ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CESARE FIBBI

I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazii di curvatura costante

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 7 (1895), exp. nº 1, p. 1-101

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1895_1_7__A1_0>

CESARE FIBBI

I SISTEMI DOPPIAMENTE INFINITI DI RAGGI NEGLI SPAZII DI CURVATURA COSTANTE

Scopo di questo lavoro è quello di estendere agli spazii di curvatura costante lo studio dei Sistemi doppiamente infiniti di raggi, *che per lo spazio euclideo è stato completamente sviluppato da Kummer nella sua classica Memoria:* Allgemeine Theorie der gradlinigen Strahlensysteme (*).

Servendomi, per la determinazione di un punto nello spazio, di quel sistema di coordinate che sono, per gli spazii di curvatura costante, la più diretta estensione del sistema di coordinate cartesiane nello spazio euclideo, e che son conosciute sotto il nome di coordinate di Weierstrass, *sono riuscito a conservare ai punti più salienti della teoria lo stesso carattere di estensione diretta dallo spazio euclideo, che si riscontra in tutte le ricerche di geometria analitica e differenziale trattate dal Killing nella sua pregevole opera:* Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung (**).

I risultati non differiscono da quelli ottenuti da Kummer che per lo spazio di Riemann a curvatura costante positiva, dovuti al fatto che due rette di questo spazio

(*) Journal von Crelle Bd. 57. S.e 189.

(**) Leipzig, B. C. Teubner, 1885.

hanno sempre una minima ed una massima distanza fra loro. Una differenza notevole, a seconda che la curvatura dello spazio è positiva, nulla o negativa, si ha invece nel modo di comportarsi della densità *del sistema di raggi, e i risultati ottenuti su questo argomento, in vista dei servigii che la teoria dei sistemi* ∞^2 *di raggi può rendere alla teoria della luce, non mi sembrano privi di qualche interesse.*

La considerazione di quei particolari sistemi di raggi, che ammettono una serie di superficie ortogonali, conduce spontaneamente ad un doppio modo di trattare la geometria differenziale di una superficie col principio di dualità, *ma in questo lavoro mi son dovuto limitare a stabilire le principali formole fondamentali di questa teoria.*

Finalmente non ho voluto tralasciare lo studio di quella interessantissima classe di sistemi di raggi considerati per la prima volta dal prof. Bianchi nello spazio euclideo, e che egli chiama pseudosferici, *ed ho trovato che anche negli spazii di curvatura costante essi possono servire a dare la più semplice interpretazione geometrica della* trasformazione di Bäcklund *per quelle superficie (pseudosferiche), le quali secondo l'importante distinzione introdotta dallo stesso prof. Bianchi, hanno costante e negativa non solo la curvatura* assoluta, *ma anche la* relativa (*).

(*) Per le citazioni che si riferiscono a questo argomento, veggasi l'ultimo paragrafo.

§. 1.

Le rette dello spazio curvo (*).

1. — Per studiare i sistemi ∞^2 di raggi negli spazii curvi è necessario premettere alcune considerazioni intorno alle coppie di rette che non sono situate nello stesso piano. I risultati relativi a questo argomento si trovano esposti nell'opera del Killing: *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (pag. 59 e segg.), e io li riferirò qui brevemente, recando qualche modificazione alle formole e alla loro discussione, in vista delle applicazioni che dovrò farne in seguito.

In uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante $\frac{1}{k^2}$ riferirò i punti di esso ad un sistema di coordinate di Weierstrass, ossia ad un sistema di tre piani ortogonali. Quindi

(*) Dirò per brevita spazio piano o curvo a seconda che la sua curvatura sarà nulla o differente da zero.

se x_1, x_2, x_3, x_4 sono le coordinate di un punto P, ρ_1 la sua distanza dall' origine e ρ_2, ρ_3, ρ_4 le sue distanze dai piani coordinati, sarà:

$$x_1 = k \cos \frac{\rho_1}{k}, \quad x_2 = k \operatorname{sen} \frac{\rho_2}{k}, \quad x_3 = k \operatorname{sen} \frac{\rho_3}{k}, \quad x_4 = k \operatorname{sen} \frac{\rho_4}{k},$$

coll' identità:

$$(1) \qquad x_1^{\,2} + x^2_2 + x^2_3 + x^2_4 = k^2$$

Se invece s'indicano con $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ le coordinate di un piano π, α_1 la sua distanza dall'origine e $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ gli angoli che esso forma con i piani coordinati, si avrà:

$$\xi_1 = - \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{k}, \quad \xi_2 = \cos \alpha_2, \quad \xi_3 = \cos \alpha_3, \quad \xi_4 = \cos \alpha_4, \text{ (*)}$$

coll' identità:

$$(2) \qquad \xi_1^{\,2} + \xi_2^{\,2} + \xi_3^{\,2} + \xi_4^{\,2} = 1 .$$

L' equazione

$$(3) \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0,$$

rappresenta un punto o un piano a seconda che si riguardano come variabili le ξ, o le x. La distanza d del punto

---

(**) Nell'opera citata del Killing è posto $x_1 = \cos \frac{\rho_1}{k}$, $\xi_1 = - k \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{k}$; quindi x_1 e ξ_1 sono reali anche per $k^2 < 0$. Ponendo invece $x_1 = k \cos \frac{\rho_1}{k}$ $\xi_1 = - \operatorname{sen} \frac{\alpha_1}{k}$, x_1 e ξ_1 sono immaginari per $k^2 < 0$, ma si ottiene così maggior simmetria e il vantaggio di poter far uso dei simboli sommatorii.

P lal piano π è data dalla formola

$$(4) \qquad k \operatorname{sen} \frac{d}{k} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 ;$$

e se si ha un altro punto $P' \equiv (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ e un altro piano $\pi \equiv (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4)$ le formole:

$$(5) \qquad k^2 \cos \frac{\delta}{k} = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 + x_4 x'_4 ,$$

$$(6) \qquad \cos \varphi = \xi_1 \xi'_1 + \xi_2 \xi'_2 + \xi_3 \xi'_3 + \xi_4 \xi'_4 ,$$

ci dànno rispettivamente la distanza δ dei due punti P, P' e l' angolo φ dei due piani π', π.

2. — Le equazioni di una retta possono porsi sotto la forma

$$(7) \qquad \begin{cases} X_1 = x_1 \cos \frac{w}{k} + k\, \xi_1 \operatorname{sen} \frac{w}{k} , \\ X_2 = x_2 \cos \frac{w}{k} + k\, \xi_2 \operatorname{sen} \frac{w}{k} , \\ X_3 = x_3 \cos \frac{w}{k} + k\, \xi_3 \operatorname{sen} \frac{w}{k} , \\ X_4 = x_4 \cos \frac{w}{k} + k\, \xi_4 \operatorname{sen} \frac{w}{k} , \end{cases}$$

dove le X sono le coordinate correnti dei suoi punti, le x quelle di un suo punto fisso, le ξ quelle di un piano ad essa perpendicolare e passante pel punto x, e finalmente w è la distanza del punto variabile X dal punto fisso x. Fra le x e le ξ devono quindi sussistere le (1), (2), (3).

Siano x', ξ', w' gli elementi relativi ad un'altra retta; la distanza P di un punto qualunque della prima da un punto qualunque della seconda sarà data dalla formola

$$(8)\quad k^2 \cos\frac{p}{k} = A_{11} \cos\frac{w}{k} \cos\frac{w'}{k} + k\,A_{12} \cos\frac{w}{k} \operatorname{sen}\frac{w'}{k} + \\ + k\,A_{21} \operatorname{sen}\frac{w}{k} \cos\frac{w'}{k} + k^2 A_{22} \operatorname{sen}\frac{w}{k} \operatorname{sen}\frac{w'}{k}.$$

dove

$$(9)\quad \begin{cases} A_{11} = x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3 + x_4 x'_4 \,, \\ A_{12} = x_1 \xi'_1 + x_2 \xi'_2 + x_3 \xi'_3 + x_4 \xi'_4 \,, \\ A_{21} = x'_1 \xi_1 + x'_2 \xi_2 + x'_3 \xi_3 + x'_4 \xi_4 \,, \\ A_{22} = \xi_1 \xi'_1 + \xi_2 \xi'_2 + \xi_3 \xi'_3 + \xi_4 \xi'_4 \,. \end{cases}$$

Il significato geometrico delle quantità A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} risulta immediatamente dalle (4), (5), (6).

Se si vuole che la distanza p sia un massimo o un minimo, si dovranno eguagliare a zero le derivate del secondo membro della (8) prese rispetto a w e a w', e si avranno le relazioni:

$$(10)\quad \begin{cases} A_{11} \operatorname{sen}\frac{w}{k} \cos\frac{w'}{k} + k\,A_{12} \operatorname{sen}\frac{w'}{k} \operatorname{sen}\frac{w}{k} - \\ - k\,A_{21} \cos\frac{w}{k} \cos\frac{w'}{k} - k^2 A_{22} \cos\frac{w}{k} \operatorname{sen}\frac{w}{k} = 0, \\ A_{11} \cos\frac{w}{k} \operatorname{sen}\frac{w'}{k} - k\,A_{12} \cos\frac{w}{k} \cos\frac{w'}{k} + \\ + k\,A_{21} \operatorname{sen}\frac{w}{k} \operatorname{sen}\frac{w'}{k} - k^2 A_{22} \operatorname{sen}\frac{w}{k} \cos\frac{w'}{k} = 0, \end{cases}$$

dalle quali eliminando successivamente w e w', e ponendo:

$$(11) \qquad r = k \operatorname{tg}\frac{w}{k} \quad , \quad r' = k \operatorname{tg}\frac{w'}{k} ,$$

si deducono le equazioni:

$$(12) \begin{cases} (A_{11}A_{21} + k^2A_{22}A_{12})r^2 + (A^2_{11} + k^2A^2_{12} - k^2A^2_{21} - k^4A^2_{22})r - \\ \qquad k^2(A_{11}A_{21} + k^2A_{22}A_{12}) = 0 , \\ (A_{11}A_{12} + k^2A_{22}A_{21})r'^2 + (A^2_{11} + k^2A^2_{21} - k^2A^2_{12} - k^4A^2_{22})r' - \\ \qquad k^2(A_{11}A_{12} + k^2A_{22}A_{21}) = 0 , \end{cases}$$

che servono a determinare su ciascuna retta i piedi della minima e della massima distanza dall' altra retta.

Alle quantità r , r' definite dalle (11) daremo il nome di *ascisse ridotte*.

Se dalle (10) e dalla (8) si elimina successivamente una delle quattro quantità $\operatorname{sen}\frac{w}{k}$, $\cos\frac{w}{k}$, $\operatorname{sen}\frac{w'}{k}$, $\cos\frac{w'}{k}$ e si pone $M = \cos\frac{p}{k}$, si ottengono le quattro equazioni:

$$(13) \begin{cases} A_{11}\cos\frac{w'}{k} + k\,A_{12}\operatorname{sen}\frac{w'}{k} - k^2\,M\cos\frac{w}{k} = 0, \\ A_{21}\cos\frac{w'}{k} + k\,A_{22}\operatorname{sen}\frac{w'}{k} - k\,M\operatorname{sen}\frac{w}{k} = 0, \\ A_{11}\cos\frac{w}{k} + k\,A_{21}\operatorname{sen}\frac{w}{k} - k^2\,M\cos\frac{w'}{k} = 0, \\ A_{12}\cos\frac{w}{k} + k\,A_{22}\operatorname{sen}\frac{w}{k} - k\,M\operatorname{sen}\frac{w'}{k} = 0; \end{cases}$$

e da queste eliminando w e w', si ha per determinare la minima e la massima distanza delle due rette l'equazione

$$(14) \quad \begin{vmatrix} -k^2 M, & 0, & A_{11}, & A_{12} \\ 0, & -M, & A_{21}, & A_{22} \\ A_{11}, & A_{21}, & -k^2 M, & 0 \\ A_{12}, & A_{22}, & 0, & -M \end{vmatrix} = 0,$$

ovvero sviluppando:

$$(14') \quad k^4 M^4 - (A^2_{11} + k^2 A^2_{12} + k^2 A^2_{21} + k^4 A^2_{22}) M^2 + (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21})^2 = 0.$$

Si può intanto osservare che per $M^2 = 1$, il suo primo membro si riduce alla forma:

$$(15) \quad \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ x'_1, & x'_2, & x'_3, & x'_4 \\ \xi'_1, & \xi'_2, & \xi'_3, & \xi'_4 \end{vmatrix}^2 ;$$

quindi la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due rette siano situate in uno stesso piano è che questo determinante si annulli. Infatti se ciò accade, le due rette avranno un punto comune e saranno quindi situate nello stesso piano. Viceversa, se il piano U che contiene le due rette ha le coordinate u_1, u_2, u_3, u_4, le equazioni

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + x_4 u_4 = 0,$$
$$x'_1 u_1 + x'_2 u_2 + x'_3 u_3 + x'_4 u_4 = 0,$$
$$\xi_1 u_1 + \xi_2 u_2 + \xi_3 u_3 + \xi_4 u_4 = 0,$$
$$\xi'_1 u_1 + \xi'_2 u_2 + \xi'_3 u_3 + \xi'_4 u_4 = 0,$$

delle quali le prime due esprimono che il piano U passa per i punti x , x' e le altre che è perpendicolare ai piani ξ , ξ', dovranno coesistere, e quindi dovrà annullarsi il determinante (15).

Ciò posto, è facile riconoscere che l'equazione (14') ha le radici in M^2 reali, giacchè il suo discriminante

$$a)\qquad D = (A^2_{11} + k^2 A^2_{12} + k^2 A^2_{21} + k^4 A^2_{22})^2 - \\ - 4 k^4 (A_{11} A_{22} - A_{12} A_{21})^2,$$

che si può porre sotto la forma

$$a')\qquad D = (A^2_{11} + k^2 A^2_{12} - k^2 A^2_{21} - k^4 A^2_{22})^2 + \\ + 4 k^4 (A_{11} A_{21} + k^2 A_{22} A_{12})^2,$$

è evidentemente positivo per $k^2 > 0$. Per $k^2 < 0$, si può osservare che il suo primo membro assume valori positivi per $M^2 = \infty$, $M^2 = 0$ e che per $M^2 = 1$ assume un valore negativo, essendo tutti immaginarii gli elementi della prima colonna del determinante (15) ; esso dunque si annulla per due valori reali di M^2, l'uno maggiore, l'altro minore dell'unità.

Dall'essere reali le radici in M^2 della (14'), segue che sono reali anche le radici delle equazioni (12), poichè ciascuna di esse ha un discriminante che si può ridurre alla stessa forma *a*) di quello dell'equazione (14').

3. — Per esaminare più da vicino la posizione reciproca di due rette non situate nello stesso piano, conviene trattare separatamente il caso di $k^2 > 0$ da quello di $k^2 < 0$.

Nell'ipotesi di $k^2 > 0$, ossia dello spazio di Riemann a curvatura costante positiva, è noto che la retta è chiusa, ed ha una lunghezza finita $= 2k\pi$. La forma delle equazioni (12) ci dice intanto che se p. es. r è una radice della prima di esse, l'altra radice è $-\frac{k^2}{r}$, ossia se w è p. es. l'ascissa del piede della minima distanza, quella del piede della massima distanza è $w \pm \frac{1}{2}k\pi$; e lo stesso ha luogo sull'altra retta. Di più siccome le due rette che misurano la massima e la minima distanza delle due rette date sono evidentemente perpendicolari ad ambedue, ne segue che esse sono le polari assolute l'una dell'altra, vale a dire che la distanza di due qualunque dei loro punti è sempre $\frac{1}{2}k\pi$, ed una retta qualunque che le incontra contemporaneamente è perpendicolare ad ambedue. Due piani qualunque contenenti la massima e la minima distanza delle due rette date sono dunque perpendicolari fra loro, e tali saranno in particolare quelli che passano per una delle rette date e per la massima e minima distanza dell'altra retta. Le quattro radici reali della (14') si dividono in due coppie con valori eguali e di segno contrario; se una radice corrisponde alla distanza p del punto A della prima retta dal punto A' della seconda, quella di segno contrario corrisponde alla distanza $k\pi - p$ dello stesso punto A dal punto opposto di A' sulla seconda, ma se ci limitiamo a considerare le distanze $< \frac{1}{2}k\pi$, dovremo scegliere le sole radici positive della (14), ed allora al massimo e minimo valore di M corrisponderà il minimo o massimo valore di p e viceversa. Avendo poi la stessa equazione (14') il coefficiente del secondo termine essenzialmente negativo, si riconosce subito dalla sua risoluzione quale delle due radici sia massima e quale minima.

Supponen o ora $k^2 < 0$, ossia di essere nello spazio di Lobatschewsky, la retta è aperta e infinita; le equazioni (12) hanno sempre le radici della forma r e $-\frac{k^2}{r}$, quindi se si pone $k^2 = -R^2$, una è maggiore, l'altra è minore di R; ma poichè si ha ora $r = R \operatorname{tgh} \frac{w}{R}$, affinchè w sia reale, dovrà essere $r < R$, quindi una sola radice delle (12) dà un punto reale per ciascuna delle rette date, e questa coppia di punti corrisponderà evidentemente alla loro minima distanza. Anche in questo caso essa è perpendicolare alle rette date. Riguardo poi all'equazione (14'), osserviamo che avendo essa le due radici in M^2 una maggiore, l'altra minore dell'unità, per avere un valore reale di p, bisognerà scegliere la radice M^2 maggiore dell'unità, e il valore positivo di M. Finalmente importa notare che se le due rette non sono poste nello stesso piano, le radici della (14'), per ciò che abbiamo visto, sono sempre distinte e tali saranno dunque anche quelle delle (12); e siccome esse sono sempre della forma r e $\frac{R^2}{r}$, se ne conclude che le stesse (12) non possono ammettere una radice $= R$, il che equivale a dire che il piede della minima distanza per due rette non poste nello stesso piano non può mai cadere a distanza infinita.

In seguito; prescindendo dalle immaginarietà che porta con sè il caso di $k^2 < 0$, trascureremo, quando non sarà necessario, di distinguere lo spazio di Riemann da quello di Lobatschewsky.

§. 2.

I sistemi ∞^2 di raggi. — Formole preliminari.

4. — Analogamente a quanto ha fatto Kummer nello spazio euclideo (*), per definire un sistema ∞^2 di rette, supporremo che ciascuna di esse sia condotta per un punto variabile $P \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$ di una superficie S, che riferita ad un sistema di coordinate curvilinee u, v, abbia per equazioni

$$x_i^2 = x_i(u, v) \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4$$

e per fissarne la direzione, supporremo che debba essere perpendicolare ad un piano $\pi \equiv (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ condotto pel punto P, e definito dalle sue coordinate

$$\xi_i = \xi_i(u, v) \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Fra le funzioni x e ξ di u e v dovranno quindi sussistere le solite relazioni identiche

$$(16) \qquad \sum x_i^2 = k^2, \quad \sum \xi_i^2 = 1, \quad \sum x_i \xi_i = 0.$$

La teoria dei sistemi ∞^2 di raggi negli spazii curvi, è tutta fondata sopra l'introduzione di tre forme differenziali, che ora si tratta di stabilire. La prima di esse è la seguente:

(*) Memoria citata nella prefazione.

$$\text{(I)}\quad \begin{Vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ dx_1, & dx_2, & dx_3, & dx_4 \end{Vmatrix}^2 = \sum dx_1{}^2 - \left(\sum \xi_i\, dx_i\right)^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2$$

i cui coefficienti saranno quindi dati dalle formole

$$7)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E} &= \begin{Vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_3}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_4}{\partial u} \end{Vmatrix}^2 = \sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 - \left(\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2, \\
\mathrm{F} &= \begin{Vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_3}{\partial u}, & \dfrac{\partial x_4}{\partial u} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_3}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_4}{\partial v} \end{Vmatrix} = \sum \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \left(\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\right)\left(\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\right) \\
\mathrm{G} &= \begin{Vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_3}{\partial v}, & \dfrac{\partial x_4}{\partial v} \end{Vmatrix}^2 = \sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2 - \left(\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2.
\end{aligned}\right.$$

La seconda forma differenziale è:

$$\text{(II)}\quad \frac{1}{k^2}\begin{Vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ d\xi_1, & d\xi_2, & d\xi_3, & d\xi_4 \end{Vmatrix}^2 = \sum d\xi_i{}^2 - \frac{1}{k^2}\left(\sum x_i d\xi_i\right)^2 = \mathrm{E}'du^2 + 2\mathrm{F}'du\,dv + \mathrm{G}'dv^2,$$

e i suoi coefficienti saranno:

$$7')\quad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{E}' &= \frac{1}{k^2}\begin{Vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial u}, & \dfrac{\partial \xi_4}{\partial u} \end{Vmatrix}^2 = \sum\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{k^2}\left(\sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)^2, \\
\mathrm{F}' &= \frac{1}{k^2}\begin{Vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial u}, & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial u}, & \dfrac{\partial \xi_4}{\partial u} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}, & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial v}, & \dfrac{\partial \xi_4}{\partial v} \end{Vmatrix} = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{1}{k^2}\left(\sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)\left(\sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial v}\right), \\
\mathrm{G}' &= \frac{1}{k^2}\begin{Vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v}, & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial \xi_3}{\partial v}, & \dfrac{\partial \xi_4}{\partial v} \end{Vmatrix}^2 = \sum\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{k^2}\left(\sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial v}\right)^2
\end{aligned}\right.$$

Finalmente la terza forma è

$$\text{(III)} \qquad \sum d\,x_i\,d\,\xi_i = e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2,$$

con

$$\text{(18)} \qquad e=\sum\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_i}{\partial u},\ f=\sum\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial \xi_i}{\partial u},\ f'=\sum\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \xi_i}{\partial v},\ g=\sum\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial \xi_i}{\partial v}.$$

5. — Le funzioni E', F', G' ; E, F, G ; $e, f, f' g$ di u, v non sono tutte indipendenti fra di loro; esse son legate da tre relazioni che ora stabilirò, presentandole sotto le diverse forme che mi saranno utili in seguito.

Per questo, se i, k, l, m è una permutazione circolare degli indici 1, 2, 3, 4, e s'introducono i determinanti:

$$A_i = (-1)^i \begin{vmatrix} \xi_k, & \xi_l, & \xi_m \\ \frac{\partial x_k}{\partial u}, & \frac{\partial x_l}{\partial u}, & \frac{\partial x_m}{\partial u} \\ \frac{\partial x_k}{\partial v}, & \frac{\partial x_l}{\partial v}, & \frac{\partial x_m}{\partial v} \end{vmatrix}$$

è facile verificare che si ha:

$$\sum A_i^2 = E\,G - F^2 = \Delta^2;$$

quindi le equazioni

$$x_1\,\xi_1 + x_2\,\xi_2 + x_3\,\xi_3 + x_4\,\xi_4 = 0,$$

$$x_1\frac{\partial x_1}{\partial u} + x_2\frac{\partial x_2}{\partial u} + x_3\frac{\partial x_3}{\partial u} + x_4\frac{\partial x_4}{\partial u} = 0,$$

$$x_1\frac{\partial x_1}{\partial v} + x_2\frac{\partial x_2}{\partial v} + x_3\frac{\partial x_3}{\partial v} + x_4\frac{\partial x_4}{\partial v} = 0,$$

che si deducono dalle (16) risolute rispetto alle x_i, tenendo conto della prima delle stesse (16), ci dànno:

$$a) \qquad \Delta\, x_i = k\, A_i$$

Similmente ponendo

$$A'_i = (-1)^i \begin{vmatrix} x_k\ , & x_l\ , & x_m \\ \frac{\partial \xi_k}{\partial u}\ , & \frac{\partial \xi_l}{\partial u}\ , & \frac{\partial \xi_m}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi_k}{\partial v}\ , & \frac{\partial \xi_l}{\partial v}\ , & \frac{\partial \xi_m}{\partial v} \end{vmatrix}$$

si ha

$$\sum A'^2_i = k^2\,(\,E'\,G' - F'^2\,) = k^2\,\Delta'^2$$

e le equazioni

$$\begin{gathered} \xi_1\, x_1 + \xi_2\, x_2 + \xi_3\, x_3 + \xi_4\, x_4 = 0, \\ \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \xi_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial u} + \xi_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial u} + \xi_4 \frac{\partial \xi_4}{\partial u} = 0, \\ \xi_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \xi_2 \frac{\partial \xi_2}{\partial v} + \xi_3 \frac{\partial \xi_3}{\partial v} + \xi_4 \frac{\partial \xi_4}{\partial v} = 0, \end{gathered}$$

risolute rispetto alle ξ_i, danno:

$$(a') \qquad k\,\Delta'\,\xi_i = A'_i.$$

Le quantità Δ, Δ' sono sempre reali, giacchè i discriminanti $E\,G - F^2$, $E'\,G' - F'^2$ delle forme (I), (II) sono essenzialmente positivi. Infatti per $k^2 > 0$ il primo di essi è eguale alla somma dei quadrati delle A_i, e il secondo alla somma dei quadrati delle A'_i divisa per k^2. Nell'ipotesi di $k^2 < 0$, le A_i, A'_i non sono tutte reali, ma in questo caso, come nel precedente, si può scrivere:

$$k^2 (EG - F^2) = \begin{vmatrix} x_1 , & x_2 , & x_3 , & x_4 \\ \xi_1 , & \xi_2 , & \xi_3 , & \xi_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} , & \frac{\partial x_2}{\partial u} , & \frac{\partial x_3}{\partial u} , & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} , & \frac{\partial x_2}{\partial v} , & \frac{\partial x_3}{\partial v} , & \frac{\partial x_4}{\partial v} \end{vmatrix}^2$$

$$k^2 (E'G - F'^2) = \begin{vmatrix} \xi_1 , & \xi_2 , & \xi_3 , & \xi_4 \\ x_1 , & x_2 , & x_3 , & x_4 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial u} , & \frac{\partial \xi_2}{\partial u} , & \frac{\partial \xi_3}{\partial u} , & \frac{\partial \xi_4}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} , & \frac{\partial \xi_2}{\partial v} , & \frac{\partial \xi_3}{\partial v} , & \frac{\partial \xi_4}{\partial v} \end{vmatrix}^2$$

dove i secondi membri sono dello stesso segno di k^2, essendo, per $k^2 < 0$, immaginarii gli elementi delle prime colonne nei due determinanti; quindi saranno $EG - F^2$, ed $E'G' - F'^2$ quantità positive.

Nel seguito supporremo che le dieci funzioni E, F, G; E', F', G'; e, f, f', g si mantengano sempre finite e continue; sceglieremo per le quantità Δ, Δ' i valori positivi del radicale e le supporremo anche differenti da zero.

Coll'aiuto delle formole $a)$, $a')$ si possono facilmente costruire le altre:

$$
19)\quad \begin{cases}
x_i\dfrac{\partial \xi_k}{\partial u}-x_k\dfrac{\partial \xi_i}{\partial u}=\dfrac{k}{\Delta}\left\{\left(\xi_l\dfrac{\partial x_m}{\partial v}-\xi_m\dfrac{\partial x_l}{\partial v}\right)e-\left(\xi_l\dfrac{\partial x_m}{\partial u}-\xi_m\dfrac{\partial x_l}{\partial u}\right)f\right\}, \\[2ex]
x_i\dfrac{\partial \xi_k}{\partial v}-x_k\dfrac{\partial \xi_i}{\partial v}=\dfrac{k}{\Delta}\left\{\left(\xi_l\dfrac{\partial x_m}{\partial u}-\xi_m\dfrac{\partial x_l}{\partial u}\right)g-\left(\xi_l\dfrac{\partial x_m}{\partial v}-\xi_m\dfrac{\partial x_l}{\partial v}\right)f'\right\};
\end{cases}
$$

$$
(19')\quad \begin{cases}
\xi_i\dfrac{\partial x_k}{\partial u}-\xi_k\dfrac{\partial x_i}{\partial u}=\dfrac{1}{k\Delta'}\left\{\left(x_l\dfrac{\partial \xi_m}{\partial v}-x_m\dfrac{\partial \xi_l}{\partial v}\right)e-\left(x_l\dfrac{\partial \xi_m}{\partial u}-x_m\dfrac{\partial \xi_l}{\partial u}\right)f'\right\}, \\[2ex]
\xi_i\dfrac{\partial x_k}{\partial v}-\xi_k\dfrac{\partial x_i}{\partial v}=\dfrac{1}{k\Delta'}\left\{\left(x_l\dfrac{\partial \xi_m}{\partial u}-x_m\dfrac{\partial \xi_l}{\partial u}\right)g-\left(x_l\dfrac{\partial \xi_m}{\partial v}-x_m\dfrac{\partial \xi_l}{\partial v}\right)f\right\}.
\end{cases}
$$

Ora, se una volta si quadrano e si sommano le prime delle (19), poi si moltiplicano le prime per le seconde che corrispondono ai medesimi indici e si fa la somma dei prodotti, finalmente si quadrano e si sommano le seconde, si ottiene:

$$
(20)\quad \begin{cases}
E'=\dfrac{1}{\Delta^2}\left\{\,G\,e^2-2\,F\,e\,f+E\,f^2\,\right\}, \\[2ex]
F'=\dfrac{1}{\Delta^2}\left\{\,G\,e\,f'-F\,(e\,g+f\,f')+E\,f\,g\,\right\}, \\[2ex]
G'=\dfrac{1}{\Delta^2}\left\{\,G\,f'^2-2\,F\,f'\,g+E\,g^2\,\right\}.
\end{cases}
$$

Eseguendo le stesse operazioni sulle (19'), si ha.

$$
(20')\quad \begin{cases}
E=\dfrac{1}{\Delta'^2}\left\{\,G'\,e^2-2\,F'\,e\,f'+E'\,f'^2\right\}, \\[2ex]
F=\dfrac{1}{\Delta'^2}\left\{\,G'\,e\,f-F'\,(e\,g+f\,f')+E'\,f'\,g\right\}, \\[2ex]
G=\dfrac{1}{\Delta'^2}\left\{\,G'\,f^2-2\,F'\,f\,g+E'\,g^2\right\},
\end{cases}
$$

Sono queste le relazioni che legano i coefficienti delle tre forme differenziali introdotte; esse sono però tre sole indipendenti, poichè è facile verificare che le (20′) sono una conseguenza delle (20), come queste di quelle.

Una prima relazione semplice che si deduce immediatamente dalle (20) , (20′) è la seguente

$$\Delta^2 \Delta'^2 = (eg - ff')^2. \tag{21}$$

6. — Per dare altre forme alle precedenti relazioni, poniamo

$$P = Eg - F(f+f') + Ge\,, \quad P' = E'g - F'(f+f') + G'e. \tag{22}$$

Allora si ha:

$$\frac{P}{\Delta^2} = \frac{P'}{eg - ff'}\,, \quad \frac{P'}{\Delta'^2} = \frac{P}{eg - ff'}$$

ovvero per la (21):

$$\frac{P}{\Delta} = \frac{P'}{\Delta'} \tag{23}$$

Se poi le (20′) si pongono sotto la forma;

$$\Delta'^2\, E = (G'e - F'f')\,e - (F'e - E'f')\,f',$$
$$\Delta'^2\, F = (G'f - F'g)\,e - (F'f - E'g)\,f'$$
$$\Delta'^2\, F = (G'e - F'f')\,f - (F'e - E'f')\,g,$$
$$\Delta'^2\, G = (G'f - F'g)\,f - (F'f - E'g)\,g,$$

da queste si deducono subito le altre:

$$(24)\quad \begin{cases} \Delta'^2 (\mathrm{E} f - \mathrm{F} e) = (e g - f f')(\mathrm{F}' e - \mathrm{E}' f'), \\ \Delta'^2 (\mathrm{E} g - \mathrm{F} f') = (e g - f f')(\mathrm{G}' e - \mathrm{F}' f'), \\ \Delta'^2 (\mathrm{F} f - \mathrm{G} e) = (e g - f f')(\mathrm{F}' f - \mathrm{E}' g), \\ \Delta'^2 (\mathrm{F} g - \mathrm{G} f') = (e g - f f')(\mathrm{G}' f - \mathrm{F}' g), \end{cases}$$

e quindi

$$(25)\quad \frac{\mathrm{E} f - \mathrm{F} e}{\mathrm{F}' e - \mathrm{E}' f'} = \frac{\mathrm{E} g - \mathrm{F} f'}{\mathrm{G}' e - \mathrm{F}' f'} = \frac{\mathrm{F} f - \mathrm{G} e}{\mathrm{F}' f - \mathrm{E}' g} = \frac{\mathrm{F} g - \mathrm{G} f'}{\mathrm{G}' f - \mathrm{F} g} = \frac{\Delta}{\Delta'}$$

In seguito, per semplicità e simmetria, converrà anche introdurre le quantità:

$$(25)\quad \begin{cases} \mathbf{E} = \mathrm{E} - k^2 \mathrm{E}' \ , \quad \mathbf{F} = \mathrm{F} - k^2 \mathrm{F}' \ , \quad \mathbf{G} = \mathrm{G} - k^2 \mathrm{G}' \\ \mathbf{P} = \mathrm{P} - k^2 \mathrm{P}' = \mathbf{E}\, g - \mathbf{F}\, (f + f') + \mathbf{G}\, e, \\ \nabla = \Delta - k^2 \Delta', \end{cases}$$

e si avrà per la (23):

$$(23)^{\text{bis}}\qquad \frac{\mathbf{P}}{\nabla} = \frac{\mathrm{P}}{\Delta} = \frac{\mathrm{P}'}{\Delta'}.$$

Infine si può anche facilmente verificare coll' aiuto delle (20) o (20') che ponendo

$$(26)\qquad \mathbf{Q} = e g - \frac{1}{4}(f + f')^2,$$

si ha la relazione

$$(27)\qquad \mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2=\Delta^2-k^2\frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}+4\,k^2\,\mathbf{Q},$$

o l'altra che ne consegue:

$$(27)^{\text{bis}}\qquad \mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)=(\Delta^2+4k^2\mathbf{Q})\left(\frac{\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}\nabla^2}{\Delta^2}\right).$$

Rispetto alle quantità introdotte colle (25) dobbiamo fare le seguenti osservazioni. Notiamo anzi tutto che si ha identicamente:

$$(Ge-Eg)^2-4(gF-\frac{1}{2}(f+f')G)\left(\frac{1}{2}(f+f')E-eF\right)=P^2-4\mathbf{Q}\nabla^2,$$

e poichè al primo membro si può dare la forma

$$\left\{(eG-gE)+\frac{2F}{G}(gF-\frac{1}{2}(f+f')G)\right\}^2+\frac{4\Delta^2}{G^2}(gF-\frac{1}{2}(f+f')G)^2,$$

e Δ^2 è positivo, si conclude che sarà anche $P^2-4\,\mathbf{Q}\,\Delta^2$ positivo. Lo stesso dicasi per $P'^2-4\,\mathbf{Q}\,\Delta'^2$, e poichè si ha per le (23)^bis:

$$\frac{P^2-4\,\mathbf{Q}\,\Delta^2}{\Delta^2}=\frac{P'^2-4\,\mathbf{Q}\,\Delta'^2}{\Delta'^2}=\frac{\mathbf{P}^2-4\,\mathbf{Q}\,\nabla^2}{\nabla^2},$$

sarà anche $\mathbf{P}^2-4\,\mathbf{Q}\,\nabla^2$ positivo. Dunque essendo

$$\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2=\nabla^2-k^2\left(\frac{\mathbf{P}^2-4\,\mathbf{Q}\,\nabla^2}{\nabla^2}\right)$$

sarà $\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2$ positivo per $k^2<0$. Supponendo anche $\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2$ differente da zero, la quantità:

$$\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)=\left\{(e\mathbf{G}-g\mathbf{E})+\frac{2\mathbf{F}}{\mathbf{G}}\left(g\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\mathbf{G}\right\}^2+\right.$$
$$+\frac{4(\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)}{\mathbf{G}^2}\left\{g\,\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\,\mathbf{G}\right\}^2$$

sarà positiva e differente da zero per $k^2<0$, a meno che non si abbia:

$$\mathbf{E}:\mathbf{F}:\mathbf{G}=e:\frac{1}{2}(f+f'):g,$$

ciò che escluderemo anche per $k^2>0$.

§. 3.

I punti limiti.

7. — Supponiamo che dal raggio del sistema corrispondente ai valori u, v dei due parametri indipendenti si passi ad un raggio corrispondente ai valori $u+du$, $v+dv$, essendo per ora du, dv incrementi qualunque di u, v.

Se dx_i, $d\xi_i$ sono gli incrementi corrispondenti delle funzioni x_i, ξ_i, le coordinate x_i+dx_i del punto situato sulla superficie S, e le coordinate $\xi_i+d\,\xi_i$ del piano passante per esso, che determina la direzione del raggio $(u+du, v+dv)$, dovranno anch'esse soddisfare alle (16); quindi, in forza delle (16) stesse, si avrà:

$$(28)\left\{\begin{aligned}&\sum x_i\,dx_i=-\frac{1}{2}\sum dx_i^2\ ,\ \sum \xi_i\,d\xi_i=-\frac{1}{2}\sum d\xi_i^2,\\&\sum x_i\,d\xi_i+\sum \xi_i\,dx_i=-\sum dx_i\,d\xi_i.\end{aligned}\right.$$

Tenendo conto di queste, le quantità definite dalle (9), corrispondenti ai due raggi (u,v), $(u+du\,,\ v+dv)$ prendono la forma:

$$A_{11}=\sum x_i^2+\sum x_i\,dx_i=k^2-\frac{1}{2}\sum dx_i^2\ ,\quad A_{12}=\sum x_i\,d\xi_i,$$

$$A_{21}=\sum \xi_i dx_i\ ,\quad A_{22}=\sum \xi_i^2+\sum \xi_i d\xi_i=1-\frac{1}{2}\sum d\,\xi_i^2.$$

Supponiamo ora che gli accrescimenti du, dv siano infinitamente piccoli; allora se le x_i, ξ_i sono funzioni continue di u, v, anche gli accrescimenti dx_i, $d\xi_i$ saranno infinitamente piccoli; trascurandone le potenze superiori alla seconda, avremo:

$$A_{11}\,A_{21}+k^2A_{22}\,A_{12}=-k^2\sum dx_i\,d\xi_i\,,$$

$$A^2_{11}+k^2A^2_{12}-k^2A^2_{21}-k^4A^2_{22}=$$

$$=-k^2\left[\left\{\sum dx_i^2-\left(\sum x_i d\xi_i\right)^2\right\}-k^2\left\{\sum d\xi_i^2-\frac{1}{k^2}\left(\sum \xi_i\,dx_i\right)^2\right\}\right],$$

e poichè al limite si può in questa scambiare $(\sum x_i\,d\xi_i)^2$ con $(\sum \xi_i\,dx_i)^2$, si vede che i secondi membri delle ultime relazioni vengono a dipendere unicamente dalle tre forme differenziali introdotte al n.º 4, e precisamente

$$A_{11}\,A_{21}+k^2A_{22}\,A_{12}=-k^2\left(e\,du^2+(f+f')\,du dv+g\,dv^2\right),$$

$$A^2_{11}+k^2A_{12}-k^2A^2_{21}-k^4A^2_{22}=$$

$$-k^2\left\{(E+2F\,du\,dv+G\,dv^2)-k^2(E'+2F'\,du\,dv+G'\,dv)^2\right\}.$$

Quindi, tenendo conto delle notazioni (25), la prima delle equazioni (12) che dà le ascisse ridotte dei piedi delle massime e minime distanze sul raggio u, v prende la forma.

$$(29)\quad \begin{cases} \{ e\, du^2 + (f + f')\, du\, dv + g\, dv^2 \}\, r^2 + \\ \qquad \{ \mathbf{E}\, du^2 + 2\,\mathbf{F}\, du\, dv + \mathbf{G}\, dv^2 \}\, r \\ - k^2 (e\, du^2 + (f + f')\, du\, dv + g\, dv^2) = 0\,. \end{cases}$$

Se in questa si fa la trasformazione:

$$(30)\qquad r - \frac{k^2}{r} = \frac{1}{z}$$

ossia si pone

$$(30')\qquad z = -\frac{1}{2k}\,\mathrm{tg}\,\frac{2w}{k}$$

essa diventa

$$(31)\qquad z = -\frac{e\, du^2 + (f+f')\, du\, dv + g\, dv^2}{\mathbf{E}\, du^2 + 2\,\mathbf{F}\, du\, dv + \mathbf{G}\, dv^2}\,.$$

8. — Ora possiamo proporci la questione di ricercare per quali raggi del sistema infinitamente vicini al raggio $(u\,,\,v)$, le ascisse delle massime e delle minime distanze riescano massime o minime. Per questo, fatto nella (29) $\frac{dv}{du} = t$, basterà eguagliare a zero il valore che da essa si ricava di $\frac{\partial r}{\partial t}$, ossia basterà derivarla rispetto a t colla

condizione $\frac{\partial r}{\partial t} = 0$. Eseguendo questa derivazione e dividendo per 2 si trova:

$$\left(\frac{1}{2}(f+f')+gt\right)r^2 + (\mathbf{F}+\mathbf{G}t)\, r - k^2\left(\frac{1}{2}(f+f')+gt\right) = 0;$$

quindi, eliminando r fra questa e la (29), si ottiene, per determinare t, il quadrato dell' equazione :

$$(e-g\,t^2)\,(\mathbf{F}+\mathbf{G}\,t) - \left(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t\right)(\mathbf{E}-\mathbf{G}\,t^2) = 0$$

ovvero, ordinando rispetto a t,

$$(32)\qquad \left(g\,\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\,\mathbf{G}\right)t^2 - (e\,\mathbf{G}-g\,\mathbf{E})\,t + \\ +\left(\frac{1}{2}(f+f')\,\mathbf{E} - e\,\mathbf{F}\right) = 0.$$

Essendo questa equazione di 2.º grado, e ricordando che la distanza dei piedi della massima e minima distanza è sempre $\frac{1}{2}k\,\pi$, se ne deduce che se t è una radice della (32), il raggio corrispondente, se dà la massima o la minima ascissa del piede delle massime distanze, dà nello stesso tempo la massima o la minima ascissa dei piedi delle minime distanze, e lo stesso dicasi per l'altra radice.

Si tratta ora di determinare queste quattro ascisse. Esse si otterranno evidentemente dall' eliminazione della t fra la (29) e la (32), ovvero fra la (31) e (32), il che dà per z l' equazione.

$$(33)\quad (\mathbf{EG}-\mathbf{F}^2)z^2+\{g\mathbf{E}-(f+f')\mathbf{F}+e\mathbf{G}\}z+eg-\frac{1}{4}(f+f')^2=0;$$

ovvero, risostituendovi la r per mezzo della (30), e adoperando le notazioni del § 2:

$$(34)\quad \mathbf{Q}\,r^4+\mathbf{P}r^3+\{(\mathbf{EG}-\mathbf{F}^2)-2k^2\mathbf{Q}\}\,r^2-k^2\mathbf{P}r+k^4\mathbf{Q}=0.$$

Se r è una radice di questa equazione, essa ammette anche la radice $-\frac{k^2}{r}$, come è naturale. Siano L_1, L_2 i piedi delle minime distanze corrispondenti alle radici r_1, r_2 e L'_1, L'_2 i piedi delle massime distanze corrispondenti alle radici $r_1'=-\frac{k^2}{r_1}$, $r_2'=-\frac{k^2}{r_2}$. I punti L_1, L_2 fra i quali cadono tutti i piedi delle minime distanze del raggio (u, v) da quelli infinitamente vicini, si chiameranno i *punti limiti dei piedi delle minime distanze*, e per la stessa ragione L'_1, L'_2 i *punti limiti dei piedi delle massime distanze.*

Per quel che abbiamo visto in fine del §. precedente, le due equazioni (32), (33) che hanno lo stesso discriminante, hanno le radici reali per $k^2<0$, quindi nello spazio di Lobatschewsky i punti limiti dei piedi delle minime distanze sono sempre reali.

9. — Ponendo ora

$$V^2=E+2F\,t+G\,t^2,$$
$$v^2=e+(f+f')\,t+g\,t^2,\ (*)$$
$$V'^2=E'+2F'\,t+G'\,t^2,$$

(*) Per simmetria si è rappresentata la forma $e+(f+f')\,t+g\,t^2$ con un quadrato, quantunque essa non sia necessariamente positiva.

indichiamo con V_1, v_1, V'_1; V_2, v_2, V'_2 i valori che assumono rispettivamente V, v, V per $t=t_1$, $t=t_2$, essendo t_1, t_2 le radici (quando sono reali per $k^2>0$) della (32), e conseguentemente poniamo:

$$\mathbf{V}_1{}^2=\mathbf{E}+2\,\mathbf{F}\,t_1+\mathbf{G}\,t_1{}^2=V_1{}^2-k^2\,V_1'{}^2,$$
$$\mathbf{V}_2{}^2=\mathbf{E}+2\,\mathbf{F}\,t_2+\mathbf{G}\,t_2{}^2=V_2{}^2-k^2\,V'_2{}^2.$$

Deducendosi dalla (32):

$$(35)\quad t_1+t_2=\frac{e\,\mathbf{G}-g\,\mathbf{E}}{g\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\mathbf{G}}\quad,\quad t_1\,t_2=\frac{\frac{1}{2}(f+f')\mathbf{E}-e\mathbf{F}}{g\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\mathbf{G}}$$

si trova immediatamente

$$(36)\qquad\left\{\begin{aligned}&\mathbf{E}+\mathbf{F}\,(t_1+t_2)+\mathbf{G}\,t_1t_2=0,\\&e+\frac{1}{2}(f+f')(t_1+t_2)+g\,t_1t_2=0;\end{aligned}\right.$$

e le altre che ne conseguono:

$$(37)\quad\left\{\begin{gathered}\mathbf{V}_1{}^2=(t_1-t_2)(\mathbf{F}+\mathbf{G}t_1)\ ,\ \mathbf{V}_2{}^2=-(t_1-t_2)(\mathbf{F}+\mathbf{G}t_2),\\(\mathbf{F}+\mathbf{G}\,t_1)\,(\mathbf{F}+\mathbf{G}\,t_2)=-\,(\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2),\\\mathbf{V}_1{}^2\,\mathbf{V}_2{}^2=(t_1-t_2)^2\,(\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2);\\v_1{}^2=(t_1-t_2)\Big(\frac{1}{2}(f+f')+gt_1\Big),\ v_2{}^2=-(t_1-t_2)\Big(\frac{1}{2}(f+f')+gt_2\Big)\\\Big(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_1\Big)\Big(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_2\Big)=-\,\mathbf{Q},\\v_1{}^2\,v_2{}^2=(t_1-t_2)^2\,\mathbf{Q}.\end{gathered}\right.$$

$$
(38) \left\{ \begin{aligned}
\mathbf{V}_1{}^2 v_2{}^2 + \mathbf{V}_2{}^2 v_1{}^2 &= (t_1 - t_2)^2 \mathbf{P}, \\
\mathbf{V}_1{}^2 v_2{}^2 - \mathbf{V}_2{}^2 v_1{}^2 &= (t_1 - t_2)^3 \left\{ g\,\mathbf{F} - \frac{1}{2}(f+f') \right\} \mathbf{G}.
\end{aligned} \right.
$$

Dalle (35) si ha pure

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}+\mathrm{F}\,(t_1+t_2)+\mathrm{G}\,t_1 t_2 = \\
&= \frac{\mathrm{E}\left(g\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\mathbf{G}\right)+\mathrm{F}(e\mathbf{G}-g\mathbf{E})+\mathrm{G}\left(\frac{1}{2}(f+f')\,\mathbf{E}-e\,\mathbf{F}\right)}{g\,\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\,\mathbf{G}} = \\
&= -k^2 \frac{\mathrm{E}\left(g\,\mathrm{F}'-\frac{1}{2}(f+f')\mathrm{G}'\right)+\mathrm{F}(e\mathrm{G}'-g\mathrm{E}')+\mathrm{G}\left(\frac{1}{2}(f+f')\mathrm{E}'-e\mathrm{F}'\right)}{g\,\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\,\mathbf{G}};
\end{aligned}
$$

e sostituendo a E' , F' , G' i loro valori dati dalle (20), si ottiene, dopo semplici riduzioni, che il secondo membro si trasforma nell' espressione:

$$
a) \qquad -\frac{1}{2}k^2 \frac{f-f'}{g\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\mathbf{G}} \times \frac{\mathrm{P}^2 - 4\,\mathbf{Q}\,\Delta^2}{\nabla^2}
$$

Quindi se si pone per brevità

$$
(39) \qquad -\frac{1}{2}\frac{f-f'}{g\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\mathbf{G}} \times \frac{\mathbf{P}^2-4\,\mathbf{Q}\,\nabla^2}{\nabla^2} = \mathbf{M}
$$

e si osserva che il primo membro è eguale, per ciò che abbiamo visto in fine del §. precedente, all'espressione a), si avrà:

$$(40)\qquad E+F\,(t_1+t_2)+G\,t_1 t_2 = k^2\,\mathbf{M}\,;$$

e poichè la prima delle (36) equivale all' altra

$$E+F\,(t_1+t_2)+G\,t_1\,t_2 = k^2\,(E'+F'(t_1+t_2)+G'\,t_1\,t_2),$$

si avrà ancora

$$(40')\qquad E'+F'\,(t_1+t_2)+G'\,t_1\,t_2 = \mathbf{M}\,.$$

Se ne deduce

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{l} V_1{}^2 = (t_1-t_2))\,(F+G\,t_1)+k^2\,\mathbf{M}, \\ V_2{}^2 = -\,(t_1-t_2)\,(F+G\,t_2)+k^2\,\mathbf{M}', \\ (F+G\,t_1)\,(F+G\,t_2) = -\,\Delta^2+k^2\,G\,\mathbf{M} \\ V_1{}^2\,V_2{}^2 = (t_1-t_2)^2\,\Delta^2+k^4\,\mathbf{M}^2. \end{array}\right.$$

E analogamente

$$(41')\qquad \left\{\begin{array}{l} V_1{}'^2 = (t_1-t_2)\,(F'+G'\,t_1)+\mathbf{M}, \\ V_2{}'^2 = -\,(t_1-t_2)\,(F'+G'\,t_2)+\mathbf{M}, \\ (F'+G'\,t_1)\,(F'-G'\,t_2) = -\,\Delta'^2+G'\,\mathbf{M}, \\ \qquad V_1{}'^2\,V_2{}'^2 = (t_1-t_2)^2\,\Delta'^2+\mathbf{M}^2. \end{array}\right.$$

Si hanno pure con facilità le altre

$$(42)\qquad V_1{}^2\,v_1{}^2+V_2{}^2\,v_1{}^2 = (t_1-t_2)^2\,P,$$

$$(42')\qquad V_1{}'^2\,v_2{}^2+V_2{}'^2\,v_1{}^2 = (t_1-t_2)^2\,P'.$$

Finalmente osservando che si ha:

$$V_1^{\,2}\, v_2^{\,2} - V_2^{\,2}\, v_1^{\,2} = -(t_1 - t_2)\times$$
$$\{(f+f')E - 2eF) + (t_1+t_2)(gE - eG) + t_1 t_2 (2gF - (f+f')G)\},$$

sostituendo a (t_1+t_2) e $t_1\ t_2$ i valori (35), si trova, dopo facili riduzioni:

$$V_1^{\,2}\, v_2^{\,2} - V_2^{\,2}\, v_1^{\,2} = \frac{t_1 - t_2}{g\,\mathbf{F} - \frac{1}{2}(f+f')\,\mathbf{G}}\times$$
$$[P^2 - 4\,\mathbf{Q}\,\Delta^2 - k^2 \{ PP' - 2\,\mathbf{Q}\,(E\,G' + E'\,G - 2\,F\,F')\}],$$

che si può ancora ridurre alla forma:

$$(43)\qquad V_1^{\,2}\, v_2^{\,2} - V_2^{\,2}\, v_1^{\,2} = \frac{t_1 - t_2}{k^2\,(g\,\mathbf{F} - \frac{1}{2}(f+f')\,\mathbf{G})}\times$$
$$(\Delta\,\nabla + 2\,k^2\,\mathbf{Q})\,(\nabla^2 - (\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2)),$$

e analogamente

$$(43')\qquad V_1'^{\,2}\, v_2^{\,2} - V_2'^{\,2}\, v_1^{\,2} = \frac{t_1 - t_2}{k^2\,(g\,\mathbf{F} - \frac{1}{2}(f+f')\,\mathbf{G})}\times$$
$$(\Delta\,\nabla' - 2\,\mathbf{Q})\,(\nabla^2 - (\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F})).$$

10. — Siano z_1, z_2 le due radici della (33) corrispondenti rispettivamente alle radici t_1, t_2 della (32), avremo

$$z_1 = -\frac{e + (f+f')\,t_1 + g\,t_1^{\,2}}{\mathbf{E} + 2\,\mathbf{F}\,t_1 + \mathbf{G}\,t_1^{\,2}} = -\frac{v_1^{\,2}}{\mathbf{V}_1^{\,2}},$$
$$z_2 = -\frac{e + (f+f')\,t_2 + g\,t_2^{\,2}}{\mathbf{E} + 2\,\mathbf{F}\,t_2 + \mathbf{G}\,t_2^{\,2}} = -\frac{v_2^{\,2}}{\mathbf{V}_2^{\,2}},$$

od anche, per le (37):

$$z_1 = -\frac{e + \frac{1}{2}(f + f')\, t_1}{\mathbf{E} + \mathbf{F}\, t_1} = -\frac{\frac{1}{2}(f + f') + g\, t_1}{\mathbf{F} + \mathbf{G}\, t_1},$$

$$z_2 = -\frac{e + \frac{1}{2}(f + f')\, t_2}{\mathbf{E} + \mathbf{F}\, t_2} = -\frac{\frac{1}{2}(f + f') + g\, t_2}{\mathbf{F} + \mathbf{G}\, t_2}.$$

Avremo pure

$$(44) \qquad z_1 + z_2 = -\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2} \qquad z_1\, z_2 = \frac{\mathbf{Q}}{\mathbf{F}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}$$

Di più osservando che per le (37) si ha:

$$z_1 - z_2 = \frac{\mathbf{V}_1{}^2 v_2{}^2 - \mathbf{V}_2{}^2 v_1{}^2}{\mathbf{V}_1{}^2\, \mathbf{V}_2{}^2} = (t_1 - t_2)\, \frac{g\,\mathbf{F} - \frac{1}{2}(f + f')\,\mathbf{G}}{\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2},$$

se si suppone, come evidentemente può farsi, che le radici t_1, t_2 siano scelte in modo, che nella formola:

$$(45) \qquad t_1 - t_2 = \frac{\sqrt{\mathbf{P}^2 - 4\mathbf{Q}(\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2)}}{g\,\mathbf{F} - \frac{1}{2}(f + f')\,\mathbf{G}},$$

si debba prendere il segno positivo del radicale, si avrà pure:

$$(46) \qquad z_1 - z_2 = \frac{\sqrt{\mathbf{P}^2 - 4\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2)}}{\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2}$$

Le rispettive radici r_1 , r'_1 ; r_2 , r'_2 delle equazioni di secondo grado :

$$r - \frac{k^2}{r} = \frac{1}{z_1} \quad , \quad r - \frac{k^2}{r} = \frac{1}{z_2}$$

saranno le quattro radici della (34) e soddisferanno alle identità :

$$(47) \qquad r_1 - \frac{k^2}{r_1} = \frac{1}{z_1} \quad , \quad r_2 - \frac{k^2}{r_2} = \frac{1}{z_2} \, ,$$

$$(47') \qquad r'_1 - \frac{k^2}{r'_1} = \frac{1}{z_1} \quad , \quad r'_2 - \frac{k^2}{r'_2} = \frac{1}{z_2} \, .$$

Chiamando con w_1 , w'_1 , w_2 , w'_2 i valori di w corrispondenti rispettivamente alle ascisse ridotte r_1 , r'_1 , r_2 , r'_2 e osservando che è $w'_1 = w_1 \pm \frac{1}{2} k\pi$, $w'_2 = w_2 \pm \frac{1}{2} k\pi$, poniamo:

$$(48) \qquad \mathrm{H} = k \,\mathrm{tg}\left(\frac{w_1 + w_2}{k}\right) = k \,\mathrm{tg}\left(\frac{w'_1 + w'_2}{k}\right),$$

ovvero, avendosi

$$r'_1 = -\frac{k^2}{r_1} \quad , \quad r'_2 = -\frac{k^2}{r_2} \, ,$$

$$(48') \qquad \mathrm{H} = \frac{r_1 + r_2}{k^2 - r'_1 \, r'_2} = k^2 \frac{r'_1 + r'_2}{k'^2 - r'_1 \, r'_2} \, .$$

Analogamente poniamo

S. N.

$$(49) \qquad \mathrm{H}' = k \operatorname{tg}\left(\frac{w'_1 + w_2}{k}\right) = k \operatorname{tg}\left(\frac{w_1 + w'_2}{k}\right),$$

ovvero:

$$(49') \qquad \mathrm{H}' = k^2 \frac{r_1' + r_2{}^2}{k^2 - r_1' r^2} = k^2 \frac{r_1 + r'_2}{k^2 - r_1 r'_2}.$$

Si tratta ora di esprimere per mezzo dei coefficienti della (33) le quantità H, H′, che, come si vede subito, soddisfano alla relazione $\mathrm{H}\,\mathrm{H}' = -k^2$.

Per questo, se una volta si sommano le (47) e una volta si moltiplicano, si trova:

$$a) \qquad -(r_1 + r_2)\left(\frac{k^2 - r_1 r_2}{r_1 r_2}\right) = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = -\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}}$$

$$b) \qquad \frac{r_1{}^2 r_2{}^2 - k^2(r_1 + r_2)^2 + k^4}{r_1 r_2} + 2k^2 = \frac{1}{z_1 z_2} = \frac{1}{\mathbf{Q}}(\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2).$$

Dunque, per avere l' espressione voluta di H, basterà eliminare $r_1 + r_2$ e $r_1 r_2$ dalle (48′), a), b). A tale scopo si può ricavare dalla (48′) il valore di $r_1 + r_2$ e sostituirlo nelle a), b) con che esse diventano, tenuto conto della (27):

$$\mathrm{H} r_1{}^2 r_2{}^2 - k^2\left(2\,\mathrm{H} + \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}}\right) r_1 r_2 + k^4\,\mathrm{H} = 0,$$

$$(k^2 - \mathrm{H}^2) r_1{}^2 r_2{}^2 - k^2\left[\frac{1}{\mathbf{Q}}\left(\nabla^2 - \frac{k^2\,\mathbf{P}^2}{\nabla^2}\right) + 2(k^2 - \mathrm{H}^2)\right] r_1 r_2 + k^4(k^2 - \mathrm{H}^2) =$$

ed eliminando fra queste $r_1 r_2$, si ottiene per H l'equazione:

$$\mathbf{P}\,H^2 + \left(\nabla^2 - \frac{k^2\mathbf{P}^2}{\nabla^2}\right)H - k^2\,\mathbf{P} = 0,$$

e poichè il prodotto delle sue radici è $-k^2$, si deduce che una di esse sarà H, l' altra H', poniamo

$$(50) \qquad H = k^2\frac{\mathbf{P}}{\nabla^2}\ , \quad H' = -\frac{\nabla^2}{\mathbf{P}}.$$

Procedendo come sopra, poniamo,

$$(51) \qquad H_1 = k\,\mathrm{tg}\left(\frac{w_1 - w_2}{k}\right) = k\,\mathrm{tg}\left(\frac{w'_1 - w'_2}{k}\right),$$

ovvero

$$(51)' \qquad H_1 = k^2\frac{r_1 - r_2}{k^2 + r_1 r_2} = k^2\frac{r'_1 - r'_2}{k^2 + r'_1 r'_2}$$

e

$$(52) \qquad H'_1 = k\,\mathrm{tg}\left(\frac{w'_1 - w_2}{k}\right) = k\,\mathrm{tg}\left(\frac{w_1 - w'_2}{k}\right),$$

ovvero

$$(52') \qquad H'_1 = k^2\frac{r'_1 - r_2}{k^2 + r'_1 r_2} = k^2\frac{r_1 - r'_2}{k^2 + r_1 r'_2}.$$

Per determinare in funzione dei coefficienti della (33) le quantità H_1, H'_1, sottraiamo prima le (47), con che si ha:

$$a') \quad -(r_1-r_2)\left(\frac{k^2+r_1 r_2}{r_1 r_2}\right)=\frac{z_1-z_2}{z_1 z_2}=\frac{\sqrt{\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)}}{\mathbf{Q}}$$

e poniamo la b) sotto la forma:

$$b') \quad \frac{r_1{}^2 r_2{}^2-k^2(r_1-r_2)^2+k^4}{r_1 r_2}-2k^2=\frac{1}{z_1 z_2}=\frac{\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2}{\mathbf{Q}}.$$

Sostituendo in queste il valore di r_1-r_2 tratto dalla (51′), esse diventano:

$$\mathrm{H}_1 r_1{}^2 r_2{}^2+k^2\left(2\,\mathrm{H}_1+\frac{\sqrt{\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)}}{\mathbf{Q}}\right)r_1 r_2+k^4\mathrm{H}_1=0,$$

$$(k^2-\mathrm{H}_1{}^2)\,r_1{}^2 r_2{}^2-k^2\left[2(k^2+\mathrm{H}_1{}^2)+\frac{\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2}{\mathbf{Q}}\right]r_1 r_2 + k^4(k^2-\mathrm{H}_1{}^2)=0;$$

ed eliminando da esse $r_1 r_2$, si ottiene per H_1 l'equazione:

$$\mathrm{H}_1{}^2-\frac{(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)+4k^2\mathbf{Q}}{\sqrt{\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)}}\,\mathrm{H}_1-k^2=0,$$

che risoluta darà, per la (27)

$$(53)\quad \begin{cases} \mathrm{H}_1=-\dfrac{k^2}{\nabla^2}\dfrac{\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}\nabla^2}{\sqrt{\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)}}=\dfrac{\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2-\nabla^2}{\sqrt{\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)}}, \\[2ex] \mathrm{H}_1'=\dfrac{\nabla^2+4k^2\mathbf{Q}}{\sqrt{\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)}}=\dfrac{\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2+k^2\dfrac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}}{\sqrt{\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)}} \end{cases}$$

Riguardo alle formole (50) e (53) bisogna avvertire che, avendo supposto che r_1, r_2 siano le ascisse ridotte dei piedi delle minime distanze, e r'_1, r'_2 di quelli delle massime, non può scegliersi ad arbitrio per H, H', H_1 e H'_1 una qualunque delle due radici delle respettive equazioni di 2.º grado che le determinano; per giustificare quindi la scelta fatta, faremo uso delle considerazioni seguenti. È facile riconoscere che il metodo seguito finora per trattare i sistemi di raggi negli spazi curvi è una estensione di quello adoperato da Kummer per lo studio di questi sistemi nello spazio euclideo, e che le formole della memoria di Kummer si deducono tutte da quelle trovate finora col passaggio al limite per $k^2 = \infty$. Negli spazii curvi però, e più specialmente in quello a curvatura costante positiva, si è veduto come si presentino spontaneamente nuovi elementi che non hanno luogo nello spazio euclideo, dovuti al fatto che due rette hanno non solo una minima distanza fra loro, ma anche una massima. Quindi quando non sia facile distinguere direttamente quali delle formole che s'incontrano corrispondono agli elementi che sono comuni allo spazio euclideo e quali a quelli che non lo sono, converrà passare al limite per $k^2 = \infty$, e quelle che si riducono alle formole dello spazio euclideo saranno da considerarsi come relative a quegli elementi che hanno luogo anche in questo spazio.

Così nel caso presente si vede che il valore di H dato dalla (50) deve essere considerato come corrispondente alle ascisse dei punti L_1, L_2 (e anche L'_1, L'_2) perchè passando al limite per $k^2 = \infty$, H si riduce a $w_1 + w_2$, e il suo valore viene a coincidere precisamente con quello che si ha nello spazio euclideo per la somma delle ascisse dei punti limiti; il valore di H' invece, diventando infinito, corrisponderà ai punti L'_1, L_2 ed anche a L_1, L'_2. Lo stesso ripetasi per le (53).

Riassumendo dunque, avremo la formola:

$$(54) \quad k \operatorname{tg}\left(\frac{w_1+w_2}{k}\right) = k \operatorname{tg}\left(\frac{w'_1+w'_2}{k}\right) = k^2 \frac{\mathbf{P}}{\nabla^2},$$

che potrà servire alla determinazione dell'ascissa del punto medio del segmento $L_1 L_2$, o $L'_1 L'_2$; e la prima delle (53), che per la $(27)^{bis}$ si può scrivere

$$(55) \quad \operatorname{tg}^2\left(\frac{w_1-w_2}{k}\right) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{w'_1-w'_2}{k}\right) = k^2 \frac{\frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2} - 4\,\mathbf{Q}}{\nabla^2 + 4\,k^2\,\mathbf{Q}}$$

che servirà a determinare la lunghezza del segmento $L_1 L_2$ o del suo eguale $L'_1 L'_2$.

§. 4.

I punti focali.

11. — Ricerchiamo ora quei raggi del sistema infinitamente vicini al raggio $(u\,,\,v)$ che s'incontrano con esso. I differenziali dx_i, $d\xi_i$ ad essi corrispondenti devono soddisfare alla condizione (15) per l'incontro di due rette, quindi all' equazione:

$$(56)\qquad \begin{vmatrix} x_1 \,, & x_2 \,, & x_3 \,, & x_4 \\ dx_1 \,, & dx_2 \,, & dx_3 \,, & dx_4 \\ \xi_1 \,, & \xi_2 \,, & \xi_3 \,, & \xi_4 \\ d\xi_1 \,, & d\xi_2 \,, & d\xi_3 \,, & d\xi_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Per dedurne l'equazione a cui devono soddisfare i differenziali du, dv, basta osservare che eseguendone il quadrato e sviluppando il determinante del suo primo membro, la (56) prende la forma:

$$\left\{ \sum dx_i^2 - (\sum \xi_i \, dx_i)^2 \right\} \left\{ \sum d\xi_i^2 - \frac{1}{k^2} (\sum x_i d\xi_i)^2 \right\} - (\sum dx_i \, d\xi_i)^2 = 0.$$

e questa per le (I), (II), (III) del §. 2. diventa:

$$(57)\quad (E + 2F\tau + G\tau^2)(E' + 2F'\tau + G'\tau^2) - (e + (f + f')\tau + g\tau^2)^2 = 0,$$

avendo posto $\tau = \frac{dv}{du}$. Questa equazione si potrebbe facilmente ridurre al quadrato di una equazione di 2.º grado in τ, come è naturale, essendosi essa dedotta quadrando la (56). Per ottenerla seguiremo un' altra via che ci servirà nel tempo stesso a determinare le ascisse ridotte di quei punti in cui il raggio (u, v) è incontrato da quei due raggi infinitamente vicini che sono determinati dalle (56) o (57), punti che, come nello spazio euclideo, si chiameranno *punti focali* o semplicemente *fuochi*.

Per questo osserviamo che se le X sono le coordinate di un fuoco sul raggio (u, v), esse dovranno anche essere le coordinate dello stesso punto sul secondo raggio

$(u+du\ ,\ v+dv)$, e però si dovrà avere, per tutte le X_i, $d\,X_i = 0$. Quindi, poichè:

$$X_i = x_i \cos\frac{w}{k} + k\,\xi_i \operatorname{sen}\frac{w}{k},$$

si avrà:

$$dx_i \cos\frac{w}{k} + k\,d\xi_i \operatorname{sen}\frac{w}{k} - \frac{x_i}{k}\operatorname{sen}\frac{w}{k}\,d\,w + \xi_i \cos\frac{w}{k}\,d\,w = 0.$$

Queste, moltiplicate prima per le x_i e sommate, e poi moltiplicate per le ξ_i e sommate, dànno intanto:

$$d\,w = \sum x_i\,d\xi_i = -\sum \xi_i\,dx_i$$

e quindi diventano

$$(58)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial u}\cos\dfrac{w}{k} + k\dfrac{\partial \xi_i}{\partial u}\operatorname{sen}\dfrac{w}{k} - \dfrac{x_i}{k}\operatorname{sen}\dfrac{w}{k}\sum x_i\dfrac{\partial \xi_i}{\partial u} + \xi_i\cos\dfrac{w}{k}\sum x_i\dfrac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)du\, + \\ + \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial v}\cos\dfrac{w}{k} + k\dfrac{\partial \xi_i}{\partial v}\operatorname{sen}\dfrac{w}{k} - \dfrac{x_i}{k}\operatorname{sen}\dfrac{w}{k}\sum x_i\dfrac{\partial \xi_i}{\partial v} + \xi_i\cos\dfrac{w}{k}\sum x_i\dfrac{\partial \xi_i}{\partial v}\right)dv = 0, \end{cases}$$

ovvero:

$$(58')\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial u}\cos\dfrac{w}{k} + k\dfrac{\partial \xi_i}{\partial u}\operatorname{sen}\dfrac{w}{k} + \dfrac{x_i}{k}\operatorname{sen}\dfrac{w}{k}\sum \xi_i\dfrac{\partial x_i}{\partial u} - \xi_i\cos\dfrac{w}{k}\sum \xi_i\dfrac{\partial x_i}{\partial u}\right)du\, + \\ + \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial v}\cos\dfrac{w}{k} + k\dfrac{\partial \xi_i}{\partial v}\operatorname{sen}\dfrac{w}{k} + \dfrac{x_i}{k}\operatorname{sen}\dfrac{w}{k}\sum \xi_i\dfrac{\partial x_i}{\partial v} - \xi_i\cos\dfrac{w}{k}\sum \xi_i\dfrac{\partial x_i}{\partial v}\right)dv = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando le (58) una volta per $\dfrac{\partial \xi_i}{\partial u}$, un' altra per

$\frac{\partial \xi_i}{\partial v}$ e sommando, si ottiene:

$$(59)\quad \begin{cases} (E' \, du + F' \, dv) \, k \operatorname{sen} \frac{w}{k} + (e \, du + f \, dv) \cos \frac{w}{k} = 0, \\ (F' \, du + G' \, dv) \, k \operatorname{sen} \frac{w}{k} + (f' \, du + g \, dv) \cos \frac{w}{k} = 0; \end{cases}$$

e moltiplicando invece le (58') una volta per $\frac{\partial x_i}{\partial u}$, un'altra per $\frac{\partial x_i}{\partial v}$ e sommando, si ha:

$$(59')\quad \begin{cases} (E \, du + F \, dv) \cos \frac{w}{k} + (e \, du + f' \, dv) \, k \operatorname{sen} \frac{w}{k} = 0, \\ (F \, du + G \, dv) \cos \frac{w}{k} + (f \, du + g \, dv) \, k \operatorname{sen} \frac{w}{k} = 0. \end{cases}$$

Eliminando successivamente $k \operatorname{sen} \frac{w}{k}$ e $\cos \frac{w}{k}$ dalle (59), (59'), si ottengono per determinare $\tau = \frac{dv}{du}$ le equazioni:

$$(60)\quad \begin{cases} (E'f' - F'e) + (E'g - F'(f - f') - G'e)\tau + (F'g - G'f)\tau^2 = 0, \\ (Ef - Fe) + (Eg - F(f' - f) - Ge)\tau + (Fg - Gf')\tau^2 = 0; \end{cases}$$

le quali, per le relazioni (25), sono equivalenti l'una all'altra, e sono esse che, quadrate, risultano equivalenti alla (57).

Se invece dalle (59), (59') si eliminano du, dv si hanno per determinare le ascisse ridotte ρ dei fuochi, le equazioni, pure equivalenti:

$$(61) \begin{cases} (E'G'-F'^2)\rho^2+(E'g-F'(f+f')+G'e)\rho+eg-ff'=0, \\ eg(-ff')\rho^2+(Eg-F(f+f')+Ge)\rho+EG-F^2=0; \end{cases}$$

le quali, sottraendo dalla seconda la prima moltiplicata per k^2, possono scriversi sotto l'unica forma:

$$(62) \qquad \Delta' \nabla \rho^2 + \mathbf{P}\rho + \Delta \nabla = 0.$$

Quando quest'equazione e le (61) ammettono le radici reali, indichiamole rispettivamente con ρ_1, ρ_2, τ_1, τ_2; fra esse si hanno per le (59), (59') le relazioni:

$$(63) \quad \rho_1 = -\frac{E+F\tau_1}{e+f'\tau_1} = -\frac{F+G\tau_1}{f+g\tau_1}, \quad \rho_2 = -\frac{E+F\tau_2}{e+f'\tau_2} = -\frac{F+G\tau_2}{f+g\tau_2},$$

$$(63') \quad \rho_1 = -\frac{e+f\tau_1}{E'+F'\tau_1} = -\frac{f'+g\tau_1}{F'+G'\tau_1}, \quad \rho_2 = -\frac{e+f\tau_2}{E'+F'\tau_2} = -\frac{f'+g\tau_2}{F'+G'\tau_2},$$

e quindi anche

$$(64) \quad \rho_1 = -\frac{E+2F\tau_1+G\tau_1^2}{e+(f+f')\tau_1+g\tau_1^2}, \quad \rho_2 = -\frac{E+2F\tau_2+G\tau_2^2}{e+(f+f')\tau_2+g\tau_2^2},$$

$$(64') \quad \rho_1 = -\frac{e+(f+f')\tau_1+g\tau_1^2}{E'+2F'\tau_1+G'\tau_1^2}, \quad \rho_2 = -\frac{e+(f+f')\tau_2+g\tau_2^2}{E'+2F'\tau_2+G'\tau_2^2}.$$

Se ne deduce, tornando ad indicare con ρ una radice qualunque della (62):

$$\frac{\rho}{\rho^2-k^2} = -\frac{e+(f+f')\tau+g\tau^2}{\mathbf{E}+2\mathbf{F}\tau+\mathbf{G}\tau^2},$$

ossia ρ soddisfa, come è naturale, all'equazione (29) §. 3. che dà le ascisse ridotte dei piedi delle massime o minime distanze, dove sia fatto $\dfrac{dv}{du} = \tau$. Se ρ è la radice di questa equazione che corrisponde ad un fuoco, l'altra radice $-\dfrac{k^2}{\rho}$ corrisponde ad un punto del raggio (u, v) che ha dal fuoco la distanza $\pm \dfrac{1}{2} k\pi$, ossia, per $k^2 > 0$, al piede della massima distanza dei due raggi infinitamente vicini che hanno il fuoco come punto comune.

12. — Se indichiamo con σ_1, σ_2 le ascisse dei fuochi, in modo che si abbia:

$$\rho_1 = k \operatorname{tg} \frac{\sigma_1}{k} \ , \quad \rho_2 = k \operatorname{tg} \frac{\sigma_2}{k} \ ,$$

si ha per la (62):

$$k \operatorname{tg} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{k} \right) = k^2 \frac{\mathbf{P}}{\nabla^2} ,$$

che, confrontata con la (54) del paragrafo precedente, porta a concludere che si abbia:

$$w_1 + w_2 = \sigma_1 + k_2 + m\, k\, \pi ,$$

ed anche

$$w'_1 + w'_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + m'\, k\, \pi ,$$

dove m, m' sono due numeri interi che si possono supporre eguali a 1 o a 2.

Ma poichè se σ_1 è un valore corrispondente a ρ_1, tale è pure $\sigma_1 \pm k\pi$, è chiaro che si possono sempre scegliere tra i due fuochi e i loro opposti, due di essi per i quali si abbia $\sigma_1 + \sigma_2 = w_1 + w_2$, e due che diano $\sigma_1 + \sigma_2 = w'_1 + w'_2$.

Dunque:

Nello spazio di Riemann i due fuochi e i loro opposti comunque vengano associati a coppie, determinano su ogni raggio del sistema un segmento che ha lo stesso punto medio di quello terminato dai punti limiti dei piedi delle minime o delle massime distanze.

Nello spazio di Lobatschewsky il segmento terminato dai fuochi ha lo stesso punto medio di quello terminato dai punti limiti.

Dalla stessa equazione (62) si deduce

$$k \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{k}\right) = h^2 \frac{\sqrt{\mathbf{P}^2 - 4\nabla^2 \Delta \Delta'}}{\nabla(\Delta + k^2 \Delta')}$$

e quindi, per essere $\Delta\Delta' = \mathbf{Q} + \frac{1}{4}(f - f')^2$,

$$\operatorname{tg}^2\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{k}\right) = k^2 \frac{\frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2} - 4\mathbf{Q} - (f - f')^2}{\nabla^2 + 4k^2\mathbf{Q} + k^2(f - f')^2}$$

Da questa e dalla (55) si ha dunque

$$(65) \qquad \operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1 - w_2}{k}\right) = k^2 \frac{\frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2} - 4\,\mathbf{Q}}{\nabla^2 + k^2 \frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}}$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{k}\right) = k^2 \frac{\frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2} - 4\,\mathbf{Q} - (f - f')^2}{\nabla^2 + k^2 \frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}}$$

e se si pone

$$(66) \quad 2\,d = k \operatorname{sen}\left(\frac{w_1 - w_2}{k}\right), \quad 2\,\delta = k \operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{k}\right),$$

ne risulta

$$d^2 - \delta^2 = \frac{1}{4} k^4 \frac{(f - f')^2}{\nabla^2 + k^2 \frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}}, \quad (*)$$

ossia $d > \delta$, e soltanto $d = \delta$ per $f = f'$. Insieme con $d > \delta$ si avrà pure $w_1 - w_2 > \sigma_1 - \sigma_2$, come è chiaro geometricamente, dovendo i fuochi appartenere al segmento $L_1 L_2$, come piedi particolari di minime distanze.

(*) L'espressione $\nabla^2 + k^2 \frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}$ positiva per $k^2 > 0$, è tale anche per $k^2 < 0$, giacchè essendo allora w_1 e w_2 reali, il primo membro della (65) è dello stesso segno di k^2, e quindi il denominatore del secondo membro dello stesso segno di $\frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}$ $4\,\mathbf{Q}$ che è positivo.

§. 5.

I piani principali e i piani focali.

Le superficie annesse ad ogni sistema ∞^2 di raggi.

13. — Indichiamo con u_1, u_2, u_3, u_4 le coordinate di un piano U passante pel raggio (u, v) del sistema e per la massima o minima distanza di esso dal raggio infinitamente vicino $(u+du, v+dv)$. Si avrà intanto:

$$a) \quad \begin{cases} u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0, \\ u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + u_3 \xi_3 + u_4 \xi_4 = 0. \end{cases}$$

Il piede della stessa massima o minima distanza sul secondo raggio avrà per coordinate:

$$X'_i = (x_i + dx_i) \cos\left(\frac{w+\varepsilon}{k}\right) + k(\xi_i + d\xi_i) \operatorname{sen}\left(\frac{w+\varepsilon}{k}\right)$$

essendo ε una quantità infinitamente piccola; e siccome il piano U deve passare anche per questo punto, si dovrà avere $\sum u_i X'_i = 0$; ossia per le a):

$$\sum u_i \left(dx_i \cos\frac{w+\varepsilon}{k} + k\, d\xi_i \operatorname{sen}\frac{w+\varepsilon}{k}\right) = 0,$$

e trascurando gl' infinitesimi d'ordine superiore

$$\sum u_i \left(dx_i \cos\frac{w}{k} + k\, d\xi_i \operatorname{sen}\frac{w}{k}\right) = 0,$$

Questa insieme alle a), ci dà:

$$(67)\quad (-1)^i u_i \equiv \left\{ \begin{vmatrix} x_k\ , & x_l\ , & x_m \\ \xi_k\ , & \xi_l\ , & \xi_m \\ dx_k\ , & dx_l\ , & dx_m \end{vmatrix} \cos\frac{w}{k} - \right.$$

$$\left. - k \begin{vmatrix} \xi_k\ , & \xi_l\ , & \xi_m \\ x_k\ , & x_l\ , & x_m \\ d\xi_k\ , & d\xi_l\ , & d\xi_m \end{vmatrix} \operatorname{sen}\frac{w}{k} \right\}$$

che sviluppate, tenendo conto delle (19) , (19') e della condizione $\sum u_i^2 = 1$, diventano:

$$(68)\quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^i \mathbf{W} u_i = & \frac{1}{\Delta} \left\{ \left(\xi_i \sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v} \right) (\mathrm{E} + \mathrm{F} t) - \right. \\ & \left. - \left(\xi_i \sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) (\mathrm{F} + \mathrm{G}\, t) \right\} + \\ & + \frac{1}{\Delta'} \left\{ \left(\frac{x_i}{k_2} \sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial v} - \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \right) (\mathrm{E}' + \mathrm{F}'\, t) - \right. \\ & \left. - \left(\frac{x_i}{k^2} \sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{\partial \xi_i}{\partial u} \right) (\mathrm{F}' + \mathrm{G}'\, t) \right\} r \end{aligned} \right.$$

dove al solito è $r = k \operatorname{tg} \frac{w}{k}$, $t = \frac{dv}{du}$, e si è posto:

$$(69)\qquad \mathbf{W}^2 = \mathrm{V}^2 + 2\, v^2\, r + \mathrm{V}'^2\, r^2.$$

Importa anzi tutto notare che $\mathbf{W}$ si mantiene sempre differente da zero per qualunqne valore di r che non sia eguale all'ascissa ridotta di uno dei fuochi. Infatti, se fosse $\mathbf{W} = 0$, r dovrebbe soddisfare simultaneamente alle due equazioni

$$b) \quad \begin{cases} V^2 + 2\,v^2\,r + V'^2\,r^2 = 0, \\ v^2\,r^2 + (V^2 - k^2\,V'^2)\,r - k^2\,v^2 = 0, \end{cases}$$

la seconda delle quali non è altro che la (29) del §. 3. L' eliminazione di r fra queste due equazioni dà per risultante:

$$c) \quad (V^2\,V'^2 - v^4)\,(\mathbf{V}^4 + 4\,k^4\,v^4) = 0,$$

dove $\mathbf{V}^2 = V^2 - k^2\,V'^2$. Ora il primo fattore del primo membro della $c)$ si annulla soltanto per il valore $\tau = \frac{dv}{du}$ corrispondente ad uno dei fuochi, come risulta dalla (57); e l'annullarsi del secondo fattore, che è il discriminante della seconda delle $b)$, porterebbe che questa ammettesse le due radici eguali, e poichè il loro prodotto è $-k^2$, dovrebbe essere $r^2 + k^2 = 0$, cosa impossibile per $k^2 > 0$, ed anche per $k^2 < 0$, per l' osservazione fatta in fine del §. 1, che cioè la minima distanza di due rette non situate nello stesso piano non può mai cadere a distanza infinita.

Se ora r è l'ascissa ridotta del piede della minima distanza dei due raggi (u, v) $(u+du, v+du)$, r' è quella del piede della massima e $U' \equiv (u'_1\,u'_2\,u'_3\,u'_4)$ è il piano passante pel raggio (u, v) e per la massima distanza, il coseno dell' angolo $(U\,U')$ dei due piani sarà dato per le (68) dalla formola :

$$\cos(\mathrm{U\,U'}) = \frac{\mathrm{V}^2 + v^2(r+r') + \mathrm{V'}^2 r r'}{\sqrt{(\mathrm{V}^2+2v^2 r+\mathrm{V'}^2 r^2)(\mathrm{V}^2+2v^2 r'+\mathrm{V'}^2 r'^2)}}$$

e poichè r , r' sono le radici della seconda delle b), si avrà $\cos(\mathrm{U\,U'}) = 0$; ossia i due piani che passano pel raggio (u, v) e per la massima e minima distanza dal raggio $(u+du, v+dv)$ sono fra loro perpendicolari.

14. — Facendo invece nelle (68) una volta $t=t_1$, $r=r_1$, un' altra $t=t_2$, $r=r_2$, e ponendo:

$$\mathbf{W}_1{}^2 = \mathrm{V}_1{}^2 + 2\,v_1{}^2 r_1 + \mathrm{V}_1'^2 r_1{}^2,$$

$$\mathbf{W}_2{}^4 = \mathrm{V}_2{}^2 + 2\,v_2{}^2 r_2 + \mathrm{V}_2'^2 r_2{}^2,$$

si trova per il coseno dell'angolo $(\mathrm{U}_1\,\mathrm{U}_2)$ dei piani che passano pel raggio (u, v) e per le minime distanze corrispondenti ai punti limiti L_1, L_2 l' espressione:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1\mathbf{W}_2\cos(\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2) &= (\mathrm{E} + \mathrm{F}\,(t_1+t_2) + \mathrm{G}\,t_1 t_2) + \\ &+ (e+f\,t_2+f'\,t_1+g\,t_1 t_2)\,r_1 + (e+f\,t_1+f'\,t_2+g\,t_1 t_2)\,r_2 + \\ &+ (\mathrm{E'}+\mathrm{F'}\,(t_1+t_2) + \mathrm{G'}\,t_1\,t_2)\,r_1 r_2,\end{aligned}$$

che per le (36) si semplifica subito in quest' altra:

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_1\mathbf{W}_2\cos(\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2) &= (e+f\,t_2+f't_1+g\,t_1 t_2)\,(r_1-r_2) + \\ &+ (\mathrm{E'}+\mathrm{F'}\,(t_1+t_2) + \mathrm{G'}\,t_1\,t_2)\,(k^2 + r_1\,r_2).\end{aligned}$$

Ma per la 2.ª delle stesse (36) si ha:

$$(70)\quad e+f\,t_2+f'\,t_1+g\,t_1t_2=\frac{1}{2}\Big\{(e+f\,t_2+f'\,t_1+g\,t_1t_2)-$$

$$-(e+f\,t_1+f'\,t_2+g\,t_1t_2)\Big\}=-\frac{1}{2}(f-f')(t_1-t_2);$$

quindi tenendo anche conto della (40′):

$$\mathbf{W}_1\mathbf{W}_2\cos(\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2)=-\frac{1}{2}(f-f')(t_1-t_2)(r_1-r_2)+\mathbf{M}(k^2+r_1r_2).$$

Prendendo ora a considerare la prima espressione che per il valore di H_1 ci dà la prima delle (53), si vede facilmente per la (45) e per la 39) che si può scrivere:

$$\mathrm{H}_1=\frac{2\,k^2\,\mathbf{M}}{(t_1-t_2)\,(f-f')},$$

e poichè $\mathrm{H}_1=k^2\,\dfrac{r_1-r_2}{k^2+r_1r_2}$, se ne deduce:

$$\mathbf{M}\,(k^2+r_1r_2)=\frac{1}{2}(f-f')\,(t_1-t_2)\,(r_1-r_2),$$

e perciò $\cos(\mathrm{U}_1\,\mathrm{U}_2)=0$, giacchè non possono annullarsi nè $\mathbf{W}_1$, nè $\mathbf{W}_2$. Dunque i due piani U_1, U_2 sono perpendicolari fra loro, e poichè i piani U'_1, U'_2 passanti pel raggio (u, v) e per le massime distanze corrispondenti ai punti limiti L'_1, L'_2 sono rispettivamente perpendicolari a U_1, U_2 saranno anch' essi perpendicolari fra loro.

Per altro i diedri $\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2$, $\mathrm{U}'_1\mathrm{U}'_2$ non sono coincidenti, ma opposti allo spigolo, come ora faremo vedere. Il coseno dell'angolo $U'_1 U_2$ è dato analogamente al precedente $U_1 U_2$ dalla formola:

$$\mathbf{W}'_1 \mathbf{W}_2 \cos(U'_1 U_2) = -\frac{1}{2}(f-f')(t_1-t_2)(r'_1-r_2)+$$

$$+(E'+F'(t_1+t_2)+G' t_1 t_2)(k^2+r'_1 r_2),$$

dove $\mathbf{W}_1'$ non differisce da $\mathbf{W}_1$, che per contenere r'_1 invece di r_1. Ora a (t_1-t_2) e a $E'+F'(t_1+t_2)+G' t_1 t_2$, si sostituiscano rispettivamente i loro valori dati dalle (45) e dalle (40'), (39) e si osservi che per le (52') e (53) si ha:

$$r'_1-r_2=\frac{1}{k^2}H'_1(k^2+r'_1 r_2)=\frac{1}{k^2}\frac{\mathbf{EG}-\mathbf{F}^2+k^2\frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}}{\sqrt{\mathbf{P}^2-4\mathbf{Q}(\mathbf{EG}-\mathbf{F}^2)}}(k^2+r'_1 r_2),$$

se ne deduce per il secondo membro della precedente, tenendo sempre conto della (27), l'espressione

$$d)\quad -\frac{1}{2k^2}\frac{(f-f')}{g\,\mathbf{F}-\frac{1}{2}(f+f')\,\mathbf{G}}\left(\nabla^2+k^2\frac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}\right)(k^2+r'_1 r_2).$$

Per trasformare ora il prodotto $\mathbf{W}'_1 \mathbf{W}_2$, osserviamo che, in generale, per la seconda delle *b*), di cui r è radice, si ha:

$$\mathbf{W}^2=V^2+2v^2 r+V'^2 r^2=(V^2+v^2 r)\left(1+\frac{r^2}{k^2}\right),$$

e quindi

$$\mathbf{W}_1'^2\,\mathbf{W}_2^{\,2} = \frac{1}{k^4}\,(V_1^{\,2} + v^2 r'_1)\,(V_2^{\,2} + v^2 r_2) \times$$
$$\times \left\{ (k^2 + r'_1 r_2)^2 + k^2 (r'_1 - r_2)^2 \right\}.$$

Ora si ha identicamente

$$(V_1^{\,2} + v^2 r'_1)(V_2^2 + v^2 r_2) = V_1^{\,2} V_2^{\,2} +$$
$$+ \frac{1}{2}(V_2^{\,2} v_1^{\,2} + V_1^{\,2} v_2^{\,2})\,(r'_1 + r_2) +$$
$$+ \frac{1}{2}(V_2^{\,2} v_1^{\,2} - V_1^{\,2} v_2^{\,2})\,(r'_1 - r_2) + v_1^{\,2} v_2^2\, r'_1\, r_2,$$

e poichè dalle (42), (43), (37), (41) si deducono i valori pei coefficienti di $r'_1 + r_2$, $r'_1 - r_2$, $r'_1\, r_2$ e per $V_1^2\, V_2^2$ e per mezzo delle (50) e (53) si esprimono $r'_1 + r_2$, $r'_1 - r_2$ per $r'_1 r_2$, si trova che l' espressione precedente risulta indipendente da r'_1 e r_2 e precisamente

$$(V_1^{\,2} + v_1^{\,2} r_1')\,(V_2^{\,2} + v_2^{\,2}\, r_2) =$$
$$= \frac{k^2}{4}\,\frac{(f-f')^2 \left\{\mathbf{P}^2 - 4\,\mathbf{Q}(\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2)\right\}\left(\nabla^2 + k^2\dfrac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}\right)}{\left(g\mathbf{F} - \dfrac{1}{2}(f+f')\mathbf{G}\right)^2 \left(\mathbf{E}\mathbf{G} - \mathbf{F}^2 + k^2\dfrac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}\right)}$$

Per le stesse (53) si trova poi

$$(k^2 + r'_1 r_2)^2 + k^2 (r'_1 - r_2)^2 =$$
$$= \frac{1}{k^2}\,\frac{\left(\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2 + k^2\dfrac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}\right)\left(\nabla^2 + k^2\dfrac{\mathbf{P}^2}{\nabla^2}\right)}{\mathbf{P}^2 - 4\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{E}\,\mathbf{G} - \mathbf{F}^2)}\,(k^2 + r'_1\, r_2)^2.$$

Queste due relazioni moltiplicate fra di loro e divise per k^4, ci dànno pel valore del prodotto $\mathbf{W}'_1\,\mathbf{W}_2$ la stessa espressione d) col segno cambiato, il che porta evidentemente a concludere che $\cos(U'_1\,U_2) = -1$, e poichè lo stesso varrebbe per $\cos(U_1\,U'_2)$, si deduce che i diedri $U_1 U_2$, $U'_1 U'_2$ sono opposti allo spigolo, *c. d. d.*

Se diamo il nome di *piani principali* ai due piani passanti pel raggio $(u\,,\,v)$ e contenenti le massime e minime distanze corrispondenti ai punti limiti, possiamo dire che:

Per ogni raggio del sistema passano due piani principali, uno dei quali contiene, situate da parti opposte rispetto al raggio, la massima e minima distanza corrispondenti ai punti limiti L_1, L'_2, *e l'altro ad esso perpendicolare, contiene la massima e minima distanza corrispondenti ai punti limiti* L_2, L'_1.

15. — Ritorniamo a considerare il piano $U \equiv (u_1, u_2, u_3, u_4)$ passante per il raggio $(u\,,\,v)$ e per la minima distanza di esso dal raggio $(u+du\,,\,v+dv)$, e chiamiamo ω l'angolo che esso piano forma col piano principale U_1. Avremo per le (68), analogamente a quanto si è fatto nel n.º precedente:

$$(71)\quad \begin{cases} \mathbf{W}_1\,\mathbf{W}\cos\omega = (E+F(t+t_1)+Gtt_1)+(e+ft+f't_1+gtt_1)r_1+ \\ +(e+ft_1+f't+g\,t\,t_1)\,r+(E'+F'(t+t_1)+G'\,t\,t_1)\,r\,r_1. \end{cases}$$

Ora per essere

$$E+F(t_1+t_2)+G\,t_1\,t_2 = k^2\,\mathbf{M},$$
$$E'+F'(t_1+t_2)+G'\,t_1\,t_2 = \mathbf{M},$$
$$e+ft_2+f't_1+g\,t_1\,t_2 = -\frac{1}{2}(f-f')(t_1-t_2),$$
$$e+ft_1+f'\,t_2+g\,t_1 t_2 = \frac{1}{2}(f-f')(t_1-t_2),$$

se ne deduce

$$
\begin{aligned}
&E+F(t+t_1)+G\,t\,t_1=(F+G\,t_1)(t-t_2)+k^2\,\mathbf{M},\\
&E'+F'(t+t_1)+G't\,t_1=(F'+G't_1)(t-t_1)+\mathbf{M},\\
&e+ft_1+f't+g\,tt_1=(f+g\,t_1)(t-t_2)-\frac{1}{2}(f-f')(t_1-t_2),\\
&e+ft_1+f'\,t+g\,tt_1=(f'+gt_1)(t-t_2)+\frac{1}{2}(f-f')(t_1-t)_2\,;
\end{aligned}
$$

e la (71) diventa

$$
(71)^{\text{bis}}\left\{
\begin{aligned}
&\mathbf{W}_1\mathbf{W}\cos\omega=(t_1-t_2)\times\\
&\times\{(FGt_1)+(f+gt_1)r_1+(f'+g\,t_1)r+(F'+G't_1)rr_1\}+\\
&+\mathbf{M}(k^2+r\,r_1)+\frac{1}{2}(f-f')(t_1-t_2)(r-r_1).
\end{aligned}
\right.
$$

Per semplificare ancora il secondo membro, poniamo la quantità che moltiplica $(t-t_2)$ sotto la forma

$$
e)\qquad F+G\,t_1+\left(\frac{1}{2}(f+f')(+g\,t_1)\,r_1+\right)
$$

$$
\left\{\frac{1}{2}(f+f')+gt_1+(F'+G't_1)r-\right\}r_1\;\frac{1}{2}(f-f')(r-r_1).
$$

Allora per l' equazione

$$
v_1^{\,2}r_1^{\,2}+(V_1^{\,2}-k^2\,V_1'^{\,2})\,r_1-k^2\,v_1^{\,2}=0,
$$

cui soddisfa r_1, e che per le (37) si riduce all'altra

$$
\left(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_1\right)r_1^{\,2}+(\mathbf{F}+\mathbf{G}\,t_1)r_1-k^2\left(\frac{1}{2}(f+f')+gt_1\right)=0,
$$

ovvero

$$\left\{\frac{1}{2}\left((f+f')+gt_1\right)r_1+\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1\right\}r_1=k^2\left\{(\mathrm{F}'+\mathrm{G}'t_1)r_1+\left(\frac{1}{2}(f+f')+gt_1\right)\right\}.$$

la $e)$ diventa

$$\frac{1}{k^2}(k^2+rr_1)\left\{(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)+\left(\frac{1}{2}(f+f')+gt_1\right)r_1\right\}-\frac{1}{2}(f-f')(r-r_1)$$

e quindi la $(71)^{\text{bis}}$ si può scrivere:

$$(72) \qquad \mathbf{W}_1\,\mathbf{W}\cos\omega=(k^2+r\,r_1)\times$$
$$\times\left[\mathbf{M}+\frac{t-t_2}{k^2}\left\{(\mathrm{F}+\mathrm{G}\,t_1)+\left(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_1\right)r_1\right\}\right]-$$
$$-\frac{1}{2}(t-t_1)(f-f')(r-r_1).$$

Operando in modo analogo per il coseno che lo stesso piano U fa col piano principale U_2 perpendicolare ad U_1, si troverà:

$$(73) \qquad \mathbf{W}_2\,\mathbf{W}\,\mathrm{sen}\,\omega=(k^2+r\,r_2)\times$$
$$\times\left[\mathbf{M}+\frac{t-t_1}{k^2}\left\{(\mathrm{F}+\mathrm{G}\,t_2)+\left(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_2\right)r_2\right\}\right]-$$
$$-\frac{1}{2}(t-t)_2\,(f-f')(r-r_2).$$

Per apportare una notevole semplificazione ai calcoli che seguono, supponiamo di prendere sul raggio (u,v) per punto di origine il piede della minima distanza che è contenuta nel piano U, ossia facciamo nelle formole precedenti $r=0$, con che le (72), (73) diventano:

$$
(74)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathbf{W}_1\ \mathbf{W} \cos\omega = k^2\,\mathbf{M} + (t-t_2) \times \\
&\times \left\{ (\mathrm{F}+\mathrm{G}\,t_1) + \left(\frac{1}{2}(f+f')+g t_1\right) r_1 \right\} + \frac{1}{2}(t-t_1)\,(f-f')\,r_1, \\
&\mathbf{W}_2\ \mathbf{W} \operatorname{sen}\omega = k^2\,\mathbf{M} + (t-t_1) \times \\
&\times \left\{ (\mathrm{F}+\mathrm{G}\,t_2) + \left(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_2\right) r_2 \right\} + \frac{1}{2}(t-t_2)(f-f')\,r_2.
\end{aligned}
\right.
$$

In quest' ipotesi risulta dalla (29) che t deve soddisfare all' equazione:

$$
(75)\qquad e + (f+f')\,t + g\,t^2 = 0.
$$

Si tratta ora di eliminare la t fra questa equazione e la (74). Senza star qui a sviluppare tutti i calcoli, che ci porterebbero troppo in lungo, ci limiteremo ad osservare che a questo scopo basta prima dividere le (74) l'una per l'altra, con che si viene ad eliminare $\mathbf{W}$, ricavare il valore di t dall' equazione così ottenuta e sostituirlo nella (75); e che per questo basta tener conto delle formole:

$$\left[k^2\mathbf{M}-(t_1-t_2)\left\{(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_2)+\left(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_2\right)r_2\right\}\right]\left(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_1\right)-$$

$$-\left[k^2\mathbf{M}+(t_1+t_2)\left\{(\mathrm{F}+\mathrm{G}\,t_1)+\left(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_1\right)r_1\right]\times\right.$$

$$\times\left(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_2\right)=(t_1-t_2)\left\{\mathrm{P}+\mathbf{Q}\,(r_1+r_2)\right\};$$

$$\left[k^2\mathbf{M}-(t_1-t_2)\left\{(\mathrm{F}+\mathrm{G}\,t_2)+\left(\frac{1}{2}(f+f')+g\,t_2\right)r_2\right\}\right]\left(\frac{1}{2}(f+f')+g t_1\right)+$$

$$+\left[k^2\mathbf{M}+(t_1-t_2)\left\{(\mathrm{F}+\mathrm{G}t_1)+\left(\frac{1}{2}(f+f')+gt_1\right)r_1\right\}\right]\left(\frac{1}{2}(f+f')+gt_2\right)=$$

$$=(t_1-t_2)\left\{\frac{(\Delta\nabla+2\,k^2\,\mathbf{Q})\,(\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2-\nabla^2)}{k^2\sqrt{\mathbf{P}^2-4\,\mathbf{Q}\,(\mathbf{E}\,\mathbf{G}-\mathbf{F}^2)}}-\mathbf{Q}(r_1-r_2)\right\},$$

che si deducono con tutta facilità dalle (42), (43); e applicare a più riprese un' identità della forma

$$a\,x+b\,y=\frac{1}{2}(a+b)\,(x+y)+\frac{1}{2}(a-b)\,(x-y).$$

Il resultato a cui si giunge è

$$(76)\qquad r_1\cos^2\omega+r_2\,\mathrm{sen}^2\,\omega=0.$$

Riconducendo ora il punto di origine nel punto primitivo P e ricordando che $r_1=k\,\mathrm{tg}\,\frac{w_1}{k}$, $r_2=k\,\mathrm{tg}\,\frac{w_2}{k}$, dovremo cambiare nella precedente w_1 e w_2 in $w-w_1$ e $w-w_2$ ed avremo

$$(77')\qquad \mathrm{tg}\left(\frac{w-w_1}{k}\right)\cos^2\omega+\mathrm{tg}\left(\frac{w-w_2}{k}\right)\mathrm{sen}^2\,\omega=0,$$

dalla quale cambiando w in $w \pm \frac{1}{2} k\pi$ si ha l' altra:

$$(77') \quad \operatorname{tg}\left(\frac{w-\omega'_1}{k}\right)\operatorname{sen}^2 w + \operatorname{tg}\left(\frac{w-w'_2}{k}\right)\cos^2 w = 0.$$

La relazione (77) (o (77')) che lega le ascisse dei punti limiti dei piedi delle minime (o massime) distanze con quella del piede di una minima (o massima) distanza qualunque e cogli angoli d'inclinazione sui piani principali del piano che passa pel raggio (u , v) e contiene quella minima (o massima) distanza , è quella che nello spazio euclideo è conosciuta sotto il nome di *formola di Hamilton*, e ad essa evidentemente si riduce al limite per $k^2 = \infty$.

16. — Anche negli spazi curvi daremo il nome di *piani focali* a quei piani passanti pel raggio (u , v) del sistema che contengono i due raggi infinitamente vicini convergenti ai fuochi. Le coordinate α_i di uno di essi, p. es. di quello che corrisponde alla radice τ_1 delle (60), devono soddisfare alle equazioni :

$$(78) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, \\ \alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4 = 0, \\ \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_3 + \alpha_4 dx_4 = 0, \\ \alpha_1 d\xi_1 + \alpha_2 d\xi_2 + \alpha_3 d\xi_3 + \alpha_4 d\xi_4 = 0, \end{array} \right.$$

che sono compatibili in forza della (56) . Servendoci delle prime tre, se ne deduce:

$$(-1)^i \alpha_i = \begin{vmatrix} x_k \ , & x_l \ , & x_m \\ \xi_k \ , & \xi_l \ , & \xi_m \\ dx_k \ , & dx_l \ , & dx_m \end{vmatrix}$$

che sviluppate con un procedimento simile a quello tenuto per le (67), ci dànno:

$$(-1)^i \alpha_i \sqrt{E+2F\tau_1+G\tau_1^2} =$$
$$\frac{1}{\Delta}\left\{\left(\xi_i \sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v}\right)(E+F\tau_1) - \left(\xi_i \sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u} - \frac{\partial x_i}{\partial u}\right)(F+G\tau_1)\right\}.$$

Per le coordinate dell' altro piano focale, basterebbe cambiare nelle precedenti τ_1 in τ_2, quindi chiamando γ l'angolo compreso fra i due piani focali, esso sarà determinato dalla formola:

$$\cos\gamma = \frac{E+F(\tau_1+\tau_2)+G\tau_1\tau_2}{\sqrt{(E+2F\tau_1+G\tau_1^2)(E+2F\tau_2+G\tau_2^2)}}.$$

ovvero dalle altre

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{\Delta(\tau_1-\tau_2)}{\sqrt{(E+2F\tau_1+G\tau_1^2)(E+2F\tau_2+G\tau_2^2)}},$$
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta(\tau_1-\tau_2)}{E+F(\tau_1+\tau_2)+G\tau_1\tau_2},$$

Se invece le α_i si deducono dalla prima, seconda e quarta delle (78), operando in modo perfettamente simile al precedente si troverebbe:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta'(\tau_1-\tau_2)}{E'+F'(\tau_1+\tau_2)+G'\tau_1\tau_2}.$$

e quindi anche

$$(79) \qquad \operatorname{tg} \gamma = \frac{\nabla\,(\tau_1 - \tau_2)}{\mathbf{E} + \mathbf{F}\,(\tau_1 + \tau_2) + \mathbf{G}\,\tau_1 \tau_2}.$$

Ora dalle (63), (63') del §. precedente si deducono le altre:

$$\rho_1 = -\frac{E + F(\tau_1 + \tau_2) + G\tau_1\tau_2}{e + f\tau_2 + f'\tau_1 + g\,\tau_1\tau_2},\ \rho_2 = -\frac{E + F(\tau_1 + \tau_2) + G\tau_1\tau_2}{e + f\tau_1 + f'\tau_2 + g\,\tau_1\tau_2},$$

$$\rho_1 = -\frac{e + f\,\tau_1 + f'\tau_2 + g\tau_1\tau_2}{E' + F'(\tau_1 + \tau_2) + G'\,\tau_1\tau_2},\ \rho_2 = -\frac{e + f\,\tau_2 + f'\tau_1 + g\,\tau_1\tau_2}{E' + F'(\tau_1 + \tau_2) + G'\tau_1\tau_2},$$

e da queste:

$$\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} = \frac{(f - f')\,(\tau_1 - \tau_2)}{E + F(\tau_1 + \tau_2) + G\tau_1\tau_2}\,.\ \rho_1 - \rho_2 = \frac{(f - f')\,(\tau_1 - \tau_2)}{E' + E'(\tau_1 + \tau_2) + G'\,\tau_1\tau_2}$$

che combinate insieme danno

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\nabla}{f - f'}\ .\ \frac{\rho_1 - \rho_2}{k^2 - \rho_1\rho_2},$$

Se in questa si sostituiscono i valori di $\rho_1 - \rho_2$ e $\rho_1\,\rho_2$ che ci fornisce la (62), e se ne ricava il seno dell' angolo γ, si trova:

$$\operatorname{sen}^2 \gamma = \frac{\mathbf{P}^2 - 4\,\mathbf{Q}\,\nabla^2 - (f - f')^2\,\nabla^2}{\mathbf{P}^2 - 4\,\mathbf{Q}\,\nabla^2}$$

che può scriversi, per le (65):

$$\operatorname{sen}^2 \gamma = \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{k}\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{w_1 - w_2}{k}\right)}$$

ovvero per le notazioni (66)

$$\operatorname{sen} \gamma = \frac{\delta}{d} \tag{80}$$

17. — Per studiare la posizione relativa dei due piani focali rispetto ai piani principali, indichiamo con ω_1 e ω_2 gli angoli d' inclinazione dei due piani focali sul piano principale corrispondente al punto limite L_1 (o L'_2). Per la formola (77), avremo:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_1 - w_1}{k}\right)\cos^2 \omega_1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_1 - w_2}{k}\right)\operatorname{sen}^2 \omega_1 = 0,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_2 - w_1}{k}\right)\cos^2 \omega_2 + \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_2 - w_2}{k}\right)\operatorname{sen}^2 \omega_2 = 0,$$

da cui

$$\cos^2\omega_1 = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_1-w_2}{k}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_1-w_2}{k}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_1-w_1}{k}\right)},$$

$$\operatorname{sen}^2\omega_1 = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_1-w_1}{k}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_1-w_1}{k}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_1-w_2}{k}\right)},$$

$$\cos^2\omega_2 = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_2-w_2}{k}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_2-w_2}{k}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_2-w_1}{k}\right)},$$

$$\operatorname{sen}^2\omega_2 = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_2-w_1}{k}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_2-w_1}{k}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_2-w_2}{k}\right)}.$$

Ma per essere $w_1+w_2=\sigma_1+\sigma_2$, si ha:

$$\cos^2\omega_1 = \operatorname{sen}^2\omega_2 = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{w_1-w_2}{k}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{k}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{w_1-w_2}{k}\right)},$$

$$\operatorname{sen}^2\omega_1 = \cos^2\omega_2 = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{w_1-w_2}{k}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{k}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{w_1-w_2}{k}\right)},$$

ovvero:

$$(81)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos\omega_1 &= \operatorname{sen}\omega_2 = \sqrt{\frac{d+\delta}{2d}},\\ \operatorname{sen}\omega_1 &= \cos\omega_2 = \sqrt{\frac{d-\delta}{2d}},\end{aligned}\right.$$

Se ne conclude che si ha $\omega_1 + \omega_2 = \frac{\pi}{2}$, e poichè i due piani principali sono fra loro perpendicolari, avremo il teorema:

I piani focali sono egualmente inclinati sui piani principali;

o in altre parole:

I piani bisettori dei piani focali coincidono coi piani bisettori dei piani principali.

Aggiungiamo in fine che le (81) possono anche servire a darci una facile conferma della (80) per l'angolo dei piani focali.

18. — Ad ogni sistema doppiamente infinito di raggi o *congruenza*, come diremo in seguito per brevità (*), appartengono alcune superficie che con essa sono intimamente connesse e di cui qui esporrò alcune proprietà, riportando senza dimostrazione i teoremi enunciati da Kummer al §. 5. della sua citata Memoria, potendosi negli spazi curvi ripetere le stesse considerazioni che nello spazio euclideo.

I punti medii del segmento $L_1 L_2$ o $L'_1 L'_2$ dei punti limiti (prescindendo dagli opposti) hanno per luogo geometrico due superficie che potranno chiamarsi le *superficie medie* (Mittelflächen) della congruenza.

I quattro punti limiti L_1 , L_2 , L'_1 , L'_2 (prescindendo dai punti opposti) hanno rispettivamente per luogo geometrico quattro superficie F_1, F_2, F_3, F_4 tali che:

Le superficie F_1, F_2 *dividono lo spazio in modo che*

(*) Cfr. L. Bianchi: *Sui sistemi doppiamente infiniti di raggi* — Annali di Matematica, Tomo XV.

fra esse e soltanto fra esse cadono i piedi delle minime distanze di due raggi infinitamente vicini, e fra le superficie F'_1, F'_2 *cadono tutti i piedi delle massime distanze*:

Per lo spazio di Lobatschewsky il teorema va limitato naturalmente alla sua prima parte.

Passando da un raggio della congruenza a quello infinitamente vicino, per il quale la sua minima distanza dal primo abbia il piede in L_1 (e quindi la massima in L'_1), e dal secondo al raggio analogo infinitamente vicino, e così di seguito, si viene a formare una superficie rigata O_1, e una superficie rigata O_2 si può costruire nello stesso modo rispetto ai punti L_2 (o L'_2):

Ogni congruenza si può sempre immaginare in doppio modo generata da un sistema ∞' *di superficie rigate* O_1 *o di superficie rigate* O_2; *le superficie* F_1, F_2 *sono rispettivamente il luogo geometrico delle linee di stringimento delle* O_1, O_2, *e le* F'_1, F'_2 *quello delle loro linee di allargamento* (*).

Anche per questo teorema si vede facilmente come esso vada limitato nello spazio di Lobatschewsky.

Alle superficie Φ_1, Φ_2, luogo dei fuochi, si darà anche qui il nome di *superficie focali*. Passando da un raggio della congruenza a quello infinitamente vicino che lo incontra nel primo fuoco e da questo ad un altro infinitamente vicino che lo incontra nel primo fuoco, e così di seguito, verremo a formare una superficie sviluppabile Ω_1,

(*) Se così vogliamo chiamare quella linea (e la sua opposta) di una superficie rigata, che è il luogo dei piedi delle massime distanze di due generatrici infinitamente vicine.

il cui spigolo di regresso α_1, tracciato sulla superficie Φ_1, si chiamerà *caustica* (*) della superficie focale Φ_1. Analogamente si costruirà una superficie sviluppabile Ω_2, il cui spigolo di regresso α_2 sarà una caustica della seconda superficie focale Φ_2.

Ogni congruenza a fuochi reali si può in doppio modo generare con un sistema ∞' di superficie sviluppabili Ω_1 o Ω_2, i cui spigoli di regresso α_1 o α_2 generano, come caustiche, le due superficie focali Φ_1, Φ_2.

Ogni raggio di una congruenza a fuochi reali è una tangente comune alle due superficie focali.

Ossia:

Ogni congruenza a fuochi reali si può riguardare come il sistema delle tangenti comuni a due superficie.

E ancora:

Ogni congruenza a fuochi reali si può riguardare come l'insieme delle tangenti di un sistema ∞' di curve (caustiche) tracciate sopra una superficie.

Ogni superficie focale è inviluppata da uno dei due sistemi di superficie sviluppabili dalle quali si può immaginare generata la congruenza.

In ogni superficie focale, ad esempio Φ_1, le caustiche α_1 e le linee di contatto con le sviluppabili Ω_2 sono curve a tangenti coniugate.

E finalmente:

L'inclinazione della normale principale di ogni caustica della superficie focale sul piano tangente alla su-

(*) L. Bianchi, l. c.

perficie è uguale alla mutua inclinazione dei due pian focali, che passano per la tangente alla caustica (*).

§. 6.

La densità.

19. — Le denominazioni di *raggi*, *fuochi*, *superficie focali*, *e linee caustiche* usate in ciò che precede, sono evidentemente tolte dalla teoria della luce, alla quale lo studio dei sistemi doppiamente infiniti di rette porta un largo contributo, quando si supponga che ciascuna retta del sistema sia un raggio di luce uscente dai punti di una superficie luminosa o rifiettente. Un altro elemento di massima importanza per lo studio dei sistemi di raggi luminosi è la *densità* che assume il sistema in ciascun punto dello spazio, e in questo paragrafo ci occuperemo appunto della sua definizione geometrica e della determinazione analitica.

Consideriamo un punto qualunque M di un raggio (u,v) della congruenza e immaginiamo un suo intorno infinitamente piccolo in modo che nell' interno di esso lo spazio possa ritenersi come euclideo. Ciò posto:

Per il punto M *del raggio* (u, v) *della congruenza conduciamo un piano* π *perpendicolare al raggio e tracciamo in* π *una curva chiusa infinitesima* c *di area* ω *che racchiuda il punto* M. *Per lo stesso punto conduciamo le*

(*) Bianchi, l. c. n.° 3.

rette parallele (*) *a tutti quei raggi della congruenza che escono dai punti di* c; *esse determineranno sopra una sfera di raggio infinitamente piccolo* r *col centro in* M *una curva chiusa infinitesima* c′ *di area* $r^2\omega'$. *Il rapporto*

$$\Theta = \frac{\omega}{\omega'}$$

sarà quello che noi chiameremo densità della congruenza nel punto M.

Questa definizione ha evidentemente una perfetta analogia con quella che si dà per la densità nello spazio euclideo, ed ora vedremo come anche la sua espressione analitica si riduca a quella dello spazio piano per $k^2=\infty$.

Per semplificare i calcoli supporremo di prendere per superficie S di partenza il piano π perpendicolare al raggio nel punto M, cosicchè si avrà in questo punto:

$$x_1=k \;,\; x_2=0 \;,\; x_3=0 \;,\; x_4=0,$$
$$\xi_1=0 \;,\; \xi_2=0 \;,\; \xi_3=0 \;,\; \xi_4=1 \,,$$

e per tutti gli altri punti del piano, $x_4=0$. Su questo piano

(*) Questa denominazione è qui usata soltanto per comodità di linguaggio. Per l'intelligenza di ciò che segue è necessario quindi avvertire che le rette in discorso s'intendono costruite conducendo per il punto M (ove s'immagina trasportata l'origine delle coordinate) le perpendicolari a quei piani passanti per M, che fanno coi piani coordinati gli stessi angoli dei corrispondenti piani passanti per i punti di c e perpendicolari ai raggi uscenti da questi punti.

scegliamo due punti M_1, M_2 infinitamente vicini ad M e non in linea retta con esso; le coordinate del primo saranno $(k+dx_1, dx_2, dx_3\ 0)$, che dovranno soddisfare alla condizione

$$(k+dx_1)^2+dx_2^2+dx_3^2=k^2,$$

dalla quale trascurando gl' infinitesimi di ordine superiore al 1.°, si deduce $k\,dx_1=0$. Ripetendo lo stesso per il punto M_2 e distinguendo con la lettera δ gli accrescimenti delle sue coordinate, si avrà:

$$M_1\equiv(k_1, dx_2, dx_3, 0), \quad M_2\equiv(k_1, \delta x_2, \delta x_3, 0)$$

L' area ω del triangolo infinitesimo $M\,M_1\,M_2$ sarà quindi data dalla formola: (*)

$$6^2 k^2 \omega^2 = \left\| \begin{matrix} k & 0 & 0 & 0 \\ k & dx_2 & dx_3 & 0 \\ k & \delta x_2 & \delta x_3 & 0 \end{matrix} \right\|^2 = k^2 \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 \\ \delta x_1 & \delta x_2 \end{vmatrix}^2$$

ossia

$$6\,\omega = \left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)(du\,\delta v - \delta u\,dv).$$

Il piano π_1 passante per M_1 e perpendicolare al rag-

(*) Killing, l, c. pag. 86.

gio uscente da questo punto avrà per coordinate ($d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$, $1+d\xi_4$); ma dovendo esser soddisfatte le identità:

$$d\xi_1^{\,2} + d\xi_2^{\,2} + d\xi_3^{\,2} + (1+d\xi_4)^2 = 1\,,$$
$$k\, d\xi_1 + d\xi_2\, dx_2 + dx_3\, d\xi_3 = 0,$$

se ne dedurrà $d\xi_1=0$, $d\xi_4=0$, quindi, applicando lo stesso risultato al piano π_2 passante per M_2 e perpendicolare al raggio che esce da questo punto, si avrà:

$$\pi_1 \equiv (0\,,\, d\xi_2\,,\, d\xi_3\,,\, 1)\,,\quad \pi_2 \equiv (0\,,\, \delta\xi_2\,,\, \delta\xi_3\,,\, 1).$$

La sfera di raggio r che ha il centro in M, sarà incontrata dal raggio che passa per M e dalle due rette condotte per M parallelamente ai raggi che passano per M_1 , M_2 nei punti di coordinate:

$$k\cos\frac{r}{k}\;,\qquad 0\qquad,\qquad 0\qquad,\; k\,\mathrm{sen}\frac{r}{k}$$

$$k\cos\frac{r}{k}\;,\; k\, d\xi_2\ \mathrm{sen}\frac{r}{k}\;,\; k\, d\xi_3\ \mathrm{sen}\frac{r}{k}\;,\; k\,\mathrm{sen}\frac{r}{k}$$

$$k\cos\frac{r}{k}\;,\; k\,\delta\xi_2\ \mathrm{sen}\frac{r}{k}\;,\; k\,\delta\xi_3\ \mathrm{sen}\frac{r}{k}\;,\; k\,\mathrm{sen}\frac{r}{k}\,,$$

quindi, se si suppone r infinitamente piccolo e se ne trascurano le potenze di ordine superiore, l'area $r^2\,\omega'$ del triangolo che ha per vertici questi tre punti sulla sfera, sarà data, analogamente alla precedente, da:

$$6\,r^2\,\omega' = r^2 \begin{vmatrix} d\xi_2 , & d\xi_3 \\ \delta\xi_2 , & \delta\xi_3 \end{vmatrix}$$

Ora se nelle (19) del §. 2, corrispondenti una volta agli indici $i=1$, $k=2$, $l=3$, $m=4$, e un'altra a $i=1$, $k=3$, $l=4$, $m=2$, si pone $x_1=k$, $x_2=x_3=x_4=0$, $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$, $\xi_4=1$, si ottiene:

$$d\xi_2 = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(f\frac{\partial x_3}{\partial u} - e\frac{\partial x_3}{\partial v}\right) du + \left(f'\frac{\partial x_3}{\partial v} - g\frac{\partial x_3}{\partial u}\right) dv\right\},$$

$$d\xi_3 = \frac{1}{\Delta}\left\{\left(f\frac{\partial x_2}{\partial u} - e\frac{\partial x_2}{\partial v}\right) du + \left(f'\frac{\partial x_2}{\partial v} - g\frac{\partial x_2}{\partial u}\right) dv\right\};$$

e le espressioni simili per $\delta\xi_2$, $\delta\xi_3$ dove si cambi du , dv in δu , δv. Sostituendo questi valori nell'espressione di ω' si trova, dopo facili riduzioni:

$$6\,\omega' = \frac{eg - ff'}{\Delta^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial v}\frac{\partial x_3}{\partial u}\right)(du\,\delta v - \delta u\,dv),$$

e quindi

$$\Theta = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{eg - ff'}{\Delta^2}, \tag{82}$$

ovvero, per la (21):

$$\Theta = \frac{\Delta'}{\Delta}. \tag{82'}$$

20. — Per avere ora l' espressione della densità quando il punto di origine sul raggio (u , v) non coincide più in M, ma è un altro punto qualunque, basta osservare che il secondo membro della (82') non è altro che l' inversa del prodotto delle due radici della (62), quindi sarà:

$$\Theta = \frac{1}{\rho_1 \, \rho_2} = \frac{1}{k^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_1}{k}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\sigma_2}{k}\right)}$$

e se il punto M avrà una distanza w dall' origine P, basterà cambiare nella precedente σ_1 e σ_2 in $w - \sigma_1$ e $w - \sigma_2$, e si potrà scrivere:

$$(83) \qquad \Theta = \frac{1}{k_2} \cot\left(\frac{w - \sigma_1}{k}\right) \cot\left(\frac{w - \sigma_2}{k}\right)$$

e sviluppando, tenendo conto della (62), si avrà infine:

$$(83) \qquad \Theta = \frac{1}{k^4} \, \frac{\Delta \, \nabla \, r^2 - k^2 \, \mathbf{P} \, r + k^4 \, \Delta' \, \nabla}{\Delta' \, \nabla \, r^2 + \mathbf{P} \, r + \Delta \, \nabla},$$

Cambiando in questa r in $-\frac{k^2}{r}$ o nella (83) w in $w \pm \frac{1}{2} k \pi$ e chiamando Θ' il valore che ne risulta per la densità, si ha:

$$\Theta \, \Theta' = \frac{1}{k^4}$$

Dunque: *Nello spazio di Riemann il prodotto dei valori che assume la densità in due punti di uno stesso raggio distanti fra loro di* $\frac{1}{2} k \pi$ *è costante ed eguale al quadrato della curvatura dello spazio.*

Per esaminare le variazioni che subisce la densità nei diversi punti di un raggio della congruenza, ricerchiamo dapprima per quali valori di r essa divenga massima o minima. Dovremo a tal fine eguagliare a zero la derivata rispetto ad r del secondo membro della (83′) e quindi per determinare i valori massimi e minimi di Θ, eliminare r fra l'equazione così ottenuta e la stessa (83′). Le equazioni che così si ottengono sono:

$$\mathbf{P}\, r^2 + 2\, \nabla^2\, r - k^2\, \mathbf{P} = 0 \tag{84}$$

$$k^4\, \Theta^2 + 2\, \frac{k^2 \mathbf{P}^2 + 2\, \nabla^2\, (\Delta^2 + k^4 \Delta'^2)}{\mathbf{P}^2 - 4\, \nabla^2\, \Delta\, \Delta'}\, \Theta + 1 = 0. \tag{85}$$

La prima confrontata con la formola
$k \operatorname{tg} \left(\frac{w_1 + w_2}{k}\right) = k \operatorname{tg} \left(\frac{w'_1 + w'_2}{k}\right) = k^2 \frac{\mathbf{P}}{\nabla^2}$, ci dice intanto che la densità diventa massima o minima nei punti di ascisse

$$\frac{w_1 + w_2}{2} \quad \text{o} \quad \frac{w'_1 + w'_2}{2},$$

ossia nel punto medio del segmento $L_1\, L_2$ o del segmento $L'_1\, L'_2$. Scriviamo la (83) sotto la forma

$$\Theta = \frac{1}{k^4} \frac{(k^2 + r\, \rho_1)\, (k^2 + r\, \rho_2)}{(r - \rho_1)\, (r - \rho_2)}, \tag{86}$$

e supponiamo dapprima $k^2 > 0$. Se i fuochi sono reali, il secondo membro si annulla per $r = -\frac{k^2}{\rho_1}$ e $r = -\frac{k^2}{\rho_2}$, diventa infinito per $r = \rho_1$ e $r = \rho_2$, si mantiene negativo per tutti i valori di r compresi fra ρ_1 e ρ_2, o $-\frac{k^2}{\rho_1}$ e $-\frac{k^2}{\rho_2}$ e positivo per tutti gli altri; il valore massimo e il valore minimo di Θ sono dunque ambedue negativi, come si vede anche dalla (85), la quale, essendo ora $\mathbf{P}^2 - 4\nabla^2 \Delta \Delta' > 0$, ha ambedue le radici negative. Dunque:

In una congruenza a fuochi reali dello spazio di Riemann la densità si mantiene sempre negativa entro il segmento dei fuochi e dei due punti che distano rispettivamente da essi di $\frac{1}{2} k \pi$; *in questi ultimi si annulla e in quelli diventa infinita, e per tutti gli altri punti ha sempre un valore positivo. Il valore che essa assume nel punto medio del segmento* $L_1\, L_2$ *è un massimo negativo, e quello che assume nel punto medio del segmento* $L'_1\, L'_1$ *è un minimo negativo.*

Se i fuochi sono immaginari, la densità si conserva ovunque positiva. Ora per mezzo di considerazioni analoghe a quelle del n.° 10, potremo, col passaggio al limite per $k^2 = \infty$, riconoscere che delle due radici

$$\frac{-\nabla^2 \pm \sqrt{\nabla^4 + k^2 \mathbf{P}^2}}{\mathbf{P}},$$

dell' equazione (84) quella che corrisponde al segno superiore ci dà l'ascissa ridotta del punto medio del segmento

$L_1 L_2$ e l'altra quella del punto medio del segmento $L'_1 L'_2$. Sostituendo questi valori di r nella (83'), si trova che dei due valori che risultano per Θ, che sono le radici della (85), il maggiore corrisponde appunto al segno superiore e il minore all'inferiore. Quindi:

In una congruenza a fuochi immaginarii dello spazio di Riemann la densità conserva sempre un valore positivo; è massima nel punto medio del segmento $L_1 L_2$, *minima nel punto medio del segmento* $L'_1 L'_2$.

Supponendo ora $k^2 < 0$, poniamo $k^2 = - R^2$, la (83) diventa:

$$\Theta = \frac{1}{R^2} \coth\left(\frac{w-\sigma_1}{R}\right) \coth\left(\frac{w-\sigma_2}{R}\right);$$

quindi se i fuochi sono reali, il secondo membro è negativo per w compreso fra σ_1 e σ_2, infinito per $w=\sigma_1$, e $w=\sigma_2$, positivo per tutti gli altri valori di w; nel punto medio del segmento $L_1 L_2$ acquista il suo massimo valore negativo. Se i fuochi sono immaginari, il secondo membro è sempre positivo, e siccome per $w = \infty$ si riduce a $\frac{1}{R^2}$, mentre per w finito è sempre maggiore di $\frac{1}{R^2}$ esso avrà il suo massimo valore nel punto medio del segmento dei punti limiti.

Dunque riassumendo:

In una congruenza a fuochi reali dello spazio di Lobatschewsky la densità si mantiene negativa entro il segmento dei fuochi, assumendo il suo massimo valore negativo nel suo punto di mezzo; diventa infinita nei *fuochi e si conserva positiva per qualunque altro punto del raggio.*

Se i fuochi sono immaginarii la densità è sempre positiva, acquistando il suo valor massimo nel punto medio del raggio.

E finalmente:

In qualunque congruenza dello spazio di Lobatschewsky la densitá ha sempre lo stesso valore a distanza infinita eguale al valore assoluto della curvatura dello spazio.

§. 7.

I sistemi di raggi costituiti dalle normali ad una superficie.

21. — Fra tutte le congruenze di raggi sono principalmente importanti, come quelle che hanno stretta attinenza colla teoria delle superficie, quelle costituite dall'insieme delle normali ad una stessa superficie S. in questo paragrafo mi propongo di esporre le modificazioni che subiscono i risultati precedenti per questi sistemi speciali, e di stabilire per gli spazii curvi alcune formole della teoria delle superficie, note per lo spazio euclideo, allo scopo di applicarle nel successivo paragrafo allo studio di un'altra classe notevole di congruenze.

Supponiamo adunque che tutti i raggi del sistema risultino normali alla superficie di partenza S, ossia il piano $\pi \equiv (\xi_1\ \xi_2\ \xi_2\ \xi_4)$ passante per il punto $P \equiv (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ e perpendicolare al raggio $(u\ ,\ v)$, sia tangente nel punto

P alla superficie S. Questo piano, dovendo contenere i tre punti infinitamente vicini della superficie x, $x+\frac{\partial x}{\partial u}du$, $x+\frac{\partial x}{\partial v}dv$, avrà per equazione, se sono le y le coordinate correnti dei suoi punti:

$$\begin{vmatrix} y_1 , & y_2 , & y_3 , & y_4 \\ x_1 , & x_2 , & x_3 , & x_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} , & \frac{\partial x_2}{\partial u} , & \frac{\partial x_3}{\partial u} , & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} , & \frac{\partial x_2}{\partial v} , & \frac{\partial x_3}{\partial v} , & \frac{\partial x_4}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

e quindi le sue coordinate ξ saranno date dalle formole

$$(87) \qquad \xi_i = \frac{(-1)^i}{k\Delta_1} \begin{vmatrix} x_k , & x_l , & x_m \\ \frac{\partial \xi_k}{\partial u} , & \frac{\partial \xi_l}{\partial u} , & \frac{\partial \xi_m}{\partial u} \\ \frac{\partial \xi_k}{\partial v} , & \frac{\partial \xi_l}{\partial v} , & \frac{\partial \xi_m}{\partial v} \end{vmatrix}$$

dove

$$\Delta_1{}^2 = E_1 G_1 - F_1{}^2.$$

essendo:

$$E_1 = \sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)^2 , \quad F_1 = \sum \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} , \quad G_1 = \sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)^2$$

Ne risulta

$$(88)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u}\xi_1+\dfrac{\partial x_2}{\partial u}\xi_2+\dfrac{\partial x_3}{\partial u}\xi_3+\dfrac{\partial x_4}{\partial u}\xi_4=0,\\[2ex] \dfrac{\partial x_1}{\partial v}\xi_1+\dfrac{\partial x_2}{\partial v}\xi_2+\dfrac{\partial x_3}{\partial v}\xi_3+\dfrac{\partial x_4}{\partial v}\xi_4=0,\end{cases}$$

e derivando successivamente ciascuna di queste equazioni rapporto ad u e v, si ottiene

$$(89)\quad e=-\sum\xi_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2},\ f=f'=-\sum\xi_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\partial v},g=-\sum\xi_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}.$$

Similmente, considerando la superficie come inviluppo dei suoi piani tangenti, invece che come luogo dei punti P, l' equazione del punto P sarà:

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4\\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4\\ \dfrac{\partial\xi_1}{\partial u} & \dfrac{\partial\xi_2}{\partial u} & \dfrac{\partial\xi_3}{\partial u} & \dfrac{\partial\xi_4}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial\xi_1}{\partial v} & \dfrac{\partial\xi_2}{\partial v} & \dfrac{\partial\xi_3}{\partial v} & \dfrac{\partial\xi_4}{\partial v}\end{vmatrix}=0$$

e quindi le sue coordinate saranno espresse dalle formole:

$$(87')\quad x_i=\frac{(-1)^i}{\Delta'_1}\begin{vmatrix} \xi_k & \xi_l & \xi_m\\ \dfrac{\partial\xi_k}{\partial u} & \dfrac{\partial\xi_l}{\partial u} & \dfrac{\partial\xi_m}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial\xi_k}{\partial v} & \dfrac{\partial\xi_l}{\partial v} & \dfrac{\partial\xi_m}{\partial v}\end{vmatrix}$$

dove

$$\Delta'^2_1 = E'_1 G'_1 - F'^2_1$$

essendo

$$E'_1 = \sum \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)^2 \quad , \quad F'_1 = \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial u} \frac{\partial \xi_i}{\partial v} \quad , \quad G_1 = \sum \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial v}\right)^2 .$$

Si avrà dunque.

$$(88') \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial u} x_1 + \frac{\xi_2}{\partial u} x_2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial u} x_3 + \frac{\partial \xi_4}{\partial u} x_4 &= 0, \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} x_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial v} x_2 + \frac{\partial \xi_3}{\partial v} x_3 + \frac{\partial \xi_4}{\partial v} x_4 &= 0; \end{aligned} \right.$$

è quindi

$$(89') \; e = -\sum x_i \, , \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial u^2} \; f = f' = -\sum x_i \, , \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial u \partial v} \; g = -\sum x_i \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial v^2}$$

Dunque per le congruenze costituite dal sistema delle normali ad una superficie deve essere $f = f'$. Viceversa si può vedere che se questa condizione è soddisfatta, la congruenza ammette una serie di superficie ortogonali.

Infatti si consideri la superficie definita dalle equazioni:

$$(90) \qquad X = x_i \cos \frac{w}{k} + k \, \xi_i \operatorname{sen} \frac{w}{k} ,$$

e per il punto X s'immagini condotto il piano perpendicolare al raggio (u , v) le cui coordinate saranno;

$$(91) \qquad \Xi_i = -\frac{x_i}{k}\operatorname{sen}\frac{w}{k} + \xi_i \cos\frac{w}{k},$$

come è facile verificare osservando che esso contiene il punto X ed è perpendicolare a tutti i piani che passano per il raggio (u, v). Differenziando le (90), moltiplicandole rispettivamente per le (91), osservando che $\sum x_i\, d\xi_i = -\sum \xi_i\, dx_i$, e sommando si ha

$$\sum \Xi_i\, d\,X_i = \sum \xi_i\, dx_i + dw\,;$$

quindi se si determina w dall' equazione ai differenziali totali :

$$dw = -\sum \xi_i\, dx_i$$

ciò che è possibile appunto perchè la condizione d' integrabilità

$$\frac{\partial}{\partial u}\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u}$$

è soddisfatta per l' ipotesi che sia $f = f'$, la superficie definita dalle (90) avrà per piano tangente il piano Ξ_i, giacchè per essere $\sum \Xi_i X_i = 0$, $\sum \Xi_i\, d\,X_i = 0$, lo stesso piano contiene i tre punti X , $X + \frac{\partial X}{\partial u} du$, $X + \frac{\partial X}{\partial v} dv$ infinitamente vicini della superficie . Dunque poichè w contiene una costante arbitraria, esisterà un sistema ∞' di superficie ortogonali a tutti i raggi del sistema.

Per le (88), (88') i coefficienti delle forme differenziali (I), (II) diventano

$$E=E_1 \quad , \quad F=F_1 \quad , \quad G=G_1,$$
$$E'=E_1' \quad , \quad F'=F'_1 \quad , \quad G'=G_1';$$

ossia la (I) è il quadrato dell' *elemento lineare* della superficie S e alla (II) che rappresenta l'angolo di due piani tangenti infinitamente vicini daremo il nome di *elemento angolare* della stessa superficie S.

Di più se indichiamo rispettivamente con D, D', D'' le quantità e, $f=f'$, g, le formole (20), (20') diventano:

$$(92)\quad \left\{\begin{aligned} E'_1 &= \frac{1}{\Delta_1^2}\left\{ G_1\, D^2 - 2\, F_1\, D\, D' + E_1\, D'^2 \right\}, \\ F_1' &= \frac{1}{\Delta_1^2}\left\{ G_1\, D\, D' - F_1\, (D'\, D'' + D'^2) + E_1\, D'\, D'' \right\}, \\ G_1' &= \frac{1}{\Delta_1^2}\left\{ G_1\, D'^2 - 2\, F_1\, D'\, D'' + E_1\, D''^2 \right\}; \end{aligned}\right.$$

$$(92')\quad \left\{\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{\Delta_1'^2}\left\{ G_1'\, D^2 - 2\, F_1'\, D\, D' + E_1'\, D'^2 \right\}, \\ F_1 &= \frac{1}{\Delta_1'^2}\left\{ G_1'\, D\, D' - F_1'\, (D\, D'' + D'^2) + E_1'\, D'\, D'' \right\}, \\ G_1 &= \frac{1}{\Delta_1'^2}\left\{ G'_1 D'^2 - 2 F_1' D'' - D'' + E_1'\, D''^2 \right\}; \end{aligned}\right.$$

con l' altra

$$(93)\qquad \Delta_1\, \Delta_1' = D\, D'' - D'^2 .$$

22. — I piani passanti per il punto x normalmente alle linee u=cost^e, v=cost^e hanno rispettivamente per coordinate

$$\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x_i}{\partial v}\;,\quad \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u},$$

quindi se le linee coordinate sono ortogonali, si dovrà avere $F_1=0$.

Sul piano tangente ξ, i poli assoluti delle generatrici delle *sviluppabili coordinate* u=cost^e, v=cost^e avranno rispettivamente per coordinate

$$\frac{k}{\sqrt{G_1'}}\frac{\partial \xi_i}{\partial v}\;,\quad \frac{k}{\sqrt{E_1'}}\frac{\partial \xi_i}{\partial u}$$

se queste generatrici sono perpendicolari su tutti i piani tangenti sarà $F_1'=0$.

Nella prima ipotesi si possono facilmente esprimere le derivate parziali rispetto ad u, v delle 12 quantità $\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x_i}{\partial v}$, $\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}$, ξ_i in funzioni delle quantità stesse e delle x_i; osserviamo infatti che dalle equazioni:

$$\sum\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v},\quad \sum\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}=\frac{\partial\sqrt{G_1}}{\partial u},$$

$$\sum\xi_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}=-D'\;,\quad \sum x_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}=0,$$

si ricava

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u\,\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\frac{\partial x_i}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{G_1}}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}-D'\,\xi_i\,,$$

ossia

$$a)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)&=\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}-\frac{D'}{\sqrt{G_1}}\xi_i\,,\\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)&=\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial\sqrt{G_1}}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x_i}{\partial v}-\frac{D'}{\sqrt{E_1}}\xi_i\,.\end{aligned}\right.$$

Similmente dalle equazioni

$$\sum\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)=-\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\,,$$

$$\sum\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)=0\,,$$

$$\sum\xi_i\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)=-\frac{D}{\sqrt{E_1}}\,,\quad\sum x_i\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)=-\sqrt{E_1}\,,$$

e da quelle che se ne ottengono permutando $u\,,\,v\,;\;E_1\,,\,G_1\,;\;D\,,\,D''$ si ricava

$$b)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right)&=-\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x_i}{\partial v}-\frac{D}{\sqrt{E_1}}\xi_i-\frac{x_i}{k^2}\sqrt{E_1}\,,\\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)&=-\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial\sqrt{G_1}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial x_i}{\partial u}-\frac{D''}{\sqrt{G_1}}\xi_i-\frac{x_i}{k^2}\sqrt{G_1}\,.\end{aligned}\right.$$

Finalmente risolvendo le equazioni:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial x_i}{\partial v} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = \frac{D'}{\sqrt{G_1}} , \sum \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial x_i}{\partial u} \cdot \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = \frac{D}{\sqrt{E_1}} ,$$

$$\sum \xi_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0 , \sum x_i \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0,$$

e quelle che se ne ottengono permutando u,v ; E_1 , G_1 ; D,D'', si ricava:

$$c) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} &= \frac{D}{\sqrt{E_1}} \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial x_i}{\partial u} + \frac{\partial \sqrt{E'}}{\partial v} \frac{D'}{\sqrt{G_1}} \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial x_i}{\partial v} , \\ \frac{\partial \xi_i}{\partial v} &= \frac{D''}{\sqrt{G_1}} \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial x_i}{\partial v} + \frac{D'}{\sqrt{E_1}} \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial x_i}{\partial u} . \end{aligned} \right.$$

Esprimendo poi le condizioni d'integrabilità del sistema di equazioni $a)$, $b)$, $c)$ si trovano le equazioni:

$$(94) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{G_1}}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{G_1}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} - \frac{D}{E_1} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{E_1}}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{E_1}}\right) - \frac{D'}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} - \frac{D''}{G_1} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} = 0, \\ & \frac{D D'' - D'^2}{E_1 G_1} + \frac{1}{k^2} = - \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \times \\ & \times \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v}\right) \right\} . \end{aligned} \right.$$

Operando in modo analogo, si possono esprimere, nel caso di $F_1'=0$, le derivate parziali rispetto ad u , v delle 12 quantità $\frac{1}{\sqrt{E_1'}} \frac{\partial \xi_i}{\partial u}$, $\frac{1}{\sqrt{G'_1}} \frac{\partial \xi_i}{\partial v}$, x_i in funzione delle quantità stesse e delle ξ_i per mezzo delle formole:

$$
a')\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G_1'}}\dfrac{\partial \xi_i}{\partial v}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{G'_1}}\dfrac{\partial\sqrt{E'_1}}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{E'_1}}\dfrac{\partial\xi_i}{\partial u}-\dfrac{x_i}{k^2}\dfrac{D'}{\sqrt{G'_1}}\,,\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E'_1}}\dfrac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{E'_1}}\dfrac{\partial\sqrt{G'_1}}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{G'_1}}\dfrac{\partial\xi_i}{\partial v}-\dfrac{x_i}{k^2}\dfrac{D'}{\sqrt{E'_1}}\,;
\end{cases}
$$

$$
b')\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E'_1}}\dfrac{\partial \xi_i}{\partial u}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{G'_1}}\dfrac{\partial\sqrt{E'_1}}{\partial v}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{G'_1}}\dfrac{\partial\xi_i}{\partial v}-\dfrac{x_i}{k^2}\dfrac{D}{\sqrt{E'_1}}-\sqrt{E'_1}\,\xi_i\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G'_1}}\dfrac{\partial \xi_i}{\partial v}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{E'_1}}\dfrac{\partial\sqrt{G'_1}}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{E'_1}}\dfrac{\partial\xi_i}{\partial u}-\dfrac{x_i}{k^2}\dfrac{D''}{\sqrt{G'_1}}-\sqrt{G'_1}\,\xi_i
\end{cases}
$$

$$
c')\begin{cases}
\dfrac{\partial x_i}{\partial u}=\dfrac{D}{\sqrt{E'_1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{E'_1}}\dfrac{\partial\xi_i}{\partial u}+\dfrac{D'}{\sqrt{G'_1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{G'_1}}\dfrac{\partial\xi_i}{\partial v}\,,\\[2ex]
\dfrac{\partial x_i}{\partial v}=\dfrac{D''}{\sqrt{G'_1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{G'_1}}\dfrac{\partial\xi_i}{\partial v}+\dfrac{D'}{\sqrt{E'_1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{E'_1}}\dfrac{\partial\xi_i}{\partial u}\,.
\end{cases}
$$

Ed esprimendo le condizioni d' integrabilità di questo sistema, si hanno le equazioni

$$
(94')\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{G'_1}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{G'_1}}\right)-\dfrac{D'}{\sqrt{E'_1G'_1}}\dfrac{\partial\sqrt{E'_1}}{\partial v}-\dfrac{D}{E'_1}\dfrac{\partial\sqrt{G'_1}}{\partial u}=0\,,\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{E'_1}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{E'_1}}\right)-\dfrac{D}{\sqrt{E'_1G'_1}}\dfrac{\partial\sqrt{G'_1}}{\partial u}-\dfrac{D''}{G'_1}\dfrac{\partial\sqrt{E'_1}}{\partial v}=0,\\[2ex]
\dfrac{D\,D''-D'^2}{k^2\,E_1'G_1'}+1=-\dfrac{1}{\sqrt{E_1'G_1'}}\left\{\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E'_1}}\dfrac{\partial\sqrt{G'_1}}{\partial u}\right)+\right.\\[2ex]
\qquad\qquad\left.+\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G'_1}}\dfrac{\partial\sqrt{E'_1}}{\partial v}\right)\right\}.
\end{cases}
$$

Le (94) , (94') che legano le quantità D , D' , D'' rispettivamente ai coefficienti dell' elemento lineare e dell' elemento angolare della superficie S, sono le condizioni necessarie e sufficienti (*) per la determinazione, a meno di movimenti nello spazio, della superficie S considerata come luogo di punti o come inviluppo di piani. Le prime sono conosciute, nello spazio euclideo, sotto il nome di *formole di Codazzi.*

23. — La proprietà metrica caratteristica di questa classe speciale di congruenze è contenuta nel teorema:

Per le congruenze costituite dalle normali ad una superficie, i fuochi coincidono con i punti limiti dei piedi delle minime distanze.

Ciò si verifica osservando che per questi particolari sistemi di raggi, e solamente per essi, si ha $f=f'$, e questa condizione trae seco l' altra che l' equazione

$$\mathbf{Q}\,r^4+\mathbf{P}\,r^3+(\mathbf{E}\mathbf{G}-\mathbf{F}^2-2k^2\mathbf{Q})\,r^2-k^2\mathbf{P}\,r+k^4\mathbf{Q}=0$$

del §. 3. che serve a determinare le ascisse ridotte dei quattro punti limiti, si scinda nelle due equazioni di 2.° grado:

$$\Delta'\nabla\, r^2+\mathbf{P}\,r+\Delta\nabla=0,$$
$$\Delta\nabla\, r^2-k^2\,\mathbf{P}\,r+k^4\,\Delta'\nabla=0,$$

la prima delle quali coincide con la (62) che dà le ascisse ridotte dei fuochi, e la seconda che ha le radici inverse di quelle della prima moltiplicate per $-k^2$, dà le ascisse ri-

(*) Vedi p. es. L. Bianchi: *Lezioni di geometria differenziale*, pag. 389.

dotte di quei punti che distano dai fuochi di $\frac{1}{2} k \pi$. Anche le equazioni (60) che ora si possono scrivere sotto la forma:

$$(E_1 D' - F_1 D) + (E_1 D'' - G_1 D) \tau + (F_1 D'' - G_1 D') \tau^2 = 0,$$
$$(E_1' D' - F_1' D) + (E'_1 D'' - G_1' D) \tau + (F'_1 D'' - G'_1 D') \tau^2 = 0,$$

e che come abbiamo osservato al §. 4, sono equivalenti, riescono nel caso attuale equivalenti alla (32) del §. 3, che ora si riduce all'altra

$$(\mathbf{E} D' - \mathbf{F} D) + (\mathbf{E} D'' - \mathbf{G} D) t + (\mathbf{F} D'' - \mathbf{G} D') t^2 = 0,$$

e che si deduce da esse sottraendo dalla prima la seconda moltiplicata per k^2.

Esse sono le equazioni di quelle linee della superficie S, lungo le quali le normali alla superficie stessa formano una sviluppabile, ossia delle sue *linee di curvatura*. Le ascisse ridotte dei punti limiti dei piedi delle minime distanze prendono qui il nome di *raggi principali ridotti di curvatura*, e le superficie focali quello di *superficie evolute* della superficie S.

Se si chiama, come suol farsi, *curvatura* della superficie nel punto P l'inversa del prodotto dei due raggi principali ridotti di curvatura r_1, r_2 vediamo che essa non è altro che la *densità* del sistema delle normali nel punto P, e si avrà per la (93)

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{D D'' - D'^2}{E_1 G_1 - F_1{}^2} = \frac{E'_1 G'_1 - F'_1{}^2}{D D'' - D'^2} .$$

Il prof. Bianchi (*) trova più legittimo dare alla quantità $\frac{1}{r_1 r_2}$ il nome di curvatura *relativa* della superficie, e chiama curvatura *assoluta* «quella che compete al suo elemento lineare, calcolato nella determinazione metrica dello spazio in cui esiste». Indicandola con K, si ha per la terza delle (94):

$$(95)\quad K=\frac{1}{r_1 r_2}+\frac{1}{k^2}=-\frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial\sqrt{G_1}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v}\right)\right\}$$

Se la stessa definizione analitica si assume per la curvatura assoluta K' della superficie S considerata come inviluppo di piani, si avrà per la terza delle (94')

$$(95')\quad K'=\frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{r_1 r_2}}+1=-\frac{1}{\sqrt{E'_1 G'_1}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E'_1}}\frac{\partial\sqrt{G'_1}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G'_1}}\frac{\partial\sqrt{E'_1}}{\partial v}\right)\right\}.$$

24. — Prima di lasciare l'argomento di questo §, vogliamo far vedere come la condizione:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left(\sum \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v}\right)$$

che caratterizza le congruenze costituite dal sistema di normali ad una superficie o, come si può dire più brevemente,

(*) *Sui sistemi di Weingarten negli spazii di curvatura costante*. Atti della R Accademia dei Lincei. Anno 1887, pag. 227.

le congruenze normali, può utilmente applicarsi alla dimostrazione di due importanti teoremi noti nello spazio euclideo e che non cessano di valere negli spazii di curvatura costante. Osserviamo per questo che la precedente, introducendo gli angoli α e β che il raggio della congruenza uscente dal punto (u, v) di S forma colle direzioni positive delle linee $v=\text{cost}^e$, $u=\text{cost}^e$, si trasforma nell'altra:

$$d) \qquad \frac{\partial(\sqrt{E_1} \cos \alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\sqrt{G_1} \cos \beta)}{\partial u};$$

e poichè l' equazione $dw = - \sum \xi_i \, dx_i$, integrata dà:

$$w = C - \int (\sqrt{E_1} \cos \alpha \, du + \sqrt{G_1} \cos \beta \, dv),$$

con C costante arbitraria, se ne deduce subito il teorema di Beltrami:

Se una congruenza di raggi uscenti dai punti di una superficie S *ammette una serie di superficie ortogonali, immaginando ciascun raggio terminato ad una delle superficie* $\sum$ *ortoganali, in ogni deformazione per flessione della superficie* S, *che seco trasporti i raggi invariabilmente connessi colla superficie, il luogo dei medesimi estremi non cesserà mai di essere una superficie ortogonale ai raggi della congruenza.*

In secondo luogo supponiamo che i raggi della congruenza subiscano una riflessione o rifrazione e, per semplicità, scegliamo la stessa superficie S di partenza come superficie riflettente o rifrangente. Nel primo caso è chiaro che gli angoli α e β per la congruenza incidente si cambiano rispettivamente negli angoli $\pi-\alpha$ e $\pi-\beta$ per la congruenza riflessa, per la quale quindi la *d*) non cessa di essere soddisfatta.

Nel caso della rifrazione, se n è l'indice di rifrazione nel passaggio dalla congruenza incidente a quella rifratta, si riconosce anche facilmente che gli angoli α' e β' per la congruenza rifratta sono dati dalle formole

$$\cos\alpha = -n\cos\alpha' \quad , \quad \cos\beta = -n\cos\beta',$$

quindi anche per la nuova congruenza la condizione *d*) rimane sempre verificata.

Abbiamo dunque il teorema di Malus-Dupin:

Una congruenza normale di raggi si conserva tale dopo una riflessione o una rifrazione.

§. 8.

Le congruenze pseudosferiche.

25. — Dopo le congruenze studiate al § precedente, le più importanti che si conoscano per proprietà metriche sono quelle per le quali sono costanti insieme la distanza dei fuochi e quella dei punti limiti e che nello spazio euclideo sono state considerate per la prima volta dal prof. Bianchi nella Nota già citata degli Annali: *Sui sistemi doppiamente infiniti di raggi*. L' intima relazione, con cui queste congruenze sono legate alla *trasformazione di Bäcklund* per le superficie pseudosferiche, rimane confermata anche negli spazii di curvatura costante; esse servono a dare di quella trasformazione, che per gli spazi curvi è stata pure trattata

dal prof. Bianchi nella Memoria testè citata dell'Accademia dei Lincei, l' interpretazione geometrica più semplice e naturale. Seguirò nello studio di queste congruenze lo stesso metodo tenuto dal prof. Bianchi, come quello che conduce nel modo più spedito alla dimostrazione delle loro proprietà.

Sia la congruenza a fuochi reali e si assuma a superficie S di partenza una delle due superficie focali, sulla quale le linee coordinate $v = \text{cost}^e$ siano le sue linee caustiche, e le $u = \text{cost}^e$ le loro traiettorie ortogonali, di guisa che il suo elemento lineare prenda la forma:

$$ds^2 = E_1 \, du^2 + G_1 \, dv^2.$$

Le coordinate ξ_i del piano π saranno quindi date dalle formole

$$\xi_i = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

per le quali le (17), (17') del §. 2 diventano:

$$E=0 \quad , \quad F=0 \quad , \quad G=G_1$$

$$E' = \left(\frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v}\right)^2 + \frac{D^2}{E_1}, \; F' = -\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} + \\ + \frac{D\,D'}{E_1}, \; G' = \left(\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u}\right)^2 + \frac{D'^2}{E_1},$$

e quindi

$$\mathbf{E} = -k^2 \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} \right)^2 + \frac{D^2}{E_1} \right\},$$

$$\mathbf{F} = -k^2 \left\{ -\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} + \frac{D D'}{E_1} \right\},$$

$$\mathbf{G} = G_1 - k^2 \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} \right)^2 + \frac{D'^2}{E_1} \right\};$$

e le (18) dello stesso §. 2. diventano

$$e = 0 \ , \ f = -\frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} \ , \ f' = 0 \ , \ g = \sqrt{\frac{G_1}{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u},$$

e per conseguenza

$$\mathbf{P} = -k^2 \frac{D\sqrt{G_1}}{E_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} D + \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} D' \right\}.$$

$$\nabla^2 = -k^4 \Delta'^2 = \frac{k^4}{E_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} D + \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} D' \right\}^2$$

$$e g - f f' = 0 \quad , \quad \mathbf{Q} = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} \right)^2.$$

Ciò posto, se la congruenza deve avere costante $= l$ la distanza dei punti limiti dei piedi delle minime o massime distanze, e costante $= \lambda$ la distanza dei fuochi, potremo porre

$$2\, d = k \operatorname{sen} \frac{l}{k} = R \ , \ 2\, \delta = k \operatorname{sen} \frac{\lambda}{k} = R \cos \sigma,$$

dove R e σ sono costanti, la seconda delle quali rappresenta il complemento dell' angolo d' inclinazione dei piani focali. Per le formole (65) del §. 4, avremo dunque:

$$R^2 = k^2 \frac{\frac{D^2}{E_1^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v}\right)^2}{\frac{D^2}{E_1^2} + \frac{k^2}{E_1^2 G_1}\left\{\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} D + \frac{1}{\sqrt{G_1}} \cdot \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} D'\right\}^2},$$

$$R^2 \cos\sigma^2 = \frac{k^2 \frac{D^2}{E_1^2}}{\frac{D^2}{E_1^2} + \frac{k^2}{E_1^2 G_1}\left\{\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} D + \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} D'\right\}^2};$$

da cui

$$\frac{D^2}{E_1^2} + \left(\frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\sigma} \frac{D^2}{E_1^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} D + \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} D' = \frac{\sqrt{k^2 - R^2 \cos^2\sigma}}{k R \cos\sigma} D \sqrt{G_1};$$

e da queste si deducono per D, D' i valori:

$$\frac{D}{\sqrt{E_1}} = \cot\sigma \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v},$$

$$\frac{D'}{\sqrt{G_1}} = \frac{\sqrt{k^2 - R^2 \cos^2\sigma}}{k R \operatorname{sen}\sigma} \sqrt{G_1} - \cot\sigma \frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u}.$$

Questi sostituiti nella 2,ª delle (94), ci dànno per D'':

$$\frac{D''}{\sqrt{G_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v} = \cot\sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v}\right)\right\}$$

$$- 2 \frac{\sqrt{k^2 - R^2 \cos^2\sigma}}{k R \operatorname{sen}\sigma} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u} + \cot\sigma \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \left(\frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u}\right)^2 .$$

Finalmente la terza delle stesse (94) diventa:

$$-\frac{1}{R^2} + \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G_1}} \frac{\partial \sqrt{E_1}}{\partial v}\right)\right\} .$$

Dunque:

Se in una congruenza di raggi è costante $= l$ *la distanza dei punti limiti, ed è costante la distanza dei fuochi, ambedue le superficie focali hanno la stessa curvatura relativa costante negativa* $= -\frac{1}{R_1}$, *essendo*:

$$R = k \operatorname{sen}\frac{l}{k} .$$

Ma se si osserva che, per $k^2 > 0$, affinchè si abbia per l un valore reale deve essere $R < k$ e quindi $-\frac{1}{R^2} + \frac{1}{k^2} < 0$, e che per $k^2 < 0$ si ha sempre $-\frac{1}{R^2} + \frac{1}{k^2} < 0$, si vede che anche la curvatura assoluta delle superficie focali deve essere negativa, quindi il teorema precedente si può enunciare anche così:

Se in una congruenza di raggi è costante $= l$ *la distanza dei punti limiti, ed è costante la distanza dei* *fuochi, ambedue le superficie focali sono superficie pseudosferiche colla stessa curvatura eguale a*

$$-\frac{1}{R^2}+\frac{1}{k^2}$$

dove

$$R = k \operatorname{sen}\frac{l}{k}$$

Per questa ragione alle congruenze di questa specie daremo, col prof. Bianchi, il nome di *congruenze pseudosferiche*.

25. — Per dimostrare la loro effettiva esistenza, supporremo ora che la superficie pseudosferica S di partenza sia riferita alle sue linee di curvatura, di modo che essendo allora $D' = 0$, si avrà:

$$\frac{D\,D''}{E_1\,G_1} = -\frac{1}{R^2}.$$

Potremo dunque porre

$$\frac{D}{E_1} = -\frac{1}{R}\operatorname{tg}\theta \quad , \quad \frac{D''}{G_1} = \frac{1}{R}\cot\theta$$

dove θ è funzione di u, v. Con questi valori di D, D″ le prime due formole (94) diventano:

$$\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial\sqrt{G_1}}{\partial u} = \cot\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial u} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial\sqrt{E_1}}{\partial v} = -\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial v}$$

che integrate dànno;

$$\sqrt{E_1} = \cos\theta \, . \, \varphi(u) \quad , \quad \sqrt{G_1} = \operatorname{sen}\theta \, . \, \psi(v),$$

dove φ è funzione della sola u e ψ della sola v. Ma cambiando i parametri u, v rispettivamente in $\int \varphi(u)\, du$, $\int \varphi(v)\, dv$, si può porre

$$\sqrt{E_1} = \cos\theta \quad , \quad \sqrt{G_1} = \operatorname{sen}\theta,$$

e l'elemento lineare della superficie S prenderà la forma

$$ds^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2,$$

e θ, per la 3ª delle (94) soddisferà all'equazione alle derivate parziali del 2° ordine:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\theta}{\partial^2 v} = \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{k^2}\right) \operatorname{sen}\theta \cos\theta . \tag{96}$$

Le formole *a*), *b*), *c*) del paragrafo precedente diventano ora:

$$a) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial x_i}{\partial v}\right) = -\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial x_i}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{\partial x_i}{\partial u}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial x_i}{\partial v}; \end{cases}$$

$$\beta)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{\partial x_i}{\partial u}\right) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\dfrac{\partial x_i}{\partial v} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\mathrm{R}}\,\xi_i - \dfrac{x_i}{k^2}\cos\theta, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial r_i}{\partial v}\right) = -\dfrac{1}{\cos\theta}\dfrac{\partial\theta}{\partial u}\dfrac{\partial x_i}{\partial u} - \dfrac{\cos\theta}{\mathrm{R}}\,\xi_i - \dfrac{x_i}{k^2}\operatorname{sen}\theta; \end{cases}$$

$$\gamma)\qquad \frac{\partial\xi_i}{\partial u} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\operatorname{tg}\theta\,\frac{\partial x_i}{\partial u}\ ,\quad \frac{\partial\xi_i}{\partial v} = \frac{1}{\mathrm{R}}\cot\theta\,\frac{\partial r_i}{\partial v}\,.$$

Per ogni punto P della superficie S conduciamo nel piano tangente una retta inclinata dell'angolo φ sulla linea di curvatura $v = \text{cost}^{\text{e}}$. Le coordinate del piano π passante per P e perpendicolare alla detta retta, saranno

$$\zeta_i = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial r_i}{\partial v} + \frac{\cos\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial x_i}{\partial u}\ ,$$

e derivando rispetto a u , v tenendo conto delle $\alpha)$, $\beta)$:

$$\frac{\partial\zeta_i}{\partial u} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right) + \frac{\cos\varphi\,\operatorname{sen}\theta}{\mathrm{R}}\,\xi_i - \frac{x_i}{k^2}\cos\varphi\cos\theta,$$

$$\frac{\partial\zeta_i}{\partial v} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\left(\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\theta}\frac{\partial x_i}{\partial v} - \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\theta}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right) - \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta}{\mathrm{R}}\,\xi_i - \frac{x_i}{k^2}\operatorname{sen}\varphi\,\operatorname{sen}\theta.$$

I coefficienti delle forme differenziali (I) , (II) , (III) assumono dunque i valori:

$$E = \operatorname{sen}^2\varphi \cos^2\theta \quad , \quad F = -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,,$$
$$G = \cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta\,;$$

$$E' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2 + \frac{\cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta}{R^2}\,,$$

$$F_i = \left(\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right) - \frac{\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{R^2}$$

$$G' = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta}{R^2}\,;$$

$$e = -\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\,,\ f = \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)$$

$$f' = -\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\,,\ g = \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)$$

e per conseguenza:

$$E\,G - F^2 = 0$$

$$\nabla^2 = k^4\,(E'\,G' - F'^2) = \frac{k^4}{R^2}\left\{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) + \right.$$
$$\left. + \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\right\}^2,$$

$$e\,g - f\,f' = 0\ ,\ eg - \frac{1}{4}\,(f+f')^2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\left\{\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) + \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\right\}^2$$

$$P = 0,$$

$$\mathbf{P} = -k^2\,P' = \frac{k^2\,(\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\theta - \cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\theta)}{R^2} \times$$

$$\times \left\{\operatorname{sen}\varphi\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right) + \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\right\}.$$

Sostituendo questi valori nelle (65) e ponendovi $2\,d = \mathrm{R}$, $2\,\delta = \mathrm{R}\cos\sigma$, si ottiene:

$$\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)$$

$$=(\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\theta-\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\theta\ \frac{\sqrt{k^2-\mathrm{R}^2\cos^2\sigma}}{k\,\mathrm{R}\cos\sigma},$$

$$\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)+\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)$$

$$=\frac{-\,\mathrm{sen}\,\sigma\,(\cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\theta-\mathrm{sen}^2\varphi\cos^2\theta)}{\mathrm{R}\cos\sigma},$$

dalle quali si trae

$$(97)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}=\frac{\frac{1}{k}\sqrt{k^2-\mathrm{R}^2\cos^2\sigma}\,.\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta-\mathrm{sen}\,\sigma\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{R}\cos\sigma},\\&\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\theta}{\partial u}=-\frac{\frac{1}{k}\sqrt{k^2-\mathrm{R}^2\cos^2\theta}\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta-\mathrm{sen}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\theta}{\mathrm{R}\cos\sigma}\end{aligned}\right.$$

Per queste due equazioni alle derivate parziali cui deve soddisfare la funzione φ è soddisfatta, in forza della (96), la condizione d' integrabilità, e si trova che la stessa φ è una soluzione della (96), cioè si ha

$$(98)\qquad\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}=\left(\frac{1}{\mathrm{R}^2}-\frac{1}{k^2}\right)\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi.$$

Di più se si osserva che le coordinate x_i' dell' altro fuoco P' sul raggio (u , v) sono:

$$x_i' = \frac{1}{k}\sqrt{k^2 - R^2\cos^2\sigma}\,.\,x_i + R\cos\sigma\,\zeta_i,$$

si trova per l' elemento lineare della seconda superficie focale S' la forma:

$$ds'^2 = \cos^2\varphi\,du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\,dv^2,$$

e la terza delle (94) ci dà, in forza della (98), per la curvatura relativa della superficie S' il valore $-\frac{1}{R^2}$. La nuova superficie S' è dunque anch' essa pseudosferica colla stessa curvatura assoluta della S, e poichè la soluzione φ comune alle (97) contiene una costante arbitraria, possiamo enunciare il teorema:

Ad ogni superficie pseudosferica S *con la curvatura relativa negativa appartiene una semplice infinità di congruenze pseudosferiche per le quali la* S *è superficie focale comune.*

Se infine si osserva che la costruzione precedente per passare dalla superficie S alla superficie S' è appunto quella che serve alla *trasformazione di Bäcklund* per le superficie pseudosferiche (*), potremo dire:

(*) Cfr. per lo spazio euclideo la Memoria del prof. Bianchi: *Sui sistemi tripli ortogonali di Weingarten*, inserita nel Tomo XIII degli Annali di Matematica, e per gli spazi curvi la Memoria citata sullo stesso argomento inserita negli Atti della R. Accademia dei Lincei.

Le due superficie focali pseudosferiche di una congruenza pseudosferica sono dedotte l'una dall'altra con trasformazione di Bäcklund (*).

Aquila, Luglio 1891.

(*) Questi due teoremi sono appunto quelli dimostrati dal prof. Bianchi per lo spazio euclideo nella Nota citata: *Sui sistemi doppiamente infiniti di raggi*.

		ERRORI	CORREZIONI
Pag. 14	linea 11ª	$x_i^2 = x_i \ (u\ ,\ v)$	$x_i = x_i \ (u\ ,\ v)$
» 22	» 1ª » 3ª	Nelle formole (27). (27)bis devesi sempre leggere ∇^2 al posto di Δ^2.	
» ivi	» 7ª	$P^2 - 4\ \mathbf{Q}\ \nabla^2$	$P^2 - 4\ \mathbf{Q}\ \Delta^2$.
» 29	» 2ª	$\frac{1}{2}\ (f+f')\ \mathbf{G}$	$\frac{1}{2}(f+f')\ \mathbf{G}\}$.
» ivi	» 10ª	$\frac{P^2-4\ \mathbf{Q}\ \Delta^2}{\nabla^2}$	$\frac{P^2-4\ \mathbf{Q}\ \Delta^2}{\Delta^2}$,
« 31	» 12ª	$\Delta\ \nabla' - 2\ \mathbf{Q}$	$\Delta'\ \nabla - 2\ \mathbf{Q}$,
» 33	» 14ª	$\frac{r_1+r_2}{k^2-r'_1\ r'_2}$	$k^2\frac{r_1+r_2}{k^2-r_1\ r_2}$.
» 34	» 3ª	$\frac{r'_1+r^2_2}{k^2-r'_1\ r^2}$	$\frac{r'_1+r_2}{k^2-r_2\ r'_1}$
» 52	» 2ª » 5ª	$\}\ (V_1^2+v^2 r'_1)\ (V_2^2+v^2 r_2)$	$\{\ (V_1^2+v_1^2 r'_1)\ (V_2^2+v_2^2 r_2)$,
» 54	» 4ª	$f\ t_1 + f\ t$	$f\ t + f'\ t_1$.
» ivi	» 7ª	$(t_1-t_2)\ \{\ (F\,G\ t_1) + \dots,$	$(\ t-t_2\ )\ \{\ (F+G\ t_1) + \dots$
» ivi	» 12ª » 13ª	L'espressione *e*) deve esser scritta come segue: $\{F+Gt_1+\left(\frac{1}{2}(f+f')+g'_1\right)r_1+\left\{\frac{1}{2}(f+f')+gt_1+(F'+G't_1)r_1\right\}r-\frac{1}{2}(f-f'))(r-r_1)$	
» 55	» 1ª	$\{\frac{1}{2}\left((f+f')+gt_1\right)r_1+\dots$	$\{\left(\frac{1}{2}(f+f')+gt_1\right)r_1+\dots$
» 57	» 2ª	$(\ t_1+t_2\ )$	$(\ t_1-t_2\ )$
» 58	» 2ª	ω_1', sen$^2\ w$, cos$^2\ w$,	w_1', sen$^2\ \omega$, cos$^2\ \omega$.
» 76		Nel determinante della (87) alle ξ vanno sostituite le x.	
« 80	» 12ª	$D'\ D''+D'^2$	$D\ D''+D'^2$.
» ivi	» 16ª	$2\ F_1'\ D''-D''$	$2\ F_1'\ D'\ D''$.
» 83	» 5ª	$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{D'}{\sqrt{G_1}}\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x_i}{\partial v}$	$\frac{D'}{\sqrt{G_1}}\frac{1}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial x_i}{\partial v}$
» 93	» 9ª	$-\frac{1}{R_1}$	$-\frac{1}{R^2}$
» 94	» 9ª	25. —	26. —
» 95	» 5ª	$\int \varphi\ (v)\ d\,v$	$\int \psi\ (v)\ d\,v$.
» 97	» 5ª	$F_1=\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)$	$F'=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)$.