+\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_3}{\partial z_1}\,d\sigma\right)+\right.$$

$$+2L\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial x_1}d\sigma\Bigg\}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+L\left\{\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial y_1}\,d\sigma+\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_2}{\partial x_1}d\sigma\right\}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+$$

$$+\ L\left\{\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial z_1}\,d\sigma+\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\,d\sigma\right\}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}=$$

$$=L\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n_0}\,d\sigma+L\int_\sigma \Sigma X_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma+$$

$$+\ K\int_\sigma \Sigma X_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial y_1}+\frac{\partial u_3}{\partial z_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial n_0}\,d\sigma\ ,$$

$V_\sigma =$ . . . . ,

$W_\sigma =$ . . . . ;

$$U'_\sigma=\left[L\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n'_0}\,d\sigma+L\int_\sigma \Sigma X_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n'_0}\right)d\sigma+\right.$$

$$\left.+\ K\int_\sigma \Sigma X_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial y_1}+\frac{\partial u_3}{\partial z_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial n'_0}\,d\sigma\right]',$$

$V'_\sigma =$ . . . . ,

$W'_\sigma =$ . . . . ,

dove le espressioni senza apice si riferiscono alla faccia interna di σ e quelle con apice alla sua faccia esterna.

Prendiamo per assi coordinati la normale n_0 nel punto P_0 e due rette p, q ortogonali sul piano tangente nello stesso punto e tali che le due terne di assi (n_0, p, q), (x, y, z) siano direttamente congruenti. Se

	x	y	z
n_0	α_1	α_2	α_3
p	β_1	β_2	β_3
q	γ_1	γ_2	γ_3

è la tabella dei coseni degli angoli che formano tra di loro queste due terne di assi, avremo evidentemente:

$$\alpha_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial y_1}+\frac{\partial u_3}{\partial z_1}\right)=$$

$$=\alpha_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial n_0}\alpha_1+\frac{\partial u_1}{\partial p}\beta_1+\frac{\partial u_1}{\partial q}\gamma_1+\frac{\partial u_2}{\partial n_0}\alpha_2+\frac{\partial u_2}{\partial p}\beta_2+\frac{\partial u_2}{\partial q}\gamma_2+\frac{\partial u_3}{\partial n_0}\alpha_3+\frac{\partial u_3}{\partial p}\beta_3+\frac{\partial u_3}{\partial q}\gamma_3\right),$$

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\alpha_1+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\alpha_2+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\alpha_3\right)=$$

$$=\alpha_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial n_0}\alpha_1+\frac{\partial u_1}{\partial p}\beta_1+\frac{\partial u_1}{\partial q}\gamma_1\right)+\alpha_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial n_0}\alpha_1+\frac{\partial u_2}{\partial p}\beta_1+\frac{\partial u_2}{\partial q}\gamma_1\right)+\alpha_3\left(\frac{\partial u_3}{\partial n_0}\alpha_1+\frac{\partial u_3}{\partial p}\beta_1+\frac{\partial u_3}{\partial q}\gamma_1\right);$$

e poichè ognuna delle espressioni:

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma\, \alpha_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial p}\beta_1+\frac{\partial u_1}{\partial q}\gamma_1+\frac{\partial u_2}{\partial p}\beta_2+\frac{\partial u_2}{\partial q}\gamma_2+\frac{\partial u_3}{\partial p}\beta_3+\frac{\partial u_3}{\partial q}\gamma_3\right)d\sigma,$$

$$\int_\sigma \Sigma X_\sigma\left\{\beta_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial p}\alpha_1+\frac{\partial u_2}{\partial p}\alpha_2+\frac{\partial u_3}{\partial p}\alpha_3\right)+\gamma_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial q}\alpha_1+\frac{\partial u_2}{\partial q}\alpha_2+\frac{\partial u_3}{\partial q}\alpha_3\right)\right\}d\sigma$$

ha lo stesso valore, quando si considera da una parte e dall'altra di σ, avremo:

$$
(27)\quad\left\{
\begin{aligned}
&\int_\sigma \Sigma X_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial y_1}+\frac{\partial u_3}{\partial z_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial n_0}\,d\sigma+\left[\int_\sigma \Sigma X_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial y_1}+\frac{\partial u_3}{\partial z_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial n'_0}\,d\sigma\right]'=\\
&=\int_\sigma \Sigma X_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma+\\
&+\left[\int_\sigma \Sigma X_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n'_0}\right)d\sigma\right]'.
\end{aligned}\right.
$$

Possiamo quindi scrivere:

$$
U_\sigma+U'_\sigma=L\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n_0}\,d\sigma+(L+K)\int_\sigma \Sigma X_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right)d\sigma+
$$

$$
+\left[L\int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n'_0}\,d\sigma+(L+K)\int_\sigma \Sigma X_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial y_1}{\partial n'_0}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial z_1}{\partial n'_0}\right)d\sigma\right]'.
$$

Il secondo membro di questa formola coincide evidentemente col primo membro della (25), dunque avremo:

$$
(28)\qquad U_\sigma+U'_\sigma=-4\pi L X'_\sigma .
$$

Similmente:

$$
(28')\qquad \left\{\begin{aligned} V_\sigma+V'_\sigma&=-4\pi L Y'_\sigma .\\ W_\sigma+W'_\sigma&=-4\pi L Z'_\sigma .\end{aligned}\right.
$$

Queste ci dicono che *le* (25), (25') *sono quelle formole che dànno le discontinuità delle tensioni, considerate da una parte e dall'altra della superficie* σ, *corrispondenti agli spostamenti* (26).

10. Il teorema contenuto nelle formole (25), (25') può considerarsi, come mi ha fatto notare il sig. prof. VOLTERRA, un caso limite di quello dimostrato nel §. 1.

Per questo principiamo dall'osservare che per la (27) si ha:

$$\lim_{P P_0 = 0}\left[L \int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n_0} d\sigma + \right.$$

$$\left. + (L+K) \int_\sigma \Sigma X_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n_0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n_0} \right) d\sigma \right] +$$

$$+ \lim_{P' P_0 = 0}\left[L \int_\sigma \Sigma X_\sigma \frac{\partial u_1}{\partial n'_0} d\sigma + \right.$$

$$\left. + (L+K) \int_\sigma \Sigma X_\sigma \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial n'_0} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial y_1}{\partial n'_0} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial z_1}{\partial n'_0} \right) d\sigma \right] =$$

$$= \lim_{P P_0 = 0}\left[L \frac{\partial}{\partial n_0} \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_1 d\sigma + \right.$$

$$\left. + (L+K) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_1 d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_2 d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_3 d\sigma \right) \frac{\partial x_1}{\partial n_0} \right] +$$

$$+ \lim_{P' P_0 = 0}\left[L \frac{\partial}{\partial n'_0} \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_1 d\sigma + \right.$$

$$\left. + (L+K) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_1 d\sigma + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_2 d\sigma + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_3 d\sigma \right) \frac{\partial x_1}{\partial n'_0} \right] =$$

$$= -4 \pi L X'_\sigma ;$$

e questa, posto:

$$M' = \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_1 d\sigma \ , \ N' = \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_2 d\sigma \ , \ P' = \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_3 d\sigma ,$$

$$\theta' = \frac{\partial M'}{\partial x_1} + \frac{\partial N'}{\partial y_1} + \frac{\partial P'}{\partial z_1} ,$$

si può ancora scrivere:

$$
(29)\quad\left\{\begin{aligned}
&\lim_{PP_0=0}\left[L\frac{\partial M'}{\partial n_0}+(L+K)\,\theta'\frac{\partial x_1}{\partial n_0}\right]+\\
&\qquad+\lim_{P'P_0=0}\left[L\frac{\partial M'}{\partial n'_0}+(L+K)\,\theta'\frac{\partial x_1}{\partial n'_0}\right]=\\
&=L\left\{\lim_{PP_0=0}\frac{\partial M'}{\partial n_0}-\lim_{P'P_0=0}\frac{\partial M'}{\partial n_0}\right\}+\\
&\quad+(L+K)\left\{\lim_{PP_0=0}\theta'\frac{\partial x_1}{\partial n_0}-\lim_{P'P_0=0}\theta'\frac{\partial x_1}{\partial n_0}\right\}=-4\pi L X'_\sigma .
\end{aligned}\right.
$$

Nello stesso modo si avrà:

$$
(29')\quad\left\{\begin{aligned}
&L\left\{\lim_{PP_0=0}\frac{\partial N'}{\partial n_0}-\lim_{P'P_0=0}\frac{\partial N'}{\partial n_0}\right\}+\\
&\quad+(L+K)\left\{\lim_{PP_0=0}\theta'\frac{\partial y_1}{\partial n_0}-\lim_{P'P_0=0}\theta'\frac{\partial y_1}{\partial n_0}\right\}=-4\pi L Y'_\sigma ,\\
&L\left\{\lim_{PP_0=0}\frac{\partial P'}{\partial n_0}-\lim_{P'P_0=0}\frac{\partial P'}{\partial n_0}\right\}+\\
&\quad+(L+K)\left\{\lim_{PP_0=0}\theta'\frac{\partial z_1}{\partial n_0}-\lim_{P'P_0=0}\theta'\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right\}=-4\pi L Z'_\sigma .
\end{aligned}\right.
$$

Siano ora σ' e σ'' due superficie, la prima inviluppata da σ e la seconda inviluppante σ, luogo geometrico delle estremità delle normali a σ prolungate dalle due parti di essa di una quantità piccola ε. Consideriamo lo spazio S_1 racchiuso da σ', σ'' e supponiamo che le funzioni ρX, ρY, ρZ, continue in tutti i punti dello spazio, siano nulle oltre che nello spazio indefinito esterno a σ'' anche nello spazio racchiuso da σ'. Posto:

$$
M=\int_{S_1}\Sigma\,\rho X u_1\,dS\ ,\quad N=\int_{S_1}\Sigma\,\rho X u_2\,dS\ ,\quad P=\int_{S_1}\Sigma\,\rho X u_3\,dS\ ,
$$

$$
\theta=\frac{\partial M}{\partial x_1}+\frac{\partial N}{\partial y_1}+\frac{\partial P}{\partial z_1}\ ,
$$

si avrà per il teorema del §. 1:

$$
(30) \qquad \left\{ \begin{aligned}
&\mathrm{L}\,\Delta^2 \mathrm{M} + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\, \frac{\partial \theta}{\partial x_1} = -4\,\pi\, \mathrm{L}\, \rho_0\, \mathrm{X}_0 \;, \\
&\mathrm{L}\,\Delta^2\, \mathrm{N} + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\, \frac{\partial \theta}{\partial y_1} = -4\,\pi\, \mathrm{L}\, \rho_0\, \mathrm{Y}_0 \;, \\
&\mathrm{L}\,\Delta^2\, \mathrm{P} + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\, \frac{\partial \theta}{\partial z_1} = -4\,\pi\, \mathrm{L}\, \rho_0\, \mathrm{Z}_0 \;,
\end{aligned} \right.
$$

ove $\rho_0\, \mathrm{X}_0$, $\rho_0\, \mathrm{Y}_0$, $\rho_0\, \mathrm{Z}_0$ sono i valori di $\rho\, \mathrm{X}$, $\rho\, \mathrm{Y}$, $\rho\, \mathrm{Z}$ nel punto che si considera di S_1.

Presi gli assi n_0, p, q come nel § precedente, poichè:

$$
\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} = \frac{\partial^2}{\partial n_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{\partial^2}{\partial q^2} \;,
$$

avremo dalle (30):

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{L}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial n_0^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial q^2}\right) + (\mathrm{L}+\mathrm{K}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial n_0}\, \alpha_1 + \frac{\partial \theta}{\partial p} \beta_1 + \frac{\partial \theta}{\partial q} \gamma_1\right) = -4\,\pi\, \mathrm{L}\, \rho_0\, \mathrm{X}_0 \,, \\
&\mathrm{L}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{N}}{\partial n_0^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{N}}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{N}}{\partial q^2}\right) + (\mathrm{L}+\mathrm{K}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial n_0}\, \alpha_2 + \frac{\partial \theta}{\partial p} \beta_2 + \frac{\partial \theta}{\partial q} \gamma_2\right) = -4\,\pi\, \mathrm{L}\, \rho_0\, \mathrm{Y}_0 \,, \\
&\mathrm{L}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial n_0^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial q^2}\right) + (\mathrm{L}+\mathrm{K}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial n_0}\, \alpha_3 + \frac{\partial \theta}{\partial p} \beta_3 + \frac{\partial \theta}{\partial q} \gamma_3\right) = -4\,\pi\, \mathrm{L}\, \rho_0\, \mathrm{Z}_0 \,.
\end{aligned}
$$

Indicati con P e P′ i punti in cui n_0 taglia le due superficie σ' e σ'', consideriamo gli integrali:

$$
(31) \qquad \left\{ \begin{aligned}
&\int_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{P}} \Big\{ \mathrm{L}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial n_0^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{M}}{\partial q^2}\right) + \\
&\qquad + (\mathrm{L}+\mathrm{K}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial n_0}\, \alpha_1 + \frac{\partial \theta}{\partial p} \beta_1 + \frac{\partial \theta}{\partial q} \gamma_1\right) \Big\}\, dn_0 = -4\,\pi\, \mathrm{L} \int_{\mathrm{P}'}^{\mathrm{P}} \rho_0\, \mathrm{X}_0\, dn_0 \,, \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned} \right.
$$

Se rappresentiamo con $(\rho_0 X_0)'$, $(\rho_0 Y_0)'$, $(\rho_0 Z_0)'$ convenienti valori di ρX, ρY, ρZ nell'intervallo PP', avremo dalle (31):

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} & L\left\{\left(\frac{\partial M}{\partial n_0}\right)_P - \left(\frac{\partial M}{\partial n_0}\right)_{P'}\right\} + (L+K)\left(\theta_P \frac{\partial x_1}{\partial n_0} - \theta_{P'}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}\right) + \\ & \quad + \int_{P'}^{P}\left\{L\left(\frac{\partial^2 M}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\right) + (L+K)\left(\frac{\partial \theta}{\partial p}\beta_1 + \frac{\partial \theta}{\partial q}\gamma_1\right)\right\} dn_0 = \\ & \quad = -4\pi L (P-P')(\rho_0 X_0)' = -4\pi L . 2\varepsilon (\rho_0 X_0)' , \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Facciamo impiccolire ε indefinitamente ed ammettiamo che le funzioni ρX, ρY, ρZ siano tali che

$$\lim_{\varepsilon=0}(2\varepsilon . \rho X) = X_\sigma\ , \quad \lim_{\varepsilon=0}(2\varepsilon . \rho Y) = Y_\sigma\ , \quad \lim_{\varepsilon=0}(2\varepsilon . \rho Z) = Z_\sigma .$$

Si avrà:

$$\lim_{\varepsilon=0}(2\varepsilon . (\rho_0 X_0)') = X'_\sigma ,\ \lim_{\varepsilon=0}(2\varepsilon . (\rho_0 Y_0)') = Y'_\sigma ,\ \lim_{\varepsilon=0}(2\varepsilon . (\rho_0 Z_0)') = Z'_\sigma ;$$

$$\lim_{\varepsilon=0} M = \lim_{\varepsilon=0}\int_{S_1}\Sigma\rho X u_1 dS = \lim_{\varepsilon=0}\int_\sigma d\sigma\int_{P'_1}^{P_1}\Sigma\rho X u_1 dn = \int_\sigma \Sigma X_\sigma u_1 d\sigma = M',$$

$$\lim_{\varepsilon=0} N = N'\ , \quad \lim_{\varepsilon=0} P = P'\ ,$$

dove X'_σ, Y'_σ, Z'_σ sono i valori di X_σ, Y_σ, Z_σ nel punto P_0 di σ, P_1 e P'_1 sono i punti in cui n taglia σ' e σ''; e poichè le funzioni

$$\frac{\partial^2 M}{\partial p^2}\ , \ \frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\ , \ \ldots\ldots\ , \ \frac{\partial \theta}{\partial p}\ , \ \frac{\partial \theta}{\partial q}$$

sono continue lungo n_0, risulterà dalle (32):

$$L\left\{\lim_{P P_0=0}\left(\frac{\partial M'}{\partial n_0}\right)_P - \lim_{P' P_0=0}\left(\frac{\partial M'}{\partial n_0}\right)_{P'}\right\} +$$
$$+ (L+K)\left\{\lim_{P P_0=0}\theta'_P\frac{\partial x_1}{\partial n_0} - \lim_{P' P_0=0}\theta'_{P'}\frac{\partial x_1}{\partial n_0}\right\} = -4\pi L X'_\sigma .$$

Analogamente avremo:

$$L\left\{\lim_{PP_0=0}\left(\frac{\partial N'}{\partial n_0}\right)_P-\lim_{P'P_0=0}\left(\frac{\partial N'}{\partial n_0}\right)_{P'}\right\}+$$

$$+(L+K)\left\{\lim_{PP_0=0}\theta'_P\frac{\partial y_1}{\partial n_0}-\lim_{P'P_0=0}\theta'_{P'}\frac{\partial y_1}{\partial n_0}\right\}=-4\pi L Y'_\sigma.$$

$$L\left\{\lim_{PP_0=0}\left(\frac{\partial P'}{\partial n_0}\right)_P-\lim_{P'P_0=0}\left(\frac{\partial P'}{\partial n_0}\right)_{P'}\right\}+$$

$$+(L+K)\left\{\lim_{PP_0=0}\theta'_P\frac{\partial z_1}{\partial n_0}-\lim_{P'P_0=0}\theta'_{P'}\frac{\partial z_1}{\partial n_0}\right\}=-4\pi L Z'_\sigma.$$

I calcoli ora fatti, quantunque non siano completamente rigorosi, servono benissimo a provare, come si voleva, che le formole (29), (29') e quindi le (25), (25'), dedotte rigorosamente con i calcoli dei §§. 6, 7, 8, sono un caso limite delle formole (4) del §. 1.

CAPITOLO IV.

Formole generali relative all'integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici.

Applicazione al caso di un corpo elastico sferico.

1. In questo capitolo e nel seguente ci occuperemo del problema dell'elasticità, nella sola ipotesi che siano date le componenti degli spostamenti nei punti della superficie, che limita il corpo elastico isotropo. Questo problema, come fu osservato nell'introduzione, corrisponde nella teoria delle funzioni armoniche al problema di Dirichlet.

Supponendo, come si può sempre fare, che le forze esterne siano nulle (v. cap. III, §. 2), ed indicando al solito con (x_1, y_1, z_1) le coordinate dei punti del corpo elastico che si considera, le componenti $u(x_1, y_1, z_1)$, $v(x_1, y_1, z_1)$, $w(x_1, y_1, z_1)$ degli spostamenti di questi punti, relativi ad una data deformazione, devono soddisfare alle seguenti equazioni:

$$(1) \qquad \begin{cases} \mathrm{L}\,\Delta^2 u + (\mathrm{L}+\mathrm{K}) \dfrac{\partial \theta}{\partial x_1} = 0 \\ \mathrm{L}\,\Delta^2 v + (\mathrm{L}+\mathrm{K}) \dfrac{\partial \theta}{\partial y_1} = 0 \\ \mathrm{L}\,\Delta^2 w + (\mathrm{L}+\mathrm{K}) \dfrac{\partial \theta}{\partial z_1} = 0\,, \end{cases}$$

dove

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\,, \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial y_1} + \frac{\partial w}{\partial z_1}\,.$$

Poichè:

$$r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}\,,\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial y_1}\,,\quad \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial z_1}\,,$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\,,\quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\,,\quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\,,$$

avremo che le quattro terne di funzioni:

$$u_1 = \frac{1}{r} + \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\,,\quad v_1 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}\,,\quad w_1 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial z}$$

$$u_2 = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,,\quad v_2 = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,,\quad w_2 = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$$

$$u_3 = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,,\quad v_3 = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,,\quad w_3 = 0$$

$$u_4 = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,,\quad v_4 = 0\,,\quad w_4 = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}$$

rappresentano quattro sistemi di integrali delle equazioni (1); allora anche le seguenti tre terne di funzioni:

$$u'_1 = \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \frac{\alpha}{2}\left\{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - 2\,\frac{x-x_1}{r^3}\,\frac{\partial x}{\partial n} - 3\left(\frac{x-x_1}{r}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\} =$$

$$= \left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \alpha\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{3\alpha}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,,$$

$$v'_1 = \frac{\partial v_1}{\partial n} = \frac{\alpha}{2}\left\{-\frac{x-x_1}{r^3}\,\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{y-y_1}{r^3}\,\frac{\partial x}{\partial n} - 3\,\frac{x-x_1}{r}\,.\,\frac{y-y_1}{r}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{3\alpha}{2}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial y}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,,$$

$$w'_1 = \frac{\partial w_1}{\partial n} = \frac{\alpha}{2}\left\{ -\frac{x-x_1}{r^3}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{z-z_1}{r^3}\frac{\partial x}{\partial n} - 3\,\frac{x-x_1}{r}\,.\,\frac{z-z_1}{r}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\} =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial n} + \frac{\alpha}{2}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{3\alpha}{2}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial z}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,;$$

$$u'_2 = u_2\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n}\,,\quad v'_2 = v_2\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,\frac{\partial x}{\partial n}\,,\quad w'_2 = w_2\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,\frac{\partial x}{\partial n}\,;$$

$$u'_3 = u_3\frac{\partial y}{\partial n} + u_4\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial n}\,,$$

$$v'_3 = v_3\frac{\partial y}{\partial n} + v_4\frac{\partial z}{\partial n} = \qquad\qquad = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial n}\,,$$

$$w'_3 = w_3\frac{\partial y}{\partial n} + w_4\frac{\partial z}{\partial n} = \qquad\qquad = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial n}$$

saranno tre sistemi di integrali delle equazioni (1), e quindi l'altra terna:

$$a = \frac{2}{\alpha+2}\left\{u'_1 - \frac{\alpha}{2}\,u'_2 + \frac{\alpha}{2}\,u'_3\right\} = \frac{2}{\alpha+2}\left\{(1+\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{3\alpha}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\}$$

$$b = \frac{2}{\alpha+2}\left\{v'_1 - \frac{\alpha}{2}\,v'_2 + \frac{\alpha}{2}\,v'_3\right\} = \frac{2}{\alpha+2}\left\{ \qquad -\frac{3\alpha}{2}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial y}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\}$$

$$c = \frac{2}{\alpha+2}\left\{w'_1 - \frac{\alpha}{2}\,w'_2 + \frac{\alpha}{2}\,w'_3\right\} = \frac{2}{\alpha+2}\left\{ \qquad -\frac{3\alpha}{2}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,\frac{\partial r}{\partial z}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\}.$$

Ora quando il punto (x_1, y_1, z_1) è nell'interno dello spazio S racchiuso da σ, si ha, come è noto,

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 4\pi \ , \quad \int_\sigma 3 \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 4\pi \ ,$$

$$\int_\sigma 3 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 0 \ , \quad \int_\sigma 3 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 0 \ ;$$

e quando il suddetto punto è sulla superficie σ, ammesso che ivi questa superficie abbia un piano tangente determinato, si ha invece:

$$\int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 2\pi \ , \quad \int_\sigma 3 \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 2\pi \ ,$$

$$\int_\sigma 3 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 0 \ , \quad \int_\sigma 3 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma = 0 \ .$$

Avremo dunque per i punti (x_1, y_1, z_1) interni ad S:

$$(2) \qquad \int_\sigma a\, d\sigma = 4\pi \ , \quad \int_\sigma b\, d\sigma = 0 \ , \quad \int_\sigma c\, d\sigma = 0 \ ,$$

e per i punti (x_1, y_1, z_1) di σ:

$$(3) \qquad \int_\sigma a'\, d\sigma = 2\pi \ , \quad \int_\sigma b'\, d\sigma = 0 \ , \quad \int_\sigma c'\, d\sigma = 0 \ ,$$

dove a', b', c' sono i valori che le funzioni a, b, c prendono nei punti della superficie σ.

2. Sia $u(m)$ una qualsiasi funzione finita e continua dei punti m di σ, ed n un punto qualunque interno al corpo elastico S. Le espressioni:

$$(4) \qquad \mathrm{U}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u(m) \,.\, a\, d\sigma \ , \quad \mathrm{V}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u(m) \,.\, b\, d\sigma \ ,$$

$$\mathrm{W}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u(m) \,.\, c\, d\sigma$$

sono evidentemente tre funzioni monodrome finite e continue dei punti $n \equiv (x_1, y_1, z_1)$ di S, che soddisfano alle equazioni (1) dell' equilibrio.

Ammesso che la superficie σ abbia in ogni suo punto un piano tangente determinato, vediamo che cosa accade di queste funzioni, quando il punto n si avvicina indefinitamente ad un punto μ di σ. Per questo principieremo dall' osservare che dalle (2) si ha ovviamente:

$$U(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} a\, d\sigma + 2\, u(\mu),$$

$$V(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} b\, d\sigma$$

$$W(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} c\, d\sigma$$

Ora gli integrali:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} a'\, d\sigma \quad , \quad \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} b'\, d\sigma \ ,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} c'\, d\sigma$$

essendo della natura di quelli considerati nel §. 3 del cap. III, saranno proprî; quindi potremo dividere la superficie σ in due parti σ', σ'' tali, che la seconda σ'' contenga μ nel suo interno e che si abbia per ε piccolo ad arbitrio:

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma''} \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} a\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}\ , \quad \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma''} \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} b\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}\ , \\ &\qquad\qquad \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma''} \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} c\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}\ , \\ &\left| \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma''} \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} a'\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}\ , \quad \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma''} \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} b'\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}\ , \\ &\qquad\qquad \left| \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma''} \left\{ u(m) - u(\mu) \right\} c'\, d\sigma \right| < \frac{\varepsilon}{3}\ . \end{aligned} \right.$$

È chiaro poi che se si prende un intorno a tre dimensioni di μ, il quale non abbia alcun punto a comune con σ', gli integrali:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} a\, d\sigma\ ,\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} b\, d\sigma\ ,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} c\, d\sigma$$

saranno funzioni continue di tutti i punti (x_1, y_1, z_1) di detto intorno; quindi potremo scrivere per n sufficientemente vicino a μ:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} a\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} a'\, d\sigma\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ ,\\ &\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} b\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} b'\, d\sigma\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ ,\\ &\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} c\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma'}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} c'\, d\sigma\right| < \frac{\varepsilon}{3}\ . \end{aligned}\right.$$

Dalle (5) e (6) risulta per n abbastanza vicino al punto μ:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} a\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} a'\, d\sigma\right| < \varepsilon\ ,$$
$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} b\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} b'\, d\sigma\right| < \varepsilon\ ,$$
$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} c\, d\sigma - \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} c'\, d\sigma\right| < \varepsilon\ ;$$

e quindi:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{n=\mu} \mathrm{U}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} a'\, d\sigma + 2\,u(\mu)\ ,\\ &\lim_{n=\mu} \mathrm{V}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} b'\, d\sigma\ ,\\ &\lim_{n=\mu} \mathrm{W}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}\left\{u(m)-u(\mu)\right\} c'\, d\sigma\ . \end{aligned}\right.$$

Quando invece di un punto n di S si considera un punto μ di σ, le espressioni (4) divengono:

$$\mathrm{U}(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u(m)\, a'\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m) - u(\mu) \Big\} a'\, d\sigma + u(\mu)\,,$$

$$\mathrm{V}(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u(m)\, b'\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m) - u(\mu) \Big\} b'\, d\sigma\,,$$

$$\mathrm{W}(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u(m)\, c'\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m) - u(\mu) \Big\} c'\, d\sigma\,;$$

onde avremo dalle (7):

$$(8)\quad \lim_{n=\mu} \mathrm{U}(n) = \mathrm{U}(\mu) + u(\mu)\,,\quad \lim_{n=\mu} \mathrm{V}(n) = \mathrm{V}(\mu)\,,\quad \lim_{n=\mu} \mathrm{W}(n) = \mathrm{W}(\mu)\,.$$

Similmente, considerando le altre terne di integrali delle equazioni (1):

$$a_1 = \frac{2}{\alpha+2}\left\{ \qquad - \frac{3\alpha}{2}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\},$$

$$b_1 = \frac{2}{\alpha+2}\left\{ (1+\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{3\alpha}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\},$$

$$c_1 = \frac{2}{\alpha+2}\left\{ \qquad - \frac{3\alpha}{2}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\};$$

$$a_2 = \frac{2}{\alpha+2}\left\{ \qquad - \frac{3\alpha}{2}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\},$$

$$b_2 = \frac{2}{\alpha+\alpha}\left\{ \qquad - \frac{3\alpha}{2}\frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\},$$

$$c_2 = \frac{2}{\alpha+2}\left\{ (1+\alpha)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{3\alpha}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right\},$$

introducendo le espressioni:

$$U'(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma v(m)\, a_1\, d\sigma \ , \quad V'(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma v(m)\, b_1\, d\sigma \ ,$$

$$W'(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma v(m)\, c_1\, d\sigma \ ;$$

$$U''(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma w(m)\, a_2\, d\sigma \ , \quad V''(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma w(m)\, b_2\, d\sigma \ ,$$

$$W''(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma w(m)\, c_2\, d\sigma \ ,$$

in cui $v(m)$, $w(m)$ sono funzioni arbitrarie dei punti di σ finite e continue, ed indicando con a'_1, b'_1, c'_1; a'_2, b'_2, c'_2 i valori delle funzioni a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2 nei punti μ di σ, avremo:

$$U'(\mu) = \frac{1}{2\mu}\int_\sigma v(m)\, a'_1\, d\sigma \ , \quad V'(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma v(m)\, b'_1\, d\sigma \ ,$$

$$W'(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma v(m)\, c'_1\, d\sigma \ ;$$

$$U''(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma w(m)\, a'_2\, d\sigma \ , \quad V''(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma w(m)\, b'_2\, d\sigma \ ,$$

$$W''(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma w(m) \,.\, c'_2\, d\sigma \ ;$$

e quindi:

$$\lim_{n=\mu} U'(n) = U'(\mu) \ , \quad \lim_{n=\mu} V'(n) = V'(\mu) + v(\mu) \ , \quad \lim_{n=\mu} W'(n) = W'(\mu)$$

$$\lim_{n=\mu} U''(n) = U''(\mu) \ , \quad \lim_{n=\mu} V''(n) = V''(\mu) \ , \quad \lim_{n=\mu} W''(n) = W''(\mu) + w(\mu) ,$$

3. Applichiamo le formole generali trovate precedentemente alla risoluzione del seguente problema: *Date arbitrariamente tre fun-*

zioni finite e continue $u(m)$, $v(m)$, $w(m)$ *dei punti* m *della superficie* σ *di una sfera* S, *trovare tre funzioni* Q, S, T, *le quali nei punti interni alla sfera soddisfino alle equazioni* (1) *dell' equilibrio e coll' avvicinarsi indefinitamente di* n *ad un punto qualsiasi* μ *di* σ, *tendano rispettivamente ai valori* $u(\mu)$, $v(\mu)$, $w(\mu)$.

Indicando con R il raggio della sfera S e con r_0 le distanze contate a partire dal punto arbitrario μ di σ, si avrà:

$$a' = \frac{2}{\alpha+2}\left\{(1+\alpha)\frac{1}{2Rr_0} - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)^2}{2Rr_0^3}\right\} = \frac{1}{R(\alpha+2)}\left\{(1+\alpha)\frac{1}{r_0} - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)^2}{r_0^3}\right\}$$

$$b' = \frac{2}{\alpha+2}\left\{ - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{2Rr_0^3}\right\} = \frac{1}{R(\alpha+2)}\left\{ - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{r_0^3}\right\}$$

$$c' = \frac{2}{\alpha+2}\left\{ - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)(z-z_1)}{2Rr_0^3}\right\} = \frac{1}{R(\alpha+2)}\left\{ - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)(z-z_1)}{r_0^3}\right\},$$

e quindi:

$$U(\mu) = \frac{1}{2\pi R(\alpha+2)}\int_\sigma u(m)\left\{(1+\alpha)\frac{1}{r_0} - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)^2}{r_0^3}\right\}d\sigma,$$

$$V(\mu) = \frac{1}{2\pi R(\alpha+2)}\int_\sigma u(m)\left\{ - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{r_0^3}\right\}d\sigma,$$

$$W(\mu) = \frac{1}{2\pi R(\alpha+2)}\int_\sigma u(m)\left\{ - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)(z-z_1)}{r_0^3}\right\}d\sigma.$$

Le espressioni:

$$M(n) = \frac{-3}{2\pi R(\alpha+2)}\int_\sigma u(m)\,.\,u_1\,d\sigma,$$

$$N(n) = \frac{-3}{2\pi R(\alpha+2)}\int_\sigma u(m)\,.\,v_1\,d\sigma,$$

$$P(n) = \frac{-3}{2\pi R(\alpha+2)}\int_\sigma u(m)\,.\,w_1\,d\sigma$$

sono evidentemente tre funzioni finite e continue in tutto lo spazio, che nei punti della sfera data soddisfano alle equazioni (1) dell'equilibrio. Esse poi nel punto μ di σ divengono rispettivamente:

$$M(\mu) = \frac{-1}{2\pi R(\alpha+2)} \int_\sigma u(m) \left\{ \frac{3}{r_0}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)^2}{r_0^3} \right\} d\sigma ,$$

$$N(\mu) = \frac{-1}{2\pi R(\alpha+2)} \int_\sigma u(m) \left\{ \qquad - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{r_0^3} \right\} d\sigma ,$$

$$P(\mu) = \frac{-1}{2\pi R(\alpha+2)} \int_\sigma u(m) \left\{ \qquad - \frac{3\alpha}{2}\frac{(x-x_1)(z-z_1)}{r_0^3} \right\} d\sigma .$$

4. Poniamo l'origine degli assi nel centro della sfera S, indichiamo con φ la funzione di GREEN relativa ad S e scriviamo:

$$\rho^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 .$$

Poichè

$$\Delta^2 \varphi = 0 ,$$

se le tre funzioni:

$$\xi = \varphi + \xi' , \quad \eta = \eta' , \quad \zeta = \zeta' \tag{9}$$

sono un sistema di integrali delle equazioni (1), si deve necessariamente avere:

$$\begin{aligned} &L\,\Delta^2 \xi' + (L+K)\frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} = 0 \\ &L\,\Delta^2 \eta' + (L+K)\frac{\partial \vartheta}{\partial y_1} = 0 \qquad \left\{ \vartheta = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi'}{\partial x_1} + \frac{\partial \eta'}{\partial y_1} + \frac{\partial \zeta'}{\partial z_1} \right\} \\ &L\,\Delta^2 \zeta' + (L+K)\frac{\partial \vartheta}{\partial z_1} = 0 . \end{aligned}$$

Determiniamo le ξ', η', ζ' in modo che sulla superficie σ della sfera si annullino. Per questo poniamo:

$$\xi' = \xi'' - \frac{L+K}{2L} x_1 \vartheta , \quad \eta' = \eta'' - \frac{L+K}{2L} y_1 \vartheta , \quad \zeta' = \zeta'' - \frac{L+K}{2L} z_1 \vartheta$$

e calcoliamo ξ'', η'', ζ'' in modo che nei punti della sfera soddisfino all'equazione $\Delta^2 = 0$ e che sulla sua superficie prendano rispettivamente i valori:

$$\frac{L+K}{2L} x_1 \vartheta \ , \quad \frac{L+K}{2L} y_1 \vartheta \ , \quad \frac{L+K}{2L} z_1 \vartheta \, .$$

Distinguendo con un apice i valori che prende ϑ nei punti della superficie σ, si ha, come è noto,

$$\xi'' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{x\vartheta'}{r^3} d\sigma \ , \quad \eta'' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{y\vartheta'}{r^3} d\sigma \ ,$$

$$\zeta'' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{z\vartheta'}{r^3} d\sigma \ ;$$

e poichè anche la funzione ϑ è una funzione armonica, si avrà pure:

(10) $$\vartheta = \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{\vartheta'}{r^3} d\sigma \, .$$

Avremo dunque:

$$\xi' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{(x - x_1)\vartheta'}{r^3} d\sigma \ , \quad \eta' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{(y - y_1)\vartheta'}{r^3} d\sigma \ ,$$

$$\zeta' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \int_\sigma \frac{(z - z_1)\vartheta'}{r^3} d\sigma \ ,$$

e, posto

(11) $$H = \int_\sigma \frac{\vartheta'}{r} d\sigma \ ,$$

avremo ancora:

(12) $$\xi' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \cdot \frac{\partial H}{\partial x_1} \ , \quad \eta' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \cdot \frac{\partial H}{\partial y_1} \ ,$$

$$\zeta' = \frac{L+K}{2L} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{4\pi R} \cdot \frac{\partial H}{\partial z_1} \, .$$

Dalle (9), (12) si deduce, osservando che la funzione H è armonica,

$$4\pi R\vartheta = 4\pi R \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \frac{L+K}{L}\rho\frac{dH}{d\rho},$$

e dalle (10), (11):

$$4\pi R\vartheta = H + 2\rho\frac{dH}{d\rho};$$

quindi, posto $t = \frac{L}{3L+K}$, si avrà:

$$tH + \rho\frac{dH}{d\rho} = 4\pi R t \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \tag{13}$$

donde integrando:

$$H = C + 4\pi R t \rho^{-t}\int \rho^{t-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}d\rho$$

con C costante rispetto a ρ.

Per determinare le derivate di H che entrano nelle (12), deriviamo la (13) rispetto ad x_1. Si ottiene:

$$t\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{x_1}{\rho}\frac{dH}{d\rho} + \rho\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{dH}{d\rho} = 4\pi R t \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2};$$

e poichè:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{dH}{d\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial x_1} + \frac{x_1}{\rho}\frac{dH}{d\rho},$$

risulterà:

$$(t+1)\frac{\partial H}{\partial x_1} + \rho\frac{d}{d\rho}\frac{\partial H}{\partial x_1} = 4\pi R t \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},$$

e quindi:

$$(t+1)\rho^t\frac{\partial H}{\partial x_1} + \rho^{t+1}\frac{d}{d\rho}\frac{\partial H}{\partial x_1} = 4\pi R t \rho^t \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},$$

ossia:

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^{t+1}\frac{\partial H}{\partial x_1}\right) = 4\pi R t \rho^t \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}. \tag{14}$$

Moltiplichiamo ambo i membri della (13) per ρ^t e facciamo $\rho=0$: poichè si ha ovviamente:

$$\left(\rho^t \mathrm{H}\right)_{\rho=0}=0\ ,\quad \left(\rho^t \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)_{\rho=0}=0\ ,$$

avremo:

$$0=\left(\rho^{t+1}\frac{d\mathrm{H}}{d\rho}\right)_{\rho=0}=$$

$$=\left(\rho^{t+1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_1}\cos(\rho x)+\rho^{t+1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_1}\cos(\rho y)+\rho^{t+1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_1}\cos(\rho z)\right)_{\rho=0}$$

indipendentemente dalla direzione di ρ, e quindi:

$$\left(\rho^{t+1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_1}\right)_{\rho=0}=\left(\rho^{t+1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_1}\right)_{\rho=0}=\left(\rho^{t+1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_1}\right)_{\rho=0}=0\ .$$

Ciò posto, dalla (14) se ne deduce integrando:

$$4\pi \mathrm{R}\, t\int_0^\rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\rho^t\, d\rho=\rho^{t+1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_1}\ .$$

Similmente:

$$4\pi \mathrm{R}\, t\int_0^\rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}\rho^t\, d\rho=\rho^{t+1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y_1}\ ,$$

$$4\pi \mathrm{R}\, t\int_0^\rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial z_1}\rho^t\, d\rho=\rho^{t+1}\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z_1}\ ;$$

e quindi mediante le (9) e le (12):

$$\xi=\varphi+\frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2\,(3\,\mathrm{L}+\mathrm{K})}\cdot\frac{(\mathrm{R}^2-\rho^2)}{\rho^{t+1}}\int_0^\rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\rho^t\, d\rho\ ,$$

$$\eta=\frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{2\,(3\,\mathrm{L}+\mathrm{K})}\cdot\frac{(\mathrm{R}^2-\rho^2)}{\rho^{t+1}}\int_0^\rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}\rho^t\, d\rho\ ,$$

$$\zeta = \frac{L+K}{2(3L+K)} \cdot \frac{(R^2-\rho^2)}{\rho^{t+1}} \int_0^\rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial z_1} \rho^t \, d\rho \; (^1).$$

I tre precedenti integrali delle equazioni (1) sono funzioni finite e continue dei punti dello spazio S, che nei punti di σ divengono rispettivamente:

$$\xi = \frac{1}{r_0} \;,\quad \eta = 0 \;,\quad \zeta = 0 \,.$$

5. Ciò posto, consideriamo le tre funzioni finite e continue dei punti di S e di σ:

$$\xi_1(n) = \frac{\alpha+4}{4\pi R(\alpha+2)} \int_\sigma u(m) \,.\, \xi \, d\sigma \;,\quad \eta_1(n) = \frac{\alpha+4}{4\pi R(\alpha+2)} \int_\sigma u(m) \,.\, \eta \, d\sigma \;,$$

$$\zeta_1(n) = \frac{\alpha+4}{4\pi R(\alpha+2)} \int_\sigma u(m) \,.\, \zeta \, d\sigma \,.$$

Come è chiaro, esse rappresentano un sistema di integrali delle equazioni (1), per i quali si ha:

$$\lim_{n=\mu} \xi_1(n) = \frac{\alpha+4}{4\pi R(\alpha+2)} \int_\sigma \frac{u(m)}{r_0} d\sigma \;,\quad \lim_{n=\mu} \eta_1(n) = 0 \;,\quad \lim_{n=\mu} \zeta_1(n) = 0 \,.$$

Allora se consideriamo le tre funzioni:

$$Q_1(n) = U(n) + M(n) + \xi_1(n) \;,$$
$$S_1(n) = V(n) + N(n) + \eta_1(n) \;,$$
$$T_1(n) = W(n) + P(n) + \zeta_1(n) \;,$$

avremo che esse soddisfano in tutti i punti dello spazio S alle equazioni (1) e sono tali che

$$\lim_{n=\mu} Q_1(n) = u(\mu) \;,\quad \lim_{n=\mu} S_1(n) = 0 \;,\quad \lim_{n=\mu} T_1(n) = 0 \,.$$

---

(1) Il metodo che abbiamo tenuto per la determinazione degli integrali ξ, η, ζ è in parte del Cerruti (v. Nuovo Cimento, serie 3ª, vol. XXXII «*Sulla deformazione di una sfera.....*») ed in parte del Somigliana (v. Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1887 «*Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo..* »).

Nello stesso modo potremo costruire tre integrali:

$$Q_2(n) \quad , \quad S_2(n) \quad , \quad T_2(n)$$

delle equazioni (1) tali che

$$\lim_{n=\mu} Q_2(n) = 0 \quad , \quad \lim_{n=\mu} S_2(n) = v(\mu) \quad , \quad \lim_{n=\mu} T_2(n) = 0 \, ,$$

e tre altri

$$Q_3(n) \quad , \quad S_3(n) \quad , \quad T_3(n)$$

tali che

$$\lim_{n=\mu} Q_3(n) = 0 \quad , \quad \lim_{n=\mu} S_3(n) = 0 \quad , \quad \lim_{n=\mu} T_3(n) = w(\mu) \, .$$

Finalmente se prendiamo:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad , \quad S = S_1 + S_2 + S_3 \quad , \quad T = T_1 + T_2 + T_3 \, ,$$

avremo tre funzioni Q, S, T che, come è evidente, risolvono completamente il problema proposto.

In modo perfettamente analogo si può risolvere il problema relativo ad un corpo elastico indefinito limitato da una superficie sferica.

6. Per fare un'applicazione delle formole precedenti, calcoliamo i valori delle componenti Q, S, T nel centro della sfera, che per ipotesi coincide coll'origine degli assi.

Si ha ovviamente:

$$U(0) = \frac{2}{2\pi R^2(\alpha+2)} \int_\sigma u(m) \left\{ 1 + \alpha - \frac{3\alpha}{2} \frac{x^2}{R^2} \right\} d\sigma \, ,$$

$$M(0) = \frac{-3}{2\pi R^2(\alpha+2)} \int u(m) \left\{ 1 + \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \frac{x^2}{R^2} \right\} d\sigma \, .$$

Per avere il valore di ξ_1 nel centro della sfera, bisogna calcolare il valore di ξ per $\rho = 0$. Poichè la funzione ρ^t è sempre positiva, si ha:

$$\int_0^\rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\,\rho^t\,d\rho = \overline{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}}\int_0^\rho \rho^t\,d\rho = \overline{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}}\cdot\frac{\rho^{t+1}}{t+1},$$

ove $\overline{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}}$ indica il valore di $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}$ in un conveniente punto interno alla sfera di raggio ρ col centro nell'origine degli assi; per cui avremo:

$$\xi = \varphi + \frac{L+K}{2(3L+K)}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{t+1}\cdot\overline{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}}.$$

Dovendo la funzione ξ essere integrata sulla superficie σ della sfera, possiamo prendere, come è noto,

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma}},$$

con

$$R\rho\cos\gamma = x x_1 + y y_1 + z z_1;$$

si avrà allora:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\frac{x_1-x}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = -\frac{1}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma)^{3/2}} + 3\,\frac{(x_1-x)^2}{(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\gamma)^{5/2}},$$

e quindi:

$$(\xi)_{\rho=0} = \frac{1}{R} + \frac{(L+K)}{2(3L+K)}\cdot\frac{R^2}{t+1}\left\{-\frac{1}{R^3} + 3\,\frac{x^2}{R^5}\right\},$$

Ciò posto, poichè:

$$\alpha = -\frac{L+K}{2L+K},\quad 1+\alpha = \frac{L}{2L+K},\quad 2+\alpha = \frac{3L+K}{2L+K},$$

$$4+\alpha = \frac{7L+3K}{2L+K},\quad t+1 = \frac{4L+K}{3L+K},$$

avremo:

$$Q_1(0)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma u(m)\left\{\left(\frac{4L}{3L+K}-3+\frac{7L+3K}{3L+K}-\frac{(L+K)(7L+3K)}{2(4L+K)(3L+K)}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{6(L+K)}{3L+K}-\frac{3(L+K)}{3L+K}+\frac{3(L+K)(7L+3K)}{2(4L+K)(3L+K)}\right)\frac{x^2}{R^2}\right\}d\sigma$$

$$=\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma u(m)\left\{\frac{3(L-K)}{2(4L+K)}+\frac{15(L+K)}{2(4L+K)}\frac{x^2}{R^2}\right\}d\sigma .$$

Similmente si troverebbe:

$$Q_2(0)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma v(m)\cdot\frac{15(L+K)}{2(4L+K)}\frac{xy}{R^2}\,d\sigma ,$$

$$Q_3(0)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma w(m)\cdot\frac{15(L+K)}{2(4L+K)}\frac{xz}{R^2}\,d\sigma ;$$

onde si avrà:

$$(15)\quad Q(0)=\frac{3(L-K)}{2(4L+K)}\cdot\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma u(m)\,d\sigma+$$

$$+\frac{15(L+K)}{2(4L+K)}\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma\left\{\frac{x^2}{R^2}u(m)+\frac{xy}{R^2}v(m)+\frac{xz}{R^2}w(m)\right\}d\sigma .$$

Analogamente:

$$(15')\quad\left\{\begin{aligned}S(0)&=\frac{3(L-K)}{2(4L+K)}\cdot\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma v(m)\,d\sigma+\\&+\frac{15(L+K)}{2(4L+K)}\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma\left\{\frac{yx}{R^2}u(m)+\frac{y^2}{R^2}v(m)+\frac{yz}{R^2}w(m)\right\}d\sigma ,\\T(0)&=\frac{3(L-K)}{2(4L+K)}\cdot\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma w(m)\,d\sigma+\\&+\frac{15(L+K)}{2(4L+K)}\frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma\left\{\frac{zx}{R^2}u(m)+\frac{zy}{R^2}v(m)+\frac{z^2}{R^2}w(m)\right\}d\sigma\ (^1).\end{aligned}\right.$$

Se si fa $\alpha=0$, le equazioni (1) dell'elasticità si riducono ciascuna all'equazione armonica e le formole (15), (15') alla nota formola della *media aritmetica.*

---

(1) Circa all'esattezza dei calcoli precedenti, credo opportuno far notare che le formole (15), (15') coincidono perfettamente con quelle trovate dal VOLTERRA in un corso di lezioni di fisica-matematica, seguendo un altro metodo.

CAPITOLO V.

Integrazione delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per mezzo di serie.

1. Ci serviremo ora dei risultati del capitolo precedente per dimostrare anzitutto un teorema sulle serie di integrali delle equazioni dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi, che è l'estensione al caso nostro del teorema del prof. VOLTERRA riguardante le serie di funzioni armoniche. Detto teorema è il seguente:

Se le funzioni

$$U_1\,,\ V_1\,,\ W_1\,;\ U_2\,,\ V_2\,,\ W_2\,;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

formano in uno spazio connesso S *limitato da un insieme di superficie* σ *una serie di sistemi di integrali delle equazioni:*

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} L\,\Delta^2 u + (L+K)\,\dfrac{\partial\theta}{\partial x_1} = 0 \\[2ex] L\,\Delta^2 v + (L+K)\,\dfrac{\partial\theta}{\partial y_1} = 0 \\[2ex] L\,\Delta^2 w + (L+K)\,\dfrac{\partial\theta}{\partial z_1} = 0\,, \end{cases}$$

che coll'indefinito avvicinarsi del punto (x_1, y_1, z_1), *al quale si riferiscono, a* σ *prendono rispettivamente i valori:*

$$u_1\,,\ v_1\,,\ w_1\,;\ u_2\,,\ v_2\,,\ w_2\,;\ \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

se le tre serie

$$\text{(2)}\qquad U = \sum_1^\infty{}_i\, U_i\,,\quad V = \sum_1^\infty{}_i\, V_i\,,\quad W = \sum_1^\infty{}_i\, W_i$$

sono convergenti in egual grado in tutto S *e le altre tre:*

$$(3) \qquad u = \sum_1^\infty {}_i\, u_i \ , \ v = \sum_1^\infty {}_i\, v_i \ , \ w = \sum_1^\infty {}_i\, w_i$$

sono, su ciascuna delle superficie che formano σ, *pure convergenti in egual grado, le tre serie* (2) *rappresenteranno tre integrali delle equazioni* (1), *i quali coll'avvicinarsi di* (x_1, y_1, z_1) *a* σ *prenderanno rispettivamente i valori:*

$$u = \sum_1^\infty {}_i\, u_i \ , \ v = \sum_1^\infty {}_i\, v_i \ , \ w = \sum_1^\infty {}_i\, w_i \,.$$

Infatti consideriamo le tre somme:

$$\begin{aligned} S'_n &= U_1 + U_2 + \ldots\ldots + U_n \,, \\ S''_n &= V_1 + V_2 + \ldots\ldots + V_n \,, \\ S'''_n &= W_1 + W_2 + \ldots\ldots + W_n \end{aligned}$$

ed indichiamo rispettivamente con R'_n, R''_n, R'''_n i resti delle tre serie (2); avremo allora:

$$U = S'_n + R'_n \ , \quad V = S''_n + R''_n \ , \quad W = S'''_n + R'''_n \,.$$

Sia (x_1, y_1, z_1) un punto qualsiasi interno ad S. Costruiamo una sfera che stia tutta in S e che racchiuda il punto (x_1, y_1, z_1) nel suo interno, ed indichiamo con s lo spazio racchiuso da questa sfera, con σ' la sua superficie. Posto

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & a_i = \frac{a}{2\pi} \ , \quad b_i = \frac{b}{2\pi} \ , \quad c_i = \frac{c}{2\pi} \,; \\ & u_i = -\frac{3}{2\pi R(\alpha+2)}\, u_1 \ , \quad v_i = -\frac{3}{2\pi R(\alpha+2)}\, v_1 \ , \quad w_i = -\frac{3}{2\pi R(\alpha+2)}\, w_1 \,; \\ & \xi_i = \frac{\alpha+4}{4\pi R(\alpha+2)}\, \xi \ , \quad \eta_i = \frac{\alpha+4}{4\pi R(\alpha+2)}\, \eta \ , \quad \zeta_i = \frac{\alpha+4}{4\pi R(\alpha+2)}\, \zeta \,, \end{aligned} \right.$$

potremo scrivere (v. §. 5 del capitolo precedente):

$$S'_n(x_1, y_1, z_1) = \int_{\sigma'} \left\{ (a_i + u_i + \xi_i)\, S'_n + (b_i + v_i + \eta_i)\, S''_n + (c_i + w_i + \zeta_i)\, S'''_n \right\} d\sigma' \,,$$

ossia:

$$U(x_1, y_1, z_1) - R'_n(x_1, y_1, z_1) =$$
$$= \int_{\sigma'} \left\{ (a_i+u_i+\xi_i)\, U + (b_i+v_i+\eta_i)\, V + (c_i+w_i+\zeta_i)\, W \right\} d\sigma'$$
$$- \int_{\sigma'} \left\{ (a_i+u_i+\xi_i)\, R'_n + (b_i+v_i+\eta_i) R''_n + (c_i+w_i+\zeta_i) R'''_n \right\} d\sigma',$$

ovvero ancora:

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & U(x_1, y_1, z_1) - \int_{\sigma'} \left\{ (a_i+u_i+\xi_i)\, U + (b_i+v_i+\eta_i)\, V + (c_i+w_i+\zeta_i)\, W \right\} d\sigma' = \\ & = R'_n(x_1, y_1, z_1) - \int_{\sigma'} \left\{ (a_i+u_i+\xi_i)\, R'_n + (b_i+v_i+\eta_i) R''_n + (c_i+w_i+\zeta_i) R'''_n \right\} d\sigma' . \end{aligned} \right.$$

Ora le serie (2) sono per ipotesi convergenti in egual grado, per cui avremo certamente per n sufficientemente grande:

$$R'_n < \eta \,, \quad R''_n < \eta \,, \quad R'''_n < \eta \,,$$

con η quantità arbitrariamente piccola. Inoltre l'integrale:

$$\int_{\sigma'} \left\{ |a_i+u_i+\xi_i| + |b_i+v_i+\eta_i| + |c_i+w_i+\zeta_i| \right\} d\sigma'$$

è una funzione il cui valore si mantiene certamente sempre inferiore ad un certo numero finito A; per cui avremo dalla (5) passando al limite per $n = \infty$:

$$U(x_1, y_1, z_1) = \int_{\sigma'} \left\{ (a_i+u_i+\xi_i)\, U + (b_i+v_i+\eta_i)\, V + (c_i+w_i+\zeta_i)\, W \right\} d\sigma',$$

e per analogia:

$$V(x_1, y_1, z_1) = \int_{\sigma'} \left\{ (a'_i+u'_i+\xi'_i) U + (b'_i+v'_i+\eta'_i) V + (c'_i+w'_i+\zeta'_i) W \right\} d\sigma',$$

$$W(x_1, y_1, z_1) = \int_{\sigma'} \left\{ (a''_i+u''_i+\xi''_i) U + (b''_i+v''_i+\eta''_i) V + (c''_i+w''_i+\zeta''_i) W \right\} d\sigma',$$

in cui le a'_i, b'_i, c'_i ; a''_i, ... ; u'_i, v'_i, w'_i ; u''_i, ... ; ξ'_i, η'_i, ζ'_i ; ξ''_i, ... sono le espressioni analoghe alle (4).

Poichè le relazioni precedenti valgono per qualsiasi altro punto interno ad s, ne segue che le funzioni U, V, W soddisfano in tutti i punti di s alle equazioni (1) dell'equilibrio ed in particolare anche nel punto (x_1, y_1, z_1). Ora il processo tenuto nella considerazione del punto (x_1, y_1, z_1), si può evidentemente ripetere per qualsiasi altro punto di S; ne concludiamo quindi che le funzioni U, V, W date dalle serie (2) soddisfano in tutti i punti dello spazio S alle equazioni (1) dell'equilibrio dei corpi elastici.

Per dimostrare finalmente che le funzioni U, V, W tendono rispettivamente verso le funzioni u, v, w date dalle serie (3), quando il punto che si considera dello spazio S si avvicina indefinitamente ai punti della superficie σ, prendiamo a considerare un punto generico μ di σ ed indichiamo con ε una quantità positiva piccola ad arbitrio, con r'_n, r''_n, r'''_n i resti delle serie (3) e con s'_n, s''_n, s'''_n le somme dei primi n termini di ciascuna di dette serie. Si avrà ovviamente:

$$U - u(\mu) = S'_n - s'_n(\mu) + R'_n - r'_n(\mu) ,$$
$$V - v(\mu) = S''_n - s''_n(\mu) + R''_n - r''_n(\mu) ,$$
$$W - w(\mu) = S'''_n - s'''_n(\mu) + R'''_n - r'''_n(\mu) .$$

Ora le serie U, V, W; u, v, w sono convergenti in egual grado, le prime tre in S e le altre tre su σ; per cui esisterà un numero n_1 intero e positivo tale che per ogni altro numero n anch'esso intero e positivo non minore di n_1 si avrà certamente:

$$r'_n(\mu) < \frac{\varepsilon}{3} \, , \; r''_n(\mu) < \frac{\varepsilon}{3} \, , \; r'''_n(\mu) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$R'_n < \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad R''_n < \frac{\varepsilon}{3} \quad , \quad R'''_n < \frac{\varepsilon}{3} \, .$$

Inoltre per le ipotesi fatte circa alla natura delle funzioni U_1, U_2, ... ; V_1, V_2, ... ; W_1, W_2, ..., si avrà che le somme S'_n, S''_n, S'''_n tendono rispettivamente verso le altre s'_n, s''_n, s'''_n coll'indefinito avvicinarsi del punto n che si considera al punto μ; per cui potremo scegliere un intorno a tre dimensioni di μ talmente piccolo che per tutti i punti (x_1, y_1, z_1) di esso interni ad S si abbia:

$$\left| S'_n - s'_n(\mu) \right| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \left| S''_n - s''_n(\mu) \right| < \frac{\varepsilon}{3}\,, \quad \left| S'''_n - s'''_n(\mu) \right| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Dalle relazioni precedenti ne seguono per (x_1, y_1, z_1) sufficientemente vicino a μ le altre:

$$\left| U - u(\mu) \right| < \varepsilon\,, \quad \left| V - v(\mu) \right| < \varepsilon\,, \quad \left| W - w(\mu) \right| < \varepsilon\,.$$

Dunque quando col punto di S che si considera ci avviciniamo indefinitamente alla superficie σ, le funzioni U, V, W tendono rispettivamente verso le altre u, v, w.

Osservazione. — Il teorema relativo alle funzioni armoniche ed analogo a quello da noi testè dimostrato, differisce dal menzionato teorema del prof. Volterra per il fatto che bisogna di più ammettere la convergenza in egual grado delle tre serie U, V, W. Ora nel caso delle serie di funzioni armoniche si può fare a meno di introdurre quest'altra condizione, per via che dette funzioni godono della proprietà di non prendere mai il valore massimo, nè il valore minimo nell'interno dello spazio che si considera, proprietà di cui non godono generalmente le funzioni integrali delle equazioni (1), come ci addimostrano ad esempio le funzioni $Q_1(n)$, $S_1(n)$, $T_1(n)$ trovate nel §. 5 del capitolo precedente per il problema della sfera.

2. *Supponiamo di avere un corpo* S *semplicemente connesso e limitato da una superficie convessa* σ *avente in ogni suo punto un piano tangente variabile con continuità al variare con continuità del punto di contatto, e proponiamoci di trovare tre funzioni* U, V, W *che soddisfino alle equazioni* (1) *dell'equilibrio dei corpi elastici in tutti i punti* n *del corpo* S *e che coll'avvicinarsi indefinitamente dei punti di* S *ai punti* m *di* σ *tendano rispettivamente verso tre funzioni finite e continue* $u(m)$, $v(m)$, $w(m)$ *date arbitrariamente su* σ.

Incominciamo per questo a considerare le tre funzioni:

$$
(6)\quad \left\{\begin{aligned}
U_1(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m)\,.\,a + v(m)\,.\,b + w(m)\,.\,c \Big\}\, d\sigma\,,\\
V_1(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m)\,.\,a_1 + v(m)\,.\,b_1 + w(m)\,.\,c_1 \Big\}\, d\sigma\,,\\
W_1(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m)\,.\,a_2 + v(m)\,.\,b_2 + w(m)\,.\,c_2 \Big\}\, d\sigma\,,
\end{aligned}\right.
$$

Da quello che abbiamo stabilito nel §. 2 del capitolo precedente risulta che esse rappresentano tre integrali dell'equilibrio, per i quali si ha, indicando al solito con μ un punto generico di σ:

$$
\lim_{n=\mu} U_1(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m)\,.\,a' + v(m)\,.\,b' + w(m)\,.\,c' \Big\}\, d\sigma + u(\mu)\,,
$$

$$
\lim_{n=\mu} V_1(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m)\,.\,a'_1 + v(m)\,.\,b'_1 + w(m)\,.\,c'_1 \Big\}\, d\sigma + v(\mu)\,,
$$

$$
\lim_{n=\mu} W_1(n) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m)\,.\,a'_2 + v(m)\,.\,b'_2 + w(m)\,.\,c'_2 \Big\}\, d\sigma + w(\mu)\,;
$$

e posto poi:

$$
u_1(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m)\,.\,a' + v(m)\,.\,b' + w(m)\,.\,c' \Big\}\, d\sigma\,,
$$

$$
v_1(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m)\,.\,a'_1 + v(m)\,.\,b'_1 + w(m)\,.\,c'_1 \Big\}\, d\sigma\,,
$$

$$
w_1(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ u(m)\,.\,a'_2 + v(m)\,.\,b'_2 + w(m)\,.\,c'_2 \Big\}\, d\sigma\,,
$$

potremo scrivere ancora:

$$
\lim_{n=\mu} U_1(n) = u_1(\mu) + u(\mu)\quad,\quad \lim_{n=\mu} V_1(n) = v_1(\mu) + v(\mu)\,,
$$

$$
\lim_{n=\mu} W_1(n) = w_1(\mu) + w(\mu)\,.
$$

Si è visto nel §. 2 del capitolo precedente che le tre espressioni:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left[\left\{u(m)-u(\mu)\right\}a'+\left\{v(m)-v(\mu)\right\}b'+\left\{w(m)-w(\mu)\right\}c'\right]d\sigma,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left[\left\{u(m)-u(\mu)\right\}a'_1+\left\{v(m)-v(\mu)\right\}b'_1+\left\{w(m)-w(\mu)\right\}c'_1\right]d\sigma,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left[\left\{u(m)-u(\mu)\right\}a'_2+\left\{v(m)-v(\mu)\right\}b'_2+\left\{w(m)-w(\mu)\right\}c'_2\right]d\sigma$$

sono finite e continue su σ; e poichè sono finite e continue anche le funzioni $u(m)$, $v(m)$, $w(m)$, avremo che lo stesso sarà delle funzioni:

$$u_1(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left[\left\{u(m)-u(\mu)\right\}a'+\left\{v(m)-v(\mu)\right\}b'+\left\{w(m)-w(\mu)\right\}c'\right]d\sigma+u(\mu),$$

$$v_1(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left[\left\{u(m)-u(\mu)\right\}a'_1+\left\{v(m)-v(\mu)\right\}b'_1+\left\{w(m)-w(\mu)\right\}c'_1\right]d\sigma+v(\mu),$$

$$w_1(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left[\left\{u(m)-u(\mu)\right\}a'_2+\left\{v(m)-v(\mu)\right\}b'_2+\left\{w(m)-w(\mu)\right\}c'_2\right]d\sigma+w(\mu).$$

Mettendo nelle tre precedenti funzioni $u_1(\mu)$, $v_1(\mu)$, $w_1(\mu)$ la variabile m in luogo della variabile μ, si avranno tre funzioni:

$$u_1(m) \quad , \quad v_1(m) \quad , \quad w_1(m)$$

dei punti di σ, della stessa specie delle funzioni date $u(m)$, $v(m)$, $w(m)$.

Possiamo allora mediante queste tre nuove funzioni formare tre espressioni come le (6):

$$\mathrm{U}_2(n)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left\{u_1(m)\,.\,a+v_1(m)\,.\,b+w_1(m)\,.\,c\right\}d\sigma,$$

$$\mathrm{V}_2(n)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left\{u_1(m)\,.\,a_1+v_1(m)\,.\,b_1+w_1(m)\,.\,c_1\right\}d\sigma,$$

$$\mathrm{W}_2(n)=\frac{1}{2\pi}\int_\sigma\left\{u_1(m)\,.\,a_2+v_1(m)\,.\,b_2+w_1(m)\,.\,c_2\right\}d\sigma;$$

ed allora, posto:

$$u_2(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ u_1(m) \,.\, a' + v_1(m) \,.\, b' + w_1(m) \,.\, c' \right\} d\sigma ,$$

$$v_2(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ u_1(m) \,.\, a'_1 + v_1(m) \,.\, b'_1 + w_1(m) \,.\, c'_1 \right\} d\sigma ,$$

$$w_2(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left\{ u_1(m) \,.\, a'_2 + v_1(m) \,.\, b'_2 + w_1(m) \,.\, c'_2 \right\} d\sigma ,$$

avremo similmente:

$$\lim_{n=\mu} U_2(n) = u_2(\mu) + u_1(\mu), \ \lim_{n=\mu} V_2(n) = v_2(\mu) + v_1(\mu), \ \lim_{n=\mu} W_2(n) = w_2(\mu) + w_1(\mu).$$

Così seguitando verremo a formare una serie di sistemi di integrali delle equazioni (1):

$$(7) \qquad U_1, V_1, W_1 ; \ U_2, V_2, W_2 ; \ U_3, V_3, W_3 ; \ \ldots\ldots\ldots$$

e tre serie di funzioni finite e continue dei punti della superficie σ:

$$u, v, w ; \ u_1, v_1, w_1 ; \ u_2, v_2, w_2 ; \ u_3, v_3, w_3 ; \ \ldots\ldots\ldots$$

per le quali si ha:

$$\lim_{n=\mu} U_1(n) = u_1(\mu) + u(\mu), \ \lim_{n=\mu} V_1(n) = v_1(\mu) + v(\mu), \ \lim_{n=\mu} W_1(n) = w_1(\mu) + w(\mu);$$

$$\lim_{n=\mu} U_2(n) = u_2(\mu) + u_1(\mu), \ \lim_{n=\mu} V_2(n) = v_2(\mu) + v_1(\mu), \ \lim_{n=\mu} W_2(n) = w_2(\mu) + w_1(\mu);$$

$$\lim_{n=\mu} U_3(n) = u_3(\mu) + u_2(\mu), \ \lim_{n=\mu} V_3(n) = v_3(\mu) + v_2(\mu), \ \lim_{n=\mu} W_3(n) = w_3(\mu) + w_2(\mu);$$

. . . .

Mediante le funzioni (7) precedentemente costruite formiamo le tre serie:

$$(8) \left\{ \begin{aligned} U &= \left\{ U_1(n) - U_2(n) \right\} + \left\{ U_3(n) - U_4(n) \right\} + \ldots\ldots\ldots \\ V &= \left\{ V_1(n) - V_2(n) \right\} + \left\{ V_3(n) - V_4(n) \right\} + \ldots\ldots\ldots \\ W &= \left\{ W_1(n) - W_2(n) \right\} + \left\{ W_3(n) - W_4(n) \right\} + \ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right.$$

le quali coll'avvicinarsi indefinitamente del punto n di S ad un punto qualsiasi μ di σ tendono rispettivamente verso le altre:

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{u(\mu)-u_2(\mu)\right\}+\left\{u_2(\mu)-u_4(\mu)\right\}+\dots\dots\dots \\ \left\{v(\mu)-v_2(\mu)\right\}+\left\{v_2(\mu)-v_4(\mu)\right\}+\dots\dots\dots \\ \left\{w(\mu)-w_2(\mu)\right\}+\left\{w_2(\mu)-w_4(\mu)\right\}+\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Indichiamo rispettivamente con $G, G_1, G_2, \dots\dots$ i massimi dei massimi e con $K, K_1, K_2, \dots\dots$ i minimi dei minimi delle terne di funzioni:

$$\begin{array}{lll} u(m) \,, & v(m) \,, & w(m) \;; \\ u_1(m) \,, & v_1(m) \,, & w_1(m) \;; \\ u_2(m) \,, & v_2(m) \,, & w_2(m) \;; \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}$$

e chiamiamo λ una quantità positiva minore dell'unità. *Supposte vere le disuguaglianze:*

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} G_s \leq G_{s-1} \;,\; K_s \geq K_{s-1} \,, \\ G_s - K_s \leq \lambda(G_{s-1}-K_{s-1}), \end{array}\right. \quad (s=1,2,3,\dots\dots)$$

si avrà evidentemente:

$$\begin{array}{l} G_1 - K_1 \leq \lambda\,(G-K)\,, \\ G_2 - K_2 \leq \lambda^2\,(G-K)\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ G_s - K_s \leq \lambda^s\,(G-K)\,, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\;; \end{array}$$

e quindi:

$$\lim_{s=\infty} G_s = \lim_{s=\infty} K_s = C \,,$$

dove C è una determinata costante.

Inoltre, poichè per qualunque punto μ di σ si ha:

$$G_r \geq u_r(\mu)\ ,\quad K_r \leq K_{r+1} \leq u_{r+1}(\mu)\ ,\quad K_r \leq K_{r+2} \leq u_{r+2}(\mu)\ ,$$
$$G_r \geq v_r(\mu)\ ,\quad K_r \leq K_{r+1} \leq v_{r+1}(\mu)\ ,\quad K_r \leq K_{r+2} \leq v_{r+2}(\mu)\ ,$$
$$G_r \geq w_r(\mu)\ ,\quad K_r \leq K_{r+1} \leq w_{r+1}(\mu)\ ,\quad K_r \leq K_{r+2} \leq w_{r+2}(\mu)\ ,$$

avremo evidentemente:

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&|u_r(\mu) - u_{r+1}(\mu)| \leq G_r - K_r \leq \lambda^r (G-K)\ ,\\
&|v_r(\mu) - v_{r+1}(\mu)| \leq \lambda^r (G-K)\ ,\\
&|w_r(\mu) - w_{r+1}(\mu)| \leq \lambda^r (G-K)\ ,\\
&|u_r(\mu) - u_{r+2}(\mu)| \leq G_r - K_r \leq \lambda^r (G-K)\ ,\\
&|v_r(\mu) - v_{r+2}(\mu)| \leq \lambda^r (G-K)\ ,\\
&|w_r(\mu) - w_{r+2}(\mu)| \leq \lambda^r (G-K)\ .
\end{aligned}\right.$$

Si ha quindi:

$$|U_{r+1}(n) - U_{r+2}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ |u_r(m) - u_{r+1}(m)|\,.\,|a| +$$
$$+ |v_r(m) - v_{r+1}(m)|\,.\,|b| + |w_r(m) - w_{r+1}(m)|\,.\,|c| \Big\}\, d\sigma$$
$$\leq \frac{\lambda^r(G-K)}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ |a| + |b| + |c| \Big\}\, d\sigma\ ,$$

$$|V_{r+1}(n) - V_{r+2}(n)| \leq \frac{\lambda^r(G-K)}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ |a_1| + |b_1| + |c_1| \Big\}\, d\sigma\ ,$$

$$|W_{r+1}(n) - W_{r+2}(n)| \leq \frac{\lambda^r(G-K)}{2\pi}\int_\sigma \Big\{ |a_2| + |b_2| + |c_2| \Big\}\, d\sigma\ .$$

Ora dalle espressioni stesse delle a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 risultano ovviamente le seguenti disuguaglianze:

$$|a| < \frac{B}{6}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\ ,\quad |b| < \frac{B}{6}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\ ,\quad |c| < \frac{B}{6}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\ ,$$

$$|a_1| < \frac{B}{6} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}, \quad |b_1| < \frac{B}{6} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}, \quad |c_1| < \frac{B}{6} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n},$$

$$|a_2| < \frac{B}{6} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}, \quad |b_2| < \frac{B}{6} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}, \quad |c_2| < \frac{B}{6} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n},$$

con B quantità positiva e finita. Possiamo dunque scrivere:

$$(12) \qquad \begin{cases} |U_{r+1}(n) - U_{r+2}(n)| < \lambda^r (G-K) B, \\ |V_{r+1}(n) - V_{r+2}(n)| < \lambda^r (G-K) B, \\ |W_{r+1}(n) - W_{r+2}(n)| < \lambda^r (G-K) B; \end{cases}$$

e poichè la serie:

$$B(G-K)(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots\ldots)$$

è convergente, le tre serie (8) saranno certamente convergenti in egual grado in tutto S.

La convergenza in egual grado delle (9) su σ risulta poi dall'osservare che per le (11) le serie dei valori assoluti dei loro termini convergono come le serie:

$$(G-K)(1+\lambda^2+\lambda^4+\ldots\ldots).$$

Osserviamo finalmente che le serie (9) hanno rispettivamente per somma:

$$u(\mu) - C, \quad v(\mu) - C, \quad w(\mu) - C.$$

Dai risultati precedenti segue dunque in forza del teorema del §. 1, che *le funzioni*

$$U + C, \quad V + C, \quad W + C$$

formate mediante le serie (8) *rappresentano tre integrali delle equazioni* (1), *che risolvono completamente il problema proposto* in principio di questo paragrafo.

3. Il risultato del § precedente dipende essenzialmente dall'avere ammesso le disuguaglianze (10). Ora queste disuguaglianze,

potendo pure sussistere senza limitazione alcuna riguardo alla natura dei coefficienti delle equazioni (1), noi le dimostreremo soltanto per α quantità negativa e convenientemente vicino allo zero.

Avvertiamo qui che, come risulta dall'esperienza, α è una quantità sempre negativa, che può variare da -1 a $-\frac{1}{2}$ (1); per cui quando il limite inferiore dei valori che può prendere α, per la validità del metodo precedente, supera $-\frac{1}{2}$, il problema risoluto non corrisponde effettivamente ad alcun caso di corpo elastico isotropo, come feci notare nell'introduzione.

È noto che la superficie convessa σ si può sempre scomporre in due regioni (ciascuna formata anche di più pezzi) diverse dallo zero e tali che una funzione finita e continua dei suoi punti, la quale non fa infinite oscillazioni (2), sia sempre inferiore ad H sulla prima, superiore od uguale ad H sulla seconda, essendo H la media aritmetica del valore massimo e del valore minimo di questa funzione.

Ciò posto, siano σ_u e σ'_u le due regioni in cui viene scomposta σ in modo che, posto $\frac{G_{s-1}+K_{s-1}}{2}=H$, la funzione u_{s-1} sia su σ_u inferiore ad H, su σ'_u superiore od uguale ad H; similmente siano σ_v e σ'_v due regioni della superficie σ tali che $\sigma_v+\sigma'_v=\sigma$ e che

(1) Infatti si ha $\alpha=\frac{a^2-b^2}{b^2}=-\frac{1}{2(1-\lambda)}$, in cui λ è il coefficiente di Poisson, che è sempre compreso fra 0 e $\frac{1}{2}$. (Vedi: Somigliana, Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa; 1887; §. II. — *Trattato di Elasticità* del Clebsch; §. 16; Nota del Saint-Venant.

(2) Il metodo che siamo per esporre, come quello del Neumann relativo alla risoluzione del problema di Dirichlet, fa difetto nel caso che le funzioni arbitrariamente date su σ facciano infinite oscillazioni. Per il problema di Dirichlet il prof. Volterra ha dato in un corso di lezioni di fisica-matematica il mezzo per togliere tale eccezione.

su σ_v la funzione v_{s-1} si mantenga minore di H, su σ'_v si mantenga invece maggiore di H od uguale ad H; e finalmente siano σ_w e σ'_w le due regioni in cui viene scomposta σ in modo che la funzione w_{s-1} sia su σ_w sempre inferiore ad H, su σ'_w sempre superiore od uguale ad H.

Indichiamo poi con μ_1, μ_2 due punti generici di σ, e con $a'_{01}, b'_{01}, c'_{01}$; $a'_{11}, b'_{11}, c'_{11}$; $a'_{21}, b'_{21}, c'_{21}$ e $a'_{02}, b'_{02}, c'_{02}$; $a'_{12}, b'_{12}, c'_{12}$; $a'_{22}, b'_{22}, c'_{22}$ i valori che le funzioni a', b', c'; a'_1, b'_1, c'_1; a'_2, b'_2, c'_2 prendono rispettivamente nei punti μ_1, μ_2.

Poichè, come abbiamo osservato, si ha sempre $0 > \alpha > -1$, la funzione a' sarà sempre positiva, onde potremo scrivere:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma u_{s-1}(m) \, . \, a'_{01}\, d\sigma \leq \frac{H}{2\pi}\int_{\sigma_u} a'_{01}\, d\sigma + \frac{G_{s-1}}{2\pi}\int_{\sigma'_u} a'_{01}\, d\sigma =$$

$$= \frac{G_{s-1}}{4\pi}\left\{\int_{\sigma_u} a'_{01}\, d\sigma + 2\int_{\sigma'_u} a'_{01}\, d\sigma\right\} + \frac{K_{s-1}}{4\pi}\int_{\sigma_u} a'_{01}\, d\sigma,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma u_{s-1}(m) \, . \, a'_{02}\, d\sigma \geq \frac{K_{s-1}}{2\pi}\int_{\sigma_u} a'_{02}\, d\sigma + \frac{H}{2\pi}\int_{\sigma'_u} a'_{02}\, d\sigma =$$

$$= \frac{G_{s-1}}{4\pi}\int_{\sigma'_u} a'_{02}\, d\sigma + \frac{K_{s-1}}{4\pi}\left\{\int_{\sigma'_u} a'_{02}\, d\sigma + 2\int_{\sigma_u} a'_{02}\, d\sigma\right\};$$

e poichè $\int_\sigma a'\, d\sigma = 2\pi$, avremo:

$$(13)\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_\sigma u_{s-1}(m) \, . \, a'_{01}\, d\sigma \leq G_{s-1} - (G_{s-1} - K_{s-1}) \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma_u} a'_{01}\, d\sigma, \\ &\frac{1}{2\pi}\int_\sigma u_{s-1}(m) \, . \, a'_{02}\, d\sigma \geq K_{s-1} + (G_{s-1} - K_{s-1}) \frac{1}{4\pi}\int_{\sigma'_u} a'_{02}\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

La funzione b' è su σ in generale ora positiva ed ora negativa. Dividiamo allora la superficie σ in quattro regioni ω_1, ω_2, ω'_1, ω'_2 tali che

$$\omega_1 + \omega_2 = \sigma_v \;, \quad \omega'_1 + \omega'_2 = \sigma'_v$$

e che inoltre su ω_1 ed ω'_1 si abbia $b'_{01} \geq 0$, su ω_2 ed ω'_2 si abbia invece $b'_{01} < 0$. Ciò posto, avremo certamente:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma v_{s-1}(m)\,.\,b'_{01}d\sigma \leq \frac{H}{2\pi}\int_{\omega_1} b'_{01}d\sigma + \frac{K_{s-1}}{2\pi}\int_{\omega_2} b'_{01}d\sigma + \frac{G_{s-1}}{2\pi}\int_{\omega'_1} b'_{01}d\sigma +$$
$$+ \frac{H}{2\pi}\int_{\omega'_2} b'_{01}\,d\sigma\ ;$$

e poichè

$$\int_\sigma b'_{01}\,d\sigma = 0\,,$$

sarà ancora:

$$(14)\quad \frac{1}{2\pi}\int_\sigma v_{s-1}(m)\,.\,b'_{01}\,d\sigma \leq \frac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\left\{\int_{\omega'_1} b'_{01}\,d\sigma - \int_{\omega_2} b'_{01}\,d\sigma\right\} =$$
$$= \frac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\int_{\omega'_1+\omega_2} |\,b'_{01}\,|\,d\sigma\,.$$

Similmente dividiamo la superficie σ in quattro regioni ε_1, ε_2, ε'_1, ε'_2 tali che

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \sigma_v \quad , \quad \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 = \sigma'_v$$

e che inoltre su ε_1 ed ε'_1 sia $b'_{02} \geq 0$, su ε_2 ed ε'_2 sia invece $b'_{02} < 0$. Si avrà allora:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma v_{s-1}(m)\,.\,b'_{02}d\sigma \geq \frac{K_{s-1}}{2\pi}\int_{\varepsilon_1} b'_{02}d\sigma + \frac{H}{2\pi}\int_{\varepsilon_2} b'_{02}d\sigma + \frac{H}{2\pi}\int_{\varepsilon'_1} b'_{02}\,d\sigma +$$
$$+ \frac{G_{s-1}}{2\pi}\int_{\varepsilon'_2} b'_{02}\,d\sigma\,,$$

e quindi, poichè:

$$\int_\sigma b'_{02}\,d\sigma = 0\,,$$

si avrà ancora:

$$(15)\quad \frac{1}{2\pi}\int_\sigma v_{s-1}(m)\,.\,b'_{02}\,d\sigma \geq \frac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\left\{\int_{\varepsilon'_2} b'_{02}\,d\sigma - \int_{\varepsilon_1} b'_{02}\,d\sigma\right\} =$$

$$= -\frac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2} |\,b'_{02}\,|\,d\sigma\,.$$

Analogamente, se si osserva che c' non ha su σ in generale sempre lo stesso segno, e se si indicano con ν_1, ν_2, ν'_1, ν'_2 le quattro regioni in cui viene divisa σ, in modo che $\nu_1+\nu_2=\sigma_w$, $\nu'_1+\nu'_2=\sigma'_w$ e che su ν_1, ν'_1 si abbia $c'_{01}\geq 0$, su ν_2, ν'_2 si abbia invece $c'_{01}<0$, e se indichiamo poi con ρ_1, ρ_2, ρ'_1, ρ'_2 le quattro regioni di σ tali che $\rho_1+\rho_2=\sigma_w$, $\rho'_1+\rho'_2=\sigma'_w$ e che su ρ_1, ρ'_1 sia $c'_{02}\geq 0$, su ρ_2, ρ'_2 sia invece $c'_{02}<0$, avremo:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma w_{s-1}(m)\,.\,c'_{01}\,d\sigma \leq \dfrac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\displaystyle\int_{\nu'_1+\nu_2} |\,c'_{01}\,|\,d\sigma\,, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\sigma w_{s-1}(m)\,.\,c'_{02}\,d\sigma \geq -\dfrac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\displaystyle\int_{\rho_1+\rho'_2} |\,c'_{02}\,|\,d\sigma\,, \end{cases}$$

Dalle (13), (14), (15), (16) si ha finalmente:

$$(17)\quad \begin{cases} u_s(\mu_1) \leq G_{s-1} - \dfrac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\left\{\displaystyle\int_{\sigma_u} a'_{01}\,d\sigma - \int_{\omega'_1+\omega_2} |\,b'_{01}\,|\,d\sigma - \int_{\nu'_1+\nu_2} |\,c'_{01}\,|\,d\sigma\right\} \\[2ex] u_s(\mu_2) \geq K_{s-1} + \dfrac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\left\{\displaystyle\int_{\sigma'_u} a'_{02}\,d\sigma - \int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2} |\,b'_{02}\,|\,d\sigma - \int_{\rho_1+\rho'_2} |\,c'_{02}\,|\,d\sigma\right\} \\[2ex] u_s(\mu_1) - \mu_1(\mu_2) \leq (G_{s-1}-K_{s-1})\left[1 - \dfrac{1}{4\pi}\left\{\displaystyle\int_{\sigma_u} a'_{01}\,d\sigma + \int_{\sigma'_u} a'_{02}\,d\sigma - \right.\right. \\[2ex] \qquad \left.\left. - \displaystyle\int_{\omega'_1+\omega_2} |b'_{01}|\,d\sigma - \int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2} |b'_{02}|\,d\sigma - \int_{\nu'_1+\nu_2} |c'_{01}|\,d\sigma - \int_{\rho_1+\rho'_2} |c'_{02}|\,d\sigma\right\}\right]. \end{cases}$$

Nello stesso modo si troverebbe:

$$
(18)\left\{\begin{aligned}
&v_s(\mu_1) \leq G_{s-1} - \frac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\left\{\int_{\sigma_v} b'_{11}\, d\sigma - \int_{\eta'_1+\eta_2} |a'_{11}|\, d\sigma - \int_{\xi'_1+\xi_2} |c'_{11}|\, d\sigma\right\} \\
&v_s(\mu_2) \geq K_{s-1} + \frac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\left\{\int_{\sigma'_v} b'_{12}\, d\sigma - \int_{\zeta_1+\zeta'_2} |a'_{12}|\, d\sigma - \int_{\lambda_1+\lambda'_2} |c'_{12}|\, d\sigma\right\} \\
&v_s(\mu_1) - v_s(\mu_2) \leq (G_{s-1}-K_{s-1})\left[1 - \frac{1}{4\pi}\left\{-\int_{\eta'_1+\eta_2} |a'_{11}| d\sigma - \int_{\zeta_1+\zeta'_2} |a'_{12}| d\sigma + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \int_{\sigma_v} b'_{11}\, d\sigma + \int_{\sigma'_v} b'_{12}\, d\sigma - \int_{\xi'_1+\xi_2} |c'_{11}|\, d\sigma - \int_{\lambda_1+\lambda'_2} |c'_{12}|\, d\sigma\right\}\right] \\
&w_s(\mu_1) \leq G_{s-1} - \frac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\left\{\int_{\sigma_w} c'_{21}\, d\sigma - \int_{\tau'_1+\tau_2} |a'_{21}|\, d\sigma - \int_{\beta'_1+\beta_2} |b'_{21}|\, d\sigma\right\} \\
&w_s(\mu_2) \geq K_{s-1} + \frac{G_{s-1}-K_{s-1}}{4\pi}\left\{\int_{\sigma'_w} c'_{22}\, d\sigma - \int_{\gamma_1+\gamma'_2} |a'_{22}|\, d\sigma - \int_{\delta_1+\delta'_2} |b'_{22}|\, d\sigma\right\} \\
&w_s(\mu_1) - w_s(\mu_2) \leq (G_{s-1}-K_{s-1})\left[1 - \frac{1}{4\pi}\left\{-\int_{\tau'_1+\tau_2} |a'_{21}| d\sigma - \int_{\gamma_1+\gamma'_2} |a'_{22}| d\sigma - \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \int_{\beta'_1+\beta_2} |b'_{21}|\, d\sigma - \int_{\delta_1+\delta'_2} |b'_{22}|\, d\sigma + \int_{\sigma_w} c'_{21}\, d\sigma + \int_{\sigma'_w} c'_{22}\, d\sigma\right\}\right]
\end{aligned}\right.
$$

dove $\eta_1, \eta_2, \eta'_1, \eta'_2$; $\zeta_1, \zeta_2, \zeta'_1, \zeta'_2$; $\xi_1, \xi_2, \xi'_1, \xi'_2$; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_1, \lambda'_2$; $\tau_1, \tau_2, \tau'_1, \tau'_2$; .... hanno un significato analogo ai simboli $\omega_1, \omega_2, \omega'_1, \omega'_2$: ....

Poichè i punti μ_1, μ_2 possono essere due punti qualunque di σ, avremo certamente, come risulta dalle (17), (18):

$$G_s \leq G_{s-1} - \frac{G_{s-1} - K_{s-1}}{4\pi} \left\{ \int_{\sigma_u} a'_{01}\, d\sigma - \int_{\omega'_1+\omega_2} |b'_{01}|\, d\sigma - \int_{\nu'_1+\nu_2} |c'_{01}|\, d\sigma \right\}$$

$$G_s \leq G_{s-1} - \frac{G_{s-1} - K_{s-1}}{4\pi} \left\{ \int_{\sigma_v} b'_{11}\, d\sigma - \int_{\eta'_1+\eta_2} |a'_{11}|\, d\sigma - \int_{\xi'_1+\xi_2} |c'_{11}|\, d\sigma \right\}$$

$$G_s \leq G_{s-1} - \frac{G_{s-1} - K_{s-1}}{4\pi} \left\{ \int_{\sigma_w} c'_{21}\, d\sigma - \int_{\tau'_1+\tau_2} |a'_{21}|\, d\sigma - \int_{\beta'_1+\beta_2} |b'_{21}|\, d\sigma \right\}$$

$$K_s \geq K_{s-1} + \frac{G_{s-1} - K_{s-1}}{4\pi} \left\{ \int_{\sigma'_u} a'_{02}\, d\sigma - \int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2} |b'_{02}|\, d\sigma - \int_{\rho_1+\rho'_2} |c'_{02}|\, d\sigma \right\}$$

$$K_s \geq K_{s-1} + \frac{G_{s-1} - K_{s-1}}{4\pi} \left\{ \int_{\sigma'_v} b'_{12}\, d\sigma - \int_{\zeta_1+\zeta'_2} |a'_{12}|\, d\sigma - \int_{\lambda_1+\lambda'_2} |c'_{12}|\, d\sigma \right\}$$

$$K_s \geq K_{s-1} + \frac{G_{s-1} - K_{s-1}}{4\pi} \left\{ \int_{\sigma'_w} c'_{22}\, d\sigma - \int_{\gamma_1+\gamma'_2} |a'_{22}|\, d\sigma - \int_{\delta_1+\delta'_2} |b'_{22}|\, d\sigma \right\}$$

$$G_s - K_s \leq (G_{s-1} - K_{s-1}) \left[1 - \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{\sigma_u} a'_{01}\, d\sigma + \int_{\sigma'_u} a'_{02}\, d\sigma - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_{\omega'_1+\omega_2} |b'_{01}|\, d\sigma - \int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2} |b'_{02}|\, d\sigma - \int_{\nu'_1+\nu_2} |c'_{01}|\, d\sigma - \int_{\rho_1+\rho'_2} |c'_{02}|\, d\sigma \right\} \right]$$

$$G_s - K_s \leq (G_{s-1} - K_{s-1}) \left[1 - \frac{1}{4\pi} \left\{ - \int_{\eta'_1+\eta_2} |a'_{11}|\, d\sigma - \int_{\zeta_1+\zeta'_2} |a'_{12}|\, d\sigma + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{\sigma_v} b'_{11}\, d\sigma + \int_{\sigma'_v} b'_{12}\, d\sigma - \int_{\xi'_1+\xi_2} |c'_{11}|\, d\sigma - \int_{\lambda_1+\lambda'_2} |c'_{12}|\, d\sigma \right\} \right]$$

$$G_s - K_s \leq (G_{s-1} - K_{s-1}) \left[1 - \frac{1}{4\pi} \left\{ - \int_{\tau'_1+\tau_2} |a'_{21}|\, d\sigma - \int_{\gamma_1+\gamma'_2} |a'_{22}|\, d\sigma - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{\beta'_1+\beta_2} |b'_{21}|\, d\sigma - \int_{\delta_1+\delta'_2} |b'_{22}|\, d\sigma + \int_{\sigma_w} c'_{21}\, d\sigma + \int_{\sigma'_w} c'_{22}\, d\sigma \right\} \right].$$

Se facciamo $\alpha = 0$, le espressioni precedenti si riducono alle altre più semplici:

$$G_s \leq G_{s-1} - \frac{G_{s-1} - K_{s-1}}{4\pi} \int_{\sigma_1} \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n}\, d\sigma$$

$$K_s \geq K_{s-1} + \frac{G_{s-1} - K_{s-1}}{4\pi} \int_{\sigma_2} \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial n}\, d\sigma$$

$$G_s - K_s \leq (G_{s-1} - K_{s-1}) \left[1 - \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{\sigma_1} \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial n}\, d\sigma + \int_{\sigma_2} \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial n}\, d\sigma \right\} \right],$$

$$(\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma)$$

dove r_1, r_2 sono rispettivamente le distanze contate a partire dai due punti μ_1, μ_2; e quindi si avrà:

$$G_s \leq G_{s-1}\ , \quad K_s \geq K_{s-1}\ ,$$

$$G_s - K_s \leq \lambda\, (G_{s-1} - K_{s-1})\ ,$$

dove, come è noto, si ha $\lambda < 1$.

Le serie (8) ci dànno in questo caso tre funzioni armoniche, che prendono sulla superficie σ i valori arbitrariamente dati $u(m) - C$, $v(m) - C$, $w(m) - C$.

Se è $\alpha \neq 0$, affinchè siano verificate le (10), deve verificarsi una disuguaglianza almeno per ognuna delle seguenti tre terne di diseguaglianze:

$$
(19)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int_{\sigma_u} a'_{01}\, d\sigma - \int_{\omega'_1+\omega_2} |b'_{01}|\, d\sigma - \int_{\nu'_1+\nu_2} |c'_{01}|\, d\sigma \geq 0\\
&\int_{\sigma_v} b'_{11}\, d\sigma - \int_{\eta'_1+\eta_2} |a'_{11}|\, d\sigma - \int_{\xi'_1+\xi_2} |c'_{11}|\, d\sigma \geq 0\\
&\int_{\sigma_w} c'_{21}\, d\sigma - \int_{\tau'_1+\tau_2} |a'_{21}|\, d\sigma - \int_{\beta'_1+\beta_2} |b'_{21}|\, d\sigma \geq 0
\end{aligned}\right. .
$$

$$
(20)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int_{\sigma'_u} a'_{02}\, d\sigma - \int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2} |b'_{02}|\, d\sigma - \int_{\rho_1+\rho'_2} |c'_{02}|\, d\sigma \geq 0\\
&\int_{\sigma'_v} b'_{12}\, d\sigma - \int_{\zeta_1+\zeta'_2} |a'_{12}|\, d\sigma - \int_{\lambda_1+\lambda'_2} |c'_{12}|\, d\sigma \geq 0\\
&\int_{\sigma'_w} c'_{22}\, d\sigma - \int_{\gamma_1+\gamma'_2} |a'_{22}|\, d\sigma - \int_{\delta_1+\delta'_2} |b'_{22}|\, d\sigma \geq 0
\end{aligned}\right.
$$

$$
(21)\left\{\begin{aligned}
&\int_{\sigma_u} a'_{01} d\sigma + \int_{\sigma'_u} a'_{02} d\sigma - \int_{\omega'_1+\omega_2} |b'_{01}| d\sigma - \int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2} |b'_{02}| d\sigma - \int_{\nu'_1+\nu_2} |c'_{01}| d\sigma - \int_{\rho_1+\rho'_2} |c'_{02}|\, d\sigma > 0\\
&\int_{\sigma_v} b'_{11}\, d\sigma + \int_{\sigma'_v} b'_{12}\, d\sigma - \int_{\eta'_1+\eta_2} |a'_{11}| d\sigma - \int_{\zeta_1+\zeta'_2} |a'_{12}| d\sigma - \int_{\xi'_1+\xi_2} |c'_{11}|\, d\sigma - \int_{\lambda_1+\lambda'_2} |c'_{12}|\, d\sigma > 0\\
&\int_{\sigma_w} c'_{21}\, d\sigma + \int_{\sigma'_w} c'_{22}\, d\sigma - \int_{\tau'_1+\tau_2} |a'_{21}| d\sigma - \int_{\gamma_1+\gamma'_2} |a'_{22}|\, d\sigma - \int_{\beta'_1+\beta_2} |b'_{21}|\, d\sigma - \int_{\delta_1+\delta'_2} |b'_{22}|\, d\sigma > 0,
\end{aligned}\right.
$$

le quali divise per il fattore positivo $\frac{2}{\alpha+2}$, poichè α è negativo, si possono scrivere:

$$
(19')\left\{\begin{aligned}
&\int_{\sigma_u}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\alpha\left\{\int_{\sigma_u}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_u}\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\right.\\
&\left.\quad+\frac{3}{2}\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\,\frac{\partial r_1}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\,\frac{\partial r_1}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma\right\}\geqq 0,\\
&\int_{\sigma_v}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\alpha\left\{\int_{\sigma_v}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_v}\left(\frac{\partial r_1}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\right.\\
&\left.\quad+\frac{3}{2}\int_{\xi'_1+\xi_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial y}\,\frac{\partial r_1}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\eta'_1+\eta_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial y}\,\frac{\partial r_1}{\partial x}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma\right\}\geqq 0,\\
&\int_{\sigma_w}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\alpha\left\{\int_{\sigma_w}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_w}\left(\frac{\partial r_1}{\partial z}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\right.\\
&\left.\quad+\frac{3}{2}\int_{\tau'_1+\tau_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial z}\,\frac{\partial r_1}{\partial x}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\beta'_1+\beta_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial z}\,\frac{\partial r_1}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}\,d\sigma\right\}\geqq 0;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(20')\left\{\begin{aligned}
&\int_{\sigma'_u}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\alpha\left\{\int_{\sigma'_u}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma'_u}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\right.\\
&\left.\quad+\frac{3}{2}\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\,\frac{\partial r_2}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\,\frac{\partial r_2}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma\right\}\geqq 0,\\
&\int_{\sigma'_v}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\alpha\left\{\int_{\sigma'_v}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma'_v}\left(\frac{\partial r_2}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\right.\\
&\left.\quad+\frac{3}{2}\int_{\lambda_1+\lambda'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial y}\,\frac{\partial r_2}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\zeta_1+\zeta'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial y}\,\frac{\partial r_2}{\partial x}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma\right\}\geqq 0,\\
&\int_{\sigma'_w}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\alpha\left\{\int_{\sigma'_w}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma'_w}\left(\frac{\partial r_2}{\partial z}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\right.\\
&\left.\quad+\frac{3}{2}\int_{\gamma_1+\gamma'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial z}\,\frac{\partial r_2}{\partial x}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\delta_1+\delta'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial z}\,\frac{\partial r_2}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}\,d\sigma\right\}\geqq 0;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(21')\left\{
\begin{aligned}
&\int_{\sigma_u}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\sigma'_u}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\alpha\Big\{\int_{\sigma_u}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\sigma'_u}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma-\\
&\quad-\frac{3}{2}\int_{\sigma_u}\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma'_u}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\\
&\quad+\frac{3}{2}\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\\
&\quad+\frac{3}{2}\int_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma\Big\}>0,\\
&\int_{\sigma_v}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\sigma'_v}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\alpha\Big\{\int_{\sigma_v}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\sigma'_v}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma-\\
&\quad-\frac{3}{2}\int_{\sigma_v}\left(\frac{\partial r_1}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma'_v}\left(\frac{\partial r_2}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\\
&\quad+\frac{3}{2}\int_{\xi'_1+\xi_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial y}\frac{\partial r_1}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\lambda_1+\lambda'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial y}\frac{\partial r_2}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\\
&\quad+\frac{3}{2}\int_{\eta'_1+\eta_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial y}\frac{\partial r_1}{\partial x}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\zeta_1+\zeta'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial y}\frac{\partial r_2}{\partial x}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma\Big\}>0,\\
&\int_{\sigma_w}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\sigma'_w}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\alpha\Big\{\int_{\sigma_w}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\sigma'_w}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma-\\
&\quad-\frac{3}{2}\int_{\sigma_w}\left(\frac{\partial r_1}{\partial z}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma'_w}\left(\frac{\partial r_2}{\partial z}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\\
&\quad+\frac{3}{2}\int_{\tau'_1+\tau_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial z}\frac{\partial r_1}{\partial x}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\gamma_1+\gamma'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial z}\frac{\partial r_2}{\partial x}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\\
&\quad+\frac{3}{2}\int_{\beta'_1+\beta_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial z}\frac{\partial r_1}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\delta_1+\delta'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial z}\frac{\partial r_2}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma\Big\}>0.
\end{aligned}
\right.
$$

Per cui se, scomposta comunque la superficie σ in tante regioni finite e diverse da zero σ_1, σ_2; σ'_1, σ'_2; σ''_1, σ''_2 tali che $\sigma_1+\sigma_2=\sigma'_1+\sigma'_2=\sigma''_1+\sigma''_2=\sigma$, accade che, scelti convenientemente gli assi, le espressioni:

$$\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_1}\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma,$$

$$\int_{\sigma_2}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_2}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma,$$

$$\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\sigma_2}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_1}\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_2}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+$$
$$+\frac{3}{2}\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+$$
$$+\frac{3}{2}\int_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\frac{\partial r_1}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\frac{\partial r_2}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma$$

$$\left\{\begin{matrix}\omega_1+\omega_2=\sigma'_1\ , & \omega'_1+\omega'_2=\sigma'_2\ ; & \varepsilon_1+\varepsilon_2=\sigma'_1\ , & \varepsilon'_1+\varepsilon'_2=\sigma'_2\,; \\ \nu_1+\nu_2=\sigma''_1\ , & \nu'_1+\nu'_2=\sigma''_2\ ; & \rho_1+\rho_2=\sigma''_1\ , & \rho'_1+\rho'_2=\sigma''_2\end{matrix}\right\}$$

sono sempre nulle o negative, avremo che una almeno delle (19′), una almeno delle (20′) ed una almeno delle (21′) saranno certamente verificate per tutti i valori negativi di α, qualunque sia il valore intero e positivo dell'indice s; e quindi le (10) varranno per tutti i valori interi e positivi di s e senza alcuna limitazione riguardo ai valori che può prendere α. Nel caso contrario le (10) varranno certamente per tutti quei valori di α, i quali mantenendosi tra 0 e -1 sono superiori a tutte le espressioni della forma:

$$-\frac{A}{B},$$

dove:

$$A=\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\int_{\sigma_2}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma\ ,\quad B=\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+$$

$$+\int_{\sigma_2}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_1}\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_2}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+$$

$$+\frac{3}{2}\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\ \frac{\partial r_1}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\ \frac{\partial r_2}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+$$

$$+\frac{3}{2}\int_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\ \frac{\partial r_1}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\ \frac{\partial r_2}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma,$$

che sono finite e negative; e maggiori od uguali a quelle delle espressioni delle due forme:

$$-\frac{\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma}{\int_{\sigma_1}\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_1}\left(\frac{\partial r_1}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\omega'_1+\omega_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\ \frac{\partial r_1}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\nu'_1+\nu_2}\left|\frac{\partial r_1}{\partial x}\ \frac{\partial r_1}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_1}}{\partial n}d\sigma},$$

$$-\frac{\int_{\sigma_2}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma}{\int_{\sigma_2}\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma-\frac{3}{2}\int_{\sigma_2}\left(\frac{\partial r_2}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{2}\int_{\varepsilon_1+\varepsilon'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\ \frac{\partial r_2}{\partial y}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma+\frac{3}{3}\int_{\rho_1+\rho'_2}\left|\frac{\partial r_2}{\partial x}\ \frac{\partial r_2}{\partial z}\right|\frac{\partial\frac{1}{r_2}}{\partial n}d\sigma},$$

che sono pure finite e negative.

Quantunque il limite inferiore di α non venga così fissato, pure possiamo dire che, essendo σ_1 e σ_2 sempre diverse dallo zero, il problema del §. 2 per α quantità negativa diversa da zero ed abbastanza piccola in valore assoluto, ossia per a^2 abbastanza vicino a b^2, si risolve sempre con le serie (8).