ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ENRICO BOGGIO-LERA

Sulla cinematica dei mezzi continui

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 4 (1887), p. 53-99

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1887_1_4__53_0>

SULLA CINEMATICA

DEI

MEZZI CONTINUI

ESTRATTO DALLA TESI DI LAUREA

DI

ENRICO BOGGIO-LERA

È noto che, se le componenti degli spostamenti infinitesimi subìti in ciascun tempuscolo dai punti di un mezzo continuo, vengono supposte funzioni omogenee di primo grado delle coordinate; il moto di ciascuna particella del mezzo può sempre venir decomposto in tre moti semplici: una rotazione, una traslazione, ed una deformazione omogenea di primo grado con potenziale, quest' ultima essendo altrimenti detta da Thomson e Tait, *deformazione pura*.

Volendo però avere una seconda approssimazione, si può tener conto delle quantità del secondo ordine nello sviluppo di quelle componenti, ed allora esse si presentano sotto la forma di funzioni di primo e di secondo grado delle coordinate.

È evidente che gli spostamenti totali, all' infuori di infinitesimi di ordine superiore, si comporranno di quelli di prim' ordine, corrispondenti alle funzioni di primo grado delle coordinate, e di quelli di second'ordine corrispondenti alle funzioni di secondo grado. Che io sappia, quest'ultimi non sono ancora stati studiati, e perciò mi sono proposto di analizzare le deformazioni definite da spostamenti che sono funzioni omogenee di secondo grado delle coordinate.

Nel §. I. ho dimostrato che una tale deformazione, che io denomino *deformazione omogenea di 2.° grado,* può sempre venir decomposta in tre deformazioni più semplici:

una deformazione omogenea di 2.° grado con potenziale,

una deformazione che è il risultato di tre torsioni intorno a rette ortogonali passanti per l' origine delle coordinate,

una flessione intorno ad una retta passante per l' origine.

Ho chiamato flessione intorno ad una retta, una deformazione nella quale gli elementi rettilinei, uscenti dalla retta normalmente ad essa, si deformano ad archi di parabola con una legge determinata, e mantenendosi sempre ciascuno nel piano che essa determina insieme con quella retta (asse di flessione).

Questa flessione speciale è suscettiva di esser rappresentata per vettori, ossia vale per essa il teorema del parallelogrammo.

Così adunque, se nello sviluppo delle componenti degli spostamenti si tien conto delle quantità del 2.° ordine, il moto della particella in ogni tempuscolo infinitesimo potrà sempre venir scomposto in sei moti elementari:

una traslazione,

una rotazione,

una deformazione di 1.° grado con potenziale, una deformazione di 2.° grado con potenziale,

una deformazione risultante di tre torsioni intorno a rette ortogonali passanti per il centro della particella,

una flessione intorno ad una retta passante per lo stesso punto.

Definito poi nel §. II. la velocità della flessione, ho dimostrato che nel caso di fluidi incompressibili, se u,v,w sono le componenti della velocità di flessione della particella che comprende quel punto sono:

$$\lambda = -\tfrac{1}{6}\Delta^2 u \quad , \quad \mu = -\tfrac{1}{6}\Delta^2 v \quad , \quad \nu = -\tfrac{1}{6}\Delta^2 w$$

Tenendo conto delle equazioni dell' idrodinamica nel §. III. ho dimostrato che le particelle che durante un intervallo di tempo qualsiasi hanno stazionarie le torsioni, hanno contemporaneamente la flessione stazionaria.

Nel §. IV. ho introdotto una funzione che ho chiamato *potenziale di rotazione*, la quale esiste sempre e soltanto ove

$$\Delta^2 u = \Delta^2 v = \Delta^2 w = 0$$

ossia dove le particelle non hanno flessioni; parimenti ho considerato la funzione

$$\int_s \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz$$

essendo ξ , η , ζ le componenti della velocità vorticosa delle particelle (x , y , z) della linea s; tale funzione ho chiamato *vorticosità* della linea s; ed infine ho considerato le linee

$$\frac{dx}{\lambda}=\frac{dy}{\mu}=\frac{dz}{\nu}$$

che ho chiamato *linee di flessione*, e le superficie luogo continuo di esse. Le vorticosità delle linee tracciate su queste superficie godono di proprietà analoghe a quelle delle *circolazioni* sopra i Vorticoidi del Pr. Beltrami.

Da ultimo ho determinato l'azione velocitante (fittizia) delle particelle che hanno flessione, ed ho studiato due casi particolari di moti di liquidi ove esistono linee di flessione, rette e parallele nell' uno, circoli simmetrici intorno ad un asse e paralleli nell' altro.

Debbo rendere vivissimi ringraziamenti al chiarissimo mio Professore Vito Volterra, il quale mi ha guidato in questi studi ed ha riveduto tutti i miei calcoli.

§. 1.

Quando un mezzo continuo subisce una deformazione tale che le componenti (secondo una terna di assi ortogonali) degli spostamenti dei suoi punti materiali, siano funzioni omogenee di 2.° grado delle coordinate, per modo che indicando con δu, δv, δw le componenti dello spostamento del punto (x, y, z) si abbia:

$$\left.\begin{aligned}\delta u&=\alpha_{11}x^2+\alpha_{12}y^2+\alpha_{13}z^2+2\beta_{11}xy+2\beta_{12}yz+2\beta_{13}zx,\\ \delta v&=\alpha_{2}\,x^2+\alpha_{22}y^2+\alpha_{23}z^2+2\beta_{21}xy+2\beta_{22}yz+2\beta_{23}zx,\\ \delta w&=\alpha_{31}x^2+\alpha_{32}y^2+\alpha_{33}z^2+2\beta_{31}xy+2\beta_{32}yz+2\beta_{33}zx;\end{aligned}\right\}\;\ldots.\;(1)$$

ove le α e le β sono coefficienti costanti, diremo che il mezzo subisce una deformazione omogenea di 2.° grado.

Ci proponiamo di dimostrare che tale deformazione si può sempre considerare come risultante di tre deformazioni più semplici:

1.° Una deformazione per la quale esiste un potenziale di moto;

2.° Una deformazione che può sempre riguardarsi come prodotta da tre torsioni simultanee intorno a tre rette ortogonali passanti per l' origine delle coordinate.

3.° Una flessione intorno ad una retta passante per l'origine delle coordinate.

Le torsioni di cui si parla sono definite nel modo ordinario; quanto alla flessione intorno ad una retta (asse di flessione) denomineremo così una deformazione per la quale le linee rette che incontrano normalmente l' asse, si riducono ad archi di parabola, mantenendosi sempre ciascuna nel piano determinato da essa e dall'asse, mentre quest' ultimo rimane fisso.

Si facciano le seguenti posizioni;

$$\left.\begin{array}{c}
\alpha_{12}=\beta+e_1-l, \qquad \alpha_{13}=\varepsilon-e_1-l, \\
\alpha_{23}=\delta+e_2-m, \qquad \alpha_{21}=\alpha-e_2-m, \\
\alpha_{31}=\vartheta+e_3-n; \qquad \alpha_{32}=\gamma-e_3-n; \\
2\beta_{21}=2\beta-e_1+l,\ 2\beta_{33}=2\varepsilon+e_1+l,\ 2\beta_{12}=2\omega+g_1. \\
2\beta_{32}=2\delta-e_2+m,\ 2\beta_{11}=2\alpha+e_2+m,\ 2\beta_{23}=2\omega+g_2, \\
2\beta_{13}=2\vartheta-e_3+n; 2\beta_{22}=2\gamma+e_3+n;\ 2\beta_{31}=2\omega+g_3;, \\
g_1+g_2+g_3=0
\end{array}\right\} \dots (2)$$

ovvero:

$$
(2)_1 \left\{
\begin{aligned}
&\alpha=\frac{\alpha_{21}+2\beta_{11}}{3}, \quad \gamma=\frac{\alpha_{32}+2\beta_{22}}{3}, \quad \varepsilon=\frac{\alpha_{13}+2\beta_{33}}{3},\\
&\beta=\frac{\alpha_{12}+2\beta_{21}}{3}, \quad \delta=\frac{\alpha_{23}+2\beta_{32}}{3}, \quad \vartheta=\frac{\alpha_{31}+2\beta_{13}}{3},\\
&l=\frac{1}{3}\Big\{(\beta_{33}-\alpha_{13})+(\beta_{21}-\alpha_{12})\Big\}, \quad e_1=\frac{1}{3}\Big\{(\beta_{33}-\alpha_{13})-(\beta_{21}-\alpha_{12})\Big\},\\
&m=\frac{1}{3}\Big\{(\beta_{11}-\alpha_{21})+(\beta_{32}-\alpha_{23})\Big\}, \quad e_2=\frac{1}{3}\Big\{(\beta_{11}-\alpha_{21})-(\beta_{32}-\alpha_{23})\Big\},\\
&n=\frac{1}{3}\Big\{(\beta_{22}-\alpha_{32})+(\beta_{13}-\alpha_{31})\Big\}, \quad e_3=\frac{1}{3}\Big\{(\beta_{22}-\alpha_{32})-(\beta_{13}-\alpha_{31})\Big\},\\
&g_1=\frac{2}{3}\Big\{2\beta_{12}-\beta_{23}-\beta_{31}\Big\},\\
&g_2=\frac{2}{3}\Big\{2\beta_{23}-\beta_{31}-\beta_{12}\Big\}, \qquad \omega=\frac{1}{3}\Big\{\beta_{12}+\beta_{23}+\beta_{31}\Big\},\\
&g_3=\frac{2}{3}\Big\{2\beta_{31}-\beta_{12}-\beta_{25}\Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Allora le (1) divengono:

$$
(3) \quad \ldots\ldots \quad
\begin{aligned}
\delta u&=\delta u_1+\delta u_2+\delta u_3,\\
\delta v&=\delta v_1+\delta v_2+\delta v_3,\\
\delta w&=\delta w_1+\delta w_2+\delta w_3,
\end{aligned}
$$

ove si è posto:

$$
(4) \ \ldots \left\{
\begin{aligned}
\delta u_1&=\alpha_{11}x^2+\beta y^2+\varepsilon z^2+2\alpha xy+2\omega yz+2\vartheta zx,\\
\delta v_1&=\alpha x^2+\alpha_{22}y^2+\delta z^2+2\beta xy+2\gamma yz+2\omega zx,\\
\delta w_1&=\vartheta x^2+\gamma y^2+\alpha_{33}z^2+2\omega xy+2\delta yz+2\varepsilon zx;
\end{aligned}
\right.
$$

$$(5) \dots \left\{ \begin{aligned} \delta u_2 &= e_1 y^2 - e_1 z^2 + e_2 xy - e_3 xz + g_1 yz, \\ \delta v_2 &= e_2 z^2 - e_2 x^2 + e_3 yz - e_1 yx + g_2 zx, \\ \delta w_2 &= e_3 x^2 - e_3 y^2 + e_1 zx - e_2 zy + g_3 xy; \end{aligned} \right.$$

$$(6) \dots \left\{ \begin{aligned} \delta u_3 &= -\, ly^2 - l z^2 + mxy + nxz \,, \\ \delta v_3 &= -\, mz^2 - mx^2 + nyz + lyx \,, \\ \delta w_3 &= -\, n x^2 - n y^2 + lzx + mzy; \end{aligned} \right.$$

Così la deformazione definita dagli spostamenti (1) ci apparisce come risultante dalle tre deformazioni respettivamente definite dagli spostamenti (4), (5) e (6).

Quanto alla prima di queste, la semplice ispezione delle (4) mostra che δu_1 , δv_1 , δw_1 sono ordinatamente le derivate rapporto ad x , y , z di una stessa funzione omogenea di 3.° grado in queste variabili. La deformazione (4) possiede quindi un potenziale di moto; esso è dato come subito si riscontra dalla funzione:

$$\varphi = \frac{1}{3} \Big\{ \alpha_{11} x^3 + \alpha_{22} y^3 + \alpha_{33} z^3 + 3\alpha x^2 y + 3\beta x^2 y + 3\gamma y^2 z + 3\delta y z^2 + \\ + 3\varepsilon z^2 x + 3\vartheta z x^2 + 6\omega xyz \Big\} .$$

Noi ci occuperemo ora delle due deformazioni (5) e (6); cominciamo dalle (5) e per semplicità sopprimendo momentaneamente gli indici, dimostriamo che:

Una deformazione definita dagli spostamenti.

$$\left. \begin{aligned} \delta u &= e_1 y^2 - e_1 z^2 + e_2 xy - e_3 x z + g_1 yz \,, \\ \delta v &= e_2 z^2 - e_2 x^2 + e_3 yz - e_1 yx + g_2 zx \,, \\ \delta w &= e_3 x^2 - e_3 y^2 + e_1 zx - e_2 z y + g_3 xy \,, \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)_1$$

qualunque sieno i coefficienti e_1, e_2, e_3, g_1, g_2, g_3 e questi tre ultimi siano legati dalla relazione:

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)_2$$

si può sempre riguardare come prodotta da tre torsioni simultanee, intorno a tre rette ortogonali passanti per l'origine delle coordinate e le cui direzioni dipendono dai valori dei coefficienti.

Pongasi infatti:

$$p = \frac{\partial \delta v}{\partial z} - \frac{\partial \delta w}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \frac{\partial \delta u}{\partial z}, \quad r = \frac{\partial \delta u}{\partial y} - \frac{\partial \delta v}{\partial z};$$

e si ricavino dalle $(5)_1$ i valori di queste quantità; si troverà:

$$\begin{aligned} p &= (g_2 - g_3)\, x + 3\, e_3\, y + 3\, e_2\, z\,, \\ q &= 3\, e_3\, x + (g_3 - g_1)\, y + 3\, e_1\, z\,, \\ r &= 3\, e_2\, x + 3\, e_1\, y + (g_1 - g_2)\, z\,. \end{aligned}$$

E se si pone:

$$f = \frac{g_2 - g_3}{2} x^2 + \frac{g_3 - g_1}{2} y^2 + \frac{g_1 - g_2}{2} z^2 + 3e_1 yz + 3e_2 zx + 3e_3 xy, \quad (7)$$

si ha evidentemente:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Siano α_2, α_1, α_3 ; β_1, β_2, β_3 ; γ_1, γ_2, γ_3 i coseni di direzione degli assi della superficie di 2.° grado $f=$ cost.; allora f per la trasformazione di assi

$$
(8) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \alpha_1 \mathrm{X} + \alpha_2 \mathrm{Y} + \alpha_3 \mathrm{Z}\,, \\ y = \beta_1 \mathrm{X} + \beta_2 \mathrm{Y} + \beta_3 \mathrm{Z}\,, \\ z = \gamma_1 \mathrm{X} + \gamma_2 \mathrm{Y} + \gamma_3 \mathrm{Z}\,; \end{array} \right.
$$

prenderà la forma:

$$
\frac{1}{2} \left\{ \mathrm{AX}^2 + \mathrm{BY}^2 + \mathrm{CZ}^2 \right\};
$$

e se effettivamente si eseguisce la sostituzione (8) nella funzione f, si dovrà avere:

$$
(9) \left\{ \begin{array}{l} (g_2-g_3)\alpha_1\alpha_2+(g_3-g_1)\beta_1\beta_2+(g_1-g_2)\gamma_1\gamma_2+3e_1(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)+ \\ \qquad\qquad 3e_2(\gamma_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_1)+3e_3(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)=0\,, \\ (g_2-g_3)\alpha_2\alpha_3+(g_3-g_1)\beta_2\beta_3+(g_1-g_2)\gamma_2\gamma_3+3e_1(\beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2)+ \\ \qquad\qquad 3e_2(\gamma_2\alpha_3+\gamma_3\alpha_2)+3e_3(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)=0\,, \\ (g_3-g_3)\alpha_3\alpha_1+(g_3-g_1)\beta_3\beta_1+(g_1-g_1)\gamma_3\gamma_1+3e_1(\beta_3\gamma_1+\beta_1\gamma_3)+ \\ \qquad\qquad 3e_2(\gamma_3\alpha_1+\gamma_1\alpha_3)+3e_3(\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3)=0\,. \end{array} \right.
$$

Si osservi ora che le componenti dello spostamento del punto (x, y, z) o (X, Y, Z) nelle direzioni degli assi delle X, Y, Z, saranno:

$$
(10) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \mathrm{U} = \alpha_1\, \delta u + \beta_1\, \delta v + \gamma_1\, \delta w\,, \\ \delta \mathrm{V} = \alpha_2\, \delta u + \beta_2\, \delta v + \gamma_2\, \delta w\,, \\ \delta \mathrm{W} = \alpha_3\, \delta u + \beta_3\, \delta v + \gamma_3\, \delta w\,. \end{array} \right.
$$

Queste però ci danno le suddette componenti in funzioni delle coordinate del punto rispetto agli assi x,y,z; volendo averle in funzione delle coordinate rispetto al nuovo sistema di assi, basterà eseguire nelle $(5)_1$ la sostituzione (8) ed ottenute così δu , δv , δw espresse per X , Y , Z, sostituirle nelle (10). Ciò facendo si trova:

$$(11) \ldots \begin{cases} \delta U = E_1 Y^2 - E_1 Z^2 + E_2 XY - E_3 XZ + G_1 YZ\,, \\ \delta V = E_2 Z^2 - E_2 X^2 + E_3 YZ - E_1 YX + G_2 ZX\,, \\ \delta W = E_3 X^2 - E_3 Y^2 + E_1 ZX - E_2 ZY + G_3 XY. \end{cases}$$

ove si è posto :

$$E_1 = e_1 \left\{ \alpha_1(\beta_2^2 - \gamma_2^2) - \alpha_2(\beta_1\beta_2 - \gamma_1\gamma_2) \right\} + e_2 \left\{ \beta_1(\gamma_2^2 - \alpha_2^2) - \beta_2(\gamma_1\gamma_2 - \alpha_1\alpha_2) \right\} +$$
$$+ e_3 \left\{ \gamma_1(\alpha_2^2 - \beta_2^2) - \gamma_2(\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) \right\} + g_1\alpha_1\beta_2\gamma_2 + g_2\beta_1\gamma_2\alpha_2 + g_3\gamma_1\alpha_2\beta_2\,,$$

$$E_2 = e_1 \left\{ \alpha_2(\beta_3^2 - \gamma_3^2) - \alpha_3(\beta_2\beta_3 - \gamma_2\gamma_3) \right\} + e_2 \left\{ \beta_2(\gamma_3^2 - \alpha_3^2) - \beta_3(\gamma_2\gamma_3 - \alpha_2\alpha_3) \right\} +$$
$$+ e_3 \left\{ \gamma_2(\alpha_3^2 - \beta_3^2) - \gamma_3(\alpha_2\alpha_3 - \beta_2\beta_3) \right\} + g_1\alpha_2\beta_3\gamma_3 + g_2\beta_2\gamma_3\alpha_3 + g_3\gamma_2\alpha_3\beta_3\,,$$

$$E_3 = e_1 \left\{ \alpha_3(\beta_1^2 - \gamma_1^2) - \alpha_1(\beta_3\beta_1 - \gamma_3\gamma_1) \right\} + e_2 \left\{ \beta_3(\gamma_1^2 - \alpha_1^2) - \beta_1(\gamma_3\gamma_1 - \alpha_3\alpha_1) \right\} +$$
$$+ e_3 \left\{ \gamma_3(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \gamma_1(\alpha_3\alpha_1 - \beta_3\beta_1) \right\} + g_1\alpha_3\beta_1\gamma_1 + g_2\beta_3\gamma_1\alpha_1 + g_3\gamma_3\alpha_1\beta_1\,,$$

$$G_1 = 2 \left\{ e_1(\beta_3\gamma_3 - \beta_2\gamma_2) + e_2(\gamma_3\alpha_3 - \gamma_2\alpha_2) + e_3(\alpha_3\beta_3 - \alpha_2\beta_2) \right\} +$$
$$+ g_1\alpha_1(\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2) + g_2\beta_1(\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2) + g_3\gamma_1(\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2)\,,$$

$$G_2 = 2\left\{e_1(\beta_1\gamma_1 - \beta_3\gamma_3) + e_2(\gamma_1\alpha_1 - \gamma_3\alpha_3) + e_3(\alpha_1\beta_1 - \alpha_3\beta_3)\right\} +$$
$$+ g_1\alpha_2(\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3) + g_2\beta_2(\gamma_3\alpha_1 + \gamma_1\alpha_3) + g_3\gamma_2(\alpha_3\beta_1 + \alpha_1\beta_3)\,,$$

$$G_3 = 2\left\{e_1(\beta_2\gamma_2 - \beta_1\gamma_1) + e_2(\gamma_2\alpha_2 - \gamma_1\alpha_1) + e_3(\alpha_2\beta_2 - \alpha_1\beta_1)\right\} +$$
$$+ g_1\alpha_3(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) + g_2\beta_3(\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) + g_3\gamma_3(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)\,.$$

E tenendo conto della (5_2) si trova che E_3, E_1, E_2, differiscono soltanto pel fattore $\frac{1}{3}$ dai primi membri delle (9), onde:

$$E_1 = E_2 = E_3 = 0:$$

e tenendo conto della medesima $(5)_2$, si ha inoltre identicamente:

$$G_1 + G_2 + G_3 = 0\,,$$

quindi le (11) divengono semplicemente:

$$\delta U = G_1\, YZ\,,$$
$$\delta V = G_2\, ZX\,,$$
$$\delta W = G_3\, XY\,.$$

Pongasi ora:

$$G_1 = \omega_3 - \omega_2 \quad , \quad G_2 = \omega_1 - \omega_3 \quad , \quad G_3 = \omega_2 - \omega_1 \quad (12)$$

e si avrà:

$$(13)\quad \begin{cases} \delta U = \delta U_1 + \delta U_2 + \delta U_3 \,, \\ \delta V = \delta V_1 + \delta V_2 + \delta V_3 \,, \\ \delta W = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 \,; \end{cases}$$

ove:

$$(14)\ \begin{cases} \delta U_1 = 0 \\ \delta V_1 = \omega_1 ZX, \\ \delta W_1 = -\omega_1 XY; \end{cases} \quad (15)\ \begin{cases} \delta U_2 = -\omega_2 ZY, \\ \delta V_2 = 0\,, \\ \delta W_2 = \omega_2 XY \end{cases} \quad (16)\ \begin{cases} \delta U_3 = \omega_3 YZ\,, \\ \delta V_3 = -\omega_3 XZ, \\ \delta W_3 = 0\,. \end{cases}$$

Dunque la deformazione definita dagli spostamenti (13) nelle direzioni degli assi X , Y , Z , si può considerare come il risultato di tre torsioni simultanee ω_1 , ω_2 , ω_3 rispettivamente intorno agli assi X , Y , Z .

Siccome però le (12) non individuano ω_1 , ω_2 , ω_3 , segue che la deformazione risultante da tre torsioni simultanee intorno a tre rette ortogonali e passanti per un punto, si può produrre con altre torsioni ω_1' , ω_2' , ω_3' , intorno alle stesse rette, purchè:

$$\omega_3' - \omega_2' = \omega_3 - \omega_2 \,,\quad \omega_1' - \omega_3' = \omega_1 - \omega_3 \,,\quad \omega_2' - \omega_1' = \omega_2 - \omega_1 \,.$$

In particolare poi:

Tre torsioni simultanee ed uguali intorno a tre rette ortogonali e passansi per un punto, si distruggono.

Da quanto precede segue pertanto che *la deformazione definita dagli spostamenti* (5) *può sempre riguardarsi come prodotta da tre torsioni simultanee intorno a tre rette ortogonali passanti per l' origine delle* *coordinate; queste rette sono gli assi della superficie di 2.⁰ grado:*

$$\frac{(g_2-g_3)}{2}x^2+\frac{g_3-g_1}{2}y^2+\frac{g_1-g_2}{2}z^2+3e_1yz+3e_2zx+3\,e_3xy=\text{cost}.$$

Passiamo per ultimo ad esaminare la deformazione definita dalle

$$(b)\qquad\begin{cases}\delta\, u_3=-\,l\;y^2-l\;z^2+mxy+n\,x\,z\,,\\ \delta\;v_3=-\,m\,z^2\;-m\,x^2+n\,y\,z+l\;y\,x\,,\\ \delta\;w_3=-\,n\;x^2-n\;y^2+l\;z\,x+m\,z\,y\,.\end{cases}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned}\delta u_3&=\underline{\delta u_1}+\underline{\delta u_2}+\underline{\delta u_3}\,,\\ \delta v_3&=\underline{\delta v_1}+\underline{\delta v_2}+\underline{\delta v_3}\,,\\ \delta w_3&=\underline{\delta w_1}+\underline{\delta w_2}+\underline{\delta w_3}\,.\end{aligned}$$

e

$$(a)\begin{cases}\underline{\delta u_1}=-l(y^2+z^2),\\ \underline{\delta v_1}=\quad l\,x\,y\,,\\ \underline{\delta w_1}=\quad l\,x\,z\,,\end{cases}\quad(b)\begin{cases}\underline{\delta u_2}=\quad mxy,\\ \underline{\delta v_2}=-m(z^2+x^2),\\ \underline{\delta w_2}=\quad mzy,\end{cases}\begin{cases}\underline{\delta u_3}=\quad nxz,\\ \underline{\delta v_3}=\quad nyz,\\ \underline{\delta w_3}=-n(x^2+y^2);\end{cases}(c)$$

Le (a) ci danno pei punti x, dell'asse

$$\underline{\delta u_1}=\underline{\delta v_1}=\underline{\delta w_1}=0$$

cioè i punti dell'asse x rimangono fissi.

Se si chiama n la normale, condotta per l'origine, al piano dell'asse z e del raggio vettore r che va dall'origine al punto x, y, z, si ha evidentemente:

$$\cos \widehat{nx} = 0 \ , \ \cos \widehat{ny} = \operatorname{sen} \widehat{rx} \cos \widehat{rz} \ , \ \cos \widehat{nz} = - \operatorname{sen} \widehat{rx} \cos \widehat{ry};$$

quindi si ha:

$$\underline{\delta u_1} \cos \widehat{nx} + \underline{\delta v_1} \cos \widehat{ny} + \underline{\delta w_1} \cos \widehat{nz} = 0;$$

ma si ha pure

$$\underline{\delta u_1} \cos \widehat{rx} + \underline{\delta v_1} \cos \widehat{ry} + \underline{\delta w_1} \cos \widehat{rz} = 0;$$

onde si ricava da queste due relazioni, che lo spostamento di ciascun punto avviene nel piano del raggio vettore e dell'asse x, nella direzione della normale al raggio vettore.

Indicando con (x_1, y_1, z_1) le coordinate del punto (x, y, z) in seguito alla deformazione (a), si ha:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - l\,(y^2 + z^2), \\ y_1 &= y + l\,x\,y, \\ z_1 &= z + l\,x\,z; \end{aligned}$$

e perciò le linee rette passanti per l'asse x e normali ad esso, cioè le linee

$$\left\{ \begin{aligned} x &= h, \\ y &= k\,z, \end{aligned} \right.$$

si trasformano nelle linee:

$$\begin{cases} x_1 = h - \dfrac{l(k^2+1)}{(1+lh)^2} z_1^2 , \\ y_1 = k z_1 ; \end{cases}$$

ossia si trasformano in parabole, mantenendosì sempre ciascuna nel piano determinato da essa e dall' asse x.

Chiameremo la deformazione (a) una *flessione intorno all'asse* x, ed il numero l che è il rapporto costante che passa fra lo spostamento di ciascun punto nella direzione x ed il quadrato della relativa sua distanza dal medesìmo asse, prenderemo come misura di tale flessione.

Nel medesimo modo si proverebbe che le deformazioni (b) e (c) sono perfettamente analoghe alla precedente, ma rispetto agli assi y e z; onde similmente possiamo dire che sono una flessione m intorno all' asse y, ed una flessione n intorno all' asse z.

La deformazione (6) è dunque il risultato di tre flessioni, l, m, n, intorno agli assi x, y, z. Dimostriamo adesso che queste tre flessioni si compongono geometricamente in una flessione unica, cioè in una flessione di intensità:

$$F = \sqrt{l^2+m^2+n^2}$$

intorno alla retta A di equazioni:

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n} .$$

Infatti le (6) danno per i punti di tal retta:

$$\delta u_3 = \delta v_3 = \delta w_3 = 0,$$

cioè rimangono fissi. Inoltre ponendo le stesse (6) sotto la forma:

$$\begin{aligned}
\delta u_3 &= y \,\{mx - ly\} + z \,\{nx - lz\}, \\
\delta v_3 &= z \,\{ny - mz\} + x \,\{ly - mx\}, \\
\delta w_3 &= x \,\{lz - nx\} + y \,\{mz - ny\},
\end{aligned}$$

e moltiplicando e dividendo per r^2 F, (essendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$), avremo:

$$\begin{aligned}
\delta u_3 = r^2 \mathrm{F}[\cos \widehat{ry} \,\{ \cos \widehat{\mathrm{A}y} \cos \widehat{rx} - \cos \widehat{\mathrm{A}x} \cos \widehat{ry} \} &+ \\
+ \cos \widehat{rz} \,\{ \cos \widehat{\mathrm{A}z} \cos \widehat{rx} - \cos \widehat{\mathrm{A}x} \cos \widehat{rz} \}&], \\
\delta v_3 = r^2 \mathrm{F}[\cos \widehat{rz} \,\{ \cos \widehat{\mathrm{A}z} \cos \widehat{ry} - \cos \widehat{\mathrm{A}y} \cos \widehat{rz} \} &+ \\
+ \cos \widehat{rx} \,\{ \cos \widehat{\mathrm{A}x} \cos \widehat{ry} - \cos \widehat{\mathrm{A}y} \cos \widehat{rx} \}&], \\
\delta w_3 = r^2 \mathrm{F}[\cos \widehat{rx} \,\{ \cos \widehat{\mathrm{A}x} \cos \widehat{rz} - \cos \widehat{\mathrm{A}z} \cos \widehat{rx} \} &+ \\
+ \cos \widehat{ry} \,\{ \cos \widehat{\mathrm{A}y} \cos \widehat{rz} - \cos \widehat{\mathrm{A}z} \cos \widehat{ry} \}&].
\end{aligned}$$

e se si chiama N la retta condotta per l'origine normalmente ad A ed r, ed $\widehat{\mathrm{A}r}$ l'angolo di A ed r,

$$\delta u_3 = r^2\, \mathrm{F} \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{A}r} \left\{ \cos \widehat{ry} \cos \widehat{\mathrm{N}z} - \cos \widehat{rz} \cos \widehat{\mathrm{N}y} \right\},$$

$$\delta v_3 = r^2\, \mathrm{F} \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{A}r} \left\{ \cos \widehat{rz} \cos \widehat{\mathrm{N}x} - \cos \widehat{rx} \cos \widehat{\mathrm{N}z} \right\},$$

$$\delta w_3 = r^2\, \mathrm{F} \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{A}r} \left\{ \cos \widehat{rx} \cos \widehat{\mathrm{N}y} - \cos \widehat{ry} \cos \widehat{\mathrm{N}x} \right\}.$$

Infine se P è la retta condotta per l'origine normalmente ad N e ad r,

$$\delta u_3 = r^2\, \mathrm{F} \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{A}r} \cos \widehat{\mathrm{P}x}\,,$$

$$\delta v_3 = r^2\, \mathrm{F} \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{A}r} \cos \widehat{\mathrm{P}y}\,,$$

$$\delta w_3 = r^2\, \mathrm{F} \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{A}r} \cos \widehat{\mathrm{P}z}\,.$$

Queste mostrano che la direzione dello spostamento è quella della retta P; ossia ciascun punto si sposta nel piano determinato da esso e dalla retta A, lungo la normale ad r.

La grandezza di tale spostamento è

$$\delta p = r^2\, \mathrm{F} \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{A}r}\,; \qquad (d)$$

la componente di esso nella direzione della retta A, è

$$\delta p_{\mathrm{A}} = \delta p \cos \widehat{\mathrm{AP}} = \delta p \operatorname{sen} \widehat{\mathrm{A}r} = r^2 \mathrm{F} \operatorname{sen}^2 \widehat{\mathrm{A}r}\,. \qquad (e)$$

Quest' ultima ci dice che la componente dello spostamento di un punto qualunque nella direzione della retta A è proporzionale al quadrato dolla sua distanza da questa retta; il rapporto costante di proporzionalità è il numero F.

Cerchiamo ora in che linea si trasforma una retta qualunque I, che incontra normalmente la retta A.

Poichè ciascun punto si sposta nel piano determinato da esso e dalla retta A, tutti i punti della retta I, per la deformazione (6) si manterranno nel piano (A , I); per cagione di semplicità prendiamo allora la retta A per asse x, e la normale ad essa condotta per l'origine, parallelamente ad I per asse y.

Un punto qualunque $M(x , y)$ della retta I, spostandosi lungo la normale MP al raggio vettore OM, andrà in seguito alla deformazione nel punto $M_1(x_1 , y_1)$ e per le (d) ed (e) si avrà:

$$M\,M_1 = r^2\,F \operatorname{sen} \widehat{rx}\,,$$

e se si conduce $M_1\,R$ parallelamente ad x fino all'incontro con la retta I,

$$R\,M_1 = r^2\,F \operatorname{sen}^2 \widehat{rx}\,;$$

ossia:

$$\begin{cases} x_1 - x = -\,F\,y^2 \\ y_1 - y = F\,x\,y\,. \end{cases}$$

Dunque se la retta I è $x=h$, essa si trasforma nella linea:

$$x_1 = h - \frac{F\, y_1^2}{(1+F\, h)^2},$$

che è una parabola.

Dunque la deformazione (6) coincide per la sua natura con le deformazioni (a), (b) e (c), e possiamo analogamente denominarla *una flessione* F *intorno alla retta* A, e come si voleva provare l , m , n *sono le sue componenti nelle direzioni degli assi* (x , y , z).

Il teorema enunciato sulla deformazione omogenea di 2.° grado resta pertanto completamente dimostrato.

§. 2.

Un piccolissimo intorno del punto (x , y , z), ossia una porzione immensamente piccola di materia, che comprende nel suo interno il punto (x , y , z), chiameremo brevemente la particella (x , y , z).

Siano δx , δy , δz le componenti dello spostamento infinitamente piccolo subìto da un punto qualunque (x , y , z). Se esse sono funzioni finite e continue insieme alle derivate, le componenti dello spostamento di un punto qualunque $(x+X , y+Y , z+Z)$ della particella (x , y , z), (essendo X , Y , Z infinitesimi), saranno a meno di infiuitesimi d' ordine superiore al 2.°

$$\delta x_1 = \delta x + \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,x} X + \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,y} Y + \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,z} Z +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \delta x}{\partial\,x^2} X^2 + \frac{\partial^2 \delta x}{\partial\,y^2} Y^2 + \frac{\partial^2 \delta x}{\partial\,z^2} Z^2 + 2\frac{\partial^2\,\delta x}{\partial x \partial y} X\,Y + \ldots\right\},$$

$$\delta y_1 = \delta y + \frac{\partial\,\delta y}{\partial x} X + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} Y + \frac{\partial\,\delta y}{\partial\,z} Z +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \delta y}{\partial\,x^2} X^2 + \frac{\partial^2 \delta y}{\partial\,y^2} Y^2 + \frac{\partial^2 \delta y}{\partial\,z^2} Z^2 + 2\frac{\partial^2\,\delta y}{\partial x \partial y} X Y + \ldots\right\},$$

$$\delta z_1 = \delta z + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,x} X + \frac{\partial\,\delta\,z}{\partial\,y} Y + \frac{\partial\,\delta\,z}{\partial\,z} Z +$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \delta z}{\partial\,x^2} X^2 + \frac{\partial^2 \delta z}{\partial y^2} Y^2 + \frac{\partial^2 \delta z}{\partial\,z^2} Z^2 + 2\frac{\partial^2\,\delta z}{\partial x \partial y} X Y + \ldots\right\}.$$

Quindi trasportando l' origine delle coordinate nel punto $(x\,,\,y\,,\,z)$ e ponendo:

$$X + \delta x_1 = X_1\ ,\ Y + \delta y_1 = Y_1\ ,\ Z + \delta z_1 = Z_1\ ,$$

avremo:

$$(1)\ldots\left\{\begin{aligned}
X_1 &= \delta x + \left(\frac{\partial \delta x}{\partial\,x} + 1\right) X + \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,y} Y + \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,z} Z + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \delta x}{\partial\,x^2} X^2 + \frac{\partial^2 \delta x}{\partial\,y^2} Y^2 + \ldots\ldots\right\},\\
Y_1 &= \delta\,y + \frac{\partial\,\delta y}{\partial\,x} X + \left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial\,y} + 1\right) Y + \frac{\partial\,\delta y}{\partial\,z} Z + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \delta y}{\partial\,x^2} X^2 + \frac{\partial^2 \delta y}{\partial\,y^2} Y^2 + \ldots\right\},\\
Z_1 &= \delta\,z + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,x} X + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,y} Y + \left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial\,z} + 1\right) Z + \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 \delta z}{\partial\,x^2} X^2 + \frac{\partial^2 \delta z}{\partial\,y^2} Y^2 + \ldots\right\},
\end{aligned}\right.$$

e potremo dire che un punto qualunque della particella considerata, il quale ha le coordinate X, Y, Z, dopo la deformazione avrà le coordinate X_1, Y_1, Z_1, date dalle (1). Queste mostrano che le componenti dello spostamento di un punto qualunque della particella sono la somma di una funzione di 1.° grado, e di una omogenea di 2.° grado delle coordinate; onde applicando i risultati del §. precedente e decomponendo nel modo che si fa comunemente la deformazione di 1.° grado, potremo dire che il moto di una particella qualunque per una deformazione infinitesima del mezzo, consiste di sei moti elementari infinitesimi:

1.° Una traslazione,

2.° Una rotazione intorno ad una retta passante per un punto O interno alla particella,

3.° Una deformazione di primo grado con potenziale di moto,

4.° Una deformazione che può sempre riguardarsi come prodotta da tre torsioni intorno a tre rette fra loro ortogonali passanti per O,

5.° Una flessione intorno ad una retta passante per O,

6.° Una deformazione di secondo grado, con potenziale di moto.

Facendo la decomposizione dei coefficienti della deformazione di secondo grado, nel modo indicato dalle (2) del §. 1, salvo a far precedere quei coefficienti α, β, γ, dal segno d per denotare esplicitamente che si tratta di una deformazione infinitesima, e supponendo:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\delta x = u\, dt\,, \\
\delta y = v\, dt\,, \\
\delta z = w\, dt\,,
\end{array}
\right.
$$

essendo u, v, w le componenti della velocità nel punto (x, y, z), avremo:

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{d\beta}{dt} + \frac{de_1}{dt} - \frac{dl}{dt}\,, & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{de_1}{dt} - \frac{dl}{dt}\,, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{d\delta}{dt} + \frac{de_2}{dt} - \frac{dm}{dt}\,, & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{d\alpha}{dt} - \frac{de_2}{dt} - \frac{dm}{dt}\,, \\
\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d\vartheta}{dt} + \frac{de_3}{dt} - \frac{dn}{dt}\,, & \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial \gamma^2} = \frac{dy}{dt} - \frac{de_3}{dt} - \frac{dn}{dt}\,, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 2\frac{d\beta}{dt} - \frac{de_1}{dt} + \frac{dl}{dt}\,, & \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} = 2\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{de_1}{dt} + \frac{dl}{dt}\,, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 2\frac{d\delta}{dt} - \frac{de_2}{dt} + \frac{dm}{dt}\,, & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2\frac{d\alpha}{dt} + \frac{de_2}{dt} + \frac{dm}{dt}\,, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 2\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{de_3}{dt} + \frac{dn}{dt}\,, & \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 2\frac{d\gamma}{dt} + \frac{de_3}{dt} + \frac{dn}{dt}\,; \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 2\frac{d\omega}{dt} + \frac{dg_1}{dt}\,, & \\
\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} = 2\frac{d\omega}{dt} + \frac{dg_2}{dt}\,, & \frac{dg_1}{dt} + \frac{dg_2}{dt} + \frac{dg_3}{dt} = 0\,. \\
\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2\frac{d\omega}{dt} + \frac{dg_3}{dt}\,, &
\end{array}
\right\} \ldots (2)
$$

Applicando le formole di risoluzione già date nelle

$(2)_1$ del §. 1, alla determinazione di $\frac{dl}{dt}, \frac{dm}{dt}, \frac{dn}{dt}, \frac{de_1}{dt}, \frac{de_2}{dt}, \frac{de_3}{dt}$, si trova.

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dl}{dt} &= \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right\}, \\
\frac{de_1}{dt} &= \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right\}, \\
\frac{dm}{dt} &= \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right\}, \\
\frac{de_2}{dt} &= \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right\}, \\
\frac{dn}{dt} &= \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\}, \\
\frac{de_3}{dt} &= \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right\},
\end{aligned}\right.$$

ossia ponendo:

$$(p) \qquad \begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right\}, \\
\eta &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right\}, \\
\zeta &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right\},
\end{aligned}$$

si ha:

$$(3) \ldots \begin{cases} \dfrac{dl}{dt} = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial \eta}{\partial z} - \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\right\}, \\[2ex] \dfrac{dm}{dt} = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right\}, \\[2ex] \dfrac{dn}{dt} = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial \xi}{\partial y} - \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right\}, \end{cases} \qquad (4) \ldots \begin{cases} \dfrac{de_1}{dt} = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial \eta}{\partial z} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\right\}, \\[2ex] \dfrac{de_2}{dt} = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} + \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right\}, \\[2ex] \dfrac{de}{dt} = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right\}. \end{cases}$$

Chiamando velocità di flessione della particella, il rapporto costante che deve passare fra la velocità di ciascun suo punto nella direzione dell' asse di flessione ed il quadrato della rispettiva distanza da quest' asse, e ponendo

$$\frac{dl}{dt} = \lambda \;, \quad \frac{dm}{dt} = \mu \;, \quad \frac{dn}{dt} = \nu$$

potremo dire che λ, μ, ν sono le componenti della velocità di flessione della particella (x, y, z). Nel caso di fluidi incompressibili si ha:

$$(5) \ldots \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial \eta}{\partial z} - \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\right\} = -\dfrac{1}{6}\Delta^2 u, \\[2ex] \mu = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} - \dfrac{\partial \xi}{\partial z}\right\} = -\dfrac{1}{6}\Delta^2 v, \\[2ex] \nu = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{\partial \xi}{\partial y} - \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right\} = -\dfrac{1}{6}\Delta^2 w. \end{cases}$$

§. III.

Dalle formole di *Helmholtz* (*):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\xi}{dt} &= \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial v}{\partial x} + \zeta\frac{\partial w}{\partial x},\\
\frac{d\eta}{dt} &= \xi\frac{\partial u}{\partial y} + \eta\frac{\partial v}{\partial y} + \zeta\frac{\partial w}{\partial y},\\
\frac{d\zeta}{dt} &= \xi\frac{\partial u}{\partial z} + \eta\frac{\partial v}{\partial z} + \zeta\frac{\partial w}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

si ha derivando la seconda rispetto a z, la terza rispetto ad y e sottraendo:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right\} = \left(\frac{\partial\eta}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) +$$
$$+\left(\frac{\partial\xi}{\partial z} + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (a).$$

Ma dalle (2) del §. 2, si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial x} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x}\right\} = \frac{1}{2}\frac{d(g_2 - g_3)}{dt}\\
\frac{\partial\eta}{\partial y} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\right\} = \frac{1}{2}\frac{d(g_3 - g_1)}{dt}\\
\frac{\partial\zeta}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}\right\} = \frac{1}{2}\frac{d(g_1 - g_2)}{dt}
\end{aligned}\right\}$$

(*) Wissenschaftliche Abhandlungen, Hydrodynamik. pag. 100.

osservando queste e le (4) e (5) del §. 2, la (a) diviene:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{dt} &= \frac{de_1}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\frac{de_2}{dt}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{de_3}{dt}\frac{\partial u}{\partial z}+\\
&\quad+\frac{1}{3}\frac{d}{dt}(g_1-g_2)\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{1}{3}\frac{d(g_3-g_1)}{dt}\frac{\partial v}{\partial z},\\
\frac{d\mu}{dt} &= \frac{de_2}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{de_3}{dt}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{de_1}{dt}\frac{\partial v}{\partial x}+\\
&\quad+\frac{1}{3}\frac{d(g_2-g_3)}{dt}\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{3}\frac{d(g_1-g_2)}{dt}\frac{\partial w}{\partial x},\\
\frac{d\nu}{dt} &= \frac{de_3}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{de_1}{dt}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{de_2}{dt}\frac{\partial w}{\partial y}+\\
&\quad+\frac{1}{3}\frac{d(g_3-g_1)}{dt}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{1}{3}\frac{d(g_2-g_3)}{dt}\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}\right\}\ldots (2)$$

Queste ci mostrano che quelle particelle liquide per le quali in un istante qualunque si ha:

$$\frac{de_1}{dt}=\frac{de_2}{dt}=\frac{de_3}{dt}=\frac{d(g_2-g_3)}{dt}=\frac{d(g_3-g_1)}{dt}=\frac{d(g_1-g_2)}{dt}=0$$

si ha pure contemporaneamente:

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{d\mu}{dt}=\frac{d\nu}{dt}=0,$$

cioè:

Le particelle liquide che hanno le torsioni stazionarie, hanno contemporaneamente stazionaria la flessione.

§. IV.

In questo e nei successivi §§. denoteremo sempre con u, v, w, le componenti della velocità di un fluido incompressibile, nel punto (x, y, z); con ξ, η, ζ, e λ, μ, ν rispettivamente le componenti della velocità di rotazione e della velocità di flessione della particella (x, y, z); le ultime sei quantità saranno pertanto date dalle (p) e (5) del §. 2.

Prendiamo a considerare l' espressione differenziale

$$\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz\,,$$

le condizioni necessarie e sufficienti perchè essa sia un differenziale esatto, sono osservando le (5) del §. 2;

$$\lambda = \mu = \nu = 0\,.$$

In quelle porzioni del liquido ove esse saranno verificate, esisterà una funzione $\psi(x, y, z)$ tale che:

$$\xi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,,\ \eta = \frac{\partial\psi}{\partial y}\,,\ \zeta = \frac{\partial\psi}{\partial z}\,;$$

la funzione ψ chiameremo potenziale di rotazione, ed avremo:

In quelle parti del liquido ove le particelle non hanno flessioni esiste un potenziale di rotazione, ed inversamente ove esiste un potenziale di rotazione le particelle non hanno flessioni.

Il potenziale di rotazione soddisfa all'equazione $\Delta^2=0$; infatti:

$$\Delta^2 \psi = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Applicando notissimi teoremi d'analisi si ha pertanto:

Quando è dato il moto vorticoso alla superficie di uno spazio semplicemente connesso in cui esiste un potenziale di rotazione, il moto vorticoso risulta determinato anche nell' interno di detto spazio (e viceversa).

Se alla superficie del medesimo spazio non vi è moto vorticoso, questo non esiste neppure nell' interno (e viceversa).

Ove esiste un potenziale di rotazione le equazioni differenziali delle linee vorticose sono

$$\frac{dx}{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \psi}{\partial z}}$$

cioè:

In uno spazio ove esiste un potenziale di rotazione $\psi(x, y, z)$, le linee vorticose sono le traiettorie ortogonali delle superficie $\psi = \text{cost.}$

Nel caso che fosse ad es.

$$u = \omega y \;, \; v = -\omega x \;, \; w = c$$

essendo c ed ω costanti, si avrebbe:

$$\xi = \eta = 0 \;, \; \zeta = \omega;$$

esiste dunque un potenziale di rotazione ωz, e le linee vorticose sono le traiettorie ortogonali dei piani $z = \text{cost}$. Cioè: nel caso di un liquido girante intorno ad una retta con velocità costante ω, esiste un potenziale di rotazione; e le rette parallele all' asse di rotazione sono linee vorticose.

Introducendo ora una funzione analoga al flusso di *W. Thomson*, cioè l' integrale:

$$V = \int_s \xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz$$

esteso ad una linea s, e considerando le linee le quali hanno le tangenti nelle direzioni degli assi di flessione*, ossia le linee:

$$\frac{dx}{\lambda} = \frac{dy}{\mu} = \frac{dz}{\nu}$$

si possono generalizzare alcuni teoremi d' *Helmholtz* e *Beltrami*:

Se si chiama vorticosità della linea s l' integrale V, e *linee di flessione* quelle definite dalle precedenti equazioni differenziali, e se analogamente ai *filetti vorticosi di Helmholtz*, ed ai *vorticoidi di Beltrami* consideriamo dei *filetti di flessione* e delle *superficie di flessione*, (quest'ultime essendo cioè superficie luogo continuo delle linee di flessione (generatrici) passanti pei punti di una linea qualunque (direttrice)) dal teorema d'*Hankel* applicato all' integrale V,

$$\int_s \xi dx + \eta dy + \zeta dz = -3 \int_\sigma \left(\lambda \frac{dx}{dn} + \mu \frac{dy}{dn} + \nu \frac{dz}{dn} \right) d\sigma$$

si deducono secondo metodi noti, i seguenti teoremi:

I. Se per un punto qualunque del liquido, si conduce un elemento piano infinitesimo, la vorticosità del contorno di esso, diviso per il triplo della sua area, è uguale alla componente secondo la sua normale, della velocità di flessione della particella che lo contiene.

II. La vorticosità d' una linea qualunque chiusa, tracciata sopra una superficie di flessione, è uguale a zero.

III. Tutte le linee chiuse tracciate longitudinalmente o trasversalmente sopra una superficie tubulare chiusa, di flessione, hanno uguale vorticosità.

IV. Il prodotto della sezione normale di un filetto di flessione per la media velocità di flessione delle particelle di esso, è costante lungo il filetto.

Di qui segue che un filetto di flessione non può mai arrestarsi nell' interno del fluido, ma o è rientrante in se stesso, avendo una forma anulare, o deve raggiungere il contorno del fluido.

Dimostriamo ora una relazione notevole che esiste fra le due costanti di vorticosità d' uno stesso filetto di flessione.

Immaginiamo il filetto diviso in elementi infinitesimi

$$d\,S = d\,s_l \,.\, d\,\sigma$$

essendo $d\,s_l$ l'elemento lineare di una linea di flessione tracciata longitudinalmente sulla superficie del filetto, $d\sigma$ l'elemento di superficie della sezione normale corrispondente all'elemento $d\,s_l$. Sia poi s_t una linea tracciata trasversalmente sulla superficie del filetto e V_l, V_t siano le rispettive costanti di vorticosità longitudinale e trasversale del filetto. Si avrà allora:

$$V_l = \int_{s_l} \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz,$$

$$V_t = \int_{s_t} \xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz.$$

Ora lungo la linea di flessione s_l, si ha:

$$\frac{dx}{ds_l} = \frac{\lambda}{F}\,,\quad \frac{dy}{ds_l} = \frac{\mu}{F}\,,\quad \frac{dz}{ds_l} = \frac{\nu}{F}$$

ove al solito $F = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$; quindi:

$$V_l = \int_{s_l} \frac{\xi\,\lambda + \eta\,\mu + \zeta\,\nu}{F}\,d\,s_l\,.$$

Quanto a V_t si ha dal teorema d'*Hankel*

$$V_t = -\,3\int F\,d\,\sigma\,.$$

e poichè V_l e V_t sono costanti:

$$V_l V_t = -3 \int_{s_l} \int_{\sigma} (\xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu) ds_l d\sigma = -3 \int_S (\xi\lambda + \eta\mu + \zeta\nu) dS.$$

§. V.

Indichiamo con S lo spazio occupato dal liquido e con σ la superficie di S reso che sia semplicemente connesso quando già non lo fosse. Supponendo come faremo sempre, u, v, w monodrome, finite e continue ccn le derivate, abbiamo dal teorema di *Green*, denotando con u_1, v_1, w_1 i valori di u, v, w in un punto qualunque (x_1, y_1, z_1) e con p la normale positiva:

$$u_1 = \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left\{ u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial p} \right\} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\Delta^2 u}{r} dS,$$

e due analoghe per v_1, w_1; ed osservando le (5) del §. 2.

$$\left.\begin{aligned}
u_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{u \partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial p} \right) d\sigma + \frac{3}{2\pi} \int_S \frac{\lambda}{r} \, dS, \\
v_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{v \partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial p} \right) d\sigma + \frac{3}{2\pi} \int_S \frac{\mu}{r} \, dS. \\
w_1 &= \frac{1}{4\pi} \int_\sigma \left(\frac{w \partial \frac{1}{r}}{\partial p} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial p} \right) d\sigma + \frac{3}{2\pi} \int_S \frac{\nu}{r} \, dS.
\end{aligned}\right\} \cdots (1)$$

Queste ci mostrano che:

I. La velocità è determinata in ciascun punto, dati che siano il moto alla superficie ed i filetti di flessione.

II. Se le particelle della superficie sono in quiete, non è possibile alcun moto nell' interno senza produzione di filetti di flessione.

Inoltre se le particelle della superficie sono in quiete, come si può supporre per un liquido esteso indefinitamente, in cui u, v, w tendano a zero al crescere indefinito di r, si possono interpretare le precedenti equazioni dicendo che il moto avviene come se ciascuna particella che ha flessione, inducesse istantaneamente in ciascun altro punto (x, y, z), una velocità δp di cui le componenti fossero:

$$\delta u_1 = \frac{3}{2\pi}\frac{\lambda\, dS}{r}, \quad \delta v_1 = \frac{3}{2\pi}\frac{\mu\, dS}{r}, \quad \delta w_1 = \frac{3}{2\pi}\frac{\nu\, dS}{r}.$$

Se ϑ è l' angolo che la direzione della velocità δp fa con la direzione dell' asse di flessione, avremo:

$$\delta p = \frac{3}{2\pi}\frac{F\, dS}{r},$$

$$\lambda\, \delta u_1 + \mu\, \delta v_1 + \nu\, \delta w_1 = F\, \delta p \cos\vartheta = \frac{3}{2p}\frac{F^2 dS}{r}\cos\vartheta,$$

$$\lambda\, \delta u_1 + \mu\, \delta v_1 + \nu\, \delta w_1 = \frac{3 F^2\, dS}{r}.$$

e quindi:

$$\cos \vartheta = 1$$

cioè:

III. In una massa liquida che si estende indefinitamente ed è in quiete all'infinito, il moto avviene come se ciascuna particella che ha flessione, inducesse istantaneamente in ciascun altro punto, nella direzione dell'asse di flessione, una velocità proporzionale al volume della particella, ed alla sua velocità di flessione, ed inversamente proporzionale alla distanza.

Vediamo ora come si possono determinare ξ, η, ζ noti che siano i filetti di flessione che esistono nel liquido.

Essendo λ, μ, ν funzioni note di x, y, z, le tre equazioni differenziali:

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 3\lambda \, , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} = 3\mu \, , \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} = 3\nu \, ,$$

e l'identità:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \, ,$$

servono a determinare le ξ, η, ζ, L'integrazione di queste equazioni, si effettua in modo noto (*), e si ha,

(*) V. *Helmholtz*, Op. cit. pag. 114.

denotando con ξ_a , η_a , ζ_a i valori di ξ , η , ζ in un punto qualunque (a , b , c):

$$(2) \dots \left\{ \begin{aligned} \xi_a &= \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial R}{\partial b} - \frac{\partial Q}{\partial c}, \\ \eta_a &= \frac{\partial A}{\partial b} + \frac{\partial P}{\partial c} - \frac{\partial R}{\partial a}, \\ \zeta_a &= \frac{\partial A}{\partial c} + \frac{\partial Q}{\partial a} - \frac{\partial P}{\partial b}. \end{aligned} \right.$$

ove

$$A = \int \frac{\varphi}{r} dS,$$

$$P = -\frac{3}{4\pi} \int \frac{\lambda dS}{r},$$

$$Q = -\frac{3}{4\pi} \int \frac{\mu dS}{r},$$

$$R = -\frac{3}{4\pi} \int \frac{\nu dS}{r}.$$

Nel caso di un liquido esteso indefinitamente ed in quiete all' infinito la funzione A si annulla, e si ha:

$$\left. \begin{aligned} \xi_a &= \frac{3}{4\pi} \int \frac{(y-b)\,\nu - (z-c)\,\mu}{r^3} dS, \\ \eta_a &= \frac{3}{4\pi} \int \frac{(z-c)\,\lambda - (x-a)\,\nu}{r^3} dS, \\ \zeta_a &= \frac{3}{4\pi} \int \frac{(x-a)\,\mu - (y-b)\,\lambda}{r^3} dS. \end{aligned} \right\} \dots (2)_1$$

Il moto vorticoso avviene dunque come se ciascuna particella che ha flessione, inducesse istantaneamente in ciascun' altra particella una rotazione infinitesima $\delta\tau$ di componenti:

$$\delta\xi_a = \frac{3}{4\pi}\frac{(y-b)\nu-(z-c)\mu}{r^3}dS\,,$$

$$\delta\eta_a = \frac{3}{4\pi}\frac{(z-c)\lambda-(x-a)\nu}{r^3}dS\,,$$

$$\delta\zeta_a = \frac{3}{4\pi}\frac{(x-a)\mu-(y-b)\lambda}{r^3}dS\,;$$

e poichè da queste si ha:

$$\delta\tau = \frac{3\,F\,\mathrm{sen}\,\widehat{rF}\;dS}{4\,\pi\,r^2}\,,$$

$$(x-a)\,\delta\xi_a+(y-b)\,\delta\eta_a+(z-c)\,\delta\zeta_a=0\,,$$

$$\lambda\,\delta\xi_a+\mu\,\delta\eta_a+\nu\,\delta\zeta_a=0\,,$$

possiamo dire che:

IV. Il moto vorticoso avviene come se ciascuna particella che ha flessione, inducesse istantaneamente in ciascun altra particella liquida, una rotazione di cui l' asse fosse normale all'asse di flessione, ed alla congiungente i due centri delle particelle; e di cui la velocità angolare fosse proporzionale alla velocità di flessione della particella inducente, al volume della medesima, ed al seno dell' angolo che la congiungente suddetta fa con l' asse di flessione, ed infine inversamente proporzionale al quadrato della distanza.

Quando si avesse un unico filetto elementare chiuso di flessione, si possono le (2) porre sotto la forma:

$$\xi_a = \frac{3h}{4\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma ,$$

$$\eta_a = \frac{3h}{4\pi}\frac{\partial}{\partial b}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma ,$$

$$\zeta_a = \frac{3h}{4\pi}\frac{\partial}{\partial c}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma ;$$

ove h denota l' intensità del filetto di flessione ossia il prodotto della sua sezione normale per la velocità media di flessione delle sue particelle, σ è una superficie qualunque totalmente terminata all'asse del filetto, e scelta in modo ad evitare il punto (a, b, c), ed n la normale a σ (*).

Il potenziale di rotazione esistente nello spazio esterno ad un unico filetto elementare chiuso di flessione, è dunque

(6) V. *Beltrami* Cinematica dei fiuidi §. 17.

$$\psi_a = \frac{3h}{4\pi} \int_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} d\sigma .$$

Indicando con $\widehat{rn}$ l'angolo che il raggio vettore r, e la normale n corrispondenti ad uno stesso punto di σ fanno fra loro, si ha:

$$\psi_a = \frac{3h}{4\pi} \int \frac{\cos \widehat{r\,n}\, d\sigma}{r^2} ;$$

ossia:

Il potenziale di rotazione esistente nello spazio esterno ad un filetto elementare e chiuso di flessione, è in ogni punto, uguale al valore che avrebbe in esso il potenziale elettromagnetico di una corrente elettrica, la quale scorresse lungo l'asse del filetto e la cui intensità fosse data dal prodotto dell' intensità del filetto moltiplicato per $\frac{3}{4\pi}$.

§. VI.

Helmholtz ha determinato le linee di flusso nel caso d' un liquido in cui esistano soltanto filetti vorticosi circolari, disposti simmetricamente intorno ad una linea retta, ossia tali che i loro piani siano normali a quella retta, ed i loro centri siano sulla medesima.

Prendendo un sistema di coordinate cilindriche:

$$x = \varphi \cos \vartheta \quad , \quad y = \varphi \,\text{sen}\, \vartheta \quad , \quad z = z \,,$$

egli ha posto:

$$\xi = - \pi \,\text{sen}\, \vartheta \quad , \quad \eta = \pi \cos \vartheta \quad , \quad \zeta = 0 \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

ove π può essere funzione di φ e z soltanto, perchè venga soddisfatta l' identità:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \,.$$

Noi cercheremo le linee di flessione. Dalle (1) abbiamo:

$$\lambda = \frac{1}{3}\frac{\partial \pi}{\partial z} \cos \vartheta \quad , \quad \mu = \frac{1}{3}\frac{\partial \pi}{\partial z} \,\text{sen}\, \vartheta \quad , \quad \nu = - \frac{1}{3} \left\{ \frac{\pi}{\varphi} + \frac{\partial \pi}{\partial \varphi} \right\} \ldots \; (2)$$

Delle equazioni differenziali delle linee di flessione

$$\frac{dx}{\lambda} = \frac{dy}{\mu} = \frac{dz}{\nu} \quad , \;.\;.\;.\; (3)$$

si conosce un moltiplicatore: l' unità, infatti dalle (5) del §. 2. si ha identicamente:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} = 0 \,.$$

Ora se si pone:

$$\Lambda = \lambda \cos \vartheta + \mu \,\text{sen}\, \vartheta \;,$$

$$\Theta = - (\lambda \,\text{sen}\, \vartheta - \mu \cos \vartheta) \frac{1}{\rho} , \quad (4)$$

l' equazioni differenziali (in coordinate cilindriche) delle linee di flessione, saranno

$$\frac{d\varphi}{\Lambda} = \frac{d\theta}{\Theta} = \frac{dz}{\nu}, \; . \; . \; . \qquad (5)$$

e perchè φ è il determinante funzionale delle x , y , z rispetto alle φ , ϑ , z ed 1 è un moltiplicatore delle (3), sarà φ un moltiplicatore delle (5):

Ma si ha dalle (4) :

$$\Lambda = \frac{1}{3}\frac{\partial \pi}{\partial z}, \; \Theta = 0 ;$$

onde dalla seconda di queste si ricava subito un integrale delle (5):

$$\vartheta = \text{costante} ;$$

pel principio dell' ultimo moltiplicatore di Jacobi, si avrà quindi anche l' integrale ;

$$\int (\Lambda \, \varphi \, d \, z - \nu \, \varphi \, d \, \varphi) = \text{costante}$$

e siccome:

$$\Lambda \, \varphi \, d \, z - \nu \, \varphi \, d \, \varphi = \tfrac{1}{3} \, d \, (\pi \, \varphi)$$

l' integrale sarà :

$$\pi \, \varphi = \text{costante}.$$

Le equazioni in termini finiti, delle linee di flessione sono cioè :

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \pi\,\varphi = \text{costante} \\ \vartheta = \text{costante} \end{cases}$$

Determiniamo per ultimo, come avviene il moto in una massa liquida estesa indefinitamente ed in quiete all' infinito, quando esistono soltanto filetti di flessione circolari e disposti simmetricamente intorno ad una retta, come nel caso precedente erano i filetti vorticosi.

Facciamo vedere che tale distribuzione di filetti di flessione, è possibile.

Prendendo ancora le coordinate cilindriche φ, ϑ, z avremo:

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \lambda = -\mathrm{F} \operatorname{sen} \vartheta \ , \quad \mu = \mathrm{F} \cos \vartheta \ , \quad \nu = 0 \, ,$$

ove F denota la velocità di flessione della particella (x, y, z) ossia (φ, ϑ, z); e per la simmetria supposta, sarà

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \vartheta} = 0 \, .$$

Dalle (1) del §. V. si ha nel caso che le particelle all' infinito siano in quiete:

$$(8) \ldots\ldots \quad u_1 = \frac{3}{2\pi} \int \frac{\lambda \, d\mathrm{S}}{r} \ , \quad v_1 = \frac{3}{2\pi} \int \frac{\mu \, d\mathrm{S}}{r} \ , \quad w_1 = \int \frac{\nu \, d\mathrm{S}}{r}$$

e quindi:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}=-\frac{3}{2\pi}\int\frac{\lambda(x-x_1)+\mu(y-y_1)+\nu(z-z_1)}{r^3}dS.$$

Ma :

$$\int\frac{\lambda(x-x_1)+\mu(y-y_1)+\nu(z-z_1)}{r^3}dS=$$

$$=\varphi_1\int\int\int\frac{-F\varphi\operatorname{sen}(\vartheta-\vartheta_1)\,d\varphi\,d\vartheta\,dz}{\left\{\varphi^2+\varphi_1^2-2\varphi\varphi_1\cos(\vartheta-\vartheta_1)+(z-z_1)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

Se F è indipendente da ϑ (come appunto si suppone), dovendo l'integrazione rispetto a ϑ eseguirsi da 0 a 2π, l' integrale del 2.° membro sarà nullo, onde l' equazione di continuità vien soddisfatta.

Cominciamo ora a cercare le linee di flusso. Le (8), a causa delle (7) divengono;

$$u_1=-\frac{3}{2\pi}\int\int\int\frac{F\operatorname{sen}\vartheta\,.\,\varphi\,.\,d\varphi\,.\,d\vartheta\,.\,dz}{\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2-2\varphi\varphi_1\cos(\vartheta-\vartheta_1)+(z-z_1)^2}},$$

$$v_1=\frac{3}{2\pi}\int\int\int\frac{F\cos\vartheta\,.\,\varphi\,.\,d\varphi\,.\,d\vartheta\,.\,dz}{\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2-2\varphi\varphi_1\cos(\vartheta-\vartheta_1)+(z-z_1)^2}},$$

$$w_1=0\,.$$

Indicheremo con V_{R1} la componente della velocità del punto (φ_1, ϑ_1, z_1), secondo la retta che va da esso all' origine delle coordinate; i coseni di direzione di questa retta essendo

$$\frac{\varphi_1 \cos \vartheta_1}{\sqrt{\varphi_1^2 + z_1^2}}\,, \quad \frac{\varphi_1 \operatorname{sen} \vartheta_1}{\sqrt{\varphi_1^2 + z_1^2}}\,, \quad \frac{z_1}{\sqrt{\varphi_1^2 + z_1^2}}\,,$$

sarà :

$$V_{R1} = \frac{u_1 \varphi_1 \cos \vartheta_1 + v_1 \varphi_1 \operatorname{sen} \vartheta_1}{\sqrt{\varphi_1^2 + z_1^2}} =$$

$$-\frac{3}{2\pi}\int\int\int \frac{\varphi \varphi_1 F}{\sqrt{\varphi_1^2 + z_1^2}} \frac{\operatorname{sen}(\vartheta - \vartheta_1)\, d\varphi\, d\vartheta\, dz}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi^2 - 2\varphi\varphi_1 \cos(\vartheta - \vartheta_1) + (z - z_1)^2}},$$

e poichè l' integrazione rispetto a ϑ deve eseguirsi fra 0 e 2π,

$$V_{R1} = 0\,.$$

Osservando ora che l'origine è arbitraria sull' asse di simmetria, si deduce che la direzione della velocità in un punto qualunque, coincide sempre con la normale condotta per esso, al piano determinato dal punto stesso e dall'asse di simmetria. Quindi :

Tutte le linee circolari coi centri sull' asse di simmetria, ed i cui piani sono normali ad esso, sono linee di flusso; in particolare le linee di flessione sono contemporaneamente linee di flusso.

La velocità nel punto qualunque (x_1 , y_1 , z_1) sarà dunque :

$$U_1 = - u_1 \operatorname{sen} \vartheta_1 + v_1 \cos \vartheta_1 =$$

$$\frac{3}{2\pi}\int\int\int\frac{F\,\varphi\cos(\vartheta-\vartheta_1)\,d\varphi\,d\vartheta\,dz}{\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2-2\,\varphi\,\varphi_1\cos(\vartheta-\vartheta_1)+(z-z_1)^2}}=$$

$$=\frac{3}{2\pi}\int\int\int\frac{F\,\varphi\cos\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dz}{\sqrt{\varphi^2+\varphi_1^2-2\,\varphi\,\varphi_1\cos\vartheta+(z-z_1)^2}}\qquad(9).$$

La determinazione delle linee vorticose si eseguisce immediatamente, con un calcolo ben noto.

Denotando con ξ_1, η_1, ζ_1 i valori di ξ, η, ζ nel punto x_1, y_1, z_1, avremo:

$$\xi_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z_1}-\frac{\partial w_1}{\partial y_1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial U_1}{\partial z_1}\cos\vartheta_1$$

$$\eta_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial z_1}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial U_1}{\partial z_1}\operatorname{sen}\vartheta_1$$

$$\zeta_1=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{\varphi_1}+\frac{\partial U_1}{\partial \varphi_1}\right)$$

Chiamando w_{φ_1}, w_{ϑ_1}, w_{z_1} le componenti della velocità vorticosa della particella intorno alla normale alla superficie $\varphi=\varphi_1$, $\vartheta=\vartheta_1$, $z=z_1$ avremo quindi

$$w_{\varphi_1}=\frac{1}{2}\frac{\partial U_1}{\partial z_1},\quad w_{\vartheta_1}=0\quad w_{z_1}=-\frac{1}{2}\left(\frac{U_1}{\varphi_1}+\frac{\partial U_1}{\partial\varphi_1}\right)$$

onde

$$\varphi_1\,w_{\varphi_1}=\frac{\partial(\frac{1}{2}U_1\varphi_1)}{\partial z_1},\quad \varphi_1\,w_{\vartheta_1}=-\frac{\partial(\frac{1}{2}U_1\varphi_1)}{\partial\varphi_1},\quad w_{z_1}=0$$

il che dimostra che le equazioni delle linee vorticose sono

$$\vartheta_1 = \text{costante} \quad U_1 \varphi_1 = \text{costante}.$$

Le linee vorticose giacciono dunque in piani che passano per l'asse di simmetria.