Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
*Classe di Scienze*

Cornelia Fabri

**Sulla teorica dei moti vorticosi nei fluidi incompressibili**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série*, tome 7 (1895), exp. nº 4, p. 1-35

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1895_1_7__A4_0>

CORNELIA FABRI

SULLA

# TEORICA DEI MOTI VORTICOSI

NEI

# FLUIDI INCOMPRESSIBILI

Nello studiare la dinamica dei fluidi perfetti, Helmholtz (*) ha decomposto il movimento di ogni particella fluida in tre movimenti elementari cioè, in una traslazione, in una rotazione ed in un movimento detto, da Thomson e Tait, pura deformazione che è il risultato di tre dilatazioni o contrazioni subìte dalla particella nella direzione degli assi principali di una superficie di secondo grado. Le tre componenti di questo ultimo movimento, come è noto, sono date dalle derivate parziali rispetto ad $x$ $y$ $z$ di una funzione omogenea di secondo grado. Helmholtz giunge a questa decomposizione studiando i soli termini di primo grado nello sviluppo in serie di Taylor delle componenti $u$ , $v$ , $w$ della velocità, considerate quali funzioni delle coordinate.

Rowland, nell'American Journal of Mathematics del Settembre 1880, pubblicava una interessante memoria nella quale si occupava di certi movimenti che provengono da alcune parti dei termini di grado superiore al primo che appariscono nello sviluppo anzidetto; però Rowland non con-

(*) Wissenschaftliche Abhandlungen, Hydrodynamik.

sidera tutti i termini di un dato grado e poco si occupa di ricercare il significato cinematico dei moti che prende a studiare.

Ricerche più complete, limitatamente ai termini di 2.° grado, sono state fatte dal Boggio-Lera e pubblicate in questi annali nel 1887. Egli, in fatto, ha considerato tutti i termini di secondo grado ed è giunto a decomporre il moto di una particella fluida in sei movimenti, tre dei quali, dovuti ai termini di primo grado, sono quelli medesimi indicati dall' Helmholtz. Gli altri tre movimenti, che provengono dai termini di secondo grado, sono stati dallo stesso Boggio-Lera denominati flessione, torsione e deformazione di secondo grado con potenziale. Il primo di questi movimenti, che corrisponde a quello che Rowland chiama *vortices of the vortices* ha una stretta relazione colla rotazione di Helmholtz, perchè i parametri che individuano la flessione sono composti con quelli relativi alla rotazione come questi sono formati dalle componenti della velocità. Ma i moti di flessione sono assai diversi da quelli di rotazione, perchè mentre nei moti rotatorii i punti si muovono in piani normali all'asse di rotazione, nelle flessioni invece si muovono in piani che passano per una retta, detta asse di flessione. Il secondo movimento è il risultato di tre torsioni intorno a rette ortogonali passanti per l'origine delle coordinate e finalmente le componenti del terzo movimento sono le derivate rispetto a $x$, $y$, $z$ di una funzione omogenea di terzo grado.

In questo breve ed incompleto lavoro ho avuto in animo di estendere o proseguire alcune delle indicate ricerche di Helmholtz, Rowland e Boggio-Lera, rivolgendo lo studio ad un numero qualunque $m$ di termini nello accennato sviluppo in serie di Taylor delle componenti della velocità. Ho cominciato collo studiare le deformazioni che riceve un mezzo continuo, quando ai suoi punti si attribuiscono degli spostamenti le di cui componenti sono funzioni omogenee di qualunque grado $m$ delle coordinate, decomponendo questo spostamento in tre parti, una delle quali rappresenti un moto di Rowland e le altre due parti siano tali che, quando $m=1$, rappresentino una traslazione ed una *pura deformazione*, e quando $m=2$ rendino la mia decomposizione coincidente con quella fatta dal Boggio-Lera. In questa guisa mi è riuscito facile trovare il significato cinematico dei moti di Rowland, il qual significato è forse più semplice di quello che a prima vista può credersi. Dipoi ho adoperato questa decomposizione per studiare il movimento di una particella fluida, decomponendo ogni termine dello sviluppo in serie di Taylor delle componenti della velocità nel modo precedentemente indicato cioè, in un movimento di Rowland, in altro movimento che ammette potenziale ed in un terzo movimento non rappresentabile con vettori; così ho decomposto il moto della particella fluida in 3 $m$ moti, vale a dire, in una traslazione, in $m$ movimenti che hanno per componenti le derivate rispetto ad $x$, $y$, $z$ di funzioni omogenee di $2^0$, $3^0$ $(m+1)^{\text{esimo}}$ grado rispettivamente, in $m-1$ movimenti di natura assai complicata non rappresentabili con vettori e finalmente in altri $m$ moti che in sostanza sono quelli stessi studiati dal Rowland, e che hanno, come dimostrerò in seguito, stretta analogia, o colle rotazioni di Helmholtz, o colle flessioni del Boggio-Lera, secondo che le loro componenti provengono da termini di grado dispari o di grado pari.

Ma, innanzi di esporre dettagliatamente i risultati del mio studio, sento il dovere di porgere i più vivi ringraziamenti al chiarissimo Prof. Vito Volterra che mi ha indirizzato in queste ricerche ed ha avuto la bontà di rivedere tutti i miei calcoli.

## §. I.

Siano $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ le componenti di uno spostamento attribuito ai punti di un mezzo continuo; se si suppongono funzioni omogenee di grado $m$ delle coordinate, sarà

$$\delta x = \sum \frac{m\,!}{r\,!\,s\,!\,t\,!}\,U_{r\,,\,s\,,\,t}\,x^r\,y^s\,z^t$$

$$\delta y = \sum \frac{m\,!}{r\,!\,s\,!\,t\,!}\,V_{r\,,\,s\,,\,t}\,x^r\,y^s\,z^t$$

$$\delta z = \sum \frac{m\,!}{r\,!\,s\,!\,t\,!}\,W_{r\,,\,s\,,\,t}\,x^r\,y^s\,z^t$$

e $\sum$ rappresenterà una somma estesa a tutte le possibili combinazioni di valori interi e positivi di $r$, $s$, $t$ pei quali è $r+s+t=m$, non escluso che alcune delle $r$, $s$, $t$ siano zero.

Primieramente si supponga $m$ dispari della forma $2\,n+1$, e posto per brevità

$$2\,h+2\,k+2\,t=2\,n$$

$$\frac{n\,!}{(2\,n+1\,)!}\cdot\frac{2h\,!}{h!}\cdot\frac{2\,k\,!}{k!}\cdot\frac{2\,t\,!}{t\,!}=\varepsilon_{h\;k\cdot t}$$

$$\frac{2\,h\,!\,2\,k\,!\,2\,t\,!}{(2\,n+1)\,!}=\lambda_{h\cdot k\cdot t}$$

$$\frac{n\,!}{h\,!\,k\,!\,t\,!}\,\mu_{h\cdot k\cdot t}$$

$$\sum\varepsilon_{h\,\cdot\,k\,\cdot\,t}\,\mu_{h\,\cdot\,k\,\cdot\,t}\,(m+1-2\,h)=$$

$$=\sum\varepsilon_{h\,\cdot\,k\,\cdot\,t}\,\mu_{h\,\cdot\,k\,\cdot\,t}\,(m+1-2\,k)=$$

$$=\sum\varepsilon_{h\,\cdot\,k\,\cdot\,t}\,\mu_{h\,\cdot\,k\,\cdot\,t}\,(m+1-2\,t)=\delta_{2\,n+1}$$

si decompongano i coefficienti $U_{r\,\cdot\,s\,\cdot\,t}\cdot V_{r\,\cdot\,s\,\cdot\,t}\cdot W_{r\,\cdot\,s\,\cdot\,t}$ in tre parti nel modo seguente.

$$U_{m\cdot 0\cdot 0}=H_{2\,n+2\,\cdot 0\,\cdot 0}$$

$$U_{2\,h+1\,\cdot 2\,k\cdot 2\,t}=H_{2\,h+2\,\cdot 2\,k\cdot 2\,t}+\lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2\,h+1)\,A_{2\,h+1\,\cdot 2\,k\cdot 2\,t}$$

$$U_{2\,h+1\,\cdot 2\,k+1\,\cdot 2\,t-1}=H_{2\,h+2\,\cdot 2\,k+1\,\cdot 2\,t-1}+\frac{(2h+1)(2k+1)}{2\,t}\lambda_{h\cdot k\cdot t}A_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2\,t-1}$$

$$U_{2\,h\cdot 2\,k+1\,\cdot 2\,t}=$$
$$=(-1)^n r_{2\,n+1}(2k+1)\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}+H_{2\,h+1\,\cdot 2\,k+1\,\cdot 2\,t}+(2k+1)\lambda_{h\cdot k\cdot t}A_{2\,h\cdot 2\,k+1\,\cdot 2\,t}$$

$$U_{2\,h\cdot 2\,k\cdot 2\,t+1}=$$
$$=(-1)^{n+1}q_{2\,n+1}(2t+1)\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}+H_{2\,h+1\cdot 2\,k\cdot 2\,t+1}+(2t+1)\lambda_{h\cdot k\cdot t}A_{2\,h\cdot 2\,k\cdot 2\,t+1}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&V_{0\cdot m\cdot 0} = H_{0\cdot 2n+2\cdot 0}\\
&V_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t} = H_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t} + (2k+1)\lambda_{h\cdot k\cdot t}B_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t}\\
&V_{2h-1\cdot 2k+1\cdot 2t+1} = H_{2h-1\cdot 2k+2\cdot 2t+1} + \frac{(2t+1)(2k+1)}{2h}\lambda_{h\cdot k\cdot t}B_{2h-1\cdot 2k+1\cdot 2t+1}\\
&V_{2h\cdot 2k\cdot 2t+1} =\\
&=(-1)^n p_{2n+1}(2t+1)\varepsilon_{h\cdot k\cdot t} + H_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1} + (2t+1)\lambda_{h\cdot k\cdot t}B_{2h\cdot 2k\cdot 2t+1}\\
&V_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t} =\\
&=(-1)^{n+1} r_{2n+1}(2h+1)\varepsilon_{h\cdot k\cdot t} + H_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t} + (2h+1)\lambda_{h\cdot k\cdot t}B_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t}
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&W_{0\cdot 0\cdot m} = H_{0\cdot 0\cdot 2n+2}\\
&W_{2h\cdot 2k\cdot 2t+1} = H_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2} + (2t+1)\lambda_{h\cdot k\cdot t}C_{2h\cdot 2k\cdot 2t+1}\\
&W_{2h+1\cdot 2k-1\cdot 2t+1} = H_{2h+1\cdot 2k-1\cdot 2t+2} + \frac{(2h+1)(2t+1)}{2k}\lambda_{h\cdot k\cdot t}C_{2h+1\cdot 2k-1\cdot 2t+1}\\
&W_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t} =\\
&=(-1)^n q_{2n+1}(2h+1)\varepsilon_{h\cdot k\cdot t} + H_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1} + (2h+1)\lambda_{h\cdot k\cdot t}C_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t}\\
&W_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t} =\\
&=(-1)^{n+1} p_{2n+1}(2k+1)\varepsilon_{h\cdot k\cdot t} + H_{2h,2k+1\cdot 2t+1} + (2k+1)\lambda_{h\cdot k\cdot t}C_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t}
\end{aligned}\right.$$

con

$$\begin{gathered}
A_{r\cdot s\cdot t} + B_{r+1\cdot s-1\cdot t} + C_{r+1\cdot s\cdot t-1} = 0\\
\sum \varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\{(2k+1)C_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t} - (2t+1)B_{2h\cdot 2k\cdot 2t+1}\} = 0\\
\sum \varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\{(2t+1)A_{2h\cdot 2k\cdot 2t+1} - (2h+1)C_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t}\} = 0\\
\sum \varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\{(2h+1)B_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t} - (2k+1)A_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t}\} = 0,
\end{gathered}$$

essendo $\sum$ il simbolo di una somma estesa a tutte le possibili combinazioni di valori interi e positivi di $h$, $k$, $t$ pei quali è $2h + 2k + 2t = 2n$. Le precedenti equazioni risolute rispetto alle $p_{2n+1}$, $q_{2n+1}$, $r_{2n+1}$ alle H ed alle A, B, C danno:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
p_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{\delta_{2n+1}} \sum \mu_{h \cdot k \cdot t} \left\{ V_{2h \cdot 2k \cdot 2t+1} - W_{2h \cdot 2k+1 \cdot 2t} \right\} \\
q_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{\delta_{2n+1}} \sum \mu_{h \cdot k \cdot t} \left\{ W_{2h+1 \cdot 2k \cdot 2t} - U_{2h \cdot 2k \cdot 2t+1} \right\} \\
r_{2n+1} &= \frac{(-1)^n}{\delta_{2n+1}} \sum \mu_{h \cdot k \cdot t} \left\{ U_{2h \cdot 2k+1 \cdot 2t} - V_{2h+1 \cdot 2k \cdot 2t} \right\} \\
H_{lfg} &= \frac{1}{2n+2} \left\{ l\, U_{l-1 \cdot f \cdot g} + f\, V_{l \cdot f-1 \cdot g} + g\, W_{l \cdot f \cdot g-1} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
A_{2h+1 \cdot 2k \cdot 2t} = \frac{1}{(2n+2)(2h+1)\lambda_{h \cdot k \cdot t}} \left\{ (2n-2h) U_{2h+1 \cdot 2k \cdot 2t} - 2k\, V_{2h+2 \cdot 2k-1 \cdot 2t} - 2t\, W_{2h+2 \cdot 2k \cdot 2t-1} \right\}
$$

$$
A_{2h+1 \cdot 2k+1 \cdot 2t-1} = \frac{2t}{(2n+2)(2h+1)(2k+1)\lambda_{h \cdot k \cdot t}} \left\{ (2n-2h) U_{2h+1 \cdot 2k+1 \cdot 2t-1} - (2k+1) V_{2h+2 \cdot 2k \cdot 2t-1} - (2t-1) W_{2h+2 \cdot 2k+1 \cdot 2t-2} \right\}
$$

$$
A_{2h \cdot 2k+1 \cdot 2t} = \frac{1}{(2n+2)(2k+1)\lambda_{h \cdot k \cdot t}} \left\{ (2n-2h+1) U_{2h \cdot 2k+1 \cdot 2t} - (2k+1) V_{2h+1 \cdot 2k \cdot 2t} - 2t\, W_{2h+1 \cdot 2k+1 \cdot 2t-1} \right\} + \frac{\mu_{h \cdot k \cdot t}}{\delta_{2n+1}} \sum \mu_{h \cdot k \cdot t} \left( V_{2h+1 \cdot 2k \cdot 2t} - U_{2h \cdot 2k+1 \cdot 2t} \right)
$$

$$
A_{2h \cdot 2k \cdot 2t+1} = \frac{1}{(2n+2)(2t+1)\lambda_{h \cdot k \cdot t}} \left\{ (2n-2h+1) U_{2h \cdot 2k \cdot 2t+1} - 2k V_{2h+1 \cdot 2k-1 \cdot 2t+1} - (2t+1) W_{2h+1 \cdot 2k \cdot 2t} \right\} - \frac{\mu_{h \cdot k \cdot t}}{\delta_{2n+1}} \sum \mu_{h \cdot k \cdot t} \left( U_{2h \cdot 2k \cdot 2t+1} - W_{2h+1 \cdot 2k \cdot 2t} \right)
$$

$$B_{2h\,.\,2k+1\,.\,2t} =$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2k+1)\lambda_{h.k.t}} \left\{ -2h\,U_{2h-1.2k+2.2t} + (2n-2k)V_{2h.2k+1.2t} - \right. \\ \left. -2t\,W_{2h.2k+2.2t-1} \right\}$$

$$B_{2h-1\,.\,2k+1\,.\,2t+1} =$$

$$= \frac{2h}{(2n+2)(2k+1)(2t+1)\lambda_{h.k.t}} \left\{ -(2h-1)U_{2h-2.2k+2.2t+1} + (2n-2k)V_{2h-1.2k+1.2t+1} - \right. \\ \left. -(2t+1)W_{2h-1.2k+2.2t} \right\}$$

$$B_{2h\,.\,2k\,.\,2t+1} =$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2t+1)\lambda_{h.k.t}} \left\{ -2h\,U_{2h-1.2k+1.2t+1} + (2n-2k+1)V_{2h.2k.2t+1} - \right. \\ \left. -(2t+1)W_{2h.2k+1.2t} \right\}$$

$$+ \frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+1}} \sum \mu_{h.k.t} (W_{2h.2k+1.2t} - V_{2h.2k.2t+1})$$

$$B_{2h+1\,.\,2k\,.\,2t} =$$

$$= \frac{1}{(2n+2)(2h+1)\lambda_{h.k.t}} \left\{ -(2h+1)U_{2h.2k+1.2t} + (2n-2k+1)V_{2h+1.2k.2t} - \right. \\ \left. -2t\,W_{2h+1.2k+1.2t-1} \right\}$$

$$- \frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+1}} \sum \mu_{h.k.t} (V_{2h+1.2k.2t} - U_{2h.2k+1.2t})$$

$C_{2h\,.\,2k\,.\,2t+1} =$

$$=\frac{1}{(2n+2)(2t+1)\lambda_{h.k.t}}\left\{-2hU_{2h-1.2k.2t+2}-2kV_{2h.2k-1.2t+2}+\right.$$
$$\left.+(2n-2t)W_{2h.2k.2t+1}\right\}$$

$C_{2h+1\,.\,2k-1\,.\,2t+1} =$

$$=\frac{2k}{(2n+2)(2h+1)(2t+1)\lambda_{h.k.t}}\left\{-(2h+1)U_{2h.2k-1.2t+2}-\right.$$
$$\left.-(2k-1)V_{2h+1.2k-2.2t+2}+(2n-2t)W_{2h+1.2k-1.2t+1}\right\}$$

$C_{2h+1\,.\,2k\,.\,2t} =$

$$=\frac{1}{(2n+2)(2h+1)\lambda_{h.k.t}}\left\{-(2h+1)U_{2h.2k.2t+1}-2kV_{2h+1.2k-1.2t+1}+\right.$$
$$\left.+(2n-2t+1)W_{2h+t.2k.2t}\right\}$$

$$+\frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+1}}\sum\mu_{h.k.t}(U_{2h.2k.2t+1}-W_{2h+1.2k.2t})$$

$C_{2h\,.\,2k+1\,.\,2t} =$

$$=\frac{1}{(2n+2)(2k+1)\lambda_{h.k.t}}\left\{-2hU_{2h-1.2k+1.2t+1}-(2k+1)V_{2h.2k.2t+1}-\right.$$
$$\left.-(2n-2t+1)W_{2h.2k+1.2t}\right\}$$

$$-\frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+1}}\sum\mu_{h.k.t}(W_{2h.2k+1.2t}-V_{2h.2k.2t+1}),$$

quindi lo spostamento $\delta x\ \delta y\ \delta z$ può considerarsi risultante di tre spostamenti $\delta u_1\ \delta v_1\ \delta w_1$ ; $\delta u_2\ \delta v_2\ \delta w_2$ ; $\delta u_3\ \delta v_3\ \delta w_3$ le di cui componenti sono:

$$\left\{\begin{aligned}
\delta u_1 &= \sum \frac{(2\,n+1)!}{(l-1)!f!g!} \mathrm{H}_{l\cdot f\cdot g}\, x^{l-1}\, y^f\, z^g \\
\delta v_1 &= \sum \frac{(2\,n+1)!}{l!(f-1)!g!} \mathrm{H}_{l\cdot f\cdot g}\, x^l\, y^{f-1}\, z^g \\
\delta w_1 &= \sum \frac{(2n+1)!}{l!f!(g-1)!} \mathrm{H}_{l\cdot f\cdot g}\, x^l\, y^f\, z^{g-1} \qquad (*)
\end{aligned}\right.$$

$$(2) \quad \left\{\begin{aligned}
\delta u_2 &= (-1)^n (x^2 + y^2 + z^2)^n (r_{2n+1}\, y - q_{2n+1}\, z) \\
\delta v_2 &= (-1)^n (x^2 + y^2 + z^2)^n (p_{2n+1}\, z - r_{2n+1}\, x) \\
\delta w_2 &= (-1)^n (x^2 + y^2 + z^2)^n (q_{2n+1}\, x - p_{2n+1}\, y)
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\delta u_3 &= \sum \mathrm{A}_{r\cdot s\cdot t}\, x^r\, y^s\, z^t \\
\delta v_3 &= \sum \mathrm{B}_{r\cdot s\cdot t}\, x^r\, y^s\, z^t \\
\delta w_3 &= \sum \mathrm{C}_{r\cdot s\cdot t}\, x^r\, y^s\, z^t\,.
\end{aligned}\right.$$

Il primo di questi spostamenti ammette una funzione potenziale

$$\varphi = \frac{1}{2\,n+2} \sum \frac{(2\,n+2)!}{l\,!\,f\,!\,g\,!} \mathrm{H}_{l\cdot f\cdot g}\, x^l\, y^f\, z^g$$

avendosi

---

(*) Il simbolo $\sum$ che si trova in queste formule denota una somma estesa a tutti i possibili valori interi e positivi di $f$, $g$, $l$ che rendono

$$l + f + g = 2\,n+2\,.$$

$$\delta u_1 = \frac{\delta \varphi}{\delta x} \;,\quad \delta v_1 = \frac{\delta \varphi}{\delta y} \;,\quad \delta w_1 = \frac{\delta \varphi}{\delta z} \,.$$

Il secondo spostamento avviene in una direzione che è normale, tanto al raggio vettore che va all'origine delle coordinate, quanto alla retta di equazioni

$$(3) \qquad \frac{x}{p_{2n+1}} = \frac{y}{q_{2n+1}} = \frac{z}{r_{2n+1}}$$

perchè si ha evidentemente

$$x\,\delta u_2 + y\,\delta v_2 + z\,\delta w_2 = 0$$

$$p_{2n+1}\,\delta u_2 + q_{2n+1}\,\delta v_2 + r_{2n+1}\,\delta w_2 = 0 \,.$$

Esso può considerarsi una rotazione intorno alla retta (3) per la quale rotazione ogni punto subisce uno spostamento proporzionale al prodotto della sua distanza dalla retta (3) per la $2\,n^{esima}$ potenza della distanza del punto medesimo dall'origine delle coordinate. Questo spostamento si dirà una *rotazione di ordine* $2\,n+1$, intorno alla retta suddetta, ed il parametro $\sqrt{p^2_{2n+1} + q^2_{2n+1} + r^2_{2n+1}}$ che misura il rapporto costante, dello spostamento di ogni punto, al prodotto della sua distanza dalla retta (3) per la potenza $2\,n^{esima}$ della sua distanza dall'origine delle coordinate, si prenderà per misura della rotazione. La retta (3) si dirà *asse di rotazione,* e l'origine delle coordinate, *centro di rotazione.*

È facile vedere che i moti rotatorii di ordine qualunque si compongono colla regola del parallelogrammo, quando vengono rappresentati con un segmento che passi pel centro di rotazione, che abbia la direzione dell' asse di rotazione ed una lunghezza misurata dalla costante della rotazione. Infatti se si eseguisce una rotazione d' assi data dalle formole

$$
\begin{aligned}
x &= \alpha_1 \, x_1 + \beta_1 \, y_1 + \gamma_1 \, z_1 \\
y &= \alpha_2 \, x_1 + \beta_2 \, y_1 + \gamma_2 \, z_1 \\
z &= \alpha_3 \, x_1 + \beta_3 \, y_1 + \gamma_3 \, z_1 ,
\end{aligned}
$$

le componenti dello spostamento (2) nel nuovo sistema $x$, $y$, $z$ sono:

$$
\begin{aligned}
\delta x_1 &= (-1)^n (x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2})^n (R_{2n+1} \, y_1 - Q_{2n+1} \, z_1) \\
\delta y_1 &= (-1)^n (x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2})^n (P_{2n+1} \, z_1 - R_{2n+1} \, x_1) \\
\delta z_1 &= (-1)^n (x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2})^n (Q_{2n+1} \, x_1 - P_{2n+1} \, y_1)
\end{aligned}
$$

con

$$
\begin{aligned}
P_{2n+1} &= \alpha_1 \, p_{2n+1} + \alpha_2 \, q_{2n+1} + \alpha_3 \, r_{2n+1} \\
Q_{2n+1} &= \beta_1 \, p_{2n+1} + \beta_2 \, q_{2n+1} + \beta_3 \, r_{2n+1} \\
R_{2n+1} &= \gamma_1 \, p_{2n+1} + \gamma_2 \, q_{2n+1} + \gamma_3 \, r_{2n+1} ;
\end{aligned}
$$

ciò che evidentemente dimostra la enunciata proprietà. Lo spostamento (2) può quindi considerarsi il risultato di tre rotazioni di ordine $2\,n+1$ intorno agli assi $x$, $y$, $z$ misurate rispettivamente dalle costanti $p_{2n+1}$, $q_{2n+1}$, $r_{2n+1}$.

Per avere un'idea maggiormente concreta della deformazione, che subisce un mezzo continuo, quando ai suoi punti si attribuiscono degli spostamenti dati dalle (2) ho ricercato in quali linee si trasformano alcuni particolari sistemi di rette e di circoli. Un calcolo molto semplice, mi ha condotto a concludere che tutte le rette che incontrano l' asse di rotazione si trasformano in linee piane, ed i circoli situati in piani normali all'asse, col centro su di esso, in altri circoli concentrici sullo stesso piano.

Non riesce poi molto difficile riconoscere, che il terzo spostamento non è rappresentabile da vettori componibili colla regola del parallelogrammo.

Se invece $m$ è un numero pari, diverso da zero e della forma $2\,n+2 = 2\,h+2\,k + 2\,t + 2$, essendo $h$, $k$, $t$ positivi o nulli, si ponga:

$$\left\{\begin{aligned}
U_{m\cdot 0\cdot 0} &= H_{2\,n+3\cdot 0\cdot 0}\\
U_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2} &= (-1)^{n+1}\, p_{2\,n+2}\, \varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\, (2t+1)\,(2t+2) + H_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+2} +\\
&\quad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2t+1)\,(2t+2)\, A_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2}\\
U_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t} &= (-1)^{n+1}\, p_{2\,n+2}\, \varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\,(2k+1)\,(2k+2) + H_{2h+1\cdot 2k+2\cdot 2t} +\\
&\quad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2k+1)\,(2k+2)\, A_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t}\\
U_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t} &= (-1)^{n}\, q_{2\,n+2}\, \varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\,(2h+1)\,(2k+1) + H_{2h+2\cdot 2k+1\cdot 2t} +\\
&\quad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2h+1)(2k+1)\, A_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t}\\
U_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1} &= (-1)^{n}\, r_{2\,n+2}\, \varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\,(2h+1)\,(2t+1) + H_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t+1} +\\
&\quad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2h+1)\,(2t+1)\, A_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1}\\
U_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1} &= H_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t+1} + (2k+1)\,(2t+1)\,\lambda_{h\cdot k\cdot t}\, A_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1}
\end{aligned}\right.$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& V_{0\cdot m\cdot 0} = H_{0\cdot 2n+3\cdot 0} \\
& V_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t} = (-1)^{n+1} q_{2n+2}\,\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}(2h+1)(2h+2) + H_{2h+2\cdot 2k+1\cdot 2t} + \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2h+1)(2h+2)\,B_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t} \\
& V_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2} = (-1)^{n+1} q_{2n+2}\,\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\,(2t+1)(2t+2) + H_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+2} + \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2t+1)\,(2t+2)B_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2} \\
& V_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1} = (-1)^{n}\,r_{2n+2}\,\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}(2k+1)(2t+1) + H_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t+1} + \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2k+1)(2t+1)\,B_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1} \\
& V_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t} = (-1)^{n} p_{2n+2}\,\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\,(2h+1)(2k+1) + H_{2h+1\cdot 2k+2\cdot 2t} + \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2h+1)(2k+1)B_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t} \\
& V_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1} = \\
& \qquad = H_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t+1} + (2h+1)(2t+1)\,\lambda_{h\cdot k\cdot t}\,B_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
& W_{0\cdot 0\cdot m} = H_{0\cdot 0\cdot 2n+3} \\
& W_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t} = (-1)^{n+1} r_{2n+2}\,\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\,(2k+1)(2k+2) + H_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t+1} + \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2k+2)(2k+1)\,C_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t} \\
& W_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t} = (-1)^{n+1} r_{2n+2}\,\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}(2h+1)(2h+2) + H_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t+1} + \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2h+1)\,(2h+2)\,C_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t} \\
& W_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1} = (-1)^{n} p_{2n+2}\,\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}(2h+1)(2t+1) + H_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+2} + \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2h+1)(2t+1)C_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1} \\
& W_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1} = (-1)^{n}\,q_{2n+2}\,\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\,(2k+1)(2t+1) + H_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+2} + \\
& \qquad\qquad + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2k+1)(2t+1)C_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1} \\
& W_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t} = \\
& \qquad H_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t+1} + \lambda_{h\cdot k\cdot t}\,(2h+1)(2k+1)\,C_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t}
\end{aligned}
\right.
$$

$$A_{r-1\,\cdot\,s+1\,\cdot\,t}+B_{r\,\cdot\,s\,\cdot\,t}+C_{r\,\cdot\,s+1\,\cdot\,t-1}=0$$

$$\sum\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\{(2k+1)(2k+2)A_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t}-(2h+1)(2t+1)C_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1}-$$
$$-(2h+1)(2k+1)B_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t}+(2t+1)(2t+2)A_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2}\}=0$$

$$\sum\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\{(2t+1)(2t+2)B_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2}-(2k+1)(2h+1)A_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t}-$$
$$-(2k+1)(2t+1)C_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1}+(2h+1)(2h+2)B_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t}\}=0$$

$$\sum\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\{(2h+1)(2h+2)C_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t}-(2t+1)(2k+1)B_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1}-$$
$$-(2h+1)(2t+1)A_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1}+(2k+1)(2k+2)C_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t}\}=0$$

con

$$\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}=\frac{n!}{(2n+2)!}\cdot\frac{2h!}{h!}\cdot\frac{2k!}{k!}\cdot\frac{2t!}{t!}$$

$$\lambda_{h\cdot k\cdot t}=\frac{2h!\,2k!\,2t!}{(2n+2)!}\quad;\quad\mu_{h\cdot k\cdot t}=\frac{n!}{h!\,k!\,t!}\,.$$

Posto per semplicità (*)

$$\sum\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\mu_{h\cdot k\cdot t}\{(2n-2k+3)(2t+1)+(2n-2t+3)(2k+1)\}=$$
$$=\sum\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\mu_{h\cdot k\cdot t}\{(2n-2t+3)(2h+1)+(2n-2h+3)(2t+1)\}=$$
$$=\sum\varepsilon_{h\cdot k\cdot t}\mu_{h\cdot k\cdot t}\{(2n-2h+3)(2k+1)+(2n-2k+3)(2h+1)\}=\delta_{2n+2}\,,$$

---

(*) È opportuno osservare, che il valore qui attribuito a $\delta_{2n+2}$ coll'altro assegnato a $\delta_{2n+1}$ nel principio di questo §, determinano completamente il significato di $\delta_m$ qualunque sia il numero intero rappresentato da $m$.

le precedenti equazioni risolute rispetto a $p_{2n+2}$, $q_{2n+2}$, $r_{2n+2}$ e alle H, A, B, C danno:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
p_{2n+2} &= \frac{(-1)^{n+1}}{\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} \left\{ U_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t} - W_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1} - \right. \\
&\qquad \left. - V_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t} + U_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2} \right\} \\
q_{2n+2} &= \frac{(-1)^{n+1}}{\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} \left\{ V_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2} - U_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t} - \right. \\
&\qquad \left. - W_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1} + V_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t} \right\} \\
r_{2n+2} &= \frac{(-1)^{n+1}}{\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} \left\{ W_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t} - V_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1} - \right. \\
&\qquad \left. - U_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1} + W_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t} \right\}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
H_{l\cdot f\cdot g} = \frac{1}{2n+3} \left\{ l\, U_{l-1\cdot f\cdot g} + f\, V_{l\cdot f-1\cdot g} + g\, W_{l\cdot f\cdot g-1} \right\}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2} &= \\
&= \frac{1}{(2n+3)(2t+1)(2t+2)\lambda_{h\cdot k\cdot t}} \left\{ \begin{array}{l} (2n-2h+2)\, U_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2} - \\ -2k V_{2h+1\cdot 2k-1\cdot 2t+2} - (2t+2) W_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1} \end{array} \right\} \\
&- \frac{\mu_{h\cdot k\cdot t}}{\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} (U_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t} - W_{2h+1.2k.2t+1} - V_{2h+1.2k+1.2t} + U_{2h.2k.2t+2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t} &= \\
&\frac{1}{(2n+3)(2k+1)(2k+2)\lambda_{h\cdot k\cdot t}} \left\{ \begin{array}{l} (2n-2h+2) U_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t} - \\ -(2k+2) V_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t} - 2t\, W_{2h+1\cdot 2k+2\cdot 2t-1} \end{array} \right\} \\
&- \frac{\mu_{h\cdot k\cdot t}}{\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} (U_{2h\cdot 2k+2\cdot 2t} - W_{2h+1.2k.2t+1} - V_{2h+1.2k+1.2t} + U_{2h.2k.2t+2})
\end{aligned}
$$

$$A_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t} =$$

$$=\frac{1}{(2n+3)(2h+1)(2k+1)\lambda_{h.k.t}}\left\{\begin{matrix}(2n-2h+1)\,U_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t}- \\ -(2k+1)V_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t}-2tW_{2h+2\cdot 2k+1\cdot 2t-1}\end{matrix}\right\}$$

$$+\frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+2}}\sum\mu_{h.k.t}\left(V_{2h\cdot 2k\cdot 2t+2}-U_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t}-W_{2h\cdot 2k+1\cdot 2t+1}+V_{2h+2.2k.2t}\right)$$

$$A_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1} =$$

$$=\frac{1}{(2n+3)(2h+1)(2t+1)\lambda_{h.k.t}}\left\{\begin{matrix}(2n-2h+1)U_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1}-2kV_{2h+2\cdot 2k-1\cdot 2t+1}- \\ -(2t+1)\,W_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t}\end{matrix}\right\}$$

$$+\frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+2}}\sum\mu_{h.k.t}\left(W_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t}-V_{2h.2k+1.2t+1}-U_{2h+1\cdot 2k\cdot 2t+1}+W_{2h.2k+2.2t}\right)$$

$$A_{2h\,.\,2k+1\,.\,2t+1} =$$

$$=\frac{1}{(2n+3)(2k+1)(2t+1)\lambda_{h.k.t}}\left\{\begin{matrix}(2n-2h+2)\,U_{2h.2k+1.2t+1}- \\ -(2k+1)V_{2h+1.2k.2t+1}-(2t+1)W_{2h+1.2k+1.2t}\end{matrix}\right\}$$

$$B_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t} =$$

$$=\frac{1}{(2n+3)(2h+1)(2h+2)\lambda_{h.k.t}}\left\{\begin{matrix}-(2h+2)\,U_{2h+1\cdot 2k+1\cdot 2t}+ \\ +(2n-2k+2)\,V_{2h+2\cdot 2k\cdot 2t}-2tW_{2h+2\cdot 2k+1\cdot 2t-1}\end{matrix}\right\}$$

$$-\frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+2}}\sum\mu_{h.k.t}\left\{V_{2h.2k.2t+2}-U_{2h+1.2k+1\cdot 2t}-W_{2h.2k+1.2t+1}+V_{2h+2.2k.2t}\right\}$$

$$B_{2h\,.\,2k.\,2t+2} =$$

$$=\frac{1}{(2n+3)(2t+1)(2t+2)\lambda_{h.k.t}}\left\{\begin{matrix}-2hU_{2h-1.2k+1.2t+2}+(2n-2k+2)V_{2h.2k.2t+2}- \\ -(2t+2)W_{2h.2k+1.2t+1}\end{matrix}\right\}$$

$$-\frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+2}}\sum\mu_{h.k.t}\left(V_{2h.2k.2t+2}-U_{2h+1.2k+1.2t}-W_{2h\,2k+1.2t+1}+V_{2h+2.2k.2t}\right)$$

$$B_{2h\,.\,2k+1\,.\,2t+1} =$$

$$=\frac{1}{(2n+3)(2k+1)(2t+1)\lambda_{h.k.t}}\left\{\begin{matrix}-2hU_{2h-1.2k+2.2t+1}+ \\ +(2n-2k+1)V_{2h.2k+1.2t+1}-(2t+1)W_{2h.2k+2.2t}\end{matrix}\right\}$$

$$+\frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+2}}\sum\mu_{h.k.t}\left\{W_{2h+2.2k.2t}-V_{2h.2k+1.2t+1}-U_{2h+1.2k.2t+1}+W_{2h.2k+2.2t}\right\}$$

$B_{2h+1\,.\,2k+1\,.\,2t} =$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2h+1)(2k+1)\lambda_{h.k.t}} \left\{ \begin{array}{l} -(2h+1)\,U_{2h.2k+2.2t} + \\ +(2n-2k+1)\,V_{2h+1.2k+1.2t} - 2t\,W_{2h+1.2k+2.2t-1} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h.k.t} (U_{2h.2k+2.2t} - W_{2h+1.2k.2t+1} - V_{2h+1.2k+1.2t} + U_{2h.2k.2t+2})$$

$B_{2h+1.2k.2t+1} =$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2h+1)(2t+1)\lambda_{h.k.t}} \left\{ \begin{array}{l} -(2h+1)U_{2h.2k+1.2t+1} + \\ +(2n-2k+2)V_{2h+1.2k.2t+1} - (2t+1)W_{2h+1.2k+1.2t} \end{array} \right\}$$

$C_{2h\,.\,2k+2\,.\,2t} =$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2k+1)(2k+2)\lambda_{h.k.t}} \left\{ \begin{array}{r} -2hU_{2h-1.2k+2.2t+1} - (2k+2)V_{2h.2k+1.2t+1} + \\ +(2n-2t+2)\,W_{2h.2k+2.2t} \end{array} \right\}$$

$$- \frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h.k.t} (W_{2h+2.2k.2t} - V_{2h.2k+1.2t+1} - U_{2h+1.2k.2t+1} + W_{2h.2k+2.2t})$$

$C_{2h+2\,.\,2k\,.\,2t} =$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2h+1)(2h+2)\lambda_{h.k.t}} \left\{ \begin{array}{l} -(2h+2)U_{2h+1.2k.2t+1} - \\ -2kV_{2h+2.2k-1.2t+1} + (2n-2t+2)W_{2h+2.2k.2t} \end{array} \right\}$$

$$- \frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h.k.t} \{ W_{2h+2.2k.2t} - V_{2h.2k+1.2t+1} - U_{2h+1.2k\,2t+1} + W_{2h.2k+2.2t} \}$$

$C_{2h+1\,.\,2k\,.\,2t+1} =$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2h+1)(2t+1)\lambda_{h.k.t}} \left\{ \begin{array}{r} -(2h+1)U_{2h.2k.2t+2} - 2kV_{2h+1.2k-1.2t+2} + \\ +(2n-2t+1)W_{2h+1.2k.2t+1} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h.k.t} (U_{2h.2k+2.2t} - W_{2h+1.2k.2t+1} - V_{2h+1.2k+1.2t} + U_{2h.2k.2t+2})$$

$$C_{2h\,.\,2k+1\,.\,2t+1} =$$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2k+1)(2t+1)\lambda_{h.k.t}} \left\{ \begin{array}{r} -2h U_{2h-1\,.\,2k+1\,.\,2t+2} - (2k+1) V_{2h.2k.2t+2} + \\ + (2n-2t+1) W_{2h.2k+1.2t+1} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{\mu_{h.k.t}}{\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h.k.t} (V_{2h.2k.2t+2} - U_{2h+1\,.\,2k+1\,.\,2t} - W_{2h\,.\,2k+1\,.\,2t+1} + V_{2h+2\,.\,2k\,.\,2t})$$

$$C_{2h+1\,.\,2k+1\,.\,2t} =$$

$$= \frac{1}{(2n+3)(2h+1)(2k+1)\lambda_{h.k.t}} \left\{ \begin{array}{r} -(2h+1)\, U_{2h\,.\,2k+1\,.\,2t+1} - (2k+1) V_{2h+1\,.\,2k\,.\,2t+1} + \\ + (2n-2t+1) W_{2h+1\,.\,2k+1\,.\,2t} \end{array} \right\}.$$

Anche quando $m$ è un numero pari lo spostamento $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ può considerarsi risultante di tre spostamenti $\delta u_1$, $\delta v_1$, $\delta w_1$; $\delta u_2$, $\delta v_2$, $\delta w_2$; $\delta u_3$, $\delta v_3$, $\delta w_3$ le componenti dei quali sono:

$$\delta u_1 = \sum \frac{(2n+2)!}{(l-1)!\, f!\, g!} H_{l\,.\,f\,.\,g}\; x^{l-1} y^f z^g$$

$$\delta v_1 = \sum \frac{(2n+2)!}{l!\, (f-1)!\, g!} H_{l\,.\,f\,.\,g}\; x^l y^{f-1} z^g$$

$$\delta w_1 = \sum \frac{(2n+2)!}{l!\, f!\, (g-1)!} H_{l\,.\,f\,.\,g}\; x^l y^f z^{g-1}$$

$$\delta u_2 = (-1)^n (x^2+y^2+z^2)^n \{ -p_{2n+2}(y^2+z^2) + (q_{2n+2}\, y + r_{2n+2}\, z)x \}$$

$$\delta v_2 = (-1)^n (x^2+y^2+z^2)^n \{ -q_{2n+2}(z^2+x^2) + (r_{2n+2}\, z + p_{2n+2}\, x)y \}$$

$$\delta w_2 = (-1)^n (x^2+y^2+z^2)^n \{ -r_{2n+2}(x^2+y^2) + (p_{2n+2}\, x + q_{2n+2}\, y)z \}$$

$$\delta u_3 = \sum A_{r\,.\,s\,.\,t}\; x^r y^s z^t$$

$$\delta v_3 = \sum B_{r\,.\,s\,.\,t}\; x^r y^s z^t$$

$$\delta w_3 = \sum C_{r\,.\,s\,.\,t}\; x^r y^s z^t .$$

Lo spostamento $\delta u_1, \delta v_1, \delta w_1$ ammette un potenziale

$$\varphi = \frac{1}{2n+3} \sum \frac{(2n+3)\,!}{l\,!\,f\,!\,g\,!} \mathrm{H}_{l\,.\,f\,.\,g}\, x^l\, y^f\, z^g ,$$

perchè si ha

$$\delta u_1 = \frac{\delta \varphi}{\delta x} \quad \delta v_1 = \frac{\delta \varphi}{\delta y} \quad \delta w_1 = \frac{\delta \varphi}{\delta z} \, .$$

L'altro spostamento $\delta u_3, \delta v_3, \delta w_3$ avviene nel piano definito dalla retta di equazioni

$$(5) \qquad \frac{x}{p_{2n+2}} = \frac{y}{q_{2n+2}} = \frac{z}{r_{2n+2}}$$

e dal raggio vettore che va all'origine delle coordinate; la direzione poi dello spostamento è normale a questo raggio. Se infatti si denota con $p$ la normale al piano suddetto si ha

$$\delta x \cos (\widehat{p\,x}) + \delta y \cos (\widehat{p\,y}) + \delta z \cos (\widehat{p\,z}) = 0$$

$$x \,.\, \delta x + y \,.\, \delta y + z \,.\, \delta z = 0 .$$

Tale spostamento si dirà una flessione di ordine $2\,n+2$ intorno alla retta (5), e si prenderà per misura della flessione il parametro $\sqrt{p^2_{2n+2} + q^2_{2n+2} + r^2_{2n+2}}$ che misura il rapporto, costante per tutti i punti del mezzo, dello spostamento subìto da ogni punto nella direzione della retta (5) al prodotto del quadrato della sua distanza da questa retta per la potenza $2\,n^{esima}$ della distanza del punto dalla origine delle coordinate. La retta (5) si dirà *asse di flessione*, l'origine delle coordinate *centro di flessione*.

In modo simile a quello adoperato per le rotazioni di ordine qualunque, può dimostrarsi che anche le flessioni dello stesso ordine, intorno a rette che passano per un medesimo punto, e che hanno i rispettivi centri di flessione coincidenti in quel punto, sono quantità le quali, quando si rappresentino con segmenti che passino pel centro di flessione, che abbiano la direzione dell'asse di flessione ed una lunghezza misurata dalla costante di flessione, possono comporsi colla regola del parallelogrammo.

Analogamente a quanto è stato esposto per le rotazioni di ordine qualunque, si può, ancora per le flessioni, ricercare in quali linee si trasformano i circoli situati in piani normali all'asse e col centro su di esso, non che le rette che incontrano l'asse; e qui pure, in modo assai semplice, si trova che queste rette si deformano in linee piane, e quei circoli in altri concentrici sullo stesso piano.

Anche in questo caso poi, come facilmente può verificarsi, la deformazione $\delta u_3$, $\delta v_3$, $\delta w_3$ non è rappresentabile da vettori.

## §. II.

Ora mi propongo di applicare i risultati ottenuti nel § precedente allo studio del moto di una particella di fluido, cioè di una porzione estremamente piccola $\sigma$ di esso.

Siano $x$ , $y$ , $z$ le coordinate di un punto interno qualsiasi della porzione $\sigma$ di fluido; e $\delta x$ , $\delta y$ , $\delta z$ le componenti dello spostamento infinitamente piccolo da esso subìto nell' intervallo di tempo $d\,t$. Se si suppongono $\delta x$ , $\delta y$ , $\delta z$ funzioni finite e continue di $x$ , $y$ , $z$ insieme alle loro derivate di qualsiasi ordine, le componenti dello spostamento di un altro punto qualunque della particella stessa di coordinate $x+\Delta x$ , $y+\Delta y$ , $z+\Delta z$, all' infuori di infinitesimi di ordine superiore ad $m$, saranno:

$$\delta x_1 = \delta x + d\,\delta x + \frac{1}{2}\,d^2\,\delta x + \ldots\ldots + \frac{1}{m!}\,d^m\,\delta x$$

$$\delta y_1 = \delta y + d\,\delta y + \frac{1}{2}\,d^2\,\delta y + \ldots\ldots + \frac{1}{m!}\,d^m\,\delta y$$

$$\delta z_1 = \delta z + d\,\delta z + \frac{1}{2}\,d^2\,\delta z + \ldots\ldots + \frac{1}{m!}\,d^m\,\delta z$$

e se si trasporta l'origine delle coordinate nel punto $x$ , $y$ , $z$ e si pone $\Delta\,x = \mathrm{X}$, $\Delta\,y = \mathrm{Y}$, $\Delta\,z = \mathrm{Z}$, le componenti dello spostamento di un punto qualunque X,Y,Z della particella fluida considerata, verranno espresse colla somma di una funzione di primo grado di X,Y,Z e di $(m-1)$ funzioni omogenee di $2^o$ , $3^o$ , $4^o$ . . . . . $m^{esimo}$ grado delle medesime coordinate, laonde, il moto di una particella fluida qualunque potrà considerarsi composto di 3 $m$ moti elementari, cioè, di una traslazione, di $m$ deformazioni di $1^o$,$2^o$,$3^o$ .... $m^{esimo}$ grado con potenziale di moto, di $m-1$ moti non rappresentabili da vettori e di altri $m$ movimenti che sono rotazioni o flessioni di ordine superiore, secondo che le loro componenti provengono dai termini nei quali $m$ è dispari o è pari.

Eseguita la decomposizione dei coefficienti delle funzioni

$$\frac{1}{m!}\, d^m\, \delta x\ ,\quad \frac{1}{m!}\, d^m\, \delta y\ ,\quad \frac{1}{m!}\, d^m\, \delta z$$

nel modo indicato al § precedente per le U, V, W, facendo però precedere dal segno $d$ i coefficienti, allora indicati colle lettere $p$, $q$, $r$, H, A, B, C, per denotare che si tratta di deformazioni infinitamente piccole, e indicando con $u$, $v$, $w$ le componenti della velocità, ossia ponendo

$$\delta x = u\, dt \qquad \delta y = v\, dt \qquad \delta z = w\, dt,$$

si ha, per le (1) (4) del § precedente,

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d p_{2n+1}}{dt} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!\,\delta_{2n+1}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} \left\{ \dfrac{\partial^{2n+1} v}{\partial x^{2h} \partial y^{2k} \partial z^{2t+1}} - \dfrac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2h} \partial y^{2k+1} \partial z^{2t}} \right\} \\[2ex] \dfrac{d q_{2n+1}}{dt} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!\,\delta_{2n+1}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} \left\{ \dfrac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2h+1} \partial y^{2k} \partial z^{2t}} - \dfrac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2h} \partial y^{2k} \partial z^{2t+1}} \right\} \\[2ex] \dfrac{d r_{2n+1}}{dt} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!\,\delta_{2n+1}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} \left\{ \dfrac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2h} \partial y^{2k+1} \partial z^{2t}} - \dfrac{\partial^{2n+1} v}{\partial x^{2h+1} \partial y^{2k} \partial z^{2t}} \right\} \end{cases}$$

$$(7)\left\{\begin{aligned}
&\frac{d\,p_{2n+2}}{d\,t} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)\,!\;\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} \\
&\left\{ \frac{\partial^{2n+2} u}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k+2}\,\partial z^{2t}} - \frac{\partial^{2n+2} w}{\partial x^{2h+1}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2t+1}} - \frac{\partial^{2n+2} v}{\partial x^{2h+1}\,\partial y^{2k+1}\,\partial z^{2t}} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial^{2n+2} u}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2t+2}} \right\} \\
&\frac{d\,q_{2n+2}}{d\,t} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)\,!\;\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} \\
&\left\{ \frac{\partial^{2n+2} v}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2t+2}} - \frac{\partial^{2n+2} u}{\partial x^{2h+1}\,\partial y^{2k+1}\,\partial z^{2t}} - \frac{\partial^{2n+2} w}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k+1}\,\partial z^{2t+1}} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial^{2n+2} v}{\partial x^{2h+2}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2t}} \right\} \\
&\frac{d\,r_{2n+2}}{d\,t} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)\,!\;\delta_{2n+2}} \sum \mu_{h\cdot k\cdot t} \\
&\left\{ \frac{\partial^{2n+2} w}{\partial x^{2h+2}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2t}} - \frac{\partial^{2n+2} v}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k+1}\,\partial z^{2t+1}} - \frac{\partial^{2n+2} u}{\partial x^{2h+1}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2t+1}} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial^{2n+2} w}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k+2}\,\partial z^{2t}} \right\}
\end{aligned}\right.$$

Posto poi

$$\frac{d\,p_m}{dt} = \vartheta_m \qquad \frac{d\,q_m}{dt} = \chi_m \qquad \frac{d\,r_m}{dt} = \rho_m\,,$$

e

$$\vartheta_0 = u \qquad \chi_0 = v \qquad \rho_0 = w$$

dalle precedenti relazioni si ricava, qualunque sia $m$, purchè diverso da zero

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\vartheta_m}{\partial x} + \frac{\partial\chi_m}{\partial y} + \frac{\partial\rho_m}{\partial z} = 0 \\ &\vartheta_m = \frac{\delta_{m-1}}{m\,\delta_m}\left(\frac{\partial\,\chi_{m-1}}{\partial\,z} - \frac{\partial\,\rho_{m-1}}{\partial\,y}\right) \\ &\chi_m = \frac{\delta_{m-1}}{m\,\delta_m}\left(\frac{\partial\,\rho_{m-1}}{\partial\,x} - \frac{\partial\,\vartheta_{m-1}}{\partial\,z}\right) \\ &\rho_m = \frac{\delta_{m-1}}{m\,\delta_m}\left(\frac{\partial\,\vartheta_{m-1}}{\partial\,y} - \frac{\partial\,\chi_{m-1}}{\partial\,x}\right), \end{aligned}\right.$$

e se la prima di queste relazioni, o quelle che da essa in seguito si dedurranno, si suppongono soddisfatte anche nel caso di $m=0$, verrà necessariamente ad introdursi la condizione che il fluido non sia compressibile.

La prima delle relazioni (8) risulta evidente dalle (6) (7) ed è pur facilissimo verificare l'esattezza delle altre quando $m$ è un numero pari. Se invece si suppone $m$ numero dispari uguale a $2\,n+1$ e si pone per brevità

$$\frac{(n-1)\,!}{h_1\,!\;k_1\,!\;t_1\,!}=\mu_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}$$

$$P_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}=\frac{\partial^{2n-2}u}{\partial x^{2h_1}\,\partial y^{2k_1}\,\partial z^{2t_1}}$$

$$Q_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}=\frac{\partial^{2n-2}v}{\partial x^{2h_1}\,\partial y^{2k_1}\,\partial z^{2t_1}}$$

$$R_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}=\frac{\partial^{2n-2}w}{\partial x^{2h_1}\,\partial y^{2k_1}\,\partial z^{2t_1}}$$

essendo

$$2\,h_1+2\,k_1+2\,t_1+2=2\,n\,,$$

si ha

$$\vartheta_{2n}=\frac{(-1)^n}{2\,n!\,\delta_{2n}}\sum\mu_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}P_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}R_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}-\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}Q_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}P_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}\right\}$$

$$\chi_{2n}=\frac{(-1)^n}{2n!\,\delta_{2n}}\sum\mu_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}Q_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}-\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}P_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}-\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}R_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}\right\}$$

$$\rho_{2n}=\frac{(-1)^n}{2\,n!\,\delta_{2n}}\sum\mu_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}R_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}-\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial y}Q_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}-\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}P_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}R_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}\right\}$$

ed evidentemente si ha pure

$$\frac{\partial \chi_{2n}}{\partial z}-\frac{\partial \rho_{2n}}{\partial y}=\frac{(-1)^n}{2n!\,\delta_{2n}}\sum \mu_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1}\left(\frac{\partial}{\partial z}\Delta^2 Q_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1}-\frac{\partial}{\partial y}\Delta^2 R_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1}\right)$$

$$\frac{\partial \rho_{2n}}{\partial x}-\frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial z}=\frac{(-1)^n}{2n!\,\delta_{2n}}\sum \mu_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta^2 R_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1}-\frac{\partial}{\partial z}\Delta^2 P_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1}\right)$$

$$\frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial y}-\frac{\partial \chi_{2n}}{\partial x}=\frac{(-1)^n}{2n!\,\delta_{2n}}\sum \mu_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Delta^2 P_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1}-\frac{\partial}{\partial x}\Delta^2 Q_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1}\right)$$

essendo $\Delta^2$ il noto simbolo che suole usarsi per rappresentare la somma delle tre derivate seconde rispetto ad $x, y, z$ di una stessa funzione.

Nella somma $\sum \mu_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1} \Delta^2 P_{h_1 \cdot k_1 \cdot t_1}$ si riuniscano i termini nel modo seguente. Siano $a, b, c$ tre numeri interi e positivi tali che sia

$$2\,a + 2\,b + 2\,c + 2 = 2\,n:$$

fra i termini della somma presa a considerare si troveranno, una ed una sola volta, le seguenti espressioni:

$$(9)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{(n-1)!}{a!\,b!\,c!}\,\dfrac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial x^2}\,, \quad \dfrac{(n-1)!}{(a+1)!\,(b-1)!\,c!}\,\dfrac{\partial^2 P_{a+1\cdot b-1\cdot c}}{\partial y^2} \\[3ex]
\dfrac{(n-1)!}{(a+1)!\,b!\,(c-1)!}\,\dfrac{\partial^2 P_{a+1\cdot b\; c-1}}{\partial z^2}\,, \quad \dfrac{(n-1)!}{(a-1)!\,(b+1)!\,c!}\,\dfrac{\partial^2 P_{a-1\cdot b+1\cdot c}}{\partial x^2} \\[3ex]
\dfrac{(n-1)!}{a!\,b!\,c!}\,\dfrac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial y^2}\,, \quad \dfrac{(n-1)!}{a!\,(b+1)!\,(c-1)!}\,\dfrac{\partial^2 P_{a\cdot b+1\cdot c-1}}{\partial z^2} \\[3ex]
\dfrac{(n-1)!}{(a-1)!\,b!\,(c+1)!}\,\dfrac{\partial^2 P_{a-1\cdot b\cdot c+1}}{\partial x^2}\,, \quad \dfrac{(n-1)!}{a!\,(b-1)!\,(c+1)!}\,\dfrac{\partial^2 P_{a\cdot b-1\cdot c+1}}{\partial y^2} \\[3ex]
\dfrac{(n-1)!}{a!\,b!\,c!}\,\dfrac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial z^2}\,,
\end{array}\right.$$

ma evidentemente

$$\frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_{a+1\cdot b-1\cdot c}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P_{a+1\cdot b\cdot c-1}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 P_{a-1\cdot b+1\cdot c}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P_{a\cdot b+1\cdot c-1}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 P_{a-1\cdot b\cdot c+1}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_{a\cdot b-1\cdot c+1}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial z^2}$$

quindi le somme dei termini uguali che si trovano nel quadro (9) sono

$$\frac{(n-1)!}{(a+1)!\,b\,!\,c!}\frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial x^2}(a+b+c+1)=\frac{n!}{(a+1)!\,b\,!\,c!}\frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial x^2}$$

$$\frac{(n-1)!}{a\,!\,(b+1)!\,c!}\frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial y^2}(a+b+c+1)=\frac{n!}{a\,!\,(b+1)!\,c!}\frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial y^2}$$

$$\frac{(n-1)!}{a!\,b!\,(c+1)!}\frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial z^2}(a+b+c+1)=\frac{n!}{a\,!\,b\,!\,(c+1)!}\frac{\partial^2 P_{a\,b\cdot c}}{\partial^2 z}$$

e la somma $\sum \mu_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}\ \Delta^2 P_{h_1\cdot k_1\cdot t_1}$ si trasforma nella seguente

$$\sum \frac{(n)!}{(a+1)!b!c!}\frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial x^2}+\frac{n!}{a!\,(b+1)!\,c!}\frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial y^2}+$$

$$+\frac{n\,!}{a!\,b!\,(c+1)!}\frac{\partial^2 P_{a\cdot b\cdot c}}{\partial z^2}=\sum \mu_{h\cdot k\cdot t}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2h}\partial y^{2k}\partial z^{2t}}\ .$$

In modo analogo si dimostrano le altre relazioni

$$\sum \frac{n\,!}{(a+1)!\,b!c!}\frac{\partial^2 Q_{a\cdot b\cdot c}}{\partial x^2}+\frac{n\,!}{a!\,(b+1)!c!}\frac{\partial^2 Q_{a\cdot b\cdot c}}{\partial y^2}+$$

$$+\frac{n\,!}{a\,!\,b\,!\,(c+1)!}\frac{\partial^2 Q_{a\cdot b\cdot c}}{\partial z^2}=\sum \mu_{h\cdot h\cdot t}\frac{\partial^{2n} v}{\partial x^{2h}\,\partial y^{2k}\,\partial z^{2t}}$$

$$\sum \frac{n\,!}{(a+1)!\,b\,!\,c!}\frac{\partial^2 R_{a\cdot b\cdot c}}{\partial x^2}+\frac{n\,!}{a!\,(b+1)!\,c!}\frac{\partial^2 R_{a\cdot b\cdot c}}{\partial y^2}+$$

$$+\frac{n\,!}{a\,!\,b\,!\,(c+1)!}\frac{\partial^2 R_{a\cdot b\cdot c}}{\partial z^2}=\sum \mu_{h\cdot k\cdot t}\frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2h}\partial y^{2k}\,\partial z^{2t}}$$

e si ha così

$$\frac{\partial \chi_{2n}}{\partial z} - \frac{\partial \rho_{2n}}{\partial y} = \frac{(-1)^n}{2n!\,\delta_{2n}} \sum \mu_{h.k.t} \left\{ \frac{\partial^{2n+1} v}{\partial x^{2h} \partial y^{2k} \partial z^{2t+1}} - \frac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2h} \partial y^{2k+1} \partial z^{2t}} \right\} =$$

$$= \vartheta_{2n+1} \frac{(2n+1)\,\delta_{2n+1}}{\delta_{2n}}$$

$$\frac{\partial \rho_{2n}}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial z} = \frac{(-1)^n}{2n!\,\delta_{2n}} \sum \mu_{h.k.t} \left\{ \frac{\partial^{2n+1} w}{\partial x^{2h+1} \partial y^{2k} \partial z^{2t}} - \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2h} \partial y^{2k} \partial z^{2t+1}} \right\} =$$

$$= \chi_{2n+1} \frac{(2n+1)\,\delta_{2n+1}}{\delta_{2n}}$$

$$\frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial y} - \frac{\partial \chi_{2n}}{\partial x} = \frac{(-1)^n}{2n!\,\delta_{2n}} \sum \mu_{h.k.t} \left\{ \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial z^{2h} \partial y^{2k+1} \partial z^{2t}} - \frac{\partial^{2n+1} v}{\partial x^{2h+1} \partial y^{2k} \partial z^{2t}} \right\} =$$

$$= \rho_{2n+1} \frac{(2n+1)\,\delta_{2n+1}}{\delta_{2n}}$$

c. d. d.

Le quantità $\vartheta_{2n+1}$, $\chi_{2n+1}$, $\rho_{2n+1}$; $\vartheta_{2n}$, $\chi_{2n}$, $\rho_{2n}$, costanti, in ogni istante, per tutti i punti di una stessa particella fluida, si diranno essere rispettivamente, le componenti della velocità di rotazione di ordine $2n+1$ e quelle della velocità di flessione di ordine $2n$.

In seguito, per rendere più semplice il linguaggio, denominerò, moto vorticoso di ordine $2n$, la flessione di ordine $2n$ e, moto vorticoso di ordine $2n+1$, la rotazione di ordine $2n+1$; nelle ricerche che mi propongo di esporre, ciò non può far nascere alcun equivoco, perchè i moti vorticosi di ordine $m$, che io dovrò considerare, saranno sempre moti rotatorii se $m$ è dispari, moti di flessione se $m$ è pari.

Dalle (6) e (7) si deduce ancora

$$(10) \qquad \begin{aligned} \vartheta_m &= - \frac{\delta_{m-2}}{m(m-1)\delta_m} \Delta^2 \vartheta_{m-2} \\ &= (-1)^s \frac{\delta_{m-2s}}{\delta_m} \frac{(m-2s)!}{m!} \Delta^{2(s)} \vartheta_{m-2s} \end{aligned}$$

e le analoghe rispetto a $\chi_m$ e $\rho_m$, nelle quali formole il simbolo $\Delta^{2(s)}$ denota che l'operazione, ordinariamente indicata col simbolo $\Delta^2$, deve essere eseguita successivamente per $s$ volte. Ponendo nelle (10) $m=2n$, $s=n-1$ ed $m=2n+1$, $s=n$ si ottengono le relazioni che collegano i parametri dei movimenti considerati da Boggio-Lera e da Helmohltz con quelli ora presi a studiare.

Le formole, fin qui stabilite, servono a determinare il moto vorticoso di un dato ordine in funzione dei moti vorticosi di ordine inferiore e delle loro derivate. Il problema inverso, cioè la determinazione del moto vorticoso di un dato ordine, mediante i moti vorticosi di ordine superiore e le loro derivate, si risolve immediatamente, in modo analogo a quello adoperato da Boggio-Lera per determinare la velocità effettiva del fluido in funzione della flessione, servendosi del teorema di Green. Si giunge così, assai facilmente, alla dimostrazione dei seguenti teoremi:

1.° Il moto vorticoso di qualsiasi ordine $m$ è determinato, in ogni punto interno ad una superficie che racchiude uno spazio S comunque connesso, quando è noto uno dei moti di ordine superiore $m+2s$ nello spazio S ed i moti di ordine $m$, $m+2$, $m+4$ .... $m+2(s-1)$ al contorno.

2.° Se in un determinato istante tutti i punti del fluido situato nello spazio S non hanno moto vorticoso di ordine $m+2s$ e quelli situati al suo contorno sono privi dei moti vorticosi di ordine $m$ , $m+2$ .... $m+2\,(s-1)$, nello spazio S non potrà esservi alcuna particella che abbia moto vorticoso di ordine $m$.

3.° Se nello spazio S le funzioni $\vartheta_m$ , $\chi_m$ , $\rho_m$ sono le derivate rispetto ad $x$ , $y$ , $z$ di una stessa funzione $\varphi$, cioè se esiste un potenziale pel modo vorticoso di ordine $m$ (*) allora il moto vorticoso di questo ordine è determinato in ogni punto interno dello spazio S, quando si conoscono in ogni istante, le componenti secondo la normale al suo contorno, dei moti vorticosi di ordine $m$ che hanno le particelle situate su quel contorno. Se in ogni punto della superficie, che limita lo spazio S, la derivata di $\varphi$ rispetto alla normale è zero, nell'interno di S non potrà esservi moto vorticoso di ordine $m$.

La stretta relazione che i movimenti di Rowland hanno col moto vorticoso di Helmholtz, mi ha indotto a ricercare se per essi sussistono teoremi analoghi a quelli trovati da Helmholtz e Beltrami pei moti vorticosi di 1.° ordine, ed ho potuto facilmente verificare che tutte quelle proprietà dei moti vorticosi di 1.° ordine che Helmholtz deduce da ciò che egli chiama integrali rapporto allo spazio, hanno le loro corrispondenti nei moti vorticosi di ordine superiore. Ciò dipende dal fatto che nella dimostrazione di quei teoremi si fa uso soltanto delle relazioni che collegano le com-

---

(*) La funzione $\varphi$ dovrà evidentemente soddisfare entro S l'equazione $\Delta^2\,\varphi = 0$

ponenti della velocità con quelle della rotazione, le quali relazioni sono perfettamente simili a quelle che passano fra i parametri che individuano due movimenti di Rowland di ordine consecutivo.

Al contrario, non ho potuto estendere ai moti di Rowland i teoremi che Helmholtz deduce da ciò che chiama integrali ropporto al tempo, la cui base è l' importante principio della conservazione delle rotazioni.