ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BERNARDO PALADINI

Sul moto di rotazione di un corpo rigido attorno ad un punto fisso

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 5 (1888), p. 165-226

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1888_1_5__165_0>

SUL MOTO DI ROTAZIONE

DI UN CORPO RIGIDO

ATTORNO

AD UN PUNTO FISSO

12

INTRODUZIONE

Consideriamo due terne $O(x\,y\,z)$ ed $O(\xi\,\eta\,\zeta)$ di assi ortogonali congruenti fra loro, e legate dalle relazioni:

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1\,\xi + \alpha_2\,\eta + \alpha_3\,\zeta \\ y = \beta_1\,\xi + \beta_2\,\eta + \beta_3\,\zeta \\ z = \gamma_1\,\xi + \gamma_2\,\eta + \gamma_3\,\zeta : \end{cases}$$

la prima sia fissa nello spazio e la seconda sia composta dagli assi principali di inerzia relativi al punto fisso O di un corpo P che ruota intorno ad esso; esprimiamo i nove coseni cartesiani $\alpha_1 \ldots \gamma_3$ per i tre parametri indipendenti θ, φ, ψ ponendo:

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta\,, \\ \quad \beta_1 = \cos\varphi\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\cos\theta\,,\quad \gamma_1 = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \alpha_2 = -\operatorname{sen}\varphi\cos\psi - \cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta \\ \quad \beta_2 = -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta\,,\quad \gamma_2 = \cos\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \alpha_3 = \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\,,\quad \beta_3 = -\cos\psi\operatorname{sen}\theta\,,\quad \gamma_3 = \cos\theta \end{cases}$$

ed il moto del corpo P sarà completamente determinato quando, note le condizioni iniziali, le quantità θ , φ , ψ siano conosciute in funzione del tempo.

Denotiamo con A , A , C i tre momenti di inerzia e con p, q, r le velocità angolari di rotazione intorno a ξ, η, ζ; supponiamo poi che il potenziale V delle forze agenti sul corpo dipenda soltanto da θ ed abbia la forma $H_1 \cos^2 \theta + H_2 \cos \theta$ con le H costanti qualunque, od anche $V = H_1 \omega^2 + H_2 \omega$ quando per brevità si ponga $\omega = \cos\theta$.

Gli integrali delle equazioni del moto del corpo P colle fatte ipotesi sono:

$$
(3) \quad \left\{
\begin{aligned}
& t - t_0 = \int \frac{-A\, d\omega}{\sqrt{F(\omega)}} \\
& \varphi - \varphi_0 = r_0 \left(1 - \frac{C}{A}\right)(t - t_0) - \int \frac{(C r_0 - g\omega)\, d\omega}{(1 - \omega^2)\sqrt{F(\omega)}} \\
& \psi - \psi_0 = \int \frac{(C\, r_0\, \omega - g)\, d\omega}{(1 - \omega^2)\sqrt{F(\omega)}}
\end{aligned}
\right.
$$

nelle quali è stato posto:

$$
(4) \qquad F(\omega) = \left(2A(V + h) - AC r_0^2\right)(1 - \omega^2) - (C r_0 \omega - g)^2
$$

e le costanti h , g , r_0 esprimono, come anche si riscontra facilmente, la costante delle forze vive, quella dell' integrale delle aree relativo all'asse z, e la componente della velocità angolare di rotazione del corpo nella direzione del suo asse di simmetria.

Se alla terna $O(\xi \eta \zeta)$ si dà un movimento uniforme intorno a ζ colla velocità angolare $r_0 \left(\frac{C}{A} - 1\right)$ ed indichiamo con (ξ) ed (η) gli assi mobili sul piano $\xi\,\eta$, la posizione degli assi (ξ) (η) ζ sarà determinata dai parametri θ, φ_1, ψ essendo:

$$\varphi_1 = \varphi + r_0\left(\frac{C}{A} - 1\right)(t - t_0);$$

potendosi poi scrivere:

$$(5)\qquad \psi - \psi_0 = \psi_1 - \psi_2 \quad \text{e} \quad \varphi_1 - \varphi_0 = -\psi_1 - \psi_2$$

con

$$(6)\qquad \psi_1 = \frac{1}{2}\int\frac{(C r_0 - g)\,d\omega}{(1-\omega)\sqrt{F(\omega)}} \qquad \psi_2 = \frac{1}{2}\int\frac{(C r_0 + g)\,d\omega}{(1+\omega)\sqrt{F(\omega)}}$$

le quadrature da eseguirsi per aver le formole relative al moto degli assi $(\xi)(\eta)\,\zeta$ sono le (6) e la prima delle (3).

È utile osservare che i «divisori uniti agli integrali» ellittici di terza specie che rappresentano φ_1 e ψ sono eguali a $2\,i$ e che quindi se componiamo colle formole (2) i coseni cartesiani α_1, ... γ_3 mediante θ, φ, ψ, otterremo sempre delle espressioni razionali.

CAPITOLO PRIMO

1.° Per eseguire le quadrature indicate dobbiamo considerare le radici della equazione $F(\omega) = 0$, perciò faremo su di esse le seguenti osservazioni. Anzitutto dalla forma di $F(\omega)$ si ricava che $F(+1)$ ed $F(-1)$ sono ambedue negativi, ma siccome per certi valori di ω (che oscilla fra $+1$ e -1) deve $F(\omega)$ resultar positivo, affinchè non si abbia t immaginario e quindi anche φ e ψ, ciò che contradice alla natura del problema che studiamo, così dovranno esistere due radici reali comprese fra $+1$ e -1. Per le altre due radici osserviamo che se si ha $H_1 < 0$, e quindi:

$$F(+\infty) > 0 \ , \ F(+1) < 0 \ , \ F(-1) < 0 \ , \ F(-\infty) > 0,$$

saranno anch'esse reali e comprese, una fra $+\infty$ e $+1$, l' altra fra -1 e $-\infty$; se poi abbiamo $H_1 > 0$ e conseguentemente:

$$F(+\infty) < 0 \ , \ F(+1) < 0 \ , \ F(-1) < 0 \ , \ F(-\infty) < 0$$

esse potranno essere immaginarie coniugate, oppure anch' esse reali e comprese:

o tutte e due	fra	$+\infty$	e	$+1$
»	»	$+1$	e	-1
»	»	-1	e	$-\infty$ (*).

(*) Quando $H_2 = 0$ queste due radici reali, se esistono, debbono anch' esse stare nell' intervallo $(+1\ ,\ -1)$, poichè mancando il termine in ω^3 nell' equazione $F(\omega) = 0$ la somma delle quattro radici deve esser nulla; ma due di queste stanno di certo fra $+1$ e -1, quindi le altre due non possono esser reali e comprese ambedue fra $+\infty$ e $+1$ oppure ambedue fra $-\infty$ e -1 perchè in entrambi questi casi non potrebbe annullarsi la somma delle radici.

Per altro se sono immaginarie la loro parte reale verrà in questo caso data dalla semisomma delle radici reali esistenti fra $+1$ e -1 cambiata di segno.

Separate così le radici, denotiamole con $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ in ordine di grandezza crescente quando sono tutte reali; altrimenti chiamiamo con $a_1\ a_2$ in ordine crescente le radici reali e con $\lambda + i\mu$, $\lambda - i\mu$ le due immaginarie.

Se la costante H_1 è negativa evidentemente si avranno per t valori reali finchè la quantità ω si manterrà entro i limiti a_2 e a_3; e quando H_1 è positiva ciò succederà finchè ω si manterrà in quello dei due intervalli (a_1 , a_2) ed (a_3 , a_4) che è compreso in $(+1 , -1)$, se tutte le radici sono reali; altrimenti nell'intervallo (a_1 , a_2). Chiamando dunque θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 gli angoli che hanno per coseno respettivamente a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ed immaginando quattro coni circolari tutti col vertice in O, coll'asse Oz e di apertura θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_4 apparisce chiaro che l'asse di simmetria del corpo, che è $O\zeta$, non uscirà mai durante la rotazione dallo spazio compreso fra i coni θ_2 e θ_3 quando sia $H_1 < O$; che lo stesso asse oscillerà entro i coni θ_1 , θ_2 oppure entro i coni θ_3 , θ_4 (a seconda dei casi considerati) quando sia $H_1 > O$ e le radici tutte reali, altrimenti entro i coni θ_1 e θ_2 se due radici sono immaginarie. La posizione iniziale, come una di quelle che il corpo prende effettivamente, deve esser tale che nei singoli casi l' asse $O\zeta$ cada negli spazii indicati; epperciò se, avendosi $H_1 > O$ con tutte le radici reali, ambedue gli intervalli (a_1 , a_2) ed (a_3 , a_4) cadessero in $(+1 , -1)$, come avviene quando $H_2 = O$, dipenderà unicamente dalle condizioni iniziali il fatto che durante la rotazione l'asse suddetto rimanga entro i coni θ_1 , θ_2 o piuttosto entro i coni θ_3 , θ_4.

In $F(\omega)$ scriviamo L al posto di $-2AH_1$; avremo

$L > 0$ per $H_1 < 0$ ed $L < 0$ per $H_1 > 0$. Nel dare agli integrali del problema la forma normale e nel comporre i coseni α_1, ,... γ_3 separiamo i due casi:

1.°) Che $F(\omega)$ abbia tutte le radici reali.

2.°) Che $F(\omega)$ abbia due radici reali e due immaginarie.

Nel primo di questi casi si potranno avere delle formole più semplici eseguendo una trasformazione reale di secondo grado che dia per k^2 un valore reale, positivo e minore di 1, come è necessario per introdurre le funzioni ellittiche; e nel secondo caso per soddisfare a queste condizioni adopreremo una trasformazione del primo grado.

§ 2.° Primo caso.

[α] Supponiamo $L < 0$ ed $a_1 < \omega < a_2$; potremo evidentemente porre:

$$(7)\quad \begin{cases} \omega = \dfrac{a_1(a_4 - a_2) + a_4(a_2 - a_1)\operatorname{sen}^2\vartheta}{(a_4 - a_2) + (a_2 - a_1)\operatorname{sen}^2\vartheta} \\ k^2 = \dfrac{(a_2 - a_1)(a_4 - a_3)}{(a_3 - a_1)(a_4 - a_2)} \\ m = \frac{1}{2}\sqrt{-L(a_3 - a_1)(a_4 - a_2)} \end{cases}$$

e dare alla prima delle (3) la forma:

$t - t_0 = -\displaystyle\int \frac{A\,d\vartheta}{m\sqrt{1 - k^2\operatorname{sen}^2\vartheta}}$ la quale dopo aver fatto $u = -\dfrac{m}{A}(t - t_0)$ dà:

$$(8)\qquad \vartheta = \operatorname{am} u.$$

e per conseguenza:

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cos\theta = \frac{a_1(a_4-a_2)+a_4(a_2-a_1)\,\mathrm{sn}^2 u}{(a_4-a_2)+(a_2-a_1)\,\mathrm{sn}^2 u}\\
&d\,\psi_1 = \frac{C\,r_0-g}{2m(1-a_1)}du + \frac{Cr_0-g}{2m(1-a_1)}\frac{(a_2-a_1)(a_4-a_1)}{(a_4-a_2)(1-a_1)}\times\\
&\qquad\qquad \frac{\mathrm{sn}^2 u\,d\,u}{1+\dfrac{(a_2-a_1)(1-a_4)}{(a_4-a_2)(1-a_1)}\mathrm{sn}^2 u}\\
&d\,\psi_2 = \frac{C\,r_0+g}{2m(1+a_1)}du - \frac{C\,r_0+g}{2m(1+a_1)}\frac{(a_2-a_1)(a_4-a_1)}{(a_4-a_2)(1+a_1)}\times\\
&\qquad\qquad \frac{\mathrm{sn}^2 u\,d\,u}{1+\dfrac{(a_2-a_1)(1+a_4)}{(a_4-a_2)(1+a_1)}\mathrm{sn}^2 u}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

[β] Supponiamo $L < 0$ ed $a_3 < \omega < a_4$; dovremo nelle formule di [α] scambiare gli indici 1 , 2 , 3 , 4 respettivamente in 3 , 4 , 1 , 2.

(γ) Supponiamo $L > 0$ ed $a_2 < \omega < a_3$; dovremo nelle formole di [α] scambiare gli indici 1 , 2 , 3 , 4 respettivamente in 2 , 3 , 4 , 1.

Basterà dunque occuparci di [α], e per [β] e [γ] non avremo che da fare le sostituzioni indicate.

Gli angoli ψ_1 e ψ_2 resultano composti da una parte proporzionale all' argomento ellittico u e da un integrale ellittico di terza specie cui abbiamo dato la forma

$$\frac{M\,\mathrm{sn}^2 u\,du}{1+n\,\mathrm{sn}^2 u}$$

ed a cui poteva anche darsi una delle altre tre forme

$$\frac{\mathrm{M}\,du}{1+n\,\mathrm{sn}^2 u}\,,\ \frac{\mathrm{M}\,\mathrm{cn}^2 u\,du}{1+n\,\mathrm{sn}^2 u}\,,\ \frac{\mathrm{M}\,\mathrm{dn}^2 u\,du}{1+n\,\mathrm{sn}^2 u}\ (\mathrm{M}\ \text{costante}).$$

Se mediante la quantità n si costruisce l' espressione $\mathrm{N}=n(n+1)\,(n+k^2)$ le proprietà dell' integrale dipendono dal segno di N (numero caratteristico) e segnati sull'asse reale gli intervalli $(-\infty\,,\,-1)\,,\,(-1\,,\,-k^2)$, $(-k^2\,,\,0)\,,\,(0\,,\,+\infty)$ l' integrale è di carattere logaritmico se n è nel primo o nel terzo di questi intervalli, vale a dire se è $\mathrm{N}<0$; ed è di carattere trigonometrico se n è nel secondo o nel quarto, vale a dire se è $\mathrm{N}>0$.

Nel nostro caso chiamando N_1 ed N_2 i numeri caratteristici degli integrali per cui si esprimono respettivamente ψ_1 e ψ_2, ed osservando che dalla forma di $\mathrm{F}(\omega)$ resulta:

$$(\mathrm{C}\,r_0-g)^2=-\mathrm{L}\,(1-a_1)\,(1-a_2)\,(1-a_3)\,(1-a_4)$$
$$(\mathrm{C}\,r_0+g)^2=-\mathrm{L}\,(1+a_1)\,(1+a_2)\,(1+a_3)\,(1+a_4)\,,$$

avremo:

$$\mathrm{N}_1=\left[\frac{(a_2-a_1)\,(a_4-a_1)}{(a_4-a_2)\,(1-a_1)}\,\frac{\mathrm{C}\,r_0-g}{2m(1-a_1)}\right]^2$$

$$\mathrm{N}_2=\left[\frac{(a_2-a_1)\,(a_4-a_1)}{(a_4-a_2)\,(1+a_1)}\,\frac{\mathrm{C}\,r_0+g}{2m(1+a_1)}\right]^2\,;$$

per conseguenza gli integrali stessi saranno di carattere trigonometrico, il che concorda col fatto che il divisore unito ad essi è una quantità immaginaria.

§. 3.° Per ridurre alle funzioni Θ (forma canonica) gli integrali esprimenti ψ_1 e ψ_2 bisogna introdurre in ciascuno una costante ausiliaria σ legata alla respettiva quantità n da una delle relazioni:

$$[a] \left\{ \begin{array}{l} n = -k^2 \operatorname{sn}^2 i\sigma \\ n = -\dfrac{1}{\operatorname{sn}^2 i\sigma} \end{array} \right. \qquad [b] \left\{ \begin{array}{l} n = -\dfrac{\operatorname{dn}^2 i\sigma}{\operatorname{cn}^2 i\sigma} \\ n = -k^2 \dfrac{\operatorname{cn}^2 i\sigma}{\operatorname{dn}^2 i\sigma} \end{array} \right.$$

essendo $0 < \sigma < K'$; e precisamente dovremo dare ad n indifferentemente una delle forme [a] quando n è una quantità positiva; ed una delle [b] quando n è negativa (compresa fra -1 e $-k^2$). Bisogna dunque aver riguardo alla situazione delle radici per riconoscere i segni delle quantità n_1 ed n_2 che moltiplicano $\operatorname{sn}^2 u$ nei denominatori dei secondi termini di ψ_1 e ψ_2.

Può darsi, ora che ci occupiamo di [α], che:

[α]′ a_1 ed a_2 stiano fra $+1$ e -1 ; ed a_3 , a_4 fra $+1$ e $+\infty$

[α]″ a_1 , a_2 , a_3 , a_4 stiano tutte fra $+1$ e -1
(come per es. quando $H_2 = 0$).

Nel caso [α]′ resulta $n_1 < 0$ ed $n_2 > 0$, porremo quindi :

$$n_1 = -k^2 \operatorname{sn}^2 (i\sigma_1 + K) \quad , \quad n_2 = -k^2 \operatorname{sn}^2 i\sigma_2$$

cioè :

$$N_1 = n_1(n_1+1)(n_1+k^2) = -\frac{k^4 k'^4 \operatorname{cn}^2 i\sigma_1 \operatorname{sn}^2 i\sigma_1}{\operatorname{dn}^6 i\sigma_1}$$

$$N_2 = n_2(n_2+1)(n_2+k^2) = -k^4 \operatorname{sn}^2 i\sigma_2 \operatorname{cn}^2 i\sigma_2 \operatorname{dn}^2 i\sigma_2;$$

e per conseguenza:

$$d\,\psi_1 = \frac{C\,r_0 - g}{2m\,(1-a_1)}\,d u + \frac{i\,k^2\,k'^2\,\mathrm{sn}\,i\,\sigma_1\,\mathrm{snc}\,i\,\sigma_1\,\mathrm{sn}^2\,u\,du}{\mathrm{dn}^2\,u - k^2\,\mathrm{sn}^2\,i\,\sigma_1\,\mathrm{cn}^2\,u}$$

$$d\,\psi_2 = \frac{C\,r_0 + g}{2m(1+a_1)}\,d u - \frac{i\,k^2\,\mathrm{sn}\,i\,\sigma_2\,\mathrm{cn}\,i\,\sigma_2\,\mathrm{dn}\,i\,\sigma_2\,\mathrm{sn}^2\,u\,du}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,i\,\sigma_2\,\mathrm{sn}^2\,u}\,.$$

Integrando le equazioni precedenti e facendo uso delle (5) otterremo immediatamente per φ_1 e ψ le espressioni:

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi_1 - \varphi_0 = \left\{\dfrac{C\,r_0 - g\,a_1}{m\,(a_1^2-1)} + \dfrac{d\log\Theta_1\,(i\,\sigma_1)}{d\,\sigma_1} + \dfrac{d\,\log\Theta(i\sigma_2)}{d\,\sigma_2}\right\}u \\ \qquad + \dfrac{1}{2\,i}\log\dfrac{\Theta_1\,(u+i\,\sigma_1)\;\Theta\,(u+i\,\sigma_2)}{\Theta_1\,(u-i\,\sigma_1)\;\Theta\,(u-i\,\sigma_2)} \\ \psi - \psi_0 = \left\{\dfrac{C\,r_0\,a_1 - g}{m\,(1-a_1^2)} - \dfrac{d\log\Theta_1\,(i\,\sigma_1)}{d\,\sigma_1} + \dfrac{d\log\Theta(i\sigma_2)}{d\,\sigma_2}\right\}u \\ \qquad + \dfrac{1}{2\,i}\log\dfrac{\Theta_1\,(u-i\,\sigma_1)\;\Theta\,(u+i\,\sigma_2)}{\Theta_1\,(u+i\,\sigma_1)\;\Theta\,(u-i\,\sigma_2)}\,. \end{cases}$$

Nel caso $[\alpha]''$ resulta $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, talchè porremo:

$$n_1 = -\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,i\,\sigma_1 \quad , \quad n_2 = -\,k^2\,\mathrm{sn}^2\,i\,\sigma_2$$

e quindi

$$N_1 = -\,k^4\,\mathrm{sn}^2 i\sigma_1\,\mathrm{cn}^2 i\,\sigma_1\,\mathrm{dn}^2 i\sigma_1 \;,\; N_2 = -\,k^4\mathrm{sn}^2\,i\sigma_2\mathrm{cn}^2 i\,\sigma_2\mathrm{dn}^2 i\sigma_2.$$

Se eseguiamo le integrazioni:

$$d\psi_1 = \frac{C\,r_0 - g}{2\,m(1-a_1)}\,du + \frac{i\,k^2\,\mathrm{sn}\,i\,\sigma_1\,\mathrm{cn}\,i\,\sigma_1\,\mathrm{dn}\,i\,\sigma_1\,\mathrm{sn}^2\,u\,du}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,i\,\sigma_1\,\mathrm{sn}^2\,u}$$

$$d\psi_2 = \frac{C\,r_0 + g}{2m(1+a_1)}\,du - \frac{i\,k^2\,\mathrm{sn}\,i\,\sigma_2\,\mathrm{cn}\,i\,\sigma_2\,\mathrm{dn}\,i\,\sigma_2\,\mathrm{sn}^2\,u\,du}{1 - k^2\,\mathrm{sn}^2\,i\,\sigma_2\,\mathrm{sn}^2\,u}$$

otterremo applicando le (5):

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varphi_1-\varphi_0 &= \left\{ \frac{Cr_0-ga_1}{m(a_1^2-1)} - \frac{d\log\Theta(i\sigma_1)}{d\sigma_1} + \frac{d\log\Theta(i\sigma_2)}{d\sigma_2} \right\} u \\
&\quad - \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+i\sigma_1)\Theta(u-i\sigma_2)}{\Theta(u-i\sigma_1)\Theta(u+i\sigma_2)} \\
\psi-\psi_0 &= \left\{ \frac{Cr_0a_1-g}{m(1-a_1^2)} + \frac{d\log\Theta(i\sigma_1)}{d\sigma_1} + \frac{d\log\Theta(i\sigma_2)}{d\sigma_2} \right\} u \\
&\quad + \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta(u+i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)}{\Theta(u-i\sigma_1)\,\Theta(u-i\sigma_2)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Si aggiunga che essendo: (supponesi per fissare le idee: $C r_0 - g < 0$, $C r_0 + g > 0$)

$$
\begin{aligned}
&2(C r_0 a_1 - g) = \\
&= -\sqrt{-L}\,(1+a_1)\left\{\sqrt{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}\right. \\
&\qquad \left. + (1-a_1)\sqrt{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2(C r_0 - g a_1) = \\
&= -\sqrt{-L}\,(1+a_1)\left\{\sqrt{(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}\right. \\
&\qquad \left. - (1-a_1)\sqrt{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}\right\}
\end{aligned}
$$

se ne ricava:

$$
\begin{aligned}
\frac{C r_0 a_1 - g}{m(1-a_1^2)} &= -\sqrt{\frac{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}{(1-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_2)}} \\
&\quad - \sqrt{\frac{(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}{(1+a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_2)}} \\
\frac{C r_0 - g a_1}{m(a_1^2-1)} &= \sqrt{\frac{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}{(1-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_2)}} \\
&\quad - \sqrt{\frac{(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}{(1+a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_2)}}.
\end{aligned}
$$

E siccome per le posizioni già fatte abbiamo:

$$\mathrm{sn}^2\, i\,\sigma_2 = -\frac{(a_3-a_1)(1+a_4)}{(a_4-a_3)(1+a_1)}\,,$$

$$\mathrm{sn}^2(i\,\sigma_1+\mathrm{K}) = -\frac{(a_3-a_1)(1-a_4)}{(a_4-a_3)(1-a_1)}$$

$$\mathrm{cn}^2\, i\,\sigma_2 = \frac{(a_4-a_1)(1+a_3)}{(a_4-a_3)(1+a_1)}\,,$$

$$\mathrm{cn}^2(i\,\sigma_1+\mathrm{K}) = \frac{(a_4-a_1)(1-a_3)}{(a_4-a_3)(1-a_1)}$$

$$\mathrm{dn}^2\, i\,\sigma_2 = \frac{(a_4-a_1)(1+a_2)}{(a_4-a_2)(1+a_1)}\,,$$

$$\mathrm{dn}^2(i\,\sigma_1+\mathrm{K}) = \frac{(a_4-a_1)(1-a_2)}{(a_4-a_2)(1-a_1)}$$

ed inoltre (*):

$$\frac{a_4-a_1}{1+a_4} = \frac{(1+a_4)-(1+a_1)}{1+a_4} = 1 - \frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}^2\, i\,\tau\,\mathrm{sn}^2\, i\,\sigma_2}\,;$$

$$\frac{a_4-a_1}{1-a_4} = \frac{(1-a_1)-(1-a_4)}{1-a_4} = \frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}^2 i\,\tau\,\mathrm{sn}^2(i\,\sigma_1+\mathrm{K})} - 1\,;$$

così resulterà:

$$\sqrt{\frac{(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)}{(1+a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_2)}} = \frac{ik^2\,\mathrm{sn}^2\, i\tau\,\mathrm{sn}\, i\sigma_2\,\mathrm{cn}\, i\sigma_2\,\mathrm{dn}\, i\sigma_2}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, i\,\tau\,\mathrm{sn}^2\, i\,\sigma_2}$$

$$= \frac{d.\,\pi(i\,\tau\,,\,i\,\sigma_2)}{d\,\tau}$$

$$\sqrt{\frac{(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4)}{(1-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_2)}} = -\frac{ik^2\mathrm{sn}^2 i\tau\mathrm{sn}(i\sigma_1+\mathrm{K})\mathrm{cn}(i\sigma_1+\mathrm{K})\mathrm{dn}(i\sigma_1+\mathrm{K})}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\, i\,\tau\,\mathrm{sn}^2(i\,\sigma_1+\mathrm{K})}$$

$$= -\frac{d.\,\pi(i\,\tau\,,\,i\,\sigma_1+\mathrm{K})}{d\,\tau}\,;$$

(*) Vedi al principio del seguente numero il significato di $i\tau$.

talchè le (10) possono anche scriversi:

$$
12)\left\{\begin{aligned}
\varphi_1-\varphi_0 &= \left\{-\frac{d}{d\tau}[\pi(i\tau,i\sigma_1+K)+\pi(i\tau,i\sigma_2)]+\frac{d\log\Theta_1(i\sigma_1)}{d\,\sigma_1}+\frac{d\log\Theta(i\sigma_2)}{d\,\sigma_2}\right\}u\\
&\quad+\frac{1}{2\,i}\log\frac{\Theta_1\,(\,u+i\,\sigma_1\,)\,\Theta\,(\,u+i\,\sigma_2\,)}{\Theta_1\,(\,u-i\,\sigma_1\,)\,\Theta\,(\,u-i\,\sigma_2\,)}\\
\psi-\psi_0 &= \left\{\frac{d}{d\tau}\,[\pi(i\tau,i\sigma_1+K)-\pi(i\tau,i\sigma_2)]-\frac{d\log\Theta_1(i\sigma_1)}{d\,\sigma_1}+\frac{d\log\Theta(i\sigma_2)}{d\,\sigma_2}\right\}u\\
&\quad+\frac{1}{2\,i}\log\frac{\Theta_1(\,u-i\,\sigma_1\,)\,\Theta(\,u+i\,\sigma_2)}{\Theta_1\,(u+i\,\sigma_1\,)\,\Theta(u-i\,\sigma_2)}\,.
\end{aligned}\right.
$$

§. 4.° Alla prima delle espressioni (9) si può dare la forma:

$$\cos\theta=\frac{a_4\,\mathrm{sn}^2\,u-a_1\,\mathrm{sn}^2\,i\,\tau}{\mathrm{sn}^2\,u-\mathrm{sn}^2\,i\,\tau}$$

introducendo la nuova costante $i\tau$ definita dalla relazione: $\frac{a_4-a_2}{a_1-a_2}=\mathrm{sn}^2\,i\,\tau$, il che può evidentemente farsi per essere $\frac{a_4-a_2}{a_1-a_2}<0$; avremo altresì $i\,\tau<i\,K'$.

Per tal modo resulta esser $\cos\theta$ una funzione doppiamente periodica coi periodi $2\,K$ e $2\,i\,K'$, avente nel rettangolo dei periodi i due poli del primo ordine $u=i\tau$ ed $u=i\,K'-i\,\tau$; coi residui eguali e di segno contrario. Se li calcoliamo osservando « che il residuo di una funzione che in un punto diventa infinita del primo ordine è eguale al valore in quel punto dell' inversa della derivata dell' inversa della funzione stessa » si trova per essi

$\frac{(a_4 - a_1)\,\mathrm{sn}\, i\tau}{2\,\mathrm{cn}\, i\tau\,\mathrm{dn}\, i\tau}$ essendo positivo quello relativo al polo $i\tau$, negativo l'altro.

Applicando dunque la nota formola di Hermite si potrà esprimere $\cos\theta$ mediante le funzioni $Z_{\mu,\nu}$ di seconda specie, ed avremo denotando con $\mathbf{C}$ una costante:

$$\cos\theta = \mathbf{C} + \frac{(a_4 - a_1)\,\mathrm{sn}\, i\tau}{2\,\mathrm{cn}\, i\tau\,\mathrm{dn}\, i\tau}\left\{ Z_{10}\,(u + i\mathrm{K}' - i\tau) - Z_{10}(u - i\mathrm{K}' + i\tau)\right\}$$

facendo $u = 0$ si trova immediatamente per $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{C} = a_1 - \frac{(a_4 - a_1)\,\mathrm{sn}\, i\tau}{\mathrm{cn}\, i\tau\,\mathrm{dn}\, i\tau} Z_{10}\,(i\tau')\ , \quad (i\tau' = i\mathrm{K}' - i\tau)$$

quindi:

$$\cos\theta = a_1 - \frac{(a_4 - a_1)\mathrm{sn}\, i\tau}{\mathrm{cn}\, i\tau\,\mathrm{dn}\, i\tau}\left\{ Z_{10}(i\tau') - \tfrac{1}{2} Z_{10}(u + i\tau') + \tfrac{1}{2} Z_{10}(u - i\tau')\right\}$$

espressione eguale a quella della velocità angolare di rotazione della projezione sul piano invariabile di uno degli assi principali nel moto di un corpo non soggetto a forze, o meglio in un moto di Poinsot che sarebbe definito dalle quattro costanti $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ (*).

Siccome abbiamo posto al §. 3. caso $[\alpha]'$, (i calcoli che seguono subiscono leggera modificazione sulla costante σ_1 per il caso $[\alpha]''$):

(*) (**Cnf. il teorema di Jacobi, riportato nelle «Gesammelte Werke»; vol. 2.°, pag. 439).**

$$\frac{(a_2-a_1)(1+a_4)}{(a_4-a_2)(1+a_1)} = -k^2 \operatorname{sn}^2 i\sigma_2$$

$$\frac{(a_2-a_1)(1-a_4)}{(a_4-a_2)(1-a_1)} = -k^2 \frac{\operatorname{cn}^2 i\sigma_1}{\operatorname{dn}^2 i\sigma_1} = -k^2 \operatorname{sn}^2 (i\sigma_1+\mathrm{K}).$$

così ricordando la espressione di $\operatorname{sn}^2 i\tau$ si ricava:

$$\frac{1-a_4}{1-a_1} = k^2 \operatorname{sn}^2 i\tau \operatorname{sn}^2(i\sigma_1+\mathrm{K}) \ , \ \frac{1+a_4}{1+a_1} = k^2 \operatorname{sn}^2 i\tau \operatorname{sn}^2 i\sigma_2$$

dalle quali emerge:

$$a_1 = \frac{k^2 \operatorname{sn}^2 i\tau\, [\operatorname{sn}^2(i\sigma_1+\mathrm{K}) + \operatorname{sn}^2 i\sigma_2] - 2}{k^2 \operatorname{sn}^2 i\tau\, [\operatorname{sn}^2(i\sigma_1+\mathrm{K}) - \operatorname{sn}^2 i\sigma_2]}$$

$$a_4 = \frac{2k^2 \operatorname{sn}^2 i\tau \operatorname{sn}^2(i\sigma_1+\mathrm{K}) \operatorname{sn}^2 i\sigma_2 - \operatorname{sn}^2(i\sigma_1+\mathrm{K}) - \operatorname{sn}^2 i\sigma_2}{\operatorname{sn}^2(i\sigma_1+\mathrm{K}) - \operatorname{sn}^2 i\sigma_2}$$

Introducendo questi valori di a_1 ed a_4 nell' espressione di $\cos\theta$ si può eliminarne queste due quantità e trovare dopo alcune riduzioni:

$$(13) \quad \cos\theta = \frac{(1-k^2 \operatorname{sn}^2(i\sigma_1+\mathrm{K}) \operatorname{sn}^2 u)(1-k^2 \operatorname{sn}^2 i\tau \operatorname{sn}^2 i\sigma_2)}{k^2 (\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 i\tau)(\operatorname{sn}^2(i\sigma_1+\mathrm{K}) - \operatorname{sn}^2 i\sigma_2)}$$
$$+ \frac{(1-k^2 \operatorname{sn}^2 i\sigma_2 \operatorname{sn}^2 u)(1-k^2 \operatorname{sn}^2(i\sigma_1+\mathrm{K}) \operatorname{sn}^2 i\tau)}{k^2 (\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 i\tau)(\operatorname{sn}^2(i\sigma_1+\mathrm{K}) - \operatorname{sn}^2 i\sigma_2)}$$

dalle quali si passa facilmente alle funzioni Jacobiane adoperando le formole:

$$1 - k^2 \operatorname{sn}^2\alpha \operatorname{sn}^2\beta = \frac{\Theta^2(0)\Theta(\alpha+\beta)\Theta(\alpha-\beta)}{\Theta^2(\alpha)\Theta^2(\beta)},$$

$$\operatorname{sn}^2\alpha - \operatorname{sn}^2\beta = \frac{\Theta^2(0)\,\mathrm{H}(\alpha+\beta)\mathrm{H}(\alpha-\beta)}{k\,\Theta^2(\alpha)\Theta^2(\beta)}.$$

Ricaviamo pertanto:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{\Theta(i\sigma_2+i\tau)\,\Theta(i\sigma_2-i\tau)\,\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta_1(u+i\sigma_1)}{\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,\mathrm{H}_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,\mathrm{H}(u+i\tau)\,\mathrm{H}(u-i\tau)} \\ &+ \frac{\Theta_1(i\sigma_1+i\tau)\,\Theta_1(i\sigma_1-i\tau)\,\Theta(u+i\sigma_2)\,\Theta(u-i\sigma_2)}{\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,\mathrm{H}_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,\mathrm{H}(u+i\tau)\,\mathrm{H}(u-i\tau)} \end{aligned}\right.$$

e siccome da questa si deducono le altre due:

$$1-\cos\theta = \frac{-2\Theta(i\sigma_2+i\tau)\,\Theta(i\sigma_2-i\tau)\,\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta_1(u+i\sigma_1)}{\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,\mathrm{H}_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,\mathrm{H}(u+i\tau)\,\mathrm{H}(u-i\tau)}$$

$$1+\cos\theta = \frac{2\,\Theta_1(i\sigma_1+i\tau)\,\Theta_1(i\sigma_1-i\tau)\,\Theta(u+i\sigma_2)\,\Theta(u-i\sigma_2)}{\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,\mathrm{H}_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,\mathrm{H}(u+i\tau)\,\mathrm{H}(u-i\tau)}$$

così ricaviamo ancora:

$$(15)\quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2i\sqrt{\mathrm{MN}}\sqrt{\Theta_1(u+i\sigma_1)\Theta_1(u-i\sigma_1)\Theta(u+i\sigma_2)\Theta(u-i\sigma_2)}}{\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,\mathrm{H}_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\mathrm{H}(u+i\tau)\mathrm{H}(u-i\tau)}$$

dove per brevità si è posto:

$$\mathrm{M} = \Theta_1(i\sigma_1+i\tau)\,\Theta_1(i\sigma_1-i\tau)$$
$$\mathrm{N} = \Theta\,(i\sigma_2+i\tau)\,\Theta(i\sigma_2-i\tau)\,.$$

§. 5. Per la relazione che lega φ_1 all' angolo φ cui l' avevamo sostituito si ha:

$$\varphi = \frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{m}\,r_0\,u + \varphi_1\,;$$

considerando adesso in luogo di φ e ψ gli angoli φ' e ψ'

ad essi legati dalle relazioni:

$$\varphi = \Phi\, u + \varphi_0 + \varphi' \quad , \quad \psi = \Psi\, u + \psi_0 + \psi'\,\cdot$$

nelle quali è

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} \Phi &= -\frac{d}{d\tau}\Big(\pi(i\tau\,,\, i\sigma_1 + \mathrm{K}) + \pi(i\tau\,,\, i\sigma_2)\Big) + \frac{d\log\Theta_1(i\sigma_1)}{d\sigma_1} \\ &\qquad + \frac{d\log\Theta(i\sigma_2)}{d\sigma_2} + \frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{m}\, r_0 \\ \Psi &= \frac{d}{d\tau}\Big(\pi(i\tau\,,\, i\sigma_1 + \mathrm{K}) - \pi(i\tau\,,\, i\sigma_2)\Big) - \frac{d\log\Theta_1(i\sigma_1)}{d\sigma_1} \\ &\qquad + \frac{d\log\Theta(i\sigma_2)}{d\sigma_2}\,, \end{aligned} \right.$$

avremo:

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} \varphi' &= \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u + i\sigma_1)\,\Theta(u + i\sigma_2)}{\Theta_1(u - i\sigma_1)\,\Theta(u - i\sigma_2)} \\ \psi' &= \frac{1}{2i}\log\frac{\Theta_1(u - i\sigma_1)\,\Theta(u + i\sigma_2)}{\Theta_1(u + i\sigma_1)\,\Theta(u - i\sigma_2)}\,: \end{aligned} \right.$$

e si riconosce facilmente che φ' e ψ' sono, al pari di θ, delle funzioni periodiche del tempo che riprendono gli stessi valori dopo il tempo $\mathfrak{T} = -\frac{\mathrm{A}}{m}\,.\,2\mathrm{K}$.

La rotazione del corpo P si può quindi considerare come composta di tre movimenti periodici; cioè due rotazioni uniformi progressive attorno all'asse di simmetria di esso, ed all'asse fisso delle z, ed una rotazione oscillatoria degli assi principali di P attorno ai tre fissi $x\ y\ z$. Per trovare la vera posizione che prenderà il corpo al tempo t, dovremo immaginare un triplice spostamento:

1°) dopo aver sostituiti i valori di θ , φ' , ψ' corrispondenti a questo tempo t (cui può aggiungersi un multiplo qualunque positivo o negativo di $\mathfrak{T}$) nelle espressioni :

$$\alpha_1 = \cos\varphi' \cos\psi' - \operatorname{sen}\varphi' \operatorname{sen}\psi' \cos\theta \quad ,$$

$$\beta_1 = \cos\varphi' \operatorname{sen}\psi' + \operatorname{sen}\varphi' \cos\psi' \cos\theta \quad , \quad \gamma_1 = \operatorname{sen}\varphi' \operatorname{sen}\theta$$

$$\alpha_2 = -\operatorname{sen}\varphi' \cos\psi' - \cos\varphi' \operatorname{sen}\psi' \cos\theta \quad ,$$

$$\beta_2 = -\operatorname{sen}\varphi' \operatorname{sen}\psi' + \cos\varphi' \cos\psi' \cos\theta \ , \ \gamma_2 = \cos\varphi' \operatorname{sen}\theta$$

$$\alpha_3 = \operatorname{sen}\psi' \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \beta_3 = -\cos\psi' \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \gamma_3 = \cos\theta$$

si determinerà la posizione corrispondente del corpo mediante le formole:

$$x = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta \ , \ y = \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta \ , \ z = \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta .$$

2°) si farà girare il corpo attorno all' asse z di un angolo eguale a $\Psi u + \psi_0$ (o di un angolo che ne differisca per un multiplo di 2π).

3°) si farà girare il corpo attorno al suo asse di simmetria di un angolo eguale a $\Phi u + \varphi_0$ o di un angolo che ne differisca per un multiplo di 2π.

A completare la soluzione del problema aggiungeremo le espressioni degli otto coseni cartesiani $\alpha_1 \ldots \gamma_2$ per le funzioni jacobiane degli stessi argomenti $u \pm i\sigma_1$, $u \pm i\sigma_2$, $u \pm i\tau$, $i\sigma_1 \pm i\tau$, $i\sigma_2 \pm i\tau$, $i\sigma_2 \pm i\sigma_1$ che compariscono in $\cos\theta$, ossia in γ_3; espressioni sviluppabili in serie convergentissime equindi atte al calcolo numerico.

§. 6.° Dalle (17) si ricava:

$$e^{i\varphi'} = \sqrt{\frac{\Theta_1(u+i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)}{\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta(u-i\sigma_2)}}\,,$$

$$e^{i\psi'} = \sqrt{\frac{\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)}{\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta(u-i\sigma_2)}}$$

e quindi:

$$\operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi'} = \frac{2i\,\Theta_1(u+i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)\sqrt{MN}}{H_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,H(u+i\tau)\,H(u-i\tau)}$$

$$\operatorname{sen}\theta\, e^{i\psi'} = \frac{2i\,\Theta_1(u-i\sigma)\,\Theta(u+i\sigma_2)\sqrt{MN}}{H_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,H(u+i\tau)\,H(u-i\tau)}.$$

Dalle due relazioni precedenti si traggono i seguenti valori per i quattro coseni α_3, β_3, γ_1, γ_2:

$$(18)\left\{\begin{aligned}
\alpha_3 &= \frac{(\Theta_1(u-i\sigma_1)\Theta(u+i\sigma_2)+\Theta_1(u+i\sigma_1)\,\Theta(u-i\sigma_2))\sqrt{MN}}{H_1(i\sigma_1+i\sigma_1)\,H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,H(u+i\tau)\,H(u-i\tau)}\\
\beta_3 &= \frac{(\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)-\Theta_1(u+i\sigma_1)\Theta(u-i\sigma_2))\sqrt{MN}}{i\,H(i\sigma_2+i\sigma_1)\,H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,H(u+i\tau)\,H(u-i\tau)}\\
\gamma_1 &= \frac{(\Theta_1(u+i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)+\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta(u-i\sigma_2))\sqrt{MN}}{H_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,H(u+i\tau)\,H(u-i\tau)}\\
\gamma_2 &= -\frac{(\Theta_1(u+i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)-\Theta_1(u-i\sigma)\Theta(u-i\sigma_2))\sqrt{MN}}{iH_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,H(u+i\tau)\,H(u-i\tau)}
\end{aligned}\right.$$

I valori dei rimanenti quattro coseni α_1, β_1, α_2, β_2 si calcolano facilmente partendo dalle formole seguenti che son dedotte da quelle che legano i coseni stessi agli angoli θ, φ', ψ':

$$(19)\begin{cases} 2\,\alpha_1 = \cos(\varphi' - \psi')\,(1-\cos\theta) + \cos(\varphi'+\psi')\,(1+\cos\theta) \\ 2\,\beta_1 = \mathrm{sen}(\varphi'+\psi')\,(1+\cos\theta) - \mathrm{sen}(\varphi'-\psi')\,(1-\cos\theta) \\ 2\,\alpha_2 = -\mathrm{sen}(\varphi'+\psi')\,(1+\cos\theta) - \mathrm{sen}(\varphi'-\psi')\,(1-\cos\theta) \\ 2\,\beta_2 = \cos(\varphi'+\psi')\,(1+\cos\theta) - \cos(\varphi'-\psi')\,(1-\cos\theta) \end{cases}$$

avendosi infatti:

$$\mathrm{sen}(\varphi'+\psi') = \frac{\Theta^2(u+i\sigma_2) - \Theta^2(u-i\sigma_2)}{2i\,\Theta(u+i\sigma_2)\,\Theta(u-i\sigma_2)}$$

$$\mathrm{sen}(\varphi'-\psi') = \frac{\Theta_1{}^2(u+i\sigma_1) - \Theta_1{}^2(u-i\sigma_1)}{2i\,\Theta_1(u+i\sigma_1)\,\Theta_1(u-i\sigma_1)}$$

$$\cos(\varphi'+\psi') = \frac{\Theta^2(u+i\sigma_2) + \Theta^2(u-i\sigma_2)}{2\,\Theta(u+i\sigma_2)\,\Theta(u-i\sigma_2)}$$

$$\cos(\varphi'-\psi') = \frac{\Theta_1{}^2(u+i\sigma_1) + \Theta_1{}^2(u-i\sigma_1)}{2\,\Theta_1(u+i\sigma_1)\,\Theta_1(u-i\sigma_1)}$$

basterà sostituire nelle (19) questi valori e quelli di $1 \pm \cos\theta$ che abbiamo già trovato, per ottenere:

$$(20)\begin{cases} \alpha^1 = \dfrac{M\big(\Theta^2(u+i\sigma_2)+\Theta^2(u-i\sigma_2)\big) - N\big(\Theta_1{}^2(u+i\sigma_1)+\Theta_1{}^2(u-i\sigma_1)\big)}{2\,H_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,H(u+i\tau)\,H(u-i\tau)} \\ \beta_1 = \dfrac{M\big(\Theta^2(u+i\sigma_2)-\Theta^2(u-i\sigma_2)\big) + N\big(\Theta_1{}^2(u+i\sigma_1)-\Theta_1{}^2(u-i\sigma_1)\big)}{2i\,H_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,H(u+i\tau)\,H(u-i\tau)} \\ \alpha_2 = -\dfrac{M\big(\Theta^2(u+i\sigma_2)-\Theta^2(u-i\sigma_2)\big) - N\big(\Theta_1{}^2(u+i\sigma_1)-\Theta_1{}^2(u-i\sigma_1)\big)}{2i\,H_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,H(u+i\tau)\,H(u-i\tau)} \\ \beta_2 = \dfrac{M\big(\Theta^2(u+i\sigma_2)+\Theta^2(u-i\sigma_2)\big) + N\big(\Theta_1{}^2(u+i\sigma_1)+\Theta_1{}^2(u-i\sigma_1)\big)}{2\,H_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,H(u+i\tau)\,H(u-i\tau)} \end{cases}$$

§ 7.° Secondo caso.

Supposto che l' equazione $F(\omega)=0$ abbia due radici reali a_1 ed a_2 e due complesse $\lambda+i\mu$, $\lambda-i\mu$; che sia: $a_1<\omega<a_2$ ed $L<0$, sostituiamo alle costanti a_1, a_2, λ, μ le altre $\gamma', \gamma'', \vartheta', \vartheta''$ colle relazioni:

$$a_2-a_4=\gamma' e^{i\vartheta''}, \quad a_2-a_3=\gamma' e^{-i\vartheta'}$$

$$a_4-a_1=\gamma'' e^{-i\vartheta''}, \quad a_3-a_1=\gamma'' e^{i\vartheta''}$$

(in queste si ha $a_3=\lambda+i\mu$ ' $a_4=\lambda-i\mu$). Osserviamo poi che da esse resulta:

$$\frac{1}{2}\left\{1-\frac{\gamma'^2+\gamma''^2-(a_2-a_1)^2}{2\gamma'\gamma''}\right\}=\cos^2\frac{\vartheta'+\vartheta''}{2},$$

e che per conseguenza ponendo:

$$(21)\left\{\begin{aligned}
\omega &= \frac{(a_1\gamma'+a_2\gamma'')+(a_1\gamma'-a_2\gamma'')\cos\vartheta}{(\gamma'+\gamma'')+(\gamma'-\gamma'')\cos\vartheta}\\
k^2 &= \frac{1}{2}\left\{1-\frac{\gamma'^2+\gamma''^2-(a_2-a_1)^2}{2\gamma'\gamma''}\right\}\\
m &= -\frac{\sqrt{-L\gamma'\gamma''}}{A}
\end{aligned}\right.$$

siamo certi che K^2 è positivo e <1.

Alla prima delle (3) si può pertanto dare la forma:

$$t-t_0=\int\frac{d\vartheta}{m\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\vartheta}}$$

la quale dopo, aver posto anche in questo caso $u=m(t-t_0)$, dà :

$$\vartheta = \operatorname{am} u$$

e quindi

$$(22) \qquad \omega = \frac{(a_1\gamma'+a_2\gamma'')+(a_1\gamma'-a_2\gamma'')\operatorname{cn} u}{(\gamma'+\gamma'')+(\gamma'-\gamma'')\operatorname{cn} u}.$$

Considerando poi che:

$$1-\omega = \frac{[(1-a_1)\gamma'+(1-a_2)\gamma'']+[(1-a_1)\gamma'-(1-a_2)]\gamma''\operatorname{cn} u}{(\gamma'+\gamma'')+(\gamma'-\gamma'')\operatorname{cn} u}$$

$$1+\omega = \frac{[(1+a_1)\gamma'+(1+a_2)\gamma'']+[(1+a_1)\gamma_2-(1+a')\gamma'']\operatorname{cn} u}{(\gamma'+\gamma'')+(\gamma'-\gamma'')\operatorname{cn} n_2}$$

e che per conseguenza, mediante le posizioni:

$$(23)\begin{cases} l_1=\gamma'+\gamma'' & , \quad m_1=\gamma'-\gamma'' \\ l_2=(1-a_1)\gamma'+(1-a_2)\gamma'' & , \quad m_2=(1-a_1)\gamma'-(1-a_2)\gamma'' \\ l_3=(1+a_1)\gamma'+(1+a_2)\gamma'' & , \quad m_3=(1+a_1)\gamma'-(1+a_2)\gamma'' \end{cases}$$

si ottiene :

$$1-\omega=\frac{l_1+m_2\operatorname{cn} u}{l_2+m_1\operatorname{cn} u} \quad \text{ed} \quad 1+\omega=\frac{l_3+m_3\operatorname{cn} u}{l_1+m_1\operatorname{cn} u},$$

dedurremo dalle (6) le seguenti:

$$
(24)\left\{\begin{aligned}
d\psi_1 &= \frac{1}{2}\frac{Cr_0-g}{\sqrt{-L\gamma'\gamma''}}\left\{\frac{m_1}{m_2}+\frac{l_2}{m_2}\cdot\frac{\dfrac{l_1m_2-m_1l_2}{m_2^2}}{\dfrac{l_2^2-m_2^2}{m_2^2}+\mathrm{sn}^2 u}-\frac{\dfrac{l_1m_2-m_1l_2}{m_2^2}\,\mathrm{cn}\,u}{\dfrac{l_2^2-m_2^2}{m_2^2}+\mathrm{sn}^2 u}\right\}du\\
d\psi_2 &= \frac{1}{2}\frac{Cr_0+g}{\sqrt{-L\gamma'\gamma''}}\left\{\frac{m_1}{m_3}+\frac{l_3}{m_3}\cdot\frac{\dfrac{l_1m_3-m_1l_3}{m_3^2}}{\dfrac{l_3^2-m_3^2}{m_3^2}+\mathrm{sn}^2 u}-\frac{\dfrac{l_1m_3-m_1l_3}{m_3^2}\,\mathrm{cn}\,u}{\dfrac{l_3^2-m_3^2}{m_3^2}+\mathrm{sn}^2 u}\right\}du
\end{aligned}\right.
$$

Si osservi adesso che essendo $a_1 < a_2$ e prendendosi per le γ i valori assoluti, avremo $\gamma' > \gamma''$; quindi poichè a_1 ed a_2 stanno fra -1 e $+1$ potremo in virtù delle (23) concludere che l_2, m_2, l_3 saranno quantità sempre positive, e che m_3 potrà esser tanto positivo quanto negativo: per altro sarà sempre evidentemente $l_2 > m_2$ ed $l_3 > m_3$.

Se è $m_3 > 0$ potremo porre:

$$l_2 = m_2\,\mathrm{cn}\,i\,\sigma_1 \qquad \text{ed} \qquad l_3 = m_3\,\mathrm{cn}\,i\,\sigma_2$$

da cui

$$\frac{l_2^2-m_2^2}{m_2^2} = -\,\mathrm{sn}^2\,i\,\sigma_1 \qquad \text{ed} \qquad \frac{l_3^2-m_3^2}{m_3^2} = -\,\mathrm{sn}^2\,i\,\sigma_2\,.$$

Se è $m_3 < 0$ porremo:

$$l_2 = m_2 \operatorname{cn} i\sigma_1 \qquad \text{ed} \qquad l_3 = -m_3 \operatorname{cn} i\sigma_2.$$

Le costanti $i\sigma_1$ ed $i\sigma_2$ si prendono minori di iK': le trasformazioni che seguono si riferiscono all'ipotesi di $m_3 > 0$, sarà poi facile dedurne le formole valevoli nella seconda.

Ai denominatori comuni ai due ultimi termini entro parentesi nelle espressioni (24) si può dunque dare respettivamente le forme:

$$\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 i\sigma_1 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 i\sigma_2.$$

Per riconoscere quale forma assumano i numeratori quando si introduca anche in essi le costanti ausiliarie σ, cominceremo dal trasformare la quantità $C\,r_0 - g$, che esprimendosi con $\sqrt{-L(1-a_1)(1-a_2)\{(1-\lambda)^2+\mu^2\}}$ contiene $a_1\, a_2\, \lambda$ e μ, in maniera che vi compariscano soltanto l_1, m_1, l_2 ed m_2. Tale trasformazione si eseguisce facilmente partendo dalle relazioni:

$$a_1 = 1 - \frac{l_2+m_2}{l_1+m_1} \qquad \lambda = \frac{l_1 m_1 - a_2^2 + a_1^2}{2(a_1-a_2)}$$

$$a_2 = 1 - \frac{l_2-m_2}{l_1-m_1} \qquad \mu^2 = \frac{(l_1+m_1)^2}{4} - \left\{a_2 - \frac{l_1 m_1 - a_2^2 + a_1^2}{2(a_1-a_2)}\right\}^2$$

e si ottiene

$$(C r_0 - g)^2 = -L(l_2^2 - m_2^2)\left(\frac{l_2^2-m_2^2}{(l_1^2-m_1^2)^2} - \frac{m_1 l_2 + l_1 m_2}{4(m_1 l_2 - l_1 m_2)}\right).$$

Analogamente poi servendosi delle relazioni.

$$a_1 = \frac{l_3 + m_3}{l_1 + m_1} - 1 \quad , \quad a_2 = \frac{l_3 - m_3}{l_1 - m_1} - 1$$

si ottiene:

$$(Cr_0 + g)^2 = -L(l_3^2 - m_3^2)\left(\frac{l_3^2 - m_3^2}{(l_1^2 - m_1^2)^2} - \frac{m_1 l_3 + l_1 m_3}{4(m_1 l_3 - l_1 m_3)}\right).$$

Al quadrato del modulo può darsi la doppia espressione:

$$k^2 = \frac{\left\{\dfrac{2(m_1 l_2 - l_1 m_2)}{l_1^2 - m_1^2}\right\}^2 - m_1^2}{l_1^2 - m_1^2} =$$

$$= \frac{\left\{\dfrac{2(m_1 l_3 - l_1 m_3)}{l_1^2 - m_1^2}\right\}^2 - m_1^2}{l_1^2 - m_1^2};$$

per cui apparisce chiaro essere:

$$\frac{Cr_0 - g}{\sqrt{-L\gamma'\gamma''}}(l_1 m_2 - m_1 l_2) = i(l_2^2 - m_2^2)\frac{\operatorname{dn} i\sigma}{\operatorname{sn} i\sigma_1}$$

$$\frac{Cr_0 + g}{\sqrt{-L\gamma'\gamma''}}(l_1 m_3 - m_1 l_3) = i(l_3^2 - m_3^2)\frac{\operatorname{dn} i\sigma_2}{\operatorname{sn} i\sigma_2}$$

Portando questi risultati nelle espressioni di $d\psi_1$ e $d\psi_2$ (formole 24) noi otteniamo così:

$$d\psi_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1(\mathrm{C}\,r_0 - g)}{m_2\sqrt{-\mathrm{L}\gamma'\gamma''}}du + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,i\sigma_1\,\mathrm{cn}\,i\sigma_1\,\mathrm{dn}\,i\sigma_1\,du}{i(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 i\sigma_1)}$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,i\sigma_1\,\mathrm{dn}\,i\sigma_1\,\mathrm{cn}\,u\,du}{i(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 i\sigma_1)}$$

$$d\psi_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_1(\mathrm{C}\,r_0 + g)}{m_3\sqrt{-\mathrm{L}\gamma'\gamma''}}du + \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,i\sigma_2\,\mathrm{cn}\,i\sigma_2\,\mathrm{dn}\,i\sigma_2\,du}{i(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 i\sigma_2)}$$
$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,i\sigma_2\,\mathrm{dn}\,i\sigma_2\,\mathrm{cn}\,u\,du}{i(\mathrm{sn}^2 u - \mathrm{sn}^2 i\sigma_2)}$$

talchè integrando e valendoci delle (5) si ricava per gli angoli φ_1 e ψ i valori seguenti:

$$(25)\left\{\begin{aligned}
\varphi_1 - \varphi_0 &= \mathrm{M}_1 u + \frac{1}{2}\left(\mathrm{arc\,tang}\frac{i\,\mathrm{sn}\,i\sigma_1\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,i\sigma_1\,\mathrm{sn}\,u} + \mathrm{arc\,tang}\frac{i\,\mathrm{sn}\,i\sigma_2\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,i\sigma_2\,\mathrm{sn}\,u}\right)\\
&\quad - \frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u+i\sigma'_1)\,\Theta(u+i\sigma'_2)}{\Theta(u-i\sigma'_1)\,\Theta(u-i\sigma'_2)}\\
\psi - \psi_0 &= \mathrm{M}_2 u - \frac{1}{2}\left(\mathrm{arc\,tang}\frac{i\,\mathrm{sn}\,i\sigma_1\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,i\sigma_1\,\mathrm{sn}\,u} - \mathrm{arc\,tang}\frac{i\,\mathrm{sn}\,i\sigma_2\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,i\sigma_2\,\mathrm{sn}\,u}\right)\\
&\quad + \frac{1}{4i}\log\frac{\Theta(u+i\sigma'_1)\,\Theta(u-i\sigma'_2)}{\Theta(u-i\sigma'_1)\,\Theta(u+i\sigma'_2)}
\end{aligned}\right.$$

quando per brevità si ponga:

$$i\sigma'_1 = i\,\mathrm{K}' - i\sigma_1 \quad , \quad i\sigma'_2 = i\,\mathrm{K}' - i\sigma_2$$

$$\mathrm{M}_1 = -\frac{1}{2}\left\{\frac{m_1(\mathrm{C}\,r_0 - g)}{m_2\sqrt{-\mathrm{L}\gamma'\gamma''}} + \frac{m_1(\mathrm{C}\,r_0 + g)}{m_3\sqrt{-\mathrm{L}\gamma'\gamma''}} + \frac{d\log \mathrm{H}(i\sigma_1')}{d\sigma'_1} + \frac{d\log \mathrm{H}(i\sigma'_2)}{d\sigma'_2}\right\}$$

$$\mathrm{M}_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{m_1(\mathrm{C}\,r_0 - g)}{m_2\sqrt{-\mathrm{L}\gamma'\gamma''}} - \frac{m_1(\mathrm{C}\,r_0 + g)}{m_3\sqrt{-\mathrm{L}\gamma'\gamma''}} + \frac{d\log \mathrm{H}(i\sigma_1')}{d\sigma'_1} - \frac{d\log \mathrm{H}(i\sigma'_2)}{d\sigma'_2}\right\}$$

§. 8.º Poichè ogni arco w si esprime per la sua tangente W mediante la formola:

$$w = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i\mathrm{W}}{1 - i\mathrm{W}}$$

se poniamo:

$$w = \frac{1}{2}\left(\text{arc tang}\frac{i \operatorname{sn} i\sigma_1 \operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} i\sigma_1 \operatorname{sn} u} \pm \text{arc tang}\frac{i \operatorname{sn} i\sigma_2 \operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} i\sigma_2 \operatorname{sn} u}\right)$$

e denotiamo con w_1 e w_2 i valori di questa quantità quando si prende respettivamente il segno superiore ed il segno inferiore, noi avremo:

$$w = \frac{1}{4i}\log\frac{(\operatorname{dn} i\sigma_1 \operatorname{sn} u - \operatorname{sn} i\sigma_1 \operatorname{dn} u)(\operatorname{dn} i\sigma_2 \operatorname{sn} u \mp \operatorname{sn} i\sigma_2 \operatorname{dn} u)}{(\operatorname{dn} i\sigma_1 \operatorname{sn} u + \operatorname{sn} i\sigma_1 \operatorname{dn} u)(\operatorname{dn} i\sigma_2 \operatorname{sn} u \pm \operatorname{sn} i\sigma_2 \operatorname{dn} u)}$$

od anche, adoprando la formola:

$$\frac{\operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha} = i\,k \operatorname{cn}(\alpha + i\mathrm{K}'):$$

$$w = \frac{1}{4i}\log\frac{(\operatorname{cn}(i\sigma_1 + i\mathrm{K}') - \operatorname{cn}(u + i\mathrm{K}'))(\operatorname{cn}(i\sigma_2 + i\mathrm{K}') \mp \operatorname{cn}(u + i\mathrm{K}'))}{(\operatorname{cn}(i\sigma_1 + i\mathrm{K}') + \operatorname{cn}(u + i\mathrm{K}'))(\operatorname{cn}(i\sigma_2 + i\mathrm{K}') \pm \operatorname{cn}(u + i\mathrm{K}'))}.$$

Si introducono agevolmente le funzioni jacobiane ricordando che:

$$\frac{\operatorname{cn}(\alpha+\beta) - \operatorname{cn}(\alpha-\beta)}{\operatorname{cn}(\alpha+\beta) + \operatorname{cn}(\alpha-\beta)} = -\frac{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{dn}\alpha \operatorname{dn}\beta}{\operatorname{cn}\alpha \operatorname{cn}\beta};$$

resulta per tal modo:

$$w_1 = \frac{1}{4i} \log \frac{P \,.\, P'}{Q \,.\, Q'} \quad , \quad w_2 = \frac{1}{4i} \log \frac{P \,.\, Q'}{Q \,.\, P'}$$

quando per brevità si ponga:

$$a = \frac{i\,\sigma_1 + u}{2} + i\,K' \quad , \quad b = \frac{i\,\sigma_1 - u}{2}$$

$$a' = \frac{i\,\sigma_2 + u}{2} + i\,K' \quad , \quad b' = \frac{i\,\sigma_2 - u}{2}$$

$$P = H(a)H(b)\Theta_1(a)\Theta_1(b) \quad , \quad P' = H(a')H(b')\Theta_1(a')\Theta_1(b')$$

$$Q = H_1(a)H_1(b)\Theta(a)\Theta(b) \quad , \quad Q' = H_1(a')H_1(b')\Theta(a')\Theta(b').$$

Possiamo quindi sostituire alle (25) le altre:

$$(26)\left\{\begin{aligned} &\varphi_1 - \varphi_0 = M_1\, u \\ &+\frac{1}{4i}\log\left[\frac{P.P'.\Theta(2a-iK')\,\Theta(2a'-iK')}{Q.Q'\,\Theta(2b-iK')\Theta\,(2b'-iK')}\,e^{\frac{\pi i}{K}(2a+2a'-4iK')}\right] \\ &\psi - \psi_0 = M_2\, u \\ &-\frac{1}{4i}\log\left[\frac{P.Q'.\,\Theta(2a-iK')\,\Theta(2b'-iK')}{Q.P'.\,\Theta(2b-iK')\,\Theta(2a'-iK')}\,e^{\frac{\pi i}{K}(2a-2a')}\right] \end{aligned}\right.$$

cui daremo una forma più semplice riducendo le quantità sotto il logaritmo a quadrati perfetti, ciò che prevediamo potersi fare perchè abbiamo già mostrato che il divisore unito agli integrali che davano φ_1 e ψ era semplicemente $2\,i$ e non $4\,i$ come dalle (26) apparirebbe.

§. 9.° Prendiamo la seguente formola:

$$2\,\Theta(u_1)\,\Theta(u_2)\,H(u_3)\,H(u_4) =$$

$$= \Theta(v_1)\,\Theta(v_2)\,H(v_3)\,H(v_4) - H(v_1)\,H(v_2)\,\Theta(v_3)\,\Theta(v_4)$$

$$+ \Theta_1(v_1)\,\Theta_1(v_2)\,H_1(v_3)\,H_1(v_4) - H_1(v_1)\,H_1(v_2)\,\Theta_1(v_3)\,\Theta_1(v_4)$$

la quale insieme a molte altre analoghe fu data da Jacobi (Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet) e vale quando fra gli argomenti si ha:

$$\begin{array}{ll}
2\,v_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 & 2\,u_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \\
2\,v_2 = u_1 + u_2 - u_3 - u_4 & 2\,u_2 = v_1 + v_2 - v_3 - v_4 \\
2\,v_3 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 & 2\,u_3 = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 \\
2\,v_4 = u_1 - u_2 - u_3 + u_4 & 2\,u_4 = v_1 - v_2 - v_3 + v_4
\end{array}$$

Le funzioni Θ , H , Θ_1 , H_1 non divengono mai infinite a distanza finita, ed invece si ha:

$$\Theta(i\,K')=0 \;,\; H(0)=0 \;,\; \Theta_1(K+i\,K')=0 \;,\; H_1(K)=0$$

se quindi in qualche termine del secondo membro di tale formola alcuno degli argomenti v avesse precisamente quel valore che annulla la funzione corrispondente, tutto il termine sparirebbe. Se diamo agli argomenti u i valori:

$$u_1=v \;,\; u_2=v-2K-iK' \;,\; u_3=v-K-iK' \;,\; u_4=v-K$$

otterremo:

$$v_1=2\,v-2\,\mathrm{K}-i\,\mathrm{K}'\ ,\ v_2=0\ ,\ v_3=\mathrm{K}\ ,\ v_4=\mathrm{K}+i\,\mathrm{K}$$

e la formola di Jacobi si riduce a:

$$2\,\Theta(v)\,\Theta(v-2\,\mathrm{K}-i\,\mathrm{K})\,\mathrm{H}(v-\mathrm{K}-i\,\mathrm{K}')\,\mathrm{H}(v-\mathrm{K})=$$
$$=\Theta(2\,v-2\,\mathrm{K}-i\,\mathrm{K}')\,\mathrm{H}(\mathrm{K})\,\mathrm{H}(\mathrm{K}+i\,\mathrm{K}')$$

che per le equazioni caratteristiche delle funzioni jacobiane può anche scriversi:

$$(27)\qquad 2\,\Theta(v)\,\Theta(v-i\,\mathrm{K}')\,\mathrm{H}(v-\mathrm{K}-i\,\mathrm{K}')\,\mathrm{H}(v-\mathrm{K})$$
$$=\Theta(2\,v-i\,\mathrm{K}')\,\mathrm{H}(\mathrm{K})\,\mathrm{H}(\mathrm{K}+i\,\mathrm{K}').$$

E poichè sappiamo dalla teoria delle Funzioni ellittiche che:

$$\Theta(v-i\mathrm{K}')=-\,i\,e^{-\frac{\pi\mathrm{K}'}{4\,\mathrm{K}}}\,e^{\frac{\pi\,i}{2\mathrm{K}}(v-i\mathrm{K}')}\mathrm{H}(v)$$
$$\mathrm{H}(v-\mathrm{K}-i\mathrm{K}')=-\,e^{\frac{\pi\mathrm{K}'}{4\mathrm{K}}}\,e^{\frac{\pi i v}{2\mathrm{K}}}\,\Theta_1(v)$$
$$\mathrm{H}(v-\mathrm{K})=-\,\mathrm{H}_1(v)$$
$$\mathrm{H}(\mathrm{K})=\sqrt{\frac{2k\mathrm{K}}{\pi}}\quad,\quad \mathrm{H}(\mathrm{K}+i\mathrm{K}')=e^{\frac{\pi K'}{4K}}\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}}$$

così portando questi valori nella (27) ne trarremo:

$$(28)\,\Theta(2v-i\mathrm{K}')=-2i\frac{\pi\,i}{\mathrm{K}\sqrt{k}}e^{-\frac{\pi\mathrm{K}'}{4\,\mathrm{K}}}e^{\frac{\pi\,i}{2\mathrm{K}}(2v-i\mathrm{K}')}\Theta(v)\mathrm{H}(v)\Theta_1(v)\mathrm{H}_1(v)$$

laonde sostituendo nelle (26) i valori che si ricavano da questa facendo v successivamente eguale ad a , a' , b , b' si giungerà ai seguenti resultati:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = M_1 u + \frac{\pi}{4K}(i\sigma_1 + i\sigma_2 + 4u + 2iK')$$

$$+ \frac{1}{4i}\log\left[\frac{H(a)\,H(a')\,\Theta_1(a)\,\Theta_1(a')}{\Theta(b)\,\Theta(b')\,H_1(b)\,H_1(b')}\right]^2$$

$$\psi - \psi_0 = M_2 u - \frac{\pi}{4K}(i\sigma_1 - i\sigma_2)$$

$$+ \frac{1}{4i}\log\left[\frac{\Theta(b)\,H_1(b)\,H(a')\,\Theta_1(a')}{\Theta(b')\,H_1(b')\,H(a)\,\Theta_1(a)}\right]^2$$

od ancora:

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi_1 - \varphi_0 = M_1 u + \frac{\pi u}{2K} \\ &+ \frac{1}{2i}\log\left[-\frac{\Theta(a-iK')\,\Theta(a'-iK')\,H_1(a-iK')\,H_1(a'-iK')}{\Theta(b)\,\Theta(b')\,H_1(b)\,H_1(b')}\right] \\ &\psi - \psi_0 = M_2 u \\ &+ \frac{1}{2i}\log\left[\frac{\Theta(b)H_1(b)\,\Theta(a'-iK')\,H_1(a'-iK')}{\Theta(b')\,H_1(b')\,\Theta(a-iK')H_1(a-iK')}\right] \end{aligned}\right.$$

§. 10. Definiamo una nuova costante $i\tau$ mediante la relazione:

$$\gamma' + \gamma'' = (\gamma' - \gamma'')\,\mathrm{cn}\, i\tau$$

con $i\tau < iK'$, ciò che possiamo evidentemente fare per essere la quantità $\frac{\gamma' + \gamma''}{\gamma' - \gamma''}$ reale positiva e > 1; e sostituiamola nella (22), così essa diverrà:

$$\cos\theta = \gamma_3 = \frac{\frac{a_1\gamma' + a_2\gamma''}{\gamma' - \gamma''} + \frac{a_1\gamma' - a_2\gamma''}{\gamma' - \gamma''}\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{cn}\,i\tau + \mathrm{cn}\,u}.$$

E poichè abbiamo posto:

$$\mathrm{cn}\,i\sigma_1 = \frac{l_2}{m_2} = \frac{\gamma' + \gamma'' - a_1\gamma' - a_2\gamma''}{\gamma' - \gamma'' - a_1\gamma' + a_2\gamma''},$$

$$\mathrm{cn}\,i\sigma_2 = \frac{l_3}{m_3} = \frac{\gamma' + \gamma'' + a_1\gamma' + a_2\gamma''}{\gamma' - \gamma'' + a_1\gamma' - a_2\gamma''}$$

dalle quali resulta:

$$\frac{a_1\gamma' - a_2\gamma''}{\gamma_1 - \gamma''} = \frac{\mathrm{cn}\,i\sigma_1 + \mathrm{cn}\,i\sigma_2 - 2\,\mathrm{cn}\,i\tau}{\mathrm{cn}\,i\sigma_1 - \mathrm{cn}\,i\sigma_2}$$

$$\frac{a_1\gamma' + a_2\gamma''}{\gamma' - \gamma''} = \frac{2\,\mathrm{cn}\,i\sigma_1\,\mathrm{cn}\,i\sigma_2 - \mathrm{cn}\,i\sigma_1\,\mathrm{cn}\,i\tau - \mathrm{cn}\,i\sigma_2\,\mathrm{cn}\,i\tau}{\mathrm{cn}\,i\sigma_1 - \mathrm{cn}\,i\sigma_2},$$

così avremo ancora:

$$(30)\quad \cos\theta = \frac{(\mathrm{cn}\,i\sigma_1 + \mathrm{cn}\,u)(\mathrm{cn}\,i\sigma_2 - \mathrm{cn}\,i\tau) + (\mathrm{cn}\,i\sigma_2 + \mathrm{cn}\,u)(\mathrm{cn}\,i\sigma_1 - \mathrm{cn}\,i\tau)}{(\mathrm{cn}\,i\sigma_1 - \mathrm{cn}\,i\sigma_2)(\mathrm{cn}\,i\tau + \mathrm{cn}\,u)}$$

Ne seguono immediatamente le altre due:

$$(31)\begin{cases} 1+\cos\theta = 2\dfrac{(\operatorname{cn} i\,\sigma_1 - \operatorname{cn} i\,\tau)(\operatorname{cn} i\,\sigma_2 + \operatorname{cn} u)}{(\operatorname{cn} i\,\sigma_1 - \operatorname{cn} i\,\sigma_2)(\operatorname{cn} i\,\tau + \operatorname{cn} u)} \\[2ex] 1-\cos\theta = 2\dfrac{(\operatorname{cn} i\,\tau - \operatorname{cn} i\,\sigma_2)(\operatorname{cn} i\,\sigma_1 + \operatorname{cn} u)}{(\operatorname{cn} i\,\sigma_1 - \operatorname{cn} i\,\sigma_2)(\operatorname{cn} i\,\tau + \operatorname{cn} u)} \end{cases}$$

che rientrano l' una nell' altra scambiando tra loro $i\,\sigma_1$ ed $i\,\sigma_2$.

Invece degli argomenti $i\,\sigma_1$, $i\,\sigma_2$, $i\,\tau$, u si può far comparire nelle (31) gli argomenti:

$$\frac{i\,\sigma_1 \pm i\,\tau}{2}\ ,\ \frac{i\,\sigma_2 \pm i\,\tau}{2}\ ,\ \frac{i\,\sigma_1 \pm i\sigma_2}{2}\ ,\ \frac{i\,\tau \pm u}{2}$$

$$b\ ,\ b'\ ,\ a - i\,K'\ ,\ a' - i\,K'$$

gli ultimi dei quali son già stati precedentemente adoperati, purchè si applichino ad esse le formole:

$$\operatorname{cn}\alpha - \operatorname{cn}\beta = -\frac{2\operatorname{sn}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sn}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\operatorname{dn}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{dn}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

$$\operatorname{cn}\alpha + \operatorname{cn}\beta = \frac{2\operatorname{cn}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{cn}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{1 - k^2\operatorname{sn}^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$$

Se ciò fatto si passa alle funzioni jacobiane si giungerà ai seguenti risultati:

$$(32)\quad \begin{cases} 1+\cos\theta = \dfrac{2\,\mathrm{R}}{\mathrm{T}}\,\mathrm{H}_1(a'-i\mathrm{K}')\,\mathrm{H}_1(b')\Theta(a'-i\mathrm{K}')\Theta(b') \\[2ex] 1-\cos\theta = -\dfrac{2\,\mathrm{S}}{\mathrm{T}}\,\mathrm{H}_1(a-i\mathrm{K}')\,\mathrm{H}_1(b)\,\Theta(a-i\mathrm{K}')\Theta(b) \end{cases}$$

quando per brevità si ponga:

$$\mathrm{R}=\mathrm{H}\left(\frac{i\sigma_1+i\tau}{2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{i\sigma_1-i\tau}{2}\right)\Theta_1\left(\frac{i\sigma_1+i\tau}{2}\right)\Theta_1\left(\frac{i\sigma_1-i\tau}{2}\right)$$

$$\mathrm{S}=\mathrm{H}\left(\frac{i\sigma_2+i\tau}{2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{i\sigma_2-i\tau}{2}\right)\Theta_1\left(\frac{i\sigma_2+i\tau}{2}\right)\Theta_1\left(\frac{i\sigma_2-i\tau}{2}\right)$$

$$\mathrm{T}=\mathrm{H}\left(\frac{i\sigma_1+i\sigma_2}{2}\right)\mathrm{H}\left(\frac{i\sigma_1-i\sigma_2}{2}\right)\Theta_1\left(\frac{i\sigma_1+i\sigma_2}{2}\right)\Theta_1\left(\frac{(\sigma_1-i\sigma_2}{2}\right)\times$$

$$\times\,\mathrm{H}_1\left(\frac{i\tau+u}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\tau-u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\tau+u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\tau-u}{2}\right)$$

Moltiplicando tra loro le (32) ed estraendo la radice quadrata dal prodotto si ottiene:

$$(33)\qquad \operatorname{sen}\theta=\frac{2i\sqrt{\mathrm{RS}}}{\mathrm{T}}\times$$

$$\sqrt{\mathrm{H}_1(a-i\mathrm{K}')\mathrm{H}_1(a'-i\mathrm{K}')\mathrm{H}_1(b)\mathrm{H}_1(b')\Theta(a-i\mathrm{K}')\Theta(a'-i\mathrm{K}')\Theta(b)\Theta(b')}.$$

§. 11. Prendendo, come nel §. 5. a considerare invece degli angoli φ e ψ le loro parti periodiche φ' e ψ', avremo attualmente:

$$\Phi = r_0 \frac{(A-C)}{m A} + M_1 + \frac{\pi}{2K}, \quad \Psi = M_2$$

$$\varphi' = \frac{1}{2i} \log \left[-\frac{\Theta(a-iK')\Theta(a'-iK')H_1(a-iK')\, H_1(a'-iK')}{\Theta(b)\,\Theta(b')\,H_1(b)\,H_1(b')} \right]$$

$$\psi' = \frac{1}{2i} \log \frac{\Theta(b)H_1(b)\,\Theta(a'-iK')\,H_1(a'-iK')}{\Theta(b')H_1(b')\Theta(a-iK')\,H_1(a-iK')}$$

Anche in questo caso la rotazione del corpo P si può considerare decomposta in tre movimenti periodici e possiamo applicare quanto fu detto al §. 5.

Ci occuperemo adesso di costruire i valori dei coseni cartesiani $\alpha_1 \ldots . \gamma_3$ mediante le funzioni jacobiane. Dalle (32) trarremo intanto:

$$(34) \quad \gamma_3 = \frac{1}{T} \Big\{ R\, H_1(a'-iK')\, H_1(b')\, \Theta(a'-iK')\Theta(b')$$

$$+ S\, H_1(a-iK')\, H_1(b)\, \Theta(a-iK')\, \Theta(b) \Big\};$$

poi servendoci della (33) e dei valori φ' e ψ' per costruire le quantità sen $\theta\, e^{\pm i\varphi'}$, sen $\theta\, e^{\pm i\psi'}$, mediante le quali si compongono immediatamente i coseni α_3, β_3, γ_1, γ_2, noi avremo:

$$\operatorname{sen}\theta\, e^{i\varphi'} = -\frac{2\sqrt{RS}}{T}\Theta(a-iK')H_1(a-iK')\Theta(a'-iK')H_1(a'-iK')$$

$$\operatorname{sen}\theta\, e^{-i\varphi'} = \frac{2\sqrt{RS}}{T}\Theta(b)\, H_1(b)\, \Theta(b')\, H_1(b')$$

$$\operatorname{sen}\theta\, e^{i\psi'} = \frac{2i\sqrt{RS}}{T}\Theta(b)\, H_1(b)\, \Theta(a'-iK')\, H_1(a'-iK')$$

$$\operatorname{sen}\theta\, e^{-i\psi'} = \frac{2i\sqrt{RS}}{T}\Theta(b')\, H_1(b')\, \Theta(a-iK')\, H_1(a-iK')$$

e per conseguenza :

$$(35)\quad \begin{cases} \alpha_2 = \dfrac{\sqrt{RS}}{T}[\Theta(b)\, H_1(b)\, \Theta(a'-iK')\, H_1(a'-iK') \\ \qquad - \Theta(b')\, H_1(b')\, \Theta(a-iK')\, H_1(a-iK')\,] \\ \beta_2 = \dfrac{\sqrt{RS}}{iT}[\Theta(b)\, H_1(b)\Theta\,(a'-iK')\, H_1(a'-iK') \\ \qquad + \Theta(b')\, H_1(b')\, \Theta(a-iK')\, H\,(a-iK')\,] \\ \gamma_1 = -\dfrac{\sqrt{RS}}{iT}[\Theta(a-iK')\, H_1(a-iK')\Theta(a'-iK')\, H_1(a'-iK') \\ \qquad + \Theta(b)\, H_1(b)\, \Theta(b')\, H_1(b')] \\ \gamma_2 = -\dfrac{\sqrt{RS}}{T}[\Theta(a-iK')\, H_1(a-iK')\, \Theta(a'-iK')H_1(a'-iK') \\ \qquad - \Theta(b)\, H_1(b)\, \Theta(b')\, H_1(b')] \end{cases}$$

Per i quattro coseni rimanenti osserveremo che avendosi:

$$\operatorname{sen}(\varphi'+\psi')=\frac{1}{2}\left[\frac{\Theta^2(a'-iK')H_1^2(a'-iK')-\Theta^2(b')H_1^2(b')}{\Theta(b')H_1(b')\,\Theta(a'-iK')\,H_1(a'-iK')}\right]$$

$$\operatorname{sen}(\varphi'-\psi')=\frac{1}{2}\left[\frac{\Theta^2(a-iK')\,H_1^2(a-iK')-\Theta^2(b)H_1^2(b)}{\Theta(b)H_1(b)\Theta(a-iK')\,H_1(a-iK')}\right]$$

$$\cos(\varphi'+\psi')=\frac{i}{2}\left[\frac{\Theta^2(a'-iK')H_1^2(a'-iK')+\Theta^2(b')H_1^2(b')}{\Theta(b)\,H_1(b')\,\Theta(a'-iK')\,H_1(a'-iK')}\right]$$

$$\cos(\varphi'-\psi')=\frac{i}{2}\left[\frac{\Theta^2(a-iK')H_1^2(a-iK')+\Theta^2(b)H_1^2(b)}{\Theta(b)\,H_1(b)\,\Theta(a-iK')\,H_1(a-iK')}\right]$$

basta applicare le (19) per dedurne:

$$(36)\quad\begin{cases}\alpha_1=\dfrac{1}{2iT}\Big[S\{\Theta^2(a-iK')H_1^2(a-iK')+\Theta^2(b)H_1^2(b)\}\\ \quad-R\{\Theta^2(a'-iK')H_1^2(a'-iK')+\Theta^2(b')H_1^2(b')\}\Big]\\ \beta_1=\dfrac{1}{2T}\Big[S\{\Theta^2(a-iK')H_1^2(a-iK')-\Theta^2(b)H_1^2(b)\}\\ \quad+R\{\Theta^2(a'-iK')H_1^2(a'-iK')-\Theta^2(b')H_1^2(b')\}\Big]\\ \alpha_2=\dfrac{1}{2T}\Big[S\{\Theta^2(a-iK')H_1^2(a-iK')-\Theta^2(b)H_1^2(b)\}\\ \quad-R\{\Theta^2(a'-iK')H_1^2(a'-iK')-\Theta^2(b')H_1^2(b')\}\Big]\\ \beta_2=-\dfrac{1}{2iT}\Big[S\{\Theta^2(a-iK')H_1^2(a-iK')+\Theta^2(b)H_1^2(b)\}\\ \quad+R\{\Theta^2(a'-iK')H_1^2(a'-iK')+\Theta^2(b')H_1^2(b')\}\Big]\end{cases}$$

Le formole (34), (35), (36) sono scritte per gli argomenti $a'-iK'$, $a-iK'$, b, b',
$\frac{i\sigma_1\pm i\tau}{2}$, $\frac{i\sigma_2\pm i\tau}{2}$, $\frac{i\sigma_1\pm i\sigma_2}{2}$, $\frac{i\tau\pm u}{2}$ e poichè abbiamo:

$$a-iK'=\frac{i\sigma_1+u}{2},\quad a'-iK'=\frac{i\sigma_2+u}{2},$$

$$b=\frac{i\sigma_1-u}{2},\quad b'=\frac{i\sigma_2-u}{2},$$

così i resultati del secondo caso si possono raccogliere nel seguente quadro (37):

$$\alpha_1 = \frac{S}{2iT}\left\{\Theta^2\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)+\Theta^2\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)\right\}$$

$$-\frac{R}{2iT}\left\{\Theta^2\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)+\Theta^2\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)\right\}$$

$$\alpha_2 = \frac{S}{2T}\left\{\Theta^2\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)-\Theta^2\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)\right\}$$

$$-\frac{R}{2T}\left\{\Theta^2\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)-\Theta^2\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)\right\}$$

$$\alpha_3 = \frac{\sqrt{RS}}{T}\left\{\Theta\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)H_1\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)H_1\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\Theta\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)H_1\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\sigma_1+u}{3}\right)H_1\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)\right\}$$

$$\beta_1 = \frac{S}{2T}\left\{\Theta^2\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)-\Theta^2\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)\right\}$$

$$+\frac{R}{2T}\left\{\Theta^2\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)-\Theta^2\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)\right\}$$

$$\beta_2 = -\frac{S}{2iT}\left\{\Theta^2\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)+\Theta^2\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)\right\}$$

$$-\frac{R}{2iT}\left\{\Theta^2\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)+\Theta^2\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)H_1^2\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)\right\}$$

$$\beta_3 = \frac{\sqrt{RS}}{iT}\left\{\Theta\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)H_1\left(\frac{i\sigma_1-u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)H_1\left(\frac{i\sigma_2+u}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\Theta\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)H_1\left(\frac{i\sigma_2-u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)H_1\left(\frac{i\sigma_1+u}{2}\right)\right\}.$$

$$\gamma_1 = -\frac{\sqrt{\mathrm{R\,S}}}{\mathrm{T}}\left\{\Theta\left(\frac{i\,\sigma_1+u}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_1+u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\,\sigma_2+}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_2+u}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\,\Theta\left(\frac{i\,\sigma_1-u}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_1-u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\,\sigma_2-u}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_2-u}{2}\right)\right\}$$

$$\gamma_2 = -\frac{\sqrt{\mathrm{R\,S}}}{\mathrm{T}}\left\{\Theta\left(\frac{i\,\sigma_1+u}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_1+u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\,\sigma_2+u}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_2+u}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\,\Theta\left(\frac{i\,\sigma_1-u}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_1-u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\,\sigma_2-u}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_2-u}{2}\right)\right\}$$

$$\gamma_3 = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{T}}\left\{\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_1+u}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_1-u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\,\sigma_1+u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\,\sigma_1-u}{2}\right)\right\}$$

$$+\frac{\mathrm{R}}{\mathrm{T}}\left\{\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_2+u}{2}\right)\mathrm{H}_1\left(\frac{i\,\sigma_2-u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\,\sigma_2+u}{2}\right)\Theta\left(\frac{i\,\sigma_2-u}{2}\right)\right\}.$$

$$(38)\quad\left\{\begin{aligned}
&\Phi = r_0\,\frac{\mathrm{A}-\mathrm{C}}{m\mathrm{A}} + \frac{\pi}{2\mathrm{K}} + \frac{1}{2}\left\{\frac{d\log\left(\mathrm{cn}\,i\,\tau - \mathrm{cn}\,i\,\sigma_1\right)}{d\,\sigma_1}\right.\\
&\left.+\,\frac{d\log\left(\mathrm{cn}\,i\,\tau - \mathrm{cn}\,i\,\sigma_2\right)}{d\,\sigma_2} - \frac{d\log \mathrm{H}(i\sigma_1')}{d\,\sigma_1'} - \frac{d\log \mathrm{H}(i\sigma_2')}{d\,\sigma'_2}\right\}\\
&\Psi = \frac{1}{2}\left\{-\frac{d\log(\mathrm{cn}\,i\,\tau - \mathrm{cn}\,i\sigma_1)}{d\,\sigma_1} + \frac{d\log(\mathrm{cn}\,i\,\tau - \mathrm{cn}\,i\sigma_2)}{d\,\sigma_2}\right.\\
&\left.+\,\frac{d\log \mathrm{H}(i\,\sigma'_1)}{d\sigma'_1} - \frac{d\log \mathrm{H}\,(i\,\sigma_2')}{d\sigma_2'}\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Fra le rotazioni alle quali rispondono le formole (37) e (38) dobbiamo segnalare quella della Terra attorno al suo centro di gravità. Fu infatti mostrato dal Tisserand, nei Comptes rendus tomo CI, 1885, che se si tiene conto dei termini più considerevoli nello sviluppo del potenziale delle forze agenti su di essa, si può ed esso dare la forma $\mathrm{H}_1 \cos^2\theta$ (con $\mathrm{H}_1 > 0$), e che inoltre la equazione di quarto grado F(cos θ) ha necessariamente due radici immaginarie.

§. 12. Le formole [(14) , (16) , (18) , (20)] o le [(37) , (38)] a seconda dei casi risolvono completamente il problema della rotazione del corpo P, quando si consideri il problema stesso come diretto alla determinazione analitica della posizione del corpo ad un'epoca qualunque. La rappresentazione cinematica della rotazione si ottiene mediante le considerazioni seguenti.

Poichè la componente della velocità angolare di rotazione nella direzione dell' asse di simmetria del corpo (asse ζ) è costante ed eguale ad r_0, l' estremità dell' asse di rotazione (polo istantaneo) descrive nel corpo una curva situata su di un piano normale all' asse ζ, e distante dal punto fisso O della quantità r_0. Se chiamiamo poi: U e V le due terne di assi uscenti da O e composte respettivamente da ξ , η , ζ ed x , y , z ; u_ξ , u_η , u_ζ le componenti della velocità angolare nelle direzioni ξ , η , ζ ed u_x , u_y , u_z le componenti stesse nelle direzioni x , y , z per il moto di U rispetto a V; v_x , v_y , v_z le componenti della velocità angolare secondo x , y , z ed v_ξ , v_η , v_ζ le stesse componenti nelle direzioni ξ , η , ζ per il moto di V rispetto ad U, è facile riconoscere che si avrà :

$$v_\xi = -u_\xi \; , \quad v_\eta = -u_\eta \; , \quad v_\zeta = -u_\zeta \; ;$$

$$u_x = -v_x \; , \quad u_y = -v_y \; , \quad u_z = -v_z$$

Se θ , φ , ψ sono gli angoli Euleriani che definiscono le posizioni di U rispetto a V nel primo moto , saranno respettivamente $2\pi - \theta$, $2\pi - \psi$, $2\pi - \varphi$ quelli che definiscono le posizioni di V rispetto ad U nel secondo moto, quindi avendosi :

$$u_\xi = \cos\varphi \frac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \frac{d\psi}{dt}$$

$$u_\eta = - \operatorname{sen}\varphi \frac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \frac{d\psi}{dt}$$

$$u_\zeta = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}$$

se ne dedurrà :

$$u_x = \cos\psi \frac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta \frac{d\varphi}{dt}$$

$$u_y = \operatorname{sen}\psi \frac{d\theta}{dt} - \operatorname{sen}\theta \cos\psi \frac{d\varphi}{dt}$$

$$u_z = \frac{d\psi}{dt} + \cos\theta \frac{d\varphi}{dt} .$$

L' integrale delle forze vive dà:

$$(39) \qquad u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = u_\xi^2 + u_\eta^2 + u_\zeta^2 =$$
$$= \frac{2}{A} (H_1 \cos^2\theta + H_2 \cos\theta + h) + \frac{A - C}{A} r_0^2$$

e poichè dalle (3) ricaviamo:

$$\frac{d\,\psi}{d\,t} = -\frac{C\,r_0 \cos\theta - g}{A\,\mathrm{sen}^2\theta},$$

$$\frac{d\,\varphi}{d\,t} = r_0\,\frac{A - C}{A} + \frac{C\,r_0 - g\cos\theta}{A\,\mathrm{sen}^2\theta}$$

e quindi:

$$\text{(40)} \qquad \cos\theta = \frac{A}{r_0\,(A - C)}\,u_z - \frac{g}{r_0\,(A - C)},$$

così se dalle (39) e (40) eliminiamo $\cos\theta$ otterremo:

$$0 = u^2_x + u^2_y + \left(1 - \frac{2\,AH_1}{r_0^2(A - C)^2}\right)u_z^2 - 2\left(\frac{r_0 H_2(A - C) - 2H_1 g}{r_0^2(A - C)^2}\right)u_z$$
$$- \frac{1}{A}\left(2\,h + (A - C)\,r_0^2 + 2\,\frac{H_1\,g^2 - r_0\,g\,H_2(A - C)}{r_0^2\,(A - C)^2}\right).$$

Ma u^2_x, u_y, u_z sono le coordinate rispetto agli assi fissi del polo istantaneo di rotazione; dunque esso si muove su di una superficie di secondo grado di rivoluzione attorno a z e col centro a distanza:

$$\frac{r^2_0\,H_2\,(A - C) - 2\,H_1\,g}{r^2_0\,(A - C)^2 - 2\,A\,H_1}$$

dal punto fisso. La superficie è:

un elissoide di rivoluzione se è $r_0 > \frac{\sqrt{2 A H_1}}{A-C}$

un paraboloide » » $r_0 = \frac{\sqrt{2 A H_1}}{A-C}$

un iperboloide ad 1 falda » $r_0 < \frac{\sqrt{2 A H_1}}{A-C}$

Abbiamo dunque il Teorema:

« La rotazione di un corpo simmetrico rispetto ad un « asse, attorno ad un punto fisso del suo asse di sim- « metria per l' azione di forze il cui potenziale è « $H_1 \cos^2 \theta + H_2 \cos \theta$ essendo le H costanti qualunque e « θ l' angolo che l' asse del corpo fa con una retta fissa » passante per il punto fisso, si può rappresentare me- « diante il rotolamento di un cono il cui asse coincide « coll' asse del corpo, su di una superficie di secondo « grado di rivoluzione attorno alla retta fissa che a se- « conda dei casi è un elissoide, un paraboloide od un « iperboloide ad una falda ».

Se fosse $H_1 = O$ la superficie si ridurrebbe ad una sfera, come è noto secondo un Teorema del Darboux.

La curva descritta dal polo istantaneo nel corpo, riferita ad un sistema di coordinate polari ρ e ϑ col centro al punto d' incontro coll' asse ζ del piano su cui giace, ha per equazioni:

$$(41) \quad \begin{cases} \rho^2 = \frac{1}{A}(2 H_1 \cos^2 \theta + 2 H_2 \cos \theta + 2 h - C r_0^2) \\ \vartheta = - \varphi + \text{arc tang sen } \theta \frac{d \psi}{d \theta} \end{cases} .$$

La curva è tutta compresa fra due circonferenze concentriche i cui raggi dipendono dai limiti entro cui oscilla $\cos\theta$. Si riconosce facilmente che l'angolo polare viene espresso da un integrale ellittico di 3.ª specie, e precisamente:

$$\vartheta - \vartheta_0 = - r_0 (t - t_0)$$
$$+ \int \frac{C r_0 (C r_0^2 - 2h) - H_2 g - (2 H_1 g + r_0 C H_2)\omega}{2 H_1 \omega^2 + 2 H_2 \omega + 2h - C \mu_0^2} \cdot \frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}$$

Per $H_1 = 0$ questa curva si riduce ad una erpolodia.

Equazioni del tutto simili alle (41) si hanno per la projezione sul piano xy della curva descritta dal polo istantaneo nello spazio, riferendola alle coordinate polari ρ' e ϑ' col polo nel punto fisso:

$$(42)\quad \left\{ \begin{array}{l} \rho'^2 = \frac{1}{A^2} \Big\{ (2 A H_1 - r_0^2 (A-C)^2) \cos^2\theta \\ + (2 A H_2 - 2 g r_0 (A-C)) \cos\theta + (2 A h - g^2 + A r_0^2 (A-C)) \Big\} \\ \vartheta' = \psi - \operatorname{arc\,tang} \operatorname{sen}\theta \frac{d\varphi}{d\theta} . \end{array} \right.$$

§ 13° La forma del potenziale delle forze agenti sul corpo è stata supposta essere:

$$V = H_1 \cos^2\theta + H_2 \cos\theta .$$

Se immaginiame che in essa H_1 tenda verso zero, il potenziale tende evidentemente a divenire quello di un corpo pesante; ma considerando che alla funzioue $F(\omega)$ la quale comparisce sotto radicale negli integrali (3), si può dare la forma:

$$F(\omega) = -2\,AH_1\,a_4\,(a_1-\omega)\,(a_2-\omega)(a_3-\omega)\left(1-\frac{\omega}{a_4}\right)$$

noi vediamo che affinchè convergendo H_1 verso zero, essa rimanga finita e si riduca ad una funzione di 3.° grado quale è quella che comparisce sotto radicale negli integrali del moto di un corpo pesante di rivoluzione, bisogna che a_4 vada verso l'∞ di guisa che il prodotto $H_1\,a_4$ converga verso una quantità finita. Quindi la rotazione di un corpo pesante di rivoluzione (e di un corpo soggetto ad una azione eguale e contraria a quella della gravità) si presenta come caso limite di quella da noi studiata; e le formole ad essa relative si deducono dalle [(14), (16), (18), (20)] facendo $a_4 = \infty$.

In particolare le formole dei coseni che Jacobi e Lottner dettero per il problema di Lagrange derivano da quelle ora citate facendo $i\tau = iK'$; giacchè per essere

$$\frac{a_4-a_2}{a_1-a_2} = \mathrm{sn}^2\, i\,\tau$$

si vede che per $a_4 = \infty$ sarà $i\tau = iK'$. Così la funzione che rappresenta $\cos\theta$ le cui caratteristiche abbiamo trovato esser quelle di funzione doppiamente periodica coi periodi $2K$ e $2iK'$ coi due poli del primo ordine $u = i\tau, u = 2iK' - i\tau$ ed i relativi residui conseguentemente eguali e di segno contrario, ha per $i\tau = i\mathrm{K}'$ gli stessi periodi precedenti coll' unico polo nel rettangolo dei periodi $u = i\mathrm{K}'$ che allora è di secondo ordine e col residuo zero; le quali caratteristiche coincidono con quelle della quantità $\cos\theta$ nel problema di Lagrange ec.

Ora poichè abbiamo:

$$\mathrm{H}(u+i\,\mathrm{K}')\,\mathrm{H}(u-i\,\mathrm{K}') = e^{\frac{\pi\mathrm{K}'}{2\mathrm{K}}}\,\Theta^2(u)$$

$$\Theta(i\sigma_2+i\mathrm{K}')\,\Theta(i\sigma_2-i\,\mathrm{K}') = e^{\frac{\pi\mathrm{K}'}{2\mathrm{K}}}\,\mathrm{H}^2(i\,\sigma_2)$$

$$\Theta_1(i\sigma_1+i\,\mathrm{K}')\,\Theta_1(i\sigma_1-i\mathrm{K}') = e^{\frac{\pi\mathrm{K}'}{2\mathrm{K}}}\,\mathrm{H}_1^2(i\,\sigma_1)$$

così le [(14), (18), (20)] per $i\,\tau = i\,\mathrm{K}'$ si convertono nelle seguenti:

$$(43)\quad\left\{\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\mathrm{H}_1^2(i\sigma_1)[\Theta^2(u+i\sigma_2)+\Theta^2(u-i\sigma_2)]-\mathrm{H}^2(i\sigma_2)[\Theta_1^2(u+i\sigma_1)+\Theta_1^2(u-i\sigma_1)]}{2\,\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\,\sigma_1)\,\mathrm{H}_1(i\,\sigma_2-i\,\sigma_1)\,\Theta^2(u)}\\
\beta_1 &= \frac{\mathrm{H}_1^2(i\sigma_1)[\Theta^2(u+i\sigma_2)-\Theta^2(u-i\sigma_2)]+\mathrm{H}^2(i\sigma_2)[\Theta_1^2(u+i\sigma_1)-\Theta_1^2(u-i\sigma_1)]}{2\,i\,\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\,\sigma_1)\,\mathrm{H}_1(i\,\sigma_2-i\,\sigma_1)\,\Theta^2(u)}\\
\gamma_1 &= \frac{\mathrm{H}_1(i\sigma_1)\,\mathrm{H}(i\sigma_2)\,[\,\Theta_1(u+i\sigma_1)\Theta(u+i\sigma_2)+\Theta_1(u-i\sigma\,)\Theta(u-i\,\sigma_2)\,]}{\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\sigma_1\;\mathrm{H}_1(i\sigma_2-i\sigma_2)\,\Theta^2(u)}\\
\alpha_2 &= -\frac{\mathrm{H}_1^2(i\sigma_1)[\Theta^2(u+i\sigma_2)-\Theta^2(u-i\sigma_2)]-\mathrm{H}^2(i\sigma_2)[\Theta_1^2(u+i\sigma_1)-\Theta_1^2(u-i\sigma_1)]}{2i\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,\mathrm{H}_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,\Theta^2(u)}\\
\beta_2 &= \frac{\mathrm{H}_1^2(i\sigma_1)[\Theta^2(u+i\sigma_2)+\Theta^2(u-i\sigma_2)]+\mathrm{H}^2(i\sigma_2)[\Theta_1^2(u+i\sigma_1)+\Theta_1^2(u-i\sigma_1)]}{2\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,\mathrm{H}_1(i\sigma_3-i\sigma_1)\Theta^2(u)}\\
\gamma_2 &= -\frac{\mathrm{H}_1(i\sigma_1)\,\mathrm{H}(i\sigma_2)\,[\,\Theta_1(u+i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)-\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta(u-i\sigma_2)]}{i\,\mathrm{H}_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\,\mathrm{H}_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,\Theta^2(u)}
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha_3 &= \frac{H_1(i\sigma_1)\, H(i\sigma_2)\,[\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)+\Theta_1(u+i\sigma_1)\,\Theta(u-i\sigma_2)]}{H_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\, H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,\Theta^2(u)}\\
\beta_3 &= \frac{H_1(i\sigma_1)H(i\sigma_2)\,[\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)-\Theta_1(u+i\sigma_1)\,\Theta(u-i\sigma_2)]}{i\, H_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\, H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\Theta^2(u)}\\
\gamma_3 &= \frac{H^2(i\sigma_2)\,\Theta_1(u-i\sigma_1)\,\Theta_1(u+i\sigma_1)+H_1^2(i\sigma_1)\,\Theta(u+i\sigma_2)\Theta(u-i\sigma_2)}{H_1(i\sigma_2+i\sigma_1)\, H_1(i\sigma_2-i\sigma_1)\,\Theta^2(u)} \;(^*).
\end{aligned}\right.$$

Avendosi inoltre per $i\tau = i\mathrm{K}'$:

$$\left[\frac{d}{d\tau}\pi(i\tau\,,\, i\sigma_1+\mathrm{K})\right]_{i\tau=i\mathrm{K}'} = \frac{d\log\dfrac{H(i\sigma_1+\mathrm{K})}{\Theta(i\sigma_1+\mathrm{K})}}{d\sigma_1} =$$

(*) Riguardo alle formole (14) (18) (20) aggiungiamo che quando si faccia $i\tau = \frac{i\mathrm{K}'}{2}$ e contemporaneamente $i\sigma_1 + i\sigma_2 = i\mathrm{K}'$ esse rispondono alla rotazione di un corpo soggetto a forze che si fanno equilibrio.

Infatti la funzione che comparisce sotto gli integrali del moto essendo in questo caso di secondo grado in $\cos^2\theta$, le quattro radici (tutte reali e comprese tra -1 e $+1$) sono due a due eguali e di segno contrario, e quindi riducendoli alla forma normale come si è fatto al §. 2. non dobbiamo che supporre: $a_1 = -a_4$ ed $a_2 = -a_3$, ciò che porta:

$$k^2 = \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}\right)^2 \quad , \quad m = \tfrac{1}{2}\,(a_1 + a_2)\sqrt{-\mathrm{L}}$$

$$\mathrm{sn}^2\, i\tau = -\frac{1}{k}\,,$$

$$\mathrm{sn}^2\, i\sigma_1 = \frac{(a_1+a_2)\,(1+a_1)}{(a_2-a_1)\,(1-a_1)}\,,$$

$$\mathrm{sn}^2\, i\,a_2 = \frac{(a_1+a_2)\,(1-a_1)}{(a_2-a_1)\,(1+a_1)}$$

ed intanto si riscontra essere $i\tau = \frac{i\mathrm{K}'}{2}$ poi ricavando: $\mathrm{sn}^2 i\sigma_2 = \frac{1}{k^2\,\mathrm{sn}^2 i\sigma_1}$ ed osservando che $i\sigma_1$ e $i\sigma_2$ sone inferiori a $i\mathrm{K}'$, deduciamo ancora; $i\sigma_1 + i\sigma_2 = i\mathrm{K}'$

$$= -\frac{d \log H_1(i\sigma_1)}{d\sigma_1} + \frac{d \log \Theta_1(i\sigma_1)}{d\sigma_1};$$

$$\left[\frac{d}{d\tau}\pi(i\tau, i\sigma_2)\right]_{i\tau=iK'} = -\frac{d\log\frac{H(i\sigma_2)}{\Theta(i\sigma_2)}}{d\sigma_2} =$$

$$= -\frac{d\log H(i\sigma_2)}{d\sigma_2} + \frac{d\log\Theta(i\sigma_2)}{d\sigma_2};$$

$$\lim_{a_4=\infty} m = \tfrac{1}{2}\lim_{a_4=\infty}\sqrt{2AH_1a_4(a_3-a_1)\left(1-\frac{a_3}{a_4}\right)} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2AG(a_3-a_1)} = n$$

(G è la quantità finita verso cui si suppose convergere H_1a_4), le (16) si convertiranno quindi in questa ipotesi nelle seguenti:

$$(44)\left\{\begin{aligned}\Phi &= \frac{d\log H_1(i\sigma_1)}{d\sigma_1} + \frac{d\log H(i\sigma_2)}{d\sigma_2} + \frac{A-C}{nA}r_0\\ \Psi &= -\frac{d\log H_1(i\sigma_1)}{d\sigma_1} + \frac{d\log H(i\sigma_2)}{d\sigma_2}\end{aligned}\right.$$

Le formole (43) e (44) coincidono perfettamente con quelle di Iacobi e di Lottner.

Fra i resultati dunque cui si perviene per la rotazione propostaci del corpo P, quando la equazione $F(\cos\theta)=0$ ha tutte le sue radici reali, e quelli cui si perviene per la rotazione di un corpo pesante di rivoluzione G attorno ad un punto del suo asse (problema di Lagrange) non vi è altra differenza che quella del valore della costante $i\tau$. Ma siccome gli angoli φ' e ψ' della rotazione oscillatoria degli assi principali di P non dipendono da $i\tau$ formole (17), così, supponendo che non cambino ne u nè σ_1 e σ_2, essi e quelli della rotazione oscillatoria degli assi principali di G sono perfettamente uguali. Le due rotazioni non differiscono che per il valore dei respettivi angoli θ, dei quali quello corrispondente a P è sempre minore di quello di G come si riconosce facilmente dall' essere la quantità (14) decrescente per τ crescente. E se immaginiamo che le due rotazioni si eseguiscano contemporaneamente noi vedremo gli assi di simmetria dei due corpi rimanere sempre in uno stesso piano normale alla comune linea dei nodi e passante per l'asse fisso z; talchè dando ad ogni istante al sistema ξ', η', ζ' degli assi di G una conveniente rotazione attorno a questa linea essi coinciderebbero col sistema ξ, η, ζ degli assi di P.

« La rotazione del corpo P, nel caso che quì consideriamo, non è altro che quella di un corpo pesante di rivoluzione, accompagnata da una nutazione. »

CAPITOLO SECONDO

MOTO DI UN CORPO SOLIDO IN UN FLUIDO OMOGENEO INCOMPRESSIBILE.

§. 1. Il movimento di un corpo rigido di qualsivoglia forma e distribuzione di massa in un fluido incompressibile omogeneo limitato da una superficie chiusa fissa giacente all'infinito conduce alla integrazione di sei equazioni differenziali simultanee, costruite da Kirchhoff, ponendo che il fluido sia senza attrito, che non possieda moto vorticoso, che sulle sue particelle non agiscano forze, che la velocità varii in esso con continuità e non ne esista altra che quella dovuta al moto del corpo: condizioni che permettono di applicare il principio di Hamilton.

La forza viva del fluido resulta allora, analogamente a quella del corpo, una funzione omogenea di secondo grado delle componenti u, v, w secondo ξ, η, ζ della velocità dell'origine di un sistema di assi ortogonali ξ, η, ζ fissi nel corpo, e delle componenti p, q, r delle velocità angolari di rotazione intorno ai medesimi; talchè la forza viva totale T del corpo e del fluido è anch'essa una funzione omogenea di secondo grado delle stesse quantità u, v, w; p, q, r la quale contiene ventuno coefficienti costanti dipendenti dalla forma e densità del corpo e dalla densità del fluido.

Il Kirchhoff dette anche gli integrali del moto del corpo nella ipotesi che su di esso non agiscano forze e che la sua massa sia simmetricamente distribuita rispetto ad un asse; preso per asse ζ l' asse di simmetria la T prende la forma:

$$(1)\quad 2\,\mathrm{T} = a_{11}(u^2+v^2) + a_{33}\,w^2 + a_{44}(p^2+q^2) + a_{66}\,r^2$$

e le integrazioni si eseguiscono colle funzioni ellittiche. In seguito Clebsch segnalò un altro caso nel quale le equazioni sono integrabili per funzioni ellittiche, quello in cui scegliendo gli assi ξ, η, ζ convenientemente nell'interno del corpo, la T assume la forma:

$$(2)\quad \begin{aligned} 2\,\mathrm{T} = {} & a_{11}\,(u^2+v^2) + a_{33}\,w^2 + a_{44}\,(p^2+q^2) \\ & + 2\,a_{14}\,(u\,p+v\,q) + 2\,a_{36}\,w\,r + a_{66}\,r^2 \end{aligned}$$

ed il corpo non è soggetto a forze. Per $a_{14}=a_{36}=0$ si ritorna al caso di Kirchhoff.

In questo capitolo risolveremo il problema del moto di un corpo in un fluido che soddisfi alle condizioni enunciate in principio, supponendo che T abbia la forma (2) e che sul corpo agiscano forze il cui potenziale V abbia la espressione $\mathrm{H}_1 \cos^2\theta + \mathrm{H}_2 \cos\theta$ essendo le H costanti qualunque e θ l'angolo che ζ fa con una direzione fissa; se non che invece di partire dalle equazioni di Kirchhoff o da quelle che Clebsch ha loro sostituito cambiando le incognite con delle relazioni lineari, noi partiremo dalle equazioni canoniche e ne dedurremo gli integrali col noto metodo di Jacobi.

I sei parametri indipendenti mediante cui definiremo la posizione del corpo saranno le coordinate α, β, γ dell'origine O del sistema ξ, η, ζ rispetto ad una terna fissa x, y, z, e gli angoli euleriani θ, φ, ψ delle due terne.

§. 2. Le quantità u, v, w ; p, q, r sono legate ai parametri α, β, γ ; θ, φ, ψ dalle relazioni:

$$(3) \begin{cases} p = \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \dfrac{d\psi}{dt} \\ q = - \operatorname{sen}\varphi \dfrac{d\theta}{dt} + \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \dfrac{d\psi}{dt}, \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt} \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} u = \cos\varphi\left(\cos\psi\dfrac{d\alpha}{dt} + \operatorname{sen}\psi\dfrac{d\beta}{dt}\right) - \operatorname{sen}\varphi\cos\theta\left(\operatorname{sen}\psi\dfrac{d\alpha}{dt} - \cos\psi\dfrac{d\beta}{dt}\right) \\ \qquad + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \dfrac{d\gamma}{dt} \\ v = -\operatorname{sen}\varphi\left(\cos\psi\dfrac{d\alpha}{dt} + \operatorname{sen}\psi\dfrac{d\beta}{dt}\right) - \cos\varphi\cos\theta\left(\operatorname{sen}\psi\dfrac{d\alpha}{dt} - \cos\psi\dfrac{d\beta}{dt}\right) \\ \qquad + \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \dfrac{d\gamma}{dt} \\ w = \operatorname{sen}\theta\left(\operatorname{sen}\psi\dfrac{d\alpha}{dt} - \cos\psi\dfrac{d\beta}{dt}\right) + \cos\theta\dfrac{d\gamma}{dt}. \end{cases}$$

Si ha inoltre:

$$(5) \begin{cases} x = \alpha + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y = \beta + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z = \gamma + \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta. \end{cases}$$

Se per dare alla forza viva la forma (T) che le conviene nella funzione caratteristica H delle equazioni canoniche poniamo:

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)} = \frac{\partial T}{\partial u}\alpha_1 + \frac{\partial T}{\partial v}\alpha_2 + \frac{\partial T}{\partial w}\alpha_3 ,\\
p_2 &= \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\beta}{dt}\right)} = \frac{\partial T}{\partial u}\beta_1 + \frac{\partial T}{\partial v}\beta_2 + \frac{\partial T}{\partial w}\beta_3 ,\\
p_3 &= \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)} = \frac{\partial T}{\partial u}\gamma_1 + \frac{\partial T}{\partial v}\gamma_2 + \frac{\partial T}{\partial w}\gamma_3 ,
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(7)\quad p_4 = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\theta}{dt}\right)} ,\quad p_5 = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)} ,\quad p_6 = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)}
$$

resulta:

$$
\begin{aligned}
\lambda\,\mu \frac{d\alpha}{dt} = {} & [a_{11}\,\nu \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}^2\psi + a_{44}\,\lambda]\,p_1 - a_{11}\,\nu \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\psi \cos\psi\, p_2 \\
& + a_{11}\,\nu \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{sen}\psi\, p_3 + [a_{24}\lambda \cos\theta \operatorname{sen}\psi - a_{14}\lambda \cos\psi]\,p_4 \\
& - [\lambda \operatorname{cotg}\theta\,(a_{24}\cos\psi + v_{14}\cos\theta \operatorname{sen}\psi) + a_{36}\,\mu \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi]\,p_5 \\
& + [a_{24}\,\lambda \operatorname{cosec}\theta \cos\psi + a_{14}\,\lambda \operatorname{cotg}\theta \operatorname{sen}\psi]\,p_6 ,
\end{aligned}
$$

$$\lambda\,\mu\frac{d\beta}{d\,t}=-a_{11}\,\nu\,\text{sen}^2\,\theta\,\text{sen}\,\psi\,\cos\,\psi\,p_1+[a_{11}\,\nu\,\text{sen}^2\,\theta\,\cos^2\psi+a_{44}\,\lambda]p_2$$
$$-a_{11}\,\nu\,\text{sen}\,\theta\,\cos\,\theta\,\cos\,\psi\,p_3-[a_{14}\,\lambda\,\text{sen}\,\psi+a_{24}\,\lambda\cos\theta\cos\psi]\,p_4$$
$$+[\lambda\,\text{cotg}\,\theta\,(a_{14}\cos\,\theta\,\cos\,\psi-a_{24}\,\text{sen}\,\psi)+a_{36}\,\mu\,\text{sen}\,\theta\cos\psi]\,p_5$$
$$+[\,a_{24}\,\lambda\,\text{cosec}\,\theta\,\text{sen}\,\psi-a_{14}\,\lambda\,\text{cotg}\,\theta\,\cos\,\psi\,]\,p_6\,,$$

$$\lambda\,\mu\frac{d\,\gamma}{d\,t}=a_{11}\,\nu\,\text{sen}\,\theta\,\cos\,\theta\,\text{sen}\,\psi\,p_1-a_{11}\,\nu\,\text{sen}\,\theta\,\cos\,\theta\,\cos\,\psi\,p_2$$
$$+[\,a_{44}\,\lambda\,\text{sen}^2\,\theta+a_{66}\,\mu\,\cos^2\,\theta\,]\,p_3-a_{24}\lambda\,\text{sen}\,\theta\,p_4$$
$$+[\,a_{14}\,\lambda-a_{36}\,\mu\,]\cos\,\theta\,p_5-a_{14}\,\lambda\,p_6\,;$$

$$\lambda\,\mu\frac{d\,\theta}{d\,t}=[a_{24}\lambda\cos\theta\,\text{sen}\psi-a_{14}\lambda\cos\psi]p_1-[a_{14}\lambda\,\text{sen}\psi+a_{24}\lambda\cos\theta\cos\psi]p_2$$
$$-a_{24}\,\text{sen}\,\theta\,p_3+a_{11}\,\lambda\,p_4\,,$$

$$\lambda\,\mu\,\frac{d\,\varphi}{d\,t}=-[\lambda\,\text{cotg}\,\theta(a_{24}\cos a_{14}\psi+\cos\,\theta\,\text{sen}\,\psi)+a_{36}\,\mu\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi]\,p_1$$
$$+[\lambda\,\text{cotg}\theta(a_{14}\cos\,\theta\,\cos\,\psi-a_{24}\,\text{sen}\,\psi)+a_{36}\,\mu\,\text{sen}\,\theta\,\cos\psi]\,p_2$$
$$+[\,a_{14}\,\lambda-a_{36}\,\mu\,]\cos\,\theta\,p_3+[\,a_{33}\,\mu+a_{11}\,\lambda\,\text{cotg}^2\,\theta\,]\,p_5$$
$$-a_{11}\,\lambda\,\text{cotg}\,\theta\,\text{cosec}\,\theta\,p_6\,,$$

$$\lambda\,\mu\frac{d\,\psi}{d\,t}=\lambda\,\text{cosec}\theta[(a_{24}\cos\psi+a_{14}\cos\theta\,\text{sen}\psi)p_1+(a_{24}\text{sen}\,\psi-a_{14}\cos\theta\cos\psi)p_2]$$
$$-a_{14}\,\lambda\,p_3-a_{11}\,\lambda\,\text{cotg}\,\theta\,\text{cosec}\,\theta\,p_5+a_{11}\,\lambda\,\text{cosec}^2\,\theta\,p_6\,;$$

essendo :

$$\lambda=a_{33}\,a_{66}-a^2_{36}\;,\;\mu=a_{11}\,a_{44}-a^2_{14}\;,\;a_{11}\,\nu=a_{66}\,\mu-a_{44}\,\lambda\,.$$

Conseguentemente avremo:

$$(\mathrm{T})=\frac{1}{2\lambda\mu}\Big[a_{44}\lambda(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+(a_{66}\mu-a_{44}\lambda)\cos^2\theta\, p_3^2+a_{11}\lambda p_4^2$$

$$+a_{33}\,\mu\, p_5^2+(a_{66}\,\mu-a_{44}\,\lambda)\operatorname{sen}^2\theta\,(p_1\operatorname{sen}\psi-p_2\cos\psi)^2$$

$$+\frac{a_{11}\lambda}{\operatorname{sen}^2\theta}(p_6-p_5\cos\theta)^2-2a_{14}\lambda p_5(p_6-p_5\cos\theta)-2a_{36}\mu\cos\theta\, p_3 p_5$$

$$+2\Big((a_{66}\mu-a_{44}\lambda)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, p_3-a_{36}\mu\operatorname{sen}\theta\, p_5+a_{14}\lambda\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}(p_6-p_5\cos\theta)\Big)(p_1\operatorname{sen}\psi-p_2\cos\psi)$$

$$-\,2\,a_{14}\,\lambda\,p_4\,(\,p_1\cos\psi+p_2\operatorname{sen}\psi\,)\Big].$$

Sostituendo quindi nella (T) a p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6 respettivamente $\frac{\partial W}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial W}{\partial\beta}$, $\frac{\partial W}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial W}{\partial\theta}$, $\frac{\partial W}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial W}{\partial\psi}$ e fatto poi, con h costante:

$$\mathrm{H}=(\mathrm{T})-\mathrm{H}_1\cos^2\theta-\mathrm{H}_2\cos\theta=h$$

la equazione a derivate parziali che così si ottiene, un integrale completo della quale, $W=W(\alpha,\beta,\gamma,\theta,\varphi,\psi,h,a,b,e,f,g)$ contenente oltre h le cinque costanti arbitrarie a,b,e,f,g, dà tutti gli integrali del moto, non viene a contenere α, β, γ ma soltanto le derivate rispetto ad esse della funzione W; ne segue che ad essa si soddisfa prendendo:

$$W=a\,\alpha+b\,\beta+c\,\gamma+W_1$$

con W_1 in lipendente da α, β e γ. Per conseguenza p_1, p_2, p_3 sono sempre costanti ed eguali respettivamente ad a, b, c; e siccome, considerando $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$ come le componenti secondo ξ, η, ζ di una velocità, noi riconosciamo dalle (6) che p_1, p_2, p_3 resultano eguali alle componenti di questa stessa velocità rispetto ad x, y, z e basta quindi dare all' asse fisso z la direzione costante di essa per avere $p_1=0$, $p_2=0$, così la equazione a derivate parziali già accennata verrà:

$$
(8)\quad a_{11}\lambda\left(\frac{\partial W_1}{\partial \theta}\right)^2 + a_{33}\mu\left(\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{a_{11}\lambda}{\operatorname{sen}^2\theta}\left\{\frac{\partial W_1}{\partial \psi} - \cos\theta\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right\}^2
$$
$$
-2a_{14}\lambda c\left\{\frac{\partial W_1}{\partial \psi} - \cos\theta\frac{\partial W_1}{\partial \varphi}\right\} - 2a_{36}c\mu\cos\theta\frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + a_{44}c^2\lambda\operatorname{sen}^2\theta
$$
$$
+ a_{66}c^2\mu\cos^2\theta - 2\lambda\mu\left\{H_1\cos^2\theta + H_2\cos\theta + h\right\} = 0.
$$

Alla equazione precedente si soddisfa evidentemente prendendo:

$$
W_1 = f\varphi + g\psi + W_2
$$

con W_2 indipendente da φ e ψ; quindi avremo:

$$
W = c\gamma + f\varphi + g\psi + W_2
$$

e

$$
W_2 = \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta}\left(\begin{array}{c} \frac{1}{a_{11}\lambda}\Big\{2\lambda\mu[H_1\cos^2\theta + H_2\cos\theta + h] - c^2a_{66}\mu\cos^2\theta \\ - c\,a_{44}\lambda\operatorname{sen}^2\theta - a_{33}\mu f^2 + 2a_{14}c\lambda g \\ - 2cf\cos\theta(a_{14}\lambda - a_{36}\mu)\Big\}(1-\cos^2\theta) - \Big\{g - f\cos\theta\Big\}^2 \end{array}\right)^{\frac{1}{2}}
$$

Poniamo adesso $\cos\theta = \omega$ ed indichiamo con $F(\omega)$ la funzione di $\cos\theta$ che è sotto il radicale, introduciamo poi le nuove costanti γ_0, φ_0, ψ_0 e t_0, α_0, β_0 ed avremo per integrali del moto:

$$
(9)\quad \begin{cases}
\gamma - \gamma_0 = \dfrac{1}{a_{11}\lambda}\displaystyle\int \left(a_{14}\lambda g - f(a_{14}\lambda - a_{36}\mu)\omega - c(a_{66}\mu - a_{44}\lambda)\omega^2 - c a_{44}\lambda\right)\frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}} \\[2ex]
\varphi - \varphi_0 = \displaystyle\int \frac{(g - f\omega)\omega\, d\omega}{(1-\omega^2)\sqrt{F(\omega)}} - \frac{1}{a_{11}\lambda}\int \left(a_{33}\mu f + c(a_{14}\lambda - a_{36}\mu)\omega\right)\frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}} \\[2ex]
\psi - \psi_0 = \dfrac{a_{14}\, c}{a_{11}}\displaystyle\int \frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}} - \int \frac{(g - f\omega)\, d\omega}{(1-\omega^2)\sqrt{F(\omega)}} \\[2ex]
t - t_0 = -\dfrac{\mu}{a_{11}}\displaystyle\int \frac{d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}
\end{cases}
$$

$$
(10)\quad \begin{cases}
\alpha - \alpha_0 = \dfrac{1}{c\sqrt{1-\omega^2}}\left\{\sqrt{F(\omega)}\ \mathrm{sen}\,\psi - \cos\psi\,(f - g\,\omega)\right\} \\[1ex]
\qquad + \dfrac{\mu}{a_{11}c}\displaystyle\int \sqrt{1-\omega^2}\,(2\,H_1\,\omega + H_2)\,\frac{\mathrm{sen}\,\psi\, d\omega}{\sqrt{F(\omega)}} \\[2ex]
\beta - \beta_0 = \dfrac{1}{c\sqrt{1-\omega^2}}\left\{\sqrt{F(\omega)}\cos\psi + \mathrm{sen}\,\psi\,(f - g\,\omega)\right\} \\[1ex]
\qquad + \dfrac{\mu}{a_{11}c}\displaystyle\int \sqrt{1-\omega^2}\,(2\,H_1\,\omega + H_2)\,\frac{\cos\psi\, d\omega}{\sqrt{F(\omega)}}\ .
\end{cases}
$$

Le ultime tre delle equazioni (9) dànno il moto del corpo attorno al centro O degli assi ξ, η, ζ: si riconosce facilmente che sostituendo a φ e ψ gli angoli φ_1 e ψ_1 ad essi legati dalle relazioni:

$$\varphi_1 = \varphi - \frac{c\,(a_{36}\,\mu - a_{11}\,\lambda)}{a_{11}\,\lambda} \int \frac{\omega\, d\,\omega}{\sqrt{\mathrm{F}(\omega)}}$$

$$\psi_1 = \psi + \frac{a_{14}\,c}{\mu}\,(t - t_0)$$

(il che corrisponde al sostituire alle terne x, y, z ed ξ, η, ζ respettivamente $(x)\,(y)\,z$ ed $(\xi)\,(\eta)\,\zeta$ essendo (x) ed (y) due rette ortogonali ruotanti nel piano $x\,y$ colla velocità angolare costante $\frac{a_{14}c}{\mu}$ ed (ξ) e (η) due rette ortogonali ruotanti nel piano $\xi\,\eta$ colla velocità angolare $\frac{c(a_{36}\,\mu - a_{14}\,\lambda)}{\lambda\,\mu}\,\omega$) avremo:

$$(11)\quad \begin{cases} t - t_0 = -\dfrac{\mu}{a_{11}} \displaystyle\int \frac{d\omega}{\sqrt{\mathrm{F}(\omega)}} \\[2ex] \varphi_1 - \varphi_0 = \dfrac{-(a_{11}\,\lambda - a_{33}\,\mu)\,f}{\mu\,\lambda}(t - t_0) + \displaystyle\int \frac{(g\,\omega - f)\,d\,\omega}{(1 - \omega^2)\sqrt{\mathrm{F}(\omega)}} \\[2ex] \psi_1 \quad \psi_0 = \displaystyle\int \frac{(f\,\omega - g)\,d\,\omega}{(1 - \omega^2)\sqrt{\mathrm{F}(\omega)}}. \end{cases}$$

Poniamo:

$$
(12)\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\mu}{a_{11}}=\mathrm{A}\ ,\quad \dfrac{\lambda}{a_{33}}=\mathrm{C}\ ,\quad -g=\overline{g}\ ,\quad f=\mathrm{C}\,r_0 \\[2ex]
2\,h+\dfrac{c}{\mu}\,(\,2\,a_{14}\,g-a_{44}\,c\,)=2\,\overline{h}\quad , \\[2ex]
\mathrm{H}_1+\dfrac{c^2}{2\,\lambda\,\mu}\,(\,a_{44}\,\lambda-a_{66}\,\mu\,)=\overline{\mathrm{H}}_1\quad , \\[2ex]
\mathrm{H}_2+\dfrac{c\,f}{\lambda\,\mu}(a_{36}\,\mu-a_{14}\,\lambda\,)=\overline{\mathrm{H}}_2\quad ,
\end{array}\right.
$$

avremo in luogo delle (11) le altre

$$
t-t_0=-\int\frac{\mathrm{A}\,d\,\omega}{\sqrt{\mathrm{F}(\omega)}}
$$

$$
\varphi_1-\varphi_0=r_0\left(1-\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}\right)(t-t_0)-\int\frac{(\mathrm{C}\,r_0+g\,\omega)\,d\,\omega}{(1-\omega^2)\,\sqrt{\mathrm{F}(\omega)}}
$$

$$
\psi_1-\psi_0=\int\frac{(\mathrm{C}\,r_0\,\omega+g)\,d\,\omega}{(1-\omega^2)\,\sqrt{\mathrm{F}(\omega)}}
$$

con :

$$
\mathrm{F}\,(\omega)=\{\,2\,\mathrm{A}\,(\mathrm{H}_1\,\omega^2+\mathrm{H}_2\,\omega+h)-\mathrm{A}\,\mathrm{C}\,r_0^2\,\}\,(1-\omega^2)
$$
$$
-\,(\,\mathrm{C}\,r_0\,\omega+g\,)^2\,.
$$

Ma queste coincidono colle (3) del capitolo primo, dunque si conclude che, astrazione fatta dalle rotazioni intorno a z ed intorno a ζ, la rotazione, attorno all'origine O degli assi ξ , η , ζ di un corpo soggetto a forze di potenziale $H_1 \cos^2 \theta + H_2 \cos \theta$ immerso in un fluido è identica a quella che prende nel vuoto un corpo di rivoluzione fissato per un punto del suo asse, soggetto a forze di potenziale $\overline{H_1} \cos^2 \theta + \overline{H_2} \cos \theta$ per il quale i momenti di inerzia A e C, le costanti g, r_0, h ed i coefficienti $\overline{H_1}$, $\overline{H_2}$ del potenziale si compongono mediante i coefficienti a della forza viva totale T, i coefficienti H_1 ed H_2, e le costanti e, f, g, h nel modo dato dalle for mole (12).

Le rotazioni che abbiamo detto sopra intorno a z e ζ spariscono quando, il corpo essendo di rivoluzione, $a_{11} = a_{36} = 0$.

Dott. BERNARDO PALADINI.