Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Giulio Lazzeri

Sulla rappresentazione piana delle superfici sviluppabili razionali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 3 (1883), p. 79-170

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1883_1_3__79_0>

SULLA RAPPRESENTAZIONE PIANA

DELLE

SUPERFICI SVILUPPABILI RAZIONALI

TESI DI LAUREA

DEL

DOTT. GIULIO LAZZERI

SULLA RAPPRESENTAZIONE PIANA

DELLE

SUPERFICI SVILUPPABILI RAZIONALI

CAPITOLO I.

Classificazione delle superficie sviluppabili. Rappresentazione piana delle superfici sviluppabili razionali.

§. 1. Sappiamo che le singolarità ordinarie di una superficie sviluppabile si possono esprimer tutte in funzione di tre di esse e delle singolarità straordinarie. Per fare uno studio sulla rappresentazione piana delle superficie sviluppabili razionali, ci converrà classificarle relativamente al loro ordine e a quello del loro spigolo di regresso. Cominciamo perciò a cercare delle formule analoghe a quelle di Cayley-Salmon, ma che esprimano tutte le singolarità ordinarie in funzione delle due suddette, del genere e delle singolarità straordinarie.

Sia dunque C una curva gobba, Σ la sviluppabile formata dalle sue tangenti, e chiamiamo;

p il genere di C e Σ,

n la classe di Σ;

m l' ordine, numero dei punti in un piano;

r il rango, numero delle tangenti che incontrano una retta arbitraria, che rappresenta la classe della curva C e l' ordine della sviluppabile Σ;

α il numero dei piani osculatori stazionari, cioè che contengono 4 punti consecutivi della curva C;

β Il numero dei punti stazionari;

x il numero dei punti di un piano, pei quali passan due tangenti distinte di C, cioè l' ordine della curva doppia;

y il numero dei piani per un punto che contengono due tangenti distinte, cioè la classe della sviluppabile inviluppo dei piani tangenti doppi;

h il numero dei punti doppi apparenti, cioè delle rette per un punto che contengon due punti C;

g il numero delle rette in un piano per le quali passan due piani osculatori di C;

γ il numero delle tangenti alla curva che la incontrano in un' altro punto.

Oltre a queste singolarità ordinarie supponiamo che la curva C abbia;

H punti doppi;

G piani biosculatori, cioè tangenti doppi a Σ;

v tangenti stazionarie, che cioè contengono tre punti consecutivi di C;

d tangenti in due punti distinti.

Sappiamo che chiamando;

μ l' ordine;

ν la classe;

δ il numero dei nodi;

k » delle cuspidi;

τ » delle tangenti doppie

i » dei flessi;

di una curva piana, si ha

$$\begin{aligned} 2p-2 &= \nu + k - 2\mu \\ &= \mu + i - 2\nu \\ &= \mu(\mu-3) - 2(\delta + k) \\ &= \nu(\nu-3) - 2(\tau + i). \end{aligned}$$

Se ora tagliamo la sviluppabile con un piano qualunque, le singolarità della sezione sono

$$\mu = r\ ,\ \nu = n\ ,\ \delta = x + d\ ,\ \tau = g + G\ ,\ k = m + \nu\ ,\ i = \alpha$$

per cui si avrà

$$\begin{aligned} 2p-2 &= m + n + v - 2r \\ &= r + \alpha - 2n \\ &= r(r-3) - 2(x+m+d+v) \\ &= n(n-3) - 2(g+G+\alpha). \end{aligned}$$

Se invece proiettiamo la curva C da un punto qualunque, le singolarità del cono proiettante sono

$$\mu = m\ ,\ \nu = r\ ,\ \delta = h + H\ ,\ \tau = y + d\ ,\ k = \beta\ ,\ i = n + v$$

Anche per esso valgon le formule precedenti di Plücher, quindi abbiamo

$$\begin{aligned} 2p-2 &= r+\beta-2m \\ &= m+n+v-2r \\ &= m(m-3)-2(h+H+\beta) \\ &= r(r-3)-2(y+n+d+v) \end{aligned}$$

Da queste si ricava

$$n=2(r-1+p)-(m+v)$$
$$\alpha=6(p-1)+3r-2(m+v)$$
$$\beta=2(p+m-1)-r$$
$$x=\frac{1}{2}(r-1)(r-2)-(m+d+v+p)$$
$$h=\frac{m}{r}(m-7)+r-\mathrm{H}-3(p-1)$$
$$y=\frac{r}{2}(r-7)+m-d-3(p-1)$$
$$g=\frac{n}{2}(n-3)-\mathrm{G}-\alpha-(p-1)$$

E per le sviluppabili di genere 0 e senza singolarità straordinarie si trova, ponendo

$$p=\mathrm{H}=\mathrm{G}=v=d=0$$

nelle formule precedenti,

$$n=2(r-1)-m$$
$$\beta=2(m-1)-r$$
$$\alpha=3(r-2)-2m$$
$$x=\frac{1}{2}(r-1)(r-2)-m$$
$$h=\frac{m}{2}(m-7)+r+3$$
$$y=\frac{m}{2}(r-7)+m+3$$
$$g=2r(r-m-5)+\frac{m}{2}(m+11)+12$$

Così abbiamo espresso tutte le singolarità ordinarie di una sviluppabile razionale in funzione di r e m. Questi due numeri però non possono prendersi affatto ad arbitrio, ma scelto per es. r, m deve restare fra certi limiti. Infatti nessuno dei numeri precedenti, ed in particolare α e β, può esser negativo; quindi

$$\frac{r}{2}+1 \leq m \leq \frac{3}{2}(r-2).$$

§. 2. Zeuthen nella sua memoria « *Sur les singula-« rités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface « developpable* » (Annali di Matematica. Serie II, Tomo III, 1870) ha determinato molte altre singolarità delle curve gobbe.

Fra le altre trova il numero da noi indicato con γ, dato da

$$\gamma = r\,(m-4) + 4h - 2m\,(m-3) - 2\upsilon$$

Nel caso delle sviluppabili razionali, senza altre singolarità straordinarie che v tangenti stazionarie, sarà dunque

$$\gamma = m\,(r-8) + 12 - 2v$$

Conservando sempre l'ipotesi che oltre alle v tangenti stazionarie di C non esistano altre singolarità straordinarie, e contrassegnando con m_2, n_2 .... le singolarità della curva doppia e della sviluppabile formata dalle sue tangenti, lo stesso Zeuthen (l. c. p. 194) ha trovato

$$\begin{aligned}
m_2 &= x \\
r_2 &= 2g + r\,(n-2) - n\,(n-1) \\
\beta_2 &= r(m-4) + 4h - 2m(m-3) + v(r-8) \\
H_2 &= -r^3 + 13r^2 + 8n - 42r + x(3r-26) \\
G_2 &= 0 \\
v_2 &= v;
\end{aligned}$$

e queste formule, quando sia $p=0$, in virtù delle precedenti posson porsi sotto la forma

$$
\begin{aligned}
m_2 &= \frac{1}{2}(r-1)(r-2)-m \\
r_2 &= 2r(r-7)-m(r-6)+18 \\
\beta_2 &= (m+v)(r-8)+12 \\
H_2 &= \frac{r^2}{2}(r-9)+16r-3m(r-6)-42 \\
G_2 &= 0 \\
v_2 &= v.
\end{aligned}
$$

E queste sono sufficienti per determinare tutte le altre singolarità della curva doppia.

Similmente indicando con m_1, n_1 ... le singolarità della sviluppabile inviluppo dei piani tangenti doppi, si ha sempre nell' ipotesi suddetta (l. c. p. 193)

$$
\begin{aligned}
n_1 &= y \\
r_1 &= 2h+r(m-2)-m(m-1) \\
\alpha_1 &= r(n-4)+4g-2n(n-3)+v(r-8) \\
G_1 &= -r^3+13r^2+8m-42r+y(2r-26) \\
H_1 &= 0 \\
v_1 &= v,
\end{aligned}
$$

che nel caso in cui sia $p=0$, divengono

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \frac{r}{2}(r-7)+m+3 \\
r_1 &= mr-6(m-1) \\
\alpha_1 &= 2r(r-9)-m(r-8)+28 \\
G_1 &= \frac{r^2}{2}(r-21)+3m(r-6)+58r2-78 \\
H_1 &= 0 \\
v_1 &= v.
\end{aligned}
$$

E da queste si posson dedurre le altre singolarità.

Possiamo calcolare il genere p_2 della curva doppia mediante la formula

$$p_2=\frac{1}{2}(r_2+\beta_2)-(m_2-1)$$

e il genere p_1 della sviluppabile inviluppo dei piani tangenti doppi, coll' altro

$$p_1=\frac{1}{2}(r_1+\alpha_1)-(n_1-1)$$

e troviamo

$$p_1=p_2=\frac{r}{2}(r-11)+15\,.$$

Questa ci mostra che il genere della curva doppia e della sviluppabile inviluppo dei piani tangenti doppi di C, dipende solamente dall' ordine della sviluppabile Σ data. In particolare il genere è 0 solo quando $r=5$, o $r=6$ cioè se la sviluppabile Σ è di 5.⁰ o 6.⁰ ordine.

§. 3. Applicando le formule trovate alle sviluppabili dei primi 7 ordini, potremo costruire l' unita tabella in parte già calcolata da Schwarz (*).

Le superfici sviluppabili dei primi 7 ordini che possono esistere, sono dunque comprese nella tabella stessa. Che poi esistano effettivamente tutte, si dimostrerà in seguito, quando studiandole ad una ad una, ne troveremo le equazioni e le proprietà.

(*) Schwarz. *De superficibus in planum explicabilibus primorum septem ordinum* (Crelle. Bd. 64, 1864).

Lo stesso Schwarz poi (l. c.) dimostra che le superfici sviluppabili dei primi 7 ordini sono tutte razionali.

Ma fra breve dimostreremo che tutte le sviluppabili razionali sono rappresentabili univocamente su di un piano; per cui vediamo subito l'importanza dello studio della rappresentazione di queste superfici, poichè, arrestandoci a considerare le sviluppabili di ordine non superiore a 7, possiamo per mezzo di essa studiare le proprietà di tutte e non di una classe speciale di esse.

La tabella costruita ci mostra che mentre non vi è che una sola specie di sviluppabili del 4.° e 5.° ordine reciproche di se stesse, quelle del 6.° e 7.° ordine si dividono in 3 gruppi ciascuna. Quella del 6.° ordine si distinguono in tre gruppi, di cui quelle del primo hanno lo spigolo di regresso di 4.° ordine, quelle del secondo lo hanno del 5.°, e quelle del terzo del 6.° ordine. Quelle del 2.° gruppo son reciproche di se stesse, quelle del 1.° son reciproche di quelle del 3.°. Le sviluppabili del 7.° ordine si distinguono pure in tre gruppi, di cui il primo ha lo spigolo di regresso del 5.° ordine, quelle del secondo del 6.° e quelle del terzo del 7.° ordine. Quelle del 2.° gruppo son reciproche di se stesse, quelle del 1.° son reciproche di quelle del 3.°.

Per le sviluppabili di 6.° ordine possiamo enunciare i due teoremi seguenti.

Le tangenti alla curva doppia di una sviluppabile generale del 6.° *ordine del* 1.°, 2.° *o* 3.° *gruppo costituiscono una sviluppabile del* 6.° *ordine del* 3.°, 2.° *o* 1.° *gruppo respettivamente.*

La sviluppabile inviluppo dei piani tangenti doppi dello spigolo di regresso di una sviluppabile del 6.° *ordine del* 1.°, 2.° *o* 3.° *gruppo è del* 6.° *ordine e del* 3.°, 2.° *o* 1.° *gruppo respettivamente.*

§. 4. Premesse queste generalità sulle singolarità delle sviluppab.li in generale e in particolare di quelle razionali, vediamo come queste si possan rappresentare univocamente su di un piano.

Una superficie sviluppabile può considerarsi come il luogo delle tangenti a una curva gobba C che è il suo spigolo di regresso. Se la sviluppabile, e quindi anche la C è razionale, le coordinate di un punto qualunque y di questa curva potranno porsi sotto la forma

$$(1) \qquad \rho\, y_i = \Theta_i(\lambda)\,,$$

dove le Θ_i son funzioni razionali intere di grado m (ordine di C) del parametro λ.

Le coordinate di un punto z di C infinitamente vicino a y saranno

$$\rho\, z_i 2_i = \Theta_i(\lambda + d\lambda),$$

e quindi le coordinate di un punto x della retta $(y\,z)$ saranno

$$\rho\, x_i = \rho(\mu\, y_i + \nu\, z_i) = \mu\,\Theta_i(\lambda) + \nu\,\Theta_i(\lambda + d\lambda).$$

Ma

$$\Theta_i(\lambda + d\lambda) = \Theta_i(\lambda) + \frac{\partial\,\Theta_i(\lambda)}{\partial\lambda}\, d\lambda,$$

ove si trascurino le potenze superiori di $d\lambda$, quindi

$$\rho\, x_i = (\mu + \nu)\,\Theta_i(\lambda) + \frac{\partial\,\Theta_i(\lambda)}{\partial\,\lambda}\,\nu.\, d\lambda$$

ossia $$\rho\, x_i = \Theta_i(\lambda) + \frac{\nu.\, d\lambda}{\mu + \nu}\,\frac{\partial\,\Theta_i(\lambda)}{\partial\,\lambda}$$

e ponendo $\frac{\nu\, d\lambda}{\mu+\nu} = \zeta_1$

$$\rho\, x_i = \Theta_i(\lambda) + \zeta_1 \frac{\partial\, \Theta_i(\lambda)}{\partial\, \lambda}.$$

I secondi membri di queste eguaglianze si possono ridurre funzioni omogenee di grado m di tre variabili, ponendo $\lambda = \frac{\xi}{\eta}$, $\zeta_1 = \frac{\zeta}{\eta}$ e moltiplicandoli per η^m. Si ha così

$$(2) \qquad \rho\, x_i = \Theta_i + \zeta \frac{\partial\, \Theta_i}{\partial\, \xi}$$

dove le Θ vanno considerate ora come funzioni omogenee di grado m delle variabili ξ, η. Queste sono dunque le equazioni che ci rappresentano le coordinate dei punti della sviluppabile Σ formata dalle tangenti alla curva C come funzioni omogenee di grado m di tre variabili ξ, η, ζ, e sono le stesse a cui Clebsch è giunto per altra via, (*) considerando le sviluppabili come un caso speciale delle superfici rigate.

Considerando le ξ, η, ζ come coordinate omogenee dei punti di un piano, le quazioni stesse stabiliscono una corrispondenza univoca fra i punti di un piano e quelli della sviluppabile Σ, ossia danno la rappresentazione piana della superficie stessa. Studiamo ora le principali proprietà di questa rappresentazione.

§. 5. Nell' equazione (2) ponendo $\xi=0$ si ha

$$\rho\, x_i = \Theta_i(\lambda)$$

che sono l' equazioni della curva C, dunque

(*) Clebsch. *Ueber Abbildung der geradlinigon Flächen* (M. Annalen, Bd. 4).

Lo spigolo di regresso C della sviluppabile Σ è rappresentato dalla retta $\zeta = 0$.

L' imagine della sezione piana ottenuta tagliando Σ con un piano

$$\Sigma \, u_i \, x_i = 0$$

qualunque, si ottiene sostituendo alle x i loro valori (2), cioè sarà

$$\Sigma \, u_i \Theta_i + \zeta \, \Sigma \, u_i \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi} = 0 . \tag{3}$$

Questa equazione essendo ordinata per le potenze di ζ, e il minimo esponente a cui i suoi coefficienti contengono le variabili $\xi \, \eta$ essendo $m-1$, ne resulta che le curve (3) di ordine m hanno il punto ($\xi = 0$, $\eta = 0$) come ($m-1$) — plo.

E facile vedere che le imagini delle sezioni piane devono avere ancora altri punti a comune, di cui si può determinare il numero. Poiche infatti una retta taglia Σ in r punti, due delle curve suddette dovranno tagliarsi in r punti variabili solamente; chiamando dunque x il numero di punti oltre ($\xi = 0$, $\eta = 0$) che hanno a comune tutte, sarà

$$x = m^2 - (m-1)^2 - r = 2\,(m-1) - r + 1 = \beta + 1 .$$

Questi punti devon essr tutti *semplici*, poichè una curva di ordine m che ha un punto $(m-1)$plo non può avere nessun altro punto multiplo a meno che si spezzi.

Chiamando *punti fondamentali* della rappresentazione i punti comuni a tutte le imagini delle sezioni piane, abbiamo dunque che.

Le imagini delle sezioni piane di Σ *sono curve di ordine m con un punto fondamentale* $(m-1)$*—plo* e $\beta+1$ *punti fondamentali semplici.*

§. 6. Per trovare i $\beta+1$ punti fondamentali semplici, notiamo che dovendo le loro coordinate soddisfare le (3), qualunque siano le u, esse dovranno soddisfare alle quattro condizioni

$$\Theta_i + \zeta \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi} = 0$$

Siccome queste possono scriversi

$$(\xi + m\zeta) \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Theta_i}{\partial \eta} = 0,$$

si vede immediatamente che

$$\xi + m\zeta = 0 \quad , \quad \eta = 0$$

sarà un punto fondamentale. Per gli altri β si avrà

$$-\zeta = \frac{\Theta_1}{\frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi}} = \frac{\Theta_2}{\frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi}} = \frac{\Theta_3}{\frac{\partial \Theta_3}{\partial \xi}} = \frac{\Theta_4}{\frac{\partial \Theta_4}{\partial \xi}}.$$

Queste condizioni, sostituendo al rapporto $\frac{\xi}{\eta}$ il parametro λ, possono scriversi

$$\Theta_i(\lambda) = \sigma \frac{\partial \Theta_i(\lambda)}{\partial \lambda}$$

essendo σ un fattore di proporzionalità; ossia, tralasciando gl' infinitesimi di ordine superiore,

$$\Theta_i(\lambda) = \sigma \frac{\Theta_i(\lambda + d\lambda) - \Theta_i(\lambda)}{d\lambda},$$

ossia

$$\Theta_i(\lambda + d\lambda) = \frac{\sigma + d\lambda}{\sigma}\,\Theta_i(\lambda)\,.$$

Adunque per quei valori di λ, pei quali le $\Theta_i(\lambda)$ sono proporzionali alle loro derivate, le $\Theta_i(\lambda)$ stesse son proporzionali anche alle $\Theta_i(\lambda + d\lambda)$ corrispondenti a un valore consecutivo del parametro λ; e quindi abbiamo un punto stazionario o cuspidale dello spigolo di regresso per ognuno di questi valori.

Se λ_1, λ_2 . . . λ_β sono i valori di λ corrispondenti alle β cuspidi di C, su ciascuna delle rette

$$\xi = \lambda_1 \eta\ ,\quad \xi = \lambda_2 \eta\ ,\quad \ldots\quad \xi = \lambda_\beta \eta$$

si troverà un punto fondamentale nei punti ove esse son tagliate respettivamente dalle altre

$$\zeta + \frac{\Theta_i(\lambda_1)}{\dfrac{\partial\Theta_i(\lambda_1)}{\partial\lambda_1}}\eta = 0\ ,\quad \zeta + \frac{\Theta_i(\lambda_2)}{\dfrac{\partial\Theta_i(\lambda_2)}{\partial\lambda_2}}\eta = 0 \ldots \zeta + \frac{\Theta_i(\lambda_\beta)}{\dfrac{\partial\Theta_i(\lambda_\beta)}{\partial\lambda_\beta}}\eta = 0$$

§. 7. Vediamo ora ciò che rappresentano i punti fondamentali.

Le coordinate di un punto fondamentale annullando tutte le x, questi punti non posson più rappresentare punti, ma linee di Σ. Difatti abbiamo il noto teorema relativo alla rappresentazione di una superficie razionale qualunque (*).

Un punto fondamentale r—plo rappresenta una curva di ordine r della superficie che gode della proprietà che le coordinate dei suoi punti sono esprimibili come funzioni razionali di un parametro.

(*) Clebsch — *Ueber Abbildung algebraischen Flächen* (M. Annalen Bd. 1 seite 266).

Così i punti fondamentali semplici

$$\xi=\lambda_s \eta \qquad \xi+\frac{\Theta_i(\lambda_s)}{\frac{\partial\Theta_i(\lambda_s)}{\partial\lambda_s}}\eta=0$$

rappresentano tutti i punti della superficie pei quali è $\xi=\lambda_s\eta$, ossia tutti i punti delle generatrici che passano pei punti cuspidali λ_s.

Similmente il punto

$$\xi+m\zeta=0 \quad , \quad \eta=0$$

rappresenta la generatrice che passa pel punto di C corrispondente al valore ∞ di λ.

Per trovare poi la curva rappresentata dal punto $(\xi=0\ ,\ \eta=0)$, osserviamo che dividendo i secondi membri delle (2) per η^{m-1} e poi ponendo $\xi=0$, $\eta=0$, si annullano le Θ_i senza annullarsi le $\frac{\partial\Theta_i}{\partial\xi}$, quindi la curva di cui è imagine il punto $\xi=0$, $\eta=0$ sarà

$$(4) \qquad x_i=\frac{\partial\Theta_i}{\partial\xi}.$$

Nei punti in cui questa curva è incontrata dalla C, le Θ divengono proporzionali alle loro derivate, quindi.

La curva rappresentata dal punto fondamentale $(r-1)$—*plo* $(\xi=0\ ,\ \eta=0)$. *taglia la curva cuspidale* C *nei suoi punti stazionari.*

Si noti finalmente che le rette

$$\xi=\lambda_s\eta \qquad \eta=0$$

che proiettano i punti fondamentali semplici da quello $(m-1)$—*plo*, rappresentano i punti di C corrispondenti ai valori λ_s, ∞ del parametro λ. Infatti le coordinate di un loro punto qualunque rendono le x_i proporzionali alle Θ_i e alle $\frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi}$ senza annullarle.

§. 8. Dal modo tenuto per trovare le equazioni rappresentative (2) della superficie, risulta immediatamente che dando al rapporto $\frac{\xi}{\eta}$ un valore fisso qualunque λ e lasciando variare l'altro $\frac{\zeta}{\eta}$ si otterranno tutti i punti della generatrice che passa pel punto di C corrispondente a λ, dunque :

Il sistema delle ∞' generatrici di Σ è rappresentato dal fascio di raggi che ha il suo centro nel punto $(m-1)$—*plo* $(\xi=0\ ,\ \eta=0)$.

Anche geometricamente è evidente che le rette di questo fascio devon rappresentare rette della superficie, poichè esse incontrano le imagini delle sezioni piane in un sol punto variabile.

Così una retta qualunque che non passi per nessun punto fondamentale, incontra le imagini delle sezioni piane in m punti, e quindi rappresenta una curva di C di ordine m. Invece una retta che passi per uno o per due punti fondamentali semplici, incontra le imagini delle sezioni piane in $m-1$ o $m-2$ punti variabili, e quindi rappresenta una curva di Σ di ordine $m-1$ o $m-2$.

Anche analiticamente si giunge allo stesso resultato. Infatti colla trasformazione

$$\zeta' = \zeta + a\,\xi + b\,\eta$$

le (2) divengono

$$\rho x_i = \Theta_i - (a\xi + b\eta)\frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi} + \zeta^1 \frac{\partial \Theta_i}{\partial \zeta}.$$

Ponendo $\zeta^1=0$, si ha

$$\rho x_i = \Theta_i - (a\xi + b\eta)\frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi}$$

dunque

Le rette del piano

$$\zeta + a\xi + b\eta = 0$$

rappresentano le curve

$$\rho x_i = \Theta_i - (a\xi + b\eta)\frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi}$$

Dando poi ad a, b i valori speciali che devono avere, onde la retta

$$\zeta + a\xi + b\eta = 0$$

passi per uno o due punti fondamentali, troveremmo che le x verrebbero ad avere uno o due fattori lineari comuni che potremmo togliere e quindi le curve rappresentate da quelle rette sono respettivamente degli ordini $m-1$, $m-2$.

§. 9. Le imagini delle sezioni piane essendo date da

$$\Sigma u_i \Theta_i + \zeta \Sigma u_i \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi} = 0,$$

quelle che passano per un punto della retta $\zeta=0$ di coordinate (ξ', η', 0) dovranno soddisfare all'equazione

$$\Sigma\, u_i\, \Theta'_i = 0,$$

ossia
$$\xi'\, \Sigma\, u_i \frac{\partial\, \Theta'_i}{\partial\, \xi'} + \eta'\, \Sigma\, u_i \frac{\partial\, \Theta'_i}{\partial\, \eta'} = 0\,,$$

ove con Θ'_i è stato indicato ciò che diviene Θ_i quando alle coordinate correnti si sostituiscono le quantità $\xi'\, \eta'$. L'equazione della tangente alle imagini suddette nel punto $(\xi', \eta', 0)$ è

$$(\xi + \zeta)\, \Sigma\, u_i \frac{\partial\, \Theta'_i}{\partial\, \xi'} + \eta\, \Sigma\, u_i \frac{\partial\, \Theta'_i}{\partial\, \eta'} = 0$$

ossia per la condizione precedente

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi+\zeta & \eta \end{vmatrix} = 0$$

Questa equazione essendo indipendente dalle u, risulta che

Tutte le imagini delle sezioni piane passanti per un punto $(\xi', \eta', 0)$ *della retta* $\zeta = 0$ *hanno in quel punto la stessa tangente. Tutte le tangenti che si ottengono facendo variare il punto sulla* $\zeta = 0$ *costituiscono un fascio col centro nel punto* $\xi + \zeta = 0$, $\eta = 0$.

Se a_i è il coefficiente di ξ^m in Θ_i è facile vedere che:

Il centro del fascio suddetto è l'imagine del punto

$$\rho\, x_i = a_i\,.$$

Infatti sostituendo nelle (2) a ξ, η, ζ i valori $1, 0, -1$ si trova

$$\rho\, x_i = a_i - m\, a_i\,,$$

ossia

$$\rho\, x_i = a_i\,.$$

La ragione del primo teorema dimostrato in questo §. sta in questo.

Una curva doppia sulla superficie ha ognuno dei suoi punti determinato da due valori distinti del parametro λ, per cui sul piano ad ogni punto della curva doppia ne corrispondono due. Ora lo spigolo di regresso fa parte della curva doppia perchè per ognuno dei suoi punti passan due tangenti; ma essendo queste tangenti consecutive, ad ogni punto dello spigolo di regresso dovranno corrispondere sul piano due punti infinitamente vicini. Infatti le equazioni

$$\rho x_i = \Theta_i + \zeta \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi}$$

si riducono a

$$\rho x_i = \Theta_i$$

non solo ponendo $\zeta=0$, ma anche ponendo invece di ξ, $\xi+d\xi$ e $\zeta=-d\xi$. Ne viene che le imagini delle sezioni ottenute coi piani che passano per un punto $(\xi', \eta', 0)$ di C, devon tutte passare pei due punti infinitamente vicini corrispondenti ad esso $(\xi', \eta', 0)$ $(\xi'+d\xi', \eta', -d\xi')$ ossia nel punto $(\xi' \eta' 0)$ toccano la stessa retta

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi' & \eta' & 0 \\ \xi'+d\xi' & \eta' & -d\xi' \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\begin{vmatrix} \xi' & \eta' \\ \xi+\zeta & \eta \end{vmatrix} = 0.$$

§. **10.** Le imagini delle sezioni piane sono, come abbiamo visto, curve di ordine m con un punto $(m-1)$—*plo* in $(\xi=0, \eta=0)$. Però la sezione prodotta da un piano tangente in nn punto $\xi=\lambda\eta$ di C si comporrà della generatrice che passa per quel punto e di una curva di ordine $r-1$. Similmente la sezione prodotta in Σ dal piano osculatore in un punto $\xi=\lambda\eta$ di C si comporrà della generatrice corrispondente contata due volte e di una curva di ordine $r-2$. E facile poi vedere che queste curve di ordine $r-1$, o $r-2$ toccano nel punto $\xi=\lambda\eta$ la generatrice corrispondente, se si considera che queste curve sono l'inviluppo delle rette di intersezione del piano secante coi piani osculatori di C, e quindi la generatrice pel punto $\xi=\lambda\eta$ fa parte dell' inviluppo.

Da quanto abbiamo detto segue che l' imagine della sezione prodotta da un piano tangente in un punto $\xi=\lambda\eta$ di C si spezza nella retta $\xi=\lambda\eta$ e in una curva di ordine $m-1$ che passa $m-2$ volte pel punto $\xi=0$, $\eta=0$ e semplicemente per gli altri punti fondamentali e pel punto ($\xi=\lambda\eta$, $\zeta=0$). E analogamente l' imagine della sezione prodotta da un piano esculatore nel punto $\xi=\lambda\eta$ di C, è formata dalla retta $\xi=\lambda\eta$ contata due volte, e da una curva di ordine $m-2$ che passa $m-3$ volte pel pnnto ($\xi=0$, $\eta=0$) e somplicemente per gli altri punti fondamentali e per il punto ($\xi=\lambda\eta$, $\xi=0$).

Ciò può dedursi anche analiticamente cercando le equazioni delle imagini suddette.

Preso un punto qualunque sulla curva C di coordinate y_1, y_2, y_3, y_4 e denotando con z_1, z_2, z_3, z_4 le coordinate di un altro punto qualunque, l' equazione del piano tangente in y che passa per z, e quella del piano osculatore in y sono respettivamente

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1+\Delta y_1 & y_2+\Delta y_2 & y_3+\Delta y_3 & y_4+\Delta y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1+\Delta y_1 & y_2+\Delta y_2 & y_3+\Delta y_3 & y_4+\Delta y_4 \\ y_1+\Delta_1 y_1 & y_2+\Delta_1 y_2 & y_3+\Delta_1 y_3 & y_4+\Delta_1 y_4 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \Theta'_1 & \Theta'_2 & \Theta'_3 & \Theta'_4 \\ \frac{\partial \Theta'_1}{\partial \xi'} & \frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi'} & \frac{\partial \Theta'_3}{\partial \xi'} & \frac{\partial \Theta'_4}{\partial \xi'} \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \Theta'_1 & \Theta'_2 & \Theta'_3 & \Theta'_4 \\ \frac{\partial \Theta'_1}{\partial \xi'} & \frac{\partial \Theta'_2}{\partial \xi'} & \frac{\partial \Theta'_3}{\partial \xi'} & \frac{\partial \Theta'_4}{\partial \xi'} \\ \frac{\partial^2 \Theta'_1}{\partial \xi'^2} & \frac{\partial^2 \Theta'_2}{\partial \xi'^2} & \frac{\partial \Theta'_3}{\partial \xi'^2} & \frac{\partial^2 \Theta'_4}{\partial \xi'^2} \end{vmatrix} = 0$$

ove con Θ'_i è stato indicato al solito ciò che divengon le Θ_i, quando alle coordinate correnti si sostituiscono i valori ξ' η' che corrispondono al punto y.

Le imagini delle sezioni prodotte da questi piani si otterranno sostituendo alle x i loro valori (2), ossia avranno per equazioni

$$\begin{vmatrix} \Theta_1+\zeta\frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} & \Theta_2+\zeta\frac{\partial \Theta_2}{\partial \xi} & \Theta_3+\zeta\frac{\partial \Theta_3}{\partial \xi} & \Theta_4+\zeta\frac{\partial \Theta_4}{\partial \xi} \\ \Theta'_1 & \Theta'_2 & \Theta'_3 & \Theta'_4 \\ \frac{\partial \Theta'_1}{\partial \xi'} & \frac{\partial \Theta'_2}{\partial \xi'} & \frac{\partial \Theta'_3}{\partial \xi'} & \frac{\partial \Theta'_4}{\partial \xi'} \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \Theta_1+\zeta\dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\xi} & \Theta_2+\zeta\dfrac{\partial\Theta_2}{\partial\xi} & \Theta_3+\zeta\dfrac{\partial\Theta_3}{\partial\xi} & \Theta_4+\zeta\dfrac{\partial\Theta_4}{\partial\xi} \\ \Theta'_1 & \Theta'_2 & \Theta'_3 & \Theta'_4 \\ \dfrac{\partial\Theta'_1}{\partial\xi'} & \dfrac{\partial\Theta'_2}{\partial\xi'} & \dfrac{\partial\Theta'_3}{\partial\xi'} & \dfrac{\partial\Theta'_4}{\partial\xi'} \\ \dfrac{\partial^2\Theta'_1}{\partial\xi'^2} & \dfrac{\partial^2\Theta'_2}{\partial\xi'^2} & \dfrac{\partial^2\Theta'_3}{\partial\xi'^2} & \dfrac{\partial^2\Theta'_4}{\partial\xi'^2} \end{vmatrix} = 0.$$

È facile verificare che queste equazioni contengono il divisore $\xi\eta'-\xi'\eta$ l' una linearmente, l' altra alla seconda potenza.

§. 11. Abbiamo visto nel §. precedente che la (7) è l' equazione del piano osculatore alla curva C nel punto (ξ', η'), ossia le coordinate del piano osculatore nel punto (ξ, η) sono

$$(8) \qquad \rho\, u_i = \Phi_i(\xi, \eta)$$

dove le Φ_i sono i determinanti minori della matrice

$$\begin{vmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 & \Theta_4 \\ \dfrac{\partial\Theta_1}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\Theta_2}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\Theta_3}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\Theta_4}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial^2\Theta_1}{\partial\xi^2} & \dfrac{\partial^2\Theta_2}{\partial\xi^2} & \dfrac{\partial^2\Theta_3}{\partial\xi^2} & \dfrac{\partial^2\Theta_4}{\partial\xi^2} \end{vmatrix}$$

dai quali sono stati soppressi i fattori comuni. Essendo n la classe della sviluppabile, le Φ saranno del grado n.

Così le coordinate dei piani tangenti della sviluppabile Σ, che costituiscono un sistema ∞' come i punti di C, vengono espresse come funzioni omogenee di grado n di due variabili ξ, η, o anche come funzioni razionali intere di grado n del parametro $\lambda = \dfrac{\xi}{\eta}$.

Con metodo analogo a quello seguito al §. 4. si troverebbe che le coordinate di un piano che passa per la intersezione di due piani osculatori consecutivi di C, cioè di un piano tangente, sono

$$(9) \qquad \rho\, u_i = \Phi_i + \zeta \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi}.$$

Considerando ξ, η, ζ come coordinate omogenee dei punti di un piano, avremo così stabilita una corrispondenza univoca fra i piani tangenti della curva C ed i punti del piano. Per questa nuova rappresentazione si possono svolgere considerazioni completamente analoghe a quelle relativa alla rappresentazione dei punti di Σ. Le accennerò brevemente.

§. 12. Ponendo nelle equazioni (9) $\zeta = 0$ si ha

$$\rho\, u_i = \Phi_i$$

dunque

La sviluppabile Σ è rappresentata dalla retta $\zeta = 0$.

L' equazione di un punto è

$$\Sigma\, u_i\, x_i = 0\,,$$

quindi l' imagine del cono tangente alla curva C, che la proietta dal punto x, ha per equazione

$$(10) \qquad \Sigma\, x_i\, \Phi_i + \zeta\, \Sigma\, x_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi} = 0.$$

Colle considerazioni correlative a quelle dei §§. 5, 6, e 7 possiam ricavare i teoremi seguenti relativi a questa rappresentazione.

Le imagini dei coni tangenti di C son curve di *ordine n con nn punto fondamentale $(n-1)$—plo a comune ($\xi=0$, $\eta=0$) e con $\alpha+1$ punti fondamentali semplici.*

Gli α piani osculatori comuni delle due sviluppabili

$$\rho\, u_i = \Phi_i,$$
$$\rho\, u_i = \frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi},$$

sono i piani osculatori stazionari della C.

È facile dimostrare anche che

Il punto fondamentale ($\xi+n\,\zeta=0$, $\eta=0$) rappresenta tutti i piani che passan per la generatrice contenuta nel piano osculatore di C corrispondente al valore infinito del parametro $\frac{\zeta}{\eta}$. Gli altri α punti fondamentali rappresentano respettivamente i fasci dei piani che passano per le generatrici contenute negli α piani stazionari.

Le rette che proiettano i punti fondamentali semplici dal punto ($\xi=0$, $\eta=0$) rappresentano respettivamente i piani tangenti di Σ corrispondenti al valore ∞ del parametro $\frac{\xi}{\eta}$ e i suoi piani stazionari.

Il fascio di raggi col centro nel punto ($\xi=0$, $\eta=0$) rappresenta il sistema delle ∞' generatrici di Σ.

Le rette del piano,

$$\zeta + a\,\xi + b\,\eta = 0,$$

rappresentano le sviluppabili tangenti della curva C

$$\rho\, u_i = \Phi_i - (a\,\xi + b\,\eta)\frac{\partial \Phi_i}{\partial \xi} = 0.$$

Queste sviluppabili son di classe n se la retta

$$\xi + a\,\xi + b\,\eta = 0$$

non passa per nessun punto fondamentale. La necessità di questo fatto si vede anche geometricamente, osservando che una retta taglia le imagini del coni tangenti alla C in n punti; e quindi a quelle sviluppabili che son rappresentate dalle rette, non potranno condursi che n piani tangenti da un punto qualunque. Se però la retta passa per uno o due punti fondamentali semplici, si vede nello stesso modo che rappresenta una sviluppabile di classe $n-1$ o $n-2$.

Tutte le imagini dei coni tangenti alla curva C, *le quali passano per un punto della retta* $\zeta=0$, *hanno in questo punto una stessa tangente. Le tangenti che si ottengono in tal guisa facendo scorrere il punto sulla retta* $\zeta=0$, *costituiscono un fascio col centro nel punto* $(\xi+\zeta=0\ ,\ \eta=0)$.

È facile vedere come nel §. 9. che questo corrisponde al piano

$$\rho\, u_i = \alpha_i\,,$$

se α_i è il coefficiente di ξ_n in Φ_i.

§. 13. Ritorniamo alla rappresentazione piana della sviluppabile Σ e riprendiamo le coordinate dei suoi punti sotto la forma

$$\rho\, x_i = \Theta_i(\lambda) + \zeta_1 \frac{\partial \Theta_i(\lambda)}{\partial \lambda}$$

Affinchè due generatrici corrispondenti a due valori λ, μ del parametro λ s' incontrino, devono esser simultaneamente soddisfatte le 4 equazioni

$$\Theta_i(\lambda) + \zeta_1 \frac{\partial \Theta_i(\lambda)}{\partial \lambda} = \sigma \left\{ \Theta_i(\mu) + \zeta_1' \frac{\partial \Theta_i(\mu)}{\partial \mu} \right\},$$

ossia dovrà essere (*)

$$
(11) \qquad \begin{vmatrix}
\Theta_1(\lambda) & \frac{\delta \Theta_1(\lambda)}{\partial \lambda} & \Theta_1(\mu) & \frac{\partial \Theta_1(\mu)}{\partial \mu} \\
\Theta_2(\lambda) & \frac{\partial \Theta_2(\lambda)}{\partial \lambda} & \Theta_2(\mu) & \frac{\partial \Theta_2(\mu)}{\partial \mu} \\
\Theta_3(\lambda) & \frac{\partial \Theta_3(\lambda)}{\partial \lambda} & \Theta_3(\mu) & \frac{\partial \Theta_3(\mu)}{\partial \mu} \\
\Theta_4(\lambda) & \frac{\partial \Theta_4(\lambda)}{\partial \lambda} & \Theta_4(\mu) & \frac{\partial \Theta_4(\mu)}{\partial \mu}
\end{vmatrix} = 0.
$$

In questa relazione, che lega i parametri λ , μ di due punti di C tali che le generatrici passanti per essi s'incontrino, compariscon dei fattori che bisogna sopprimere.

Ponendo $\lambda = \infty$ o $\mu = \infty$, la prima colonna diviene formata da termini proporzionali ai corrispondenti della seconda, oppure i termini della terza divengon proporzionali a quelli della quarta, dunque (ricordando che $\lambda = \frac{\xi}{\eta}$, $\mu = \frac{\xi'}{\eta'}$) esisteranno due fattori η , η' nel determinante precedente. Se poi a $\lambda = \alpha_i$ corrisponde un punto cuspidale di C, per questo valore di λ le Θ_i divengono proporzionali alle $\frac{\partial \Theta_i}{\partial \lambda}$, e quindi il determinante contiene i fattori $(\lambda - \alpha_i)$, $(\mu - \alpha_i)$. Ma l'equazione (11) è di grado $2\,m - 1$ tanto rispetto a λ, quanto rispetto a μ, nelle quali è simmetrica; i punti cuspidali sono in numeri di $\beta = 2\,(m - 1) - r$, per cui, sopprimendo i fattori suddetti, la (11) resta di grado $2\,m - 1 - 1 - \beta = r$ rispetto a λ e rispetto a μ .

(*) Anche Clebsch trova una condiziono simile per l'incontro di due generatrici di una superficie rigata qualunque.

Finalmente bisognerà togliere dalla (11) i fattori $\lambda-\mu$. Per determinarne il numero sviluppiamo $\Theta_i(\mu)$, $\Theta_i'(\mu)$ in serie di Maclaurin; avremo

$$\Theta_i(\mu)=\Theta_i(\lambda)+\frac{\mu-\lambda}{1}\Theta_i'(\lambda)+\frac{(\mu-\lambda)^2}{1\,.\,2}\Theta_i''(\lambda)+\,..$$

$$\Theta_i'(\mu)=\Theta_i'(\lambda)+\frac{\mu-\lambda}{1}\Theta_i''(\lambda)+\frac{(\mu-\lambda)^2}{1\,.\,2}\Theta_i'''(\lambda)+\,..$$

e sostituendo nella (11), che per brevità indicheremo con

$$(\,\Theta(\lambda)\qquad \Theta'(\lambda)\qquad \Theta(\mu)\qquad \Theta'(\mu)\,)=0$$

avremo

$$0=\Theta(\lambda)\;,\;\Theta'(\lambda)\;,\;\frac{(\mu-\lambda)^2}{1\,.\,2}\Theta''(\lambda)+\frac{(\mu-\lambda)^2}{1.2.3}\Theta'''(\lambda)+\,..\,,$$

$$+\,..\,,\frac{\mu-\lambda}{1}\Theta''(\lambda)+\frac{(\mu-\lambda)^2}{12}\Theta'''(\lambda)+\,..),$$

ossia colle opportune riduzioni e prescindendo dai fattori numerici,

$$(\lambda-\mu)^4\,(\,A+(\lambda-\mu)\,B\,)=0,$$

dove

$$A=(\,\Theta(\lambda)\qquad \Theta'(\lambda)\qquad \Theta''(\lambda)\qquad \Theta'''(\lambda)\,)$$

è in generale diverso da zero. Sopprimendo anche il fattore $(\lambda-\mu)^4$ la (11) si riduce a una relazione

$$\Omega(\lambda, \mu) = 0 \tag{12}$$

di grado $r-4$ tanto in λ quanto in μ.

Potremo quindi enunciare il noto teorema:

Ogni generatrice di una sviluppabile di ordine r incontra altre $r-4$ generatrici distinte.

È facile di riconoscere anche geometricamente la causa per cui nella (11) debbono trovarsi i fattori enumerati. È evidente prima di tutto che il fattore $(\lambda-\mu)^4$ stà a rappresentare che anche la curva C è doppia per la sviluppabile Σ. Parimente i fattori η, η' si trovano perchè la retta $\eta=0$ rappresenta un punto della curva C. Finalmente i fattori $(\lambda-\alpha_i)$ $(\mu-\alpha_i)$ mostrano che le generatrici cuspidali vanno considerate come doppie, perchè posson considerarsi come formate dalla riunione di due generatrici infinitamente vicine.

§ 14. La relazione (12) stabilisce una corrispondenza $(r-4, r-4)$ fra le rette del fascio col centro nel punto $(\xi=0, \eta=0)$ che sono imagini delle generatrici, come pure fra i punti della retta $\zeta=0$ imagine della curva C.

Per il principio di Chasles in queste corrispondenze dovranno esistere $2(r-4)$ elementi uniti. È facile di riconoscere che questi elementi uniti son dati da quei valori di λ che corrispondono al punto di contatto di un piano stazionario o a un punto stazionario della curva C.

Osserviamo infatti prima di tutto che un piano stazionario di C contiene quattro punti consecutivi di essa 1, 2, 3, 4; quindi la generatrice 12 è incontrata non solo dalla 23 in 2, ma anche dalla 34 in un punto infinitamente vicino; ne segue che la curva doppia di Σ taglia in quel punto la curva C. Nello stesso modo osservando che per un punto stazionario di C passano 4 piani osculatori consecutivi, si può vedere che la curva doppia taglia la C in questi punti. Dunque

La curva doppia della sviluppabile Σ taglia la sua curva cuspidale C nei suoi punti stazionari e nei punti di contatto dei suoi piani osculatori.

A ciascuno di questi punti della curva doppia corrispondono due punti del piano, ma infinitamente vicini, dunque

Gli elementi uniti della corrispondenza $(r-4, r-4)$ stabilita dalla condizione d'incontro di due generatrici di Σ, son dati da quei valori di λ che corrispondono ai punti stazionari e ai punti di contatto dei piani stazionari della curva C.

Difatti

$$\alpha + \beta = 2(r-4).$$

Se dunque α_i sono i valori suddetti di λ ($i=1, 2, \ldots 2(r-4)$) la (12) quando vi si faccia $\lambda=\mu$ diverrà

$$\Pi(\lambda - \alpha_i) = 0,$$

§. 15. Abbiamo già accennato nel §. precedente che a un punto della curva doppia ne corrispondono due sul piano rappresentativo, essendo esso situato su due generatrici distinte. Determiniamo ora un metodo per ricavare l'equazione dell'imagine della curva doppia.

L'equazione del piano osculatore nel punto μ è

$$\Sigma\, \Phi_i(\mu)\, x_i = 0\,.$$

Ponendo in questa

$$x_i = \Theta_i(\lambda) + \zeta_1 \frac{\partial\, \Theta_i(\lambda)}{\partial\, \lambda},$$

l' equazione che si ottiene, lineare in ζ_1

$$(13) \qquad \Sigma\, \Phi_i(\mu) \left\{ \Theta_i(\lambda) + \zeta_1 \frac{\partial\, \Theta_i(\lambda)}{\partial\, \lambda} \right\} = 0,$$

darà il valore di ζ_1 che determina il punto d' incontro della generatrice pel punto λ col piano osculatore nel punto μ di C. Se porrò la condizione che λ, μ sien legati dalla relazione (12), otterrò un punto della curva doppia, ossia eliminando μ fra la (12) (13) otterrò una relazione in λ, ζ_1 che ridotta omogenea, col ricordare che $\lambda = \frac{\xi}{\eta}$ $\zeta_1 = \frac{\zeta}{\eta}$, non sarà altro che l'equazione dell' imagine della curva doppia.

Determineremo geometricamente il grado di questa equazione.

Ricordiamo perciò il teorema noto e di facilissima dimostrazione:

Una generatrice della sviluppabile ne incontra altre r—4, ad eccezione di quelle che passano per un punto stazionario, o che giacciono in un piano stazionario della curva C, che ne incontrano altre r—5 distinte solamente.

Questo teorema si può anche enunciare così:

Una generatrice qualunque della sviluppabile Σ taglia la curva doppia di essa in r—4 punti, ad eccezione delle generatrici che passano per un punto cuspidale o che giacciono in un piano stazionario della curva C, che la tagliano soltanto in $r-5$ punti.

Ne segue che

I punti fondamentali della rappresentanzione, imagini di generatrici cuspidali, sono (r—5)upli per l'imagine della curva doppia, quello imagine della gene-

ratrice che passa pel punto $\lambda = \infty$ *è* $(r-4)$*—uplo per l' imagine stessa .*

In virtù di questi teoremi, se k è l' ordine dell'imagine della curva doppia, ω il numero delle volte che essa passa pel punto fondamentale $\xi=0$, $\eta=0$ avremo evidentemente

$$k-\omega = r-4$$
$$m\,k - (m-1)\,\omega - (r-4) - \beta\,(r-5) = 2\,x,$$

ossia

$$k - \omega = r - 4$$
$$m\,k - (m-1)\,\omega = \mathrm{A},$$

dove per brevità si è posto

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= (r-4) + \beta\,(r-5) + 2\,x \\ &= (r-4) + [2(m-1)-r](r-5) + (r-1)(r-2) - 2m \\ &= 2\,m\,.\,r + r - 12\,m + 8\,. \end{aligned}$$

Dalle equazioni precedenti si ricava

$$k = \mathrm{A} - (r-4)(m-1) = m(r-8) + 12 + 2(r-4)$$
$$\omega = \mathrm{A} - (r-4)\,m = m(r-8) + 12 + (r-4)$$

Applicando i resultati ottenuti alle sviluppabili dei primi 7 ordini , se chiamiamo α_0 l' ordine di moltiplicità per l'imagine della curva doppia del punto fondamentale ($\xi + m\,\zeta = 0$, $\eta = 0$) α_1 quello di ciascuno degli altri punti fondamentali , l il numero di questi , abbiamo il seguente prospetto

r	m	k	ω	α_0	α_1	l
5	4	2	1	1		
6	4	8	6	2		
	5	6	4	2	1	2
	6	4	2	2	1	4
7	5	13	10	3	2	1
	6	12	9	3	2	3
	7	11	8	3	2	5

Da quanto abbiamo detto intorno all' imagine della curva doppia, si deduce immediatamente un risultato importante.

Essendo questa imagine di ordine k avrà a comune con la retta $\zeta=0$, oltre i $2(r-4)$ punti corrispondenti ai valori di λ che danno i punti stazionari o i punti di contatto dei piani stazionari della curva C, ancora

$$k-2\,(r-4)=m\,(r-8)+12$$

punti. Questo sarà dunque il numero γ delle generatrici di Σ che incontrano un' altra volta la curva C e che era stato determinato per altra via da Zeuthen (V. §. 2).

§. 16. Possiamo ora, riprendendo a studiare la rappresentazione dei piani tangenti della curva C per mezzo dei punti di un piano, ripetere per l'imagine della sviluppabile doppia (sviluppabile inviluppo dei suoi piani tangenti doppi) considerazioni analoghe a quelle fatte per la curva doppia di Σ.

Intanto la condizione perchè due tangenti di C siano in un piano, è evidentemente la stessa perchè passino per un punto, cioè la (12) (V. §. 15).

$$\Omega(\lambda\ ,\ \mu) = 0. \tag{12}$$

Del resto potremmo arrivare alla medesima, anche partendo dalla

$$(\Phi(\lambda)\ ,\ \Phi'(\lambda)\ ,\ \Phi(\mu)\ ,\ \Phi'(\mu)) = 0,$$

che esprime la condizione necessaria e sufficiente, onde possan coesistere le **4** equazioni

$$\Phi_i(\lambda) + \zeta_1 \Phi'_1(\lambda) = \sigma(\Phi_i(\mu) + \zeta'_1 \Phi'_i(\mu)),$$

sopprimendo in essa i 4 fattori $\lambda - \mu$, i fattori η , η' e i fattori $\lambda - \alpha_i$, dove α_i sono i parametri corrispondenti ai piani stazionari di C.

Colle considerazioni stesse del § 16. si può ricavare che

La sviluppabile doppia di C ha a comune con la sviluppabile Σ i suoi piani stazionari e i piani osculatori di C *nei suoi punti stazionari.*

Notando poi che tutti questi piani appartengono alla sviluppabile doppia perchè le generatrici giacenti in esse sono incontrate non solo da quella consecutiva, ma anche da una terza infinitamente vicina, dedurremo che mentre a ciascun piano della sviluppabile doppia corrispondono in generale due punti distinti del piano rappresentativo, ai piani suddetti ne corrispondono invece due infinitamente vicini della retta $\xi = 0$. Torniamo così a concludere che i $2(r-4)$ elementi uniti della corrispondenza $(r-4\ ,\ r-4)$ definita dalla relazione (12) sono quelli dati dai valori di λ che corrispondono ai piani stazionari o ai piani osculatori nei punti stazionari di C.

Ciò posto, essendo

$$\Sigma\, \Theta_i(\mu)\, u_i = 0$$

l' equazione del punto μ di C, e

$$u_i = \Phi_i(\lambda) + \zeta_1\, \Phi'_i(\lambda)$$

le coordinate di un piano tangente in λ alla curva C, l'equazione

$$\Sigma\, \Theta_i(\mu)\, (\Phi_i(\lambda) + \zeta_1\, \Phi'_i(\lambda)) = 0 \tag{14}$$

lineare in ζ_1, darà il valore di ζ_1 che determina il piano tangente in λ che passa pel punto μ di C. Se supponiamo λ , μ legati dalla relazione (12), avremo un piano della sviluppabile doppia, ossia il resultato dell' eliminazione di μ fra la (12) e la (14), ridotto omogeneo in ξ , η , ζ è l' equazione dell' imagine della sviluppabile doppia stessa.

Per determinarne l' ordine enunciamo il teorema:

Per una generatrice qualunque di Σ *si posson condurre alla sviluppabile doppia di* C $r-4$ *piani tangenti, ad eccezione delle generatrici nei piani stazionari di* C, o *che passan pei punti stazionari di* C, *dalle quali se ne posson condurre soltanto* $r-5$.

Dal quale segue:

I punti fondamentali della rappresentazione, imagini di generatrici in un piano stazionario, sono $(r-5)$*—upli per l' imagine della sviluppabile doppia, l'altro punto fondamentale semplice è* $(r-4)$*—plo per l' imagine stessa.*

In virtù di questi teoremi, indicando con k' l'ordine dell' imagine della sviluppabile doppia e con ω' l' ordine di moltiplicità per essa del punto ($\xi=0$, $\eta=0$), avremo

$$k' - \omega' = r-4$$
$$n\,k' - (n-1)\,\omega' - (r-4) - \alpha\,(r-5) = 2\,y,$$

ossia

$$k' - \omega' = r-4$$
$$n\,k' - (n-1)\,\omega' = \mathrm{A},$$

dove

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= (r-4) + \alpha\,(r-5) + 2\,y \\ &= (r-4)+(2(n-1)-r)(r-5)+r(r-3)-2(n-1) \\ &= 3\,n\,.\,r+r-12\,n+8\,.\end{aligned}$$

Risolvendo avremo

$$k = \mathrm{A} - (r-4)\,(n-1) = n(r-8) + 12 + 2(r-4)$$
$$\omega = \mathrm{A} - (r-4)\,n = n(r-8) + 12 + (r-4)$$

Applicando alle sviluppabili dei primi 7 ordini i risultati ottenuti, se chiamiamo α_0 l'ordine di moltiplicità per l'imagine della sviluppabile doppia del punto fondamentale ($\xi+n\,\zeta=0$, $\eta=0$) e α_1 l'ordine di moltiplicità di ciascuno degli altri punti fondamentali semplici, l il numero di questi, abbiamo il seguente prospetto

r	n	k'	ω'	α_0	α_1	l
5	4	2	1	1		
	4	8	6	2		
6	5	6	4	2	1	2
	6	4	2	2	1	4
	5	13	10	3	2	1
7	6	12	9	3	2	3
	7	11	8	3	2	5

Dai risultati ottenuti possiamo ricavare immediatamente un' altra formula già calcolata da Zeuthen (l. c.), cioè il numero delle generatrici di Σ per le quali passa un altro piano tangente di Σ.

Infatti l' imagine della sviluppabile doppia essendo di ordine k' incontrerà la retta $\zeta=0$ in k' punti, $2(r-4)$ dei quali son quelli dati dai valori di λ che corrispondono ai piani stazionari o ai piani tangenti a Σ nei punti stazionari di C. Ne restano

$$\gamma' = k'-2\,(r-4) = n(r-8)+12,$$

che saranno le imagini dei piani tangenti comuni a Σ e alla sviluppabile doppia di C. Questo numero γ' sarà dunque appunto il numero dei piani tangenti a Σ, che contengono un' altra generatrice oltre quella di contatto.

§. 17. Si determinano facilmente le coordinate delle generatrici di una sviluppabile, riguardandole come congiungenti di due punti infinitamente vicini di C, o come intersezione di due piani infinitamente vicini di Σ, troviamo così

$$p_{ik} = \begin{vmatrix} \Theta_i(\lambda) & \Theta_i(\lambda+d\lambda) \\ \Theta_k(\lambda) & \Theta_k(\lambda+d\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Theta_i(\lambda) & \Theta_i'(\lambda) \\ \Theta_k(\lambda) & \Theta_k'(\lambda) \end{vmatrix}$$

$$q_{ik} = \begin{vmatrix} \Phi_i(\lambda) & \Phi_i(\lambda+d\lambda) \\ \Phi_k(\lambda) & \Phi_k(\lambda+d\lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi_i(\lambda) & \Phi_i'(\lambda) \\ \Phi_k(\lambda) & \Phi_k'(\lambda) \end{vmatrix}$$

§. 18. Avanti di abbandonare queste considerazioni generali sulla rappresentazione delle superfici sviluppabili, citerò alcune formule, dovute a Clebsch (*), relative alla rappresentazione di una superficie algebrica qualunque,

(*) Clebsch — Ueber Abbildung algebraischer Flächen (l. c.).

delle quali faremo uso in seguito, e che son di facilissima dimostrazione.

Se n è il grado delle imagini delle sezioni piane, m è il grado di una curva nel piano rappresentativo che passa α_1, α_2 . . . volte pei punti fondamentali semplici, β_1, β_2 . . . volte per quelli doppi, γ_1, γ_2 . . . volte per quelli tripli e così di seguito, e al di fuori di questi punti ha ancora d punti doppi, e r cuspidi, e se chiamiamo

p — il suo genere,

M — l'ordine della curva sulla superficie che essa rappresenta,

R — il rango di questa curva

K — la sua classe

A — il numero dei suoi piani quadritangenti.

B — il numero dei suoi punti cuspidali,

abbiamo

$$M = n\,m - \Sigma\,\alpha - 2\,\Sigma\,\beta - 3\,\Sigma\,\gamma$$

$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - l - r - \Sigma\tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1) - \Sigma\tfrac{1}{2}\beta(\beta-1) - \Sigma\tfrac{1}{2}\gamma(\gamma-1) ..$$

$$l \leqq \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) - 3d - 4r - \Sigma\,\tfrac{1}{2}\,\alpha(\alpha+1) - \Sigma\,\tfrac{1}{2}\,\beta(\beta+1) - \ldots$$

$$B = r$$

$$R = m(m-3+2n) - 2d - 3r - \Sigma\alpha(\alpha+1) - \Sigma\beta(\beta+3) - \Sigma\gamma(\gamma+5) - \ldots$$

$$K = 3m(m-3+n) - 6d - 8r - 3\Sigma\alpha^2 - 3\Sigma\beta(\beta+1) - 3\Sigma\gamma(\gamma+2) - \ldots$$

$$A = 2m(3m+2n-9) - 12d - 15r - 2\,\Sigma\,\alpha(3\alpha-1) - 2\Sigma\beta(3\beta+1) - \\ - 2\,\Sigma\,\gamma(3\,\gamma+3) - \ldots$$

CAPITOLO II.

Superficie sviluppabili del 4.° ordine.

§. 19. Cominciamo dal determinare le coordinate dei punti della cubica gobba C spigolo di regresso della sviluppabile Σ di 4.° ordine, in funzione di un parametro variabile, per dedurne poi l'equazioni rappresentative della sviluppabile stessa.

Si ottengono espressioni molto semplici per le $\Theta_i(\lambda)$, prendendo per vertici del tetraedro fondamentale 4 punti arbitrari della cubica C, come anche prendendo per piani coordinati 4 piani osculatori di C. Con una scelta conveniente del punto unità, se indichiamo con α_1, α_2, α_3, α_4 i valori di λ corrispondenti ai 4 punti scelti per vertici del tetraedro, si trova nel 1.° caso

$$(1)\qquad \begin{aligned} \Theta_1(\lambda) &= (\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)(\lambda-\alpha_4) \\ \Theta_2(\lambda) &= (\lambda-\alpha_3)(\lambda-\alpha_4)(\lambda-\alpha_1) \\ \Theta_3(\lambda) &= (\lambda-\alpha_4)(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2) \\ \Theta_4(\lambda) &= (\lambda-\alpha_4)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)\,. \end{aligned}$$

Ne segue che le coordinate del piano osculatore nel punto λ saranno,

$$(2)\qquad \begin{aligned} \Phi_1(\lambda) &= (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_2)(\lambda-\alpha_1)^3 \\ \Phi_2(\lambda) &= (\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3)(\lambda-\alpha_2)^3 \\ \Phi_3(\lambda) &= (\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_4)(\lambda-\alpha_3)^3 \\ \Phi_4(\lambda) &= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)(\lambda-\alpha_4)^3\,. \end{aligned}$$

Nel 2.° caso, indicando con α_1, α_2, α_3, α_4 i valori di λ corrispondenti ai punti di contatto dei piani osculatori scelti per piani coordinati, si trova che con una scelta conveniente del punto unità deve aversi

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
\Theta_1(\lambda) &= (\lambda-\alpha_1)^3 \\
\Theta_2(\lambda) &= (\lambda-\alpha_2)^3 \\
\Theta_3(\lambda) &= (\lambda-\alpha_3)^3 \\
\Theta_4(\lambda) &= (\lambda-\alpha_4)^3 .
\end{aligned}
$$

E quindi le coordinate del piano osculatore nel punto λ saranno

$$
(4) \qquad
\begin{aligned}
\Phi_1(\lambda) &= (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_2)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)(\lambda-\alpha_4) \\
\Phi_2(\lambda) &= (\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3)(\lambda-\alpha_3)(\lambda-\alpha_4)(\lambda-\alpha_1) \\
\Phi_2(\lambda) &= (\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_4)(\lambda-\alpha_4)(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2) \\
\Phi_4(\lambda) &= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3) .
\end{aligned}
$$

Ed ora, servendoci delle formule (2) del Cap. I, possiamo stabilire immediatamente le formole della corrispondenza fra i punti di Σ o i piani di C, e i punti di un piano.

I due sistemi di valori per le Θ_i, Φ_i metton subito in evidenza la corrispondenza dualistica che esiste fra i punti di Σ e i piani tangenti di C.

§. 20. Nel caso in cui sia stato scelto per tetraedro fondamentale quello che ha per facce i piani osculatori nei punti α_1, α_2, α_3, α_4 di C, le coordinate delle generatrici di Σ, sono

$$
(5) \qquad \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} = p_{ik} \equiv \begin{vmatrix} (\lambda-\alpha_i)^3, (\lambda-\alpha_k)^3 \\ (\lambda-\alpha_i)^2, (\lambda-\alpha_k)^2 \end{vmatrix} = (\alpha_k-\alpha_i)(\lambda-\alpha_i)^2(\lambda-\alpha_k)^2 .
$$

Nel caso in cui invece il tetraedro fondamentale abbia i vertici nei punti α_1, α_2, α_3, α_4 di C, si trova

$$p_{ik} = \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} = (\alpha_k - x_i)(\lambda - \alpha_l)^2(\lambda - \alpha_m)^2. \tag{6}$$

Tanto dalle (5) quanto dalle (6) ricaviamo

$$p_{24}\,p_{31} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)\,(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_4)\,(\alpha_2 - \alpha_3)}\,p_{23}\,p_{14} = 0.$$

Le generatrici di Σ appartengono dunque ad un complesso tetraedrale. Allora, per una nota proprietà di questi complessi, possiamo immediatamente enunciare i seguenti teoremi,

Il rapporto anarmonico dei 4 punti d'incontro di una generatrice di Σ *con 4 piani tangenti fissi di essa è costante ed uguale a quello dei 4 piani.*

Il rapporto anarmonico dei 4 punti d'incontro di una generatrice di Σ *colle 4 faccie di un tetraedro i cui vertici giacciono nella curva C, è costante e uguale a quello dei 4 vertici respettivamente opposti a quelle faccie.*

Il rapporto anarmonico dei 4 piani che proiettano una generatrice di Σ *da 4 punti fissi della curva C, è costante ed uguale a quello dei 4 punti.*

Il rapporto anarmonico dei 4 piani che proiettano una generatrice di Σ *dai 4 vertici del tetraedro formato da 4 piani tangenti di* Σ, *è costante e uguale a quello delle 4 faccie respettivamente opposte a quei vertici.*

Il rapporto anarmonico di 4 punti della curva C è uguale a quello dei 4 piani osculatori in questi punti.

§. 21. Un altra forma notevole delle coordinate dei punti di una cubica gobba espresse in funzione di un parametro variabile, si ottiene prendendo come tetraedro fondamentale quello formato da due piani osculatori della cubica e dai due piani che passano per la generatrice giacente in uno di essi e per il punto di contatto dell'altro. Chiamando allora α, β i valori del parametro corrispondenti ai punti di contatto dei piani osculatori scelti, è facile vedere, che, scegliendo convenientemente il punto unità, dovrà aversi

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= (\lambda-\beta)^3\\ \Theta_2 &= (\lambda-\alpha)^3\\ \Theta_3 &= (\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)\\ \Theta_4 &= (\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)^2\end{aligned}$$

e quindi

$$(8)\qquad \begin{aligned}\Phi_1 &= (\lambda-\alpha)^3\\ \Phi_2 &= -(\lambda-\beta)^3\\ \Phi_3 &= 3(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)^2\\ \Phi_4 &= -3(\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta).\end{aligned}$$

O anche facendo la trasformazione $\frac{\lambda-\beta}{\lambda-\alpha}=a$, per la quale i punti scelti vengono a corrispondere respettivamente ai valori ∞, 0 di a, potremo porre

$$(9)\qquad \begin{aligned}\Theta_1 &= a^3 \qquad & \Phi_1 &= 1\\ \Theta_2 &= 1 & \Phi_2 &= -a^3\\ \Theta_3 &= a & \Phi_3 &= 3a^2\\ \Theta_4 &= a^2 & \Phi_4 &= -3a.\end{aligned}$$

Dalle (9) si vede che la curva di coordinate

$$\begin{aligned}x_1 &= \Theta_1' = 3a\\ x_2 &= \Theta_2' = 0\\ x_3 &= \Theta_3' = 1\\ x_4 &= \Theta_4' = 2a,\end{aligned}$$

rappresentata dal punto fondamentale doppio ($\xi=0, \eta=0$), è la conica d' intersezione della sviluppabile col piano $x_2=0$ e che ha per equazione

$$3\, x_1^2 = 4\, x_3\, x_4$$

§. 22. Applicando le solite formule del §. 17. si trova che le coordinate delle generatrici di Σ sono

$$(11) \qquad \begin{array}{ll} p_{12} = -3\, a^2 & p_{23} = 1 \\ p_{31} = 2\, a^3 & p_{14} = -\, a^4 \\ p_{24} = 2\, a & p_{34} = a^2. \end{array}$$

Ciò mostra che le generatrici di Σ appartengono al complesso lineare

$$p_{12} + 3\, p_{34} = 0,$$

e al complesso tetraedrale

$$p_{24}\, p_{31} + 4\, p_{23}\, p_{14} = 0.$$

Per la nota proprietà del complesso tetraedrale, di cui abbiamo fatto uso al §. 20, avremo dunque che:

Il rapporto anarmonico dei 4 *punti in cui una generatrice qualunque di* Σ *incontra le faccie di un tetradro qualunque formato da due piani osculatori di* C *e dai piani che uniscono le generatrici giacienti in uno di essi, col punto di contatto dell'altro, come pure il rapporto anarmonico dei* 4 *piani che proiettano una generatrice dai* 4 *vertici di un tale tetraedro, è costante ed uguale a* 4.

§. 23. Il piano che passa per tre punti a_1, a_2, a_3 della cubica ha per equazione

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1^3 & 1 & a_1 & a_1^2 \\ a_2^3 & 1 & a_2 & a_2^2 \\ a_3^3 & 1 & a_3 & a_3^3 \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$(12) \quad x_1 - x_2 a_1 a_2 a_3 + x_3(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) - x_4(a_1 + a_2 + a_3) = 0$$

Se i punti a_1, a_2, a_3 vengono a coincidere in un sol punto a, l'equazione precedente diverrà l'equazione del piano osculatore nel punto a che sarà

$$(13) \qquad x_1 - x_2\, a^3 + 3\, x_3\, a^2 - 3\, x_4\, a = 0,$$

e questa ci darebbe nuovamente le (10).

È facile determinare l'equazione della superficie Σ in questo sistema di coordinate, eliminando a fra le due equazioni

$$\begin{aligned} x_2\, a^2 - 2\, x_3\, a + x_4 &= 0 \\ x_1 + x_3\, a^2 - 2\, x_4\, a &= 0, \end{aligned}$$

che si ottengono derivando la (13) rispetto ad a_1, a_2 respettivamente, dopo averla ridotta omogenea col porre $a = \dfrac{a_1}{a_2}$. Abbiamo così

$$\frac{1}{x_2}\left\{ x_3 \pm \sqrt{x_3^2 - x_2\, x_4} \right\} = \frac{1}{x_3}\left\{ x_4 \pm \sqrt{x_4^2 - x_1\, x_3} \right\},$$

ossia

$$(14) \qquad (x_1 x_2 - x_3 x_4)^2 = 4 (x_4^2 - x_1 x_3)(x_3^2 - x_2 x_4).$$

§. 24. Da un punto qualunque dello spazio (y_1, y_2, y_3, y_4) si posson condurre tre piani osculatori della cubica, i cui punti di contatto corrispondono alle tre radici dell' equazione

$$y_1 - y_2 a^3 + 3 y_3 a^2 - 3 y_4 a = 0.$$

Ricordando che le coordinate dei punti della cubica son proporzionali ad a^3, 1, a, a^2, avremo che i tre punti di contatto sono nel piano

$$y_1 x_2 - y_2 x_1 + 3 y_3 x_4 - 3 y_4 x_3 = 0,$$

che passa evidentemente pel punto dato y. Abbiamo così un sistema nullo; e la corrispondenza fra i punti ed i piani dello spazio viene stabilita dalle relazioni

$$\begin{aligned} u_1 &= -y_2 \\ u_2 &= y_1 \\ u_3 &= -3 y_4 \\ u_4 &= y_3. \end{aligned}$$

Quindi l' equazione del complesso lineare definito da questa corrispondenza sarà

$$p_{12} + 3 p_{34} = 0$$

Abbiamo già visto che ad esso appartengono le generatrici della sviluppabile.

§. 25. Dalle formule (1) (2) . . . stabilite nei §§. antecedenti, si deducono colla massima facilità moltissime delle proprietà note delle cubiche gobbe e delle sviluppabili di 4.° ordine.

Senza stare a diffonderci su questo argomento, passiamo ad occuparci più particolarmente della rappresentazione piana delle sviluppabili suddette.

Dalla teoria generale sappiamo che tutte le imagini delle sezioni piane di Σ sono curve del 3.° ordine con un punto doppio nel vertice ($\xi=0$, $\eta=0$) del triangolo fondamentale, le quali passano pel punto ($\xi+3\zeta=0$, $\eta=0$) e toccano nei punti d' incontro colla retta $\zeta=0$, imagine della curva C, le congiungenti di questi punti col punto ($\xi+\zeta=0$, $\eta=0$) .

Queste proprietà sono più che sufficienti per costruire geometricamente l' imagine di una sezione piana qualunque .

Poichè, se prendiamo per definire il piano secante i tre punti in cui esso taglia la curva C, avremo per la imagine della sezione da esso prodotta, 6 condizioni esprimendo che nei punti imagini dei tre punti dati tocca le congiungenti dei medesimi col punto ($\xi+\zeta=0$, $\eta=0$), una esprimendo che deve passare per il punto ($\xi+3\zeta=0$, $\eta=0$) e tre esprimendo che deve contenere il punto ($\xi=0$, $\eta=0$) come doppio.

Abbiamo così 10 condizioni, mentre per determinare una cubica ne occorreva solamente 9. Quindi una delle condizioni precedenti sarà una conseguenza delle altre, e questo servirà per dedurre qualche teorema di Geometria piana . Per esempio avremo che

Se una cubica piana ha un punto doppio nel vertice ($\xi=0$, $\eta=0$) *del triangolo fondamentale, passa pel punto* ($\xi+3\zeta=0$, $\eta=0$), *e tocca due rette passanti pel* *punto* ($\xi+\zeta=0$, $\eta=0$) *nei punti in cui esse incontrano la retta* $\zeta=0$, *la tangente alla cubica nel terzo punto d' incontro colla* $\zeta=0$, *passa anch' essa pel punto* ($\xi+\zeta=0$, $\eta=0$).

Se il piano secante fosse un piano tangente di C, la sua intersezione colla sviluppabile Σ si spezzerebbe nella generatrice da esso contenuta, rappresentata da una retta per ($\xi=0$, $\eta=0$), e in una cubica che tocca la generatrice nel suo punto di contatto colla curva C, e che è rappresentata da una conica che passa semplicemente pel punto ($\xi=0$, $\eta=0$), pel punto ($\xi+3\,\zeta=0$, $\eta=0$) e pel punto di contatto del piano dato, e che tocca nel punto imagine del punto ulteriore intersezione del piano dato colla curva C la congiungente di questo punto col punto ($\xi+\zeta=0$, $\eta=0$).

Finalmente l'intersezione della sviluppabile Σ con uno dei suoi piani tangenti si spezza nella generatrice contenuta in questo piano contata due volte, e in una conica che tocca la generatrice stessa nel suo punto di contatto ε colla curva C. Perciò l'imagine della sezione prodotta da questo piano, si spezza in due volte la retta $\xi=\varepsilon\,\eta$ e nella retta che unisce il punto ($\xi+3\,\zeta=0$, $\xi=0$) coll' altro ($\xi=\varepsilon\,\eta$, $\zeta=0$), la quale starà appunto a rappresentare la conica suddetta. Dunque

Le imagini delle coniche intersezioni della sviluppabile Σ *coi suoi piani tangenti costituiscono il fascio di raggi col centro nel punto* ($\xi+3\,\zeta=0$, $\eta=0$) *prospettivo al fascio col centro nel punto* ($\xi=0$, $\eta=0$) *che rappresenta le generatrici.*

§. 26. Passiamo ora alla ricerca delle principali curve esistenti sulla sviluppabile, per mezzo delle loro imagini.

Sia dunque *m* l' ordine di una curva nel piano rappresentativo, che passi α volte per il punto fondamentale ($\xi+3\zeta=0$. $\eta=0$) che indicheremo per brevità con A, β volte pel punto fondamentale doppio ($\xi=0$, $\eta=0$) che indicheremo con B, e possieda fuori di questi punti d nodi ed r cuspidi. Chiamiamo M l'ordine e p il genere della curva rappresentata; allora per le formule del §. 18 avremo

$$M = 3\,m - 2\,\beta - \alpha$$

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{\beta(\beta-1)}{2} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} - d - r$$

$$1 \lesseqgtr \frac{(m+1)(m+2)}{2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} - 3\,d - 4\,r$$

Da queste si deduce facilmente un limite superiore per m dato M , p , α , β. Infatti si ricava

$$2\,M + p - 1 \geq 3\,m - 3\,\beta - \alpha + 2\,d + 3\,r,$$

da cui

$$m \leq \frac{1}{3}\left\{ 2\,M + 3\,\beta + \alpha - 2\,d - 3\,r - 1 \right\}.$$

Si ha pure un limite superiore per α , β dato M . Infatti il punto B rappresenta una conica ed A una retta le quali non potranno incontrare una curva di ordine M che in 2 M , M punti respettivamente al più , dunque $\beta \leq 2\,M$, $\alpha \leq M$.

Con questi limiti e colle relazioni precedenti è facile determinare le curve dei vari ordini che giaccion su Σ , dando ad M valori diversi successivamente.

Per avere le imagini delle superficie sviluppabili che passan per la curva C, quando si stabilisce la corrispondenza fra piani tangenti di C e i punti di un piano, bisogna fare uso delle formule precedenti, dove solamente s'intenda che M rappresenta la classe della sviluppabile passante per C.

Applichiamo dunque le formule trovate.

$$M=1 \; , \; p=0 \; , \; \beta\leq 2 \; , \; \alpha\leq 1 .$$

Il solo caso possibile è

$$m=1 \qquad \beta=1 \qquad \alpha=0.$$

Non esiston dunque sopra Σ altre rette che le generatrici.

$$M=2 \quad p=0 \quad \beta\leq 4 \quad \alpha\leq 2.$$

Il solo caso possibile è

$$m=1 \; , \; \beta=0 \; , \; \alpha=1$$

Sulla sviluppabile Σ *non esiste che un sistema di* ∞' *coniche* C_2 *(le sue intersezioni coi suoi piani tangenti) rappresentate dal fascio di rette col centro in* A.

Per la curva C *non passa che un sistema di* ∞' *sviluppabili di 2.ª classe* S_2 *(coni che la proiettan dai suoi punti) rappresentate dal fascio di rette col centro in* A.

$$M=3 \; , \; \beta\leq 6 \; , \; \alpha\leq 3.$$

I casi possibili sono

$$m=1 \qquad \beta=0 \qquad \alpha=0$$
$$m=2 \qquad \beta=1 \qquad \alpha=1$$

Esiste sulla sviluppabile Σ *un sistema di* ∞^2 *cubiche* C_3 *rappresentate dalle rette del piano che non passano per nessun punto fondamentale, e un sistema di* ∞^3 *cubiche* C'_3 *rappresentate dalle coniche pei due punti fondamentali* A , B.

Di queste coniche quelle che toccano una retta del fascio col centro nel punto $(\xi+\zeta=0\ ,\ \eta=0)$ *nel suo punto d' incontro colla retta* $\zeta=0$, *rappresentano, come abbiamo visto nel § precedente le cubiehe intersezioni della sviluppabile coi suoi piani tangenti. Tutte le altre rappresenteranno cubiche gobbe.*

Per la curva C *passa un sistema di* ∞^2 *sviluppabili di* 3.ª *classe* S_3, *rappresentate dalle rette che non passano per nessun punto fondamentale, e un sistema di* ∞^3 *sviluppabili di* 3.ª *classe* S_3' *rappresentate dalle coniche pei due punti fondamentali* A , B.

Di queste coniche quelle che toccano una retta del fascio col centro nel punto $(\xi+\zeta=0\ ,\ \eta=0)$ *nel suo punto d'incontro colla retta* $\zeta=0$ *rappresentino i coni di* 3.ª *classe, che si ottengon proiettando la* C *da un punto di* Σ. *Tutte le altre non rappresenteranno coni.*

Tutte queste cubiche e queste sviluppabili di 3.ª classe son di genere 0, perchè tali, sono le loro imagini.

$$M=4\quad .\quad \beta\leq 8\quad ,\quad \alpha\leq 4\quad .—$$

I soli casi possibili sono

$$m=2\qquad \beta=1\qquad \alpha=0$$

$$m=3\qquad \beta=2\qquad \alpha=1$$

Sulla sviluppabile Σ *esiste un sistema di* ∞^4 *curve di* 4.° *ordine rappresentate dalle coniche che passan per* B; *e un sistema di* ∞^5 *curve di* 4.° *ordine, rappresentate dalle cubiche che passan due volte per* B *e una per* A.

Per la curva C *passa un sistema di* ∞^4 *sviluppabili di* 4.ª *classe rappresentate dalle coniche che passan per* B *e un sistema di* ∞^5 *sviluppabili di* 4.ª *classe, rappresentate dalle cubiche che passano due volte per* B *ed una per* A.

Anche tutte queste curve e sviluppabili sono di genere 0 .

Così proseguendo potremmo trovare le curve di ordine superiore che giaccion su Σ e le sviluppabili di classe superiore che posson condursi per C.

Dalle cose dette risulta anche:

Due coniche C_2 *non possono incontrarsi; due cubiche* C_3 *si tagliano in un punto; due cubiche* C_3' *in due. Una conica* C_2 *taglia una cubica* C_3 *o* C'_3 *in un punto. Una cubica* C_3 *taglia una cubica* C'_3 *in due punti.*

Due sviluppabili S_2 *non hanno nessun piano tangente comune; due* S_3 *ne hanno una; due* S_3' *ne hanno due. Uua sviluppabile* S_2 *ha un piano tangente comune con una* S_3 *o* S_3'. *Una* S_3 *ne ha dua a comune con una* S_3'.

Se stabiliamo una corrispondenza proiettiva fra i raggi dei fasci coi centri nei punti B($\xi=0$, $\eta=0$), A($\xi+3\zeta=0$, $\eta=0$), il luogo dei punti d' incontro dei raggi corrispondenti è una retta o non conica pei due punti A , B. Da ciò si deduce facilmente che:

Se sulla curva C *prendiamo due serie omografiche di punti, il luogo dei punti d'incontro delle tan-*

Se sulla curva C *prendiamo due serie omografiche di punti, i piani che passano per i punti della* *genti a C nei punti della prima serie coi piani osculatori nei punti corrispondenti della seconda è una cubica* C_3 *o* C_3'.

prima serie e per le tangenti nei punti corrispondenti della seconda inviluppano uaa sviluppabile S_3 *o* S_3'.

§. 27. Come complemento di questo studio accennerò la possibilità di stabilire con metodo puramente geometrico una corrispondenza fra i punti della sviluppabile del 4.° ordine coi punti di un piano, della quale le formule svolte sono la interpretazione analitica.

I coni che proiettano una cubica gobba C da uno dei suoi punti sono del 2.° ordine. Scegliamo il tetraedro coordinato come abbiamo fatto nel § 21. e consideriamo il cono che proietta la cubica C dal vertice A_1 del tetraedro fondamentale. Il piano A_1 A_3 A_4 osculatore in A_1 tocca questa conica lungo la generatrice A_1 A_4 e taglia la sviluppabile Σ secondo la generatrice A_1 A_4 stessa contata due volte e secondo una conica C_2 che tocca in A_1 la A_1 A_4. Mediante questo cono possiamo facilmente stabilire la corrispondenza univoca fra le generatrici di Σ e il fascio di raggi definito dalle rette A_1 A_3, A_1 A_4. Infatti una generatrice determina un piano tangente al cono, che taglia il piano rappresentativo A_1 A_3 A_4 secondo una retta A_1 B che passa pel vertice A_1 del cono. Viceversa per una retta A_1 B del piano rappresentativo si può condurre oltre a questo piano un altro solo piano tangente al cono, ed esso conterrà una ed una sola generatrice di Σ.

Se prendiamo la retta A_1 A_3 per retta $\xi=0$, la A_1 A_4 per $\eta=0$ e la A_3 A_4 per $\zeta=0$ otterremo precisamente la corrispondenza stabilita al §. 21. purchè si scelga il punto unità in modo che le costanti sian daterminate in guisa che sia

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= a^3\\ \Theta_2 &= 1\\ \Theta_3 &= 2\,a\\ \Theta_4 &= a^2\,.\end{aligned}$$

Infatti il piano che passa per il punto $A_1(1\ ,0\ ,0,\ 0)$ e per la generatrice a ha per equazione

$$\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4\\ 1 & 2\,a & a^2\\ 0 & 2 & 2\,a \end{vmatrix},$$

ossia

$$a^2\,x_2 - a\,x_3 + x_4 = 0$$

e taglia perciò il piano $x_2 = 0$ secondo la retta

$$\frac{x_4}{x_3} = a$$

Per completare la rappresentanzione basta stabilire la corrispondenza proiettiva fra i punti delle generatrici di Σ e quelli della retta che la rappresente, ricordando che i punti della conica C_2 in cui le generatrici di Σ tagliano il piano rappresentativo, le coordinate dei quali sono

$$\begin{aligned}x_1 &= \Theta_1' = 3\,a^2\\ x_2 &= \Theta_2' = 0\\ x_3 &= \Theta_3' = 2\\ x_4 &= \Theta_4' = 2\,a\end{aligned}$$

devon corrispondere al punto A_1 $(\xi=0\ ,\ \eta=0)$, e i punti di contatto delle generatrici stesse colla cubica C corrispondono ai punti d'incontro delle loro imagini colla retta $\zeta=0$.

Ho solo accennato il metodo per stabilire geometricamente la corrispondenza accennata. Si potrebbe anche partire da questi fondamenti e ritrovare tutte le particolarità trovate analiticamente, senza servirci delle formule. Ma per amore di brevità, e per conservare l'uniformità del metodo lascerò da parte questo argomento.

CAPITOLO III.

Superficie sviluppabili del 5.° *ordine.*

§. 28. Abbiamo veduto che vi è una sola specie di sviluppabili Σ senza singolarità straordinarie del 5.° ordine, il cui spigolo di regresso è una curva C del 4.° ordine con un punto stazionario e un piano stazionario. Sia α il valore di λ corrispondente al punto stazionario e β quello corrispondente al punto di contatto del piano stazionario della curva C.

Se prendiamo per piano $x_1=0$ quello stazionario, esso deve incontrare la curva C nel punto β e in tre infinitamente vicini onde $\Theta_1=a_1(\lambda-\beta)^4$. Se prendiamo il piano osculatore nel punto stazionario per piano $x_2=0$, esso deve incontrare la curva C nel punto α e in tre infinitamente vicini, onde $\Theta_2=a_2(\lambda-\alpha)^4$. Se prendiamo per piano $x_3=0$ quello che passa per la tangente nel punto stazionario α e quel punto β, questo deve incontrare la curva C in β, in α e in due punti infinitamente vicini ad α, dunque $\Theta_3=a_3(\lambda-\alpha)^3(\lambda-\beta)$. Finalmente se prendiamo per piano $x_4=0$ quello che passa pel punto stazionario α e per la tangente a C contenuta nel piano stazionario, questo dovrà tagliare la C nel punto α, nel punto β, in uno infinitamente vicino ad α e in uno infinitamente vicino a β e perciò $\Theta_4 = a_4 (\lambda - \alpha)^2 (\lambda - \beta)^2$. — Disponendo poi convenientemente del punto unito, potremo rendere le costanti a_1, a_2, a_3, a_4 tutte uguali ad 1.

Scegliendo dunque il tetraedro fondamentale nel modo indicato, abbiamo

$$(1) \qquad \begin{aligned} \Theta_1 &= (\lambda - \beta)^4 \\ \Theta_2 &= (\lambda - \alpha)^4 \\ \Theta_3 &= (\lambda - \alpha)^3 (\lambda - \beta) \\ \Theta_4 &= (\lambda - \alpha)^2 (\lambda - \beta)^2 \end{aligned}$$

Per mezzo delle formule (8) del §. 11. deduciamo che le coordinate del piano osculatore nel punto λ sono

$$(2) \qquad \begin{aligned} \Phi_1 &= (\lambda - \alpha)^4 \\ \Phi_2 &= -\ 3(\lambda - \beta)^4 \\ \Phi_3 &= 8(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)^3 \\ \Phi_4 &= -\ 6(\lambda - \alpha)^2 (\lambda - \beta)^2 \end{aligned}$$

Colla trasformazione $\dfrac{\lambda - \beta}{\lambda - \alpha} = a$, per mezzo della quale il punto stazionario e il punto di contatto del piano stazionario vengono respettivamente a corrispondere ai valori ∞, 0 del parametro a le formule precedenti divengono

$$(3) \qquad \begin{aligned} \Theta_1 &= a^4 \ (*) \qquad & \Phi_1 &= 1 \\ \Theta_2 &= 1 & \Phi_2 &= -\ 3\,a^4 \\ \Theta_3 &= a & \Phi_3 &= 8\,a^3 \\ \Theta_4 &= a^2 & \Phi_4 &= -\ 6\,a^2 \end{aligned}$$

(*) Queste formule sono già state trovate per altra via da Fiedler (Geometria Descrittiva §. 148. p. 547).

Dalle (1), (2) o dalle (3), (4) potremmo ora dedurre le formule della corrispondenza fra i punti di Σ o i piani di C e i punti di un piano.

Tanto le (1), (2) quanto le (3), (4) mettono in evidenza la corrispondenza dualistica che abbiamo osservato esistere fra i punti di Σ e i piani C.

§. 29. Le formule (4) ci danno il mezzo di determinare l'equazione della sviluppabile, riguardandola come inviluppo del piano

$$x_1 - 3\, a^4\, x_2 + 8\, a^3\, x_3 - 6\, a^2\, x_4 = 0.$$

Perciò basterà eliminare a fra le due equazioni

$$\begin{aligned} a^2\, x_2 - 2\, a\, x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2\, a^3\, x_3 - 3\, a^2\, x_4 &= 0, \end{aligned}$$

che si ottengono derivando la equazione precedente rispetto ad a_1, a_2, dopo averla resa omogenea col porre $\frac{a_1}{a_2}$; oppure si può eliminare a per le due equazioni equivalenti

$$\begin{aligned} a_2\, x_2 - 2\, a\, x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + a^4\, x_2 - 2\, a^2\, x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Effettuando questa eliminazione si trova

$$(x_3 \pm \sqrt{x_3^2 - x_2\, x_4})^2 = x_2\, x_4 \pm x_2 \sqrt{x_4^2 - x_1\, x_2}$$

ovvero

$$x_2\,(3\, x_4^2 + x_1\, x_2)^2 - 8\, x_3^2\,(x_4^3 + 3\, x_1 x_2 x_4 - 2\, x_1\, x_3^2) = 0.$$

E questa equazione ci mostra che la sviluppabile taglia il piano $x_1 = 0$ secondo la retta $A_2 A_3$ contata tre volte e secondo una conica K′ che ha per equazione

$$9\, x_2\, x_4 - 8\, x_3^2 = 0.$$

Taglia il piano $x_2 = 0$ secondo la retta $A_1\, A_4$ contata due volte e secondo la cubica

$$x_4^3 - 2\, x_1\, x_3^2 = 0.$$

Le formule (3) ci mostrano che questa è la cubica le cui coordinate sono

$$\begin{aligned} x_1 &= \Theta_1' \\ x_2 &= \Theta_2' \\ x_3 &= \Theta_3' \\ x_4 &= \Theta_4' \end{aligned}$$

che taglia la curva C nel suo punto cuspidale.

Taglia il piano $x_3 = 0$ secondo la retta $A_1\, A_4$ e due volte secondo la conica K che ha per equazione

$$3\, x_4^2 + x_1\, x_2 = 0.$$

Finalmente la sviluppabile taglia il piano $x_4 = 0$ secondo la retta 23 e secondo la curva del quart'ordine

$$x_1\, x_2^3 + 16\, x_3^4 = 0.$$

§. 30. Si può ottenere facilmente la condizione affinchè 4 punti sieno in un piano, notando che se nell'equazione di un piano qualunque

$$\Sigma\, u_i\, x_i = 0$$

sostituiremo alle x le coordinate di un punto della curva C, otteniamo la equazione di 4.° grado in a

$$(5) \qquad u_1\, a^4 + u_2 + u_3\, a + u_4\, a^2 = 0,$$

le cui quattro radici a_1 , a_2 , a_3 , a_4 daranno i quattro punti d' incontro di quel piano colla curva stessa. Siccome l' equazione suddetta manca del termine in a^3, dovrà essere

$$(6) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0;$$

e questa è appunto l' equazione cercata, che può anche scriversi

$$(6) \qquad \frac{\lambda_1 - \beta}{\lambda_1 - \alpha} + \frac{\lambda_2 - \beta}{\lambda_2 - \alpha} + \frac{\lambda_3 - \beta}{\lambda_3 - \alpha} + \frac{\lambda_4 - \beta}{\lambda_4 - \alpha} = 0,$$

Analogamente troveremo che la condizione onde quattro piani osculatori nei punti λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 di C passino per un punto, è

$$(7) \qquad \frac{\lambda_1 - \alpha}{\lambda_1 - \beta} + \frac{\lambda_2 - \alpha}{\lambda_2 - \beta} + \frac{\lambda_3 - \alpha}{\lambda_3 - \beta} + \frac{\lambda_4 - \alpha}{\lambda_4 - \beta} = 0.$$

Ponendo le condizioni che a_3 sia infinitamente vicino ad a_1 e a_4 ad a_2, avremo che la condizioue d'incontro di due generatrici che passan peì punti a_1 a_2 di C è

$$a_1 + a_2 = 0,$$

ossia

$$(8)\qquad \frac{\lambda_1-\beta}{\lambda_1-\alpha}+\frac{\lambda_2-\beta}{\lambda_2-\alpha}=0.$$

Chiameremo generatrici coniugate due generatrici di Σ che s'incontrano, punti coniugati i punti di contatto colla curva C di due generatrici coniugate, piani coniugati i piani che contengono due generatrici coniugate.

La relazione (8) ci mostra che

Le imagini di due generatrici coniugate separano armonicamente le rete $\xi=\alpha\eta$, $\xi=\beta\eta$. Ossia

Le imagini delle coppie di generatrici coniugate costituiscono un'involuzione di cui le rette $\xi=\alpha\eta$, $\xi=\beta\eta$ *sono i raggi doppi.*

Nello stesso modo le imagini delle coppie di punti o piani coniugati costituiscono un' involuzione sulla retta $\zeta=0$.

Affinchè un piano contenga due coppie di punti coniugati, l' equazione (5) deve ridursi biquadratica, ossia dovrà essere $u_3=0$; dunque

Tutte le rette che passano per due punti coniugati di C, *passano anche pel punto fondamentale* 3 (*).

§. 31. L' equazioni (5), (6), (8) ci mostrano ancora che:

I quattro punti coniugati alle 4 *intersezioni di un piano qualunque colla cubica* C, *giacciono pure in un piano.*

I 4 *piani coniugati ai* 4 *piani tangenti a* Σ *condotti per un punto qualunque, passano pure per un punto.*

(*) Cremona. Sur les surfaces developpables du 5.me ordre (Comptes Rendus, T. LIV p. 604).

Dati tre punti a_1 , a_2 , a_3, la (6) dà il quarto punto d'incontro del piano condotto per essi colla curva C. L'equazione di questo piano sarà

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1^4 & 1 & -a_1 & a_1^2 \\ a_2^4 & 1 & -a_2 & a_2^2 \\ a_3^4 & 1 & -a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

L' equazione del piano che passa pei 4 punti coniugati, sarà

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1^4 & 1 & a_1 & a_1^2 \\ a_2^4 & 1 & a_2 & a_2^2 \\ a_3^4 & 1 & a_3 & a_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

E questo mostra che i due piani si tagliano sul piano $x_3=0$ e sono separati armonicamente da questo piano e dal punto $(x_1=0 , x_2=0 , x_4=0)$.

Correlativamente per un punto P passano 4 piani tangenti di Σ; i 4 piani ad essi coniugati passan per un punto P′ allineato col punto P e col punto ($x_1=0$, $x_2=0$, $x_4=0$). I punti P , P′ son separati armonicamente dal piano $x_3=0$ e dal punto $(x_1=0, x_2=0, x_4=0)$.

Le proprietà dimostrate danno luogo al sistema di due figure omologiche armoniche. Un punto P ne determina uno P′, tali che la retta P P′ passa per il punto $(x_1=0$, $x_2=0$, $x_4=0)$, un piano p ne determina uno p', tale che la retta pp' giace nel piano $x_3=0$. Dunque il punto ($x_1=0$, $x_2=0$, $x_4=0$) e il piano $x_3=0$ sono centro e piano d' omologia, e due elementi corrispondenti sono separati armonicamente da essi.

In particolare due punti coniugati sono allineati col centro di omologia; due piani coniugati s' incontrano sul piano d' omologia, e tanto gli uni quanto gli altri sono separati armonicamente dal centro e dal piano d' omologia (*).

§. 32. Applicando le formule del §. 17, si trova che le coordinate di una generatrice di Σ sono

$$(9) \qquad \begin{aligned} p_{23} &= (\lambda-\alpha)^6 \\ p_{31} &= 3\,(\lambda-\alpha)^2\,(\lambda-\beta)^4 \\ p_{12} &= -4\,(\lambda-\alpha)^3\,(\lambda-\beta)^3 \\ p_{14} &= -2\,(\lambda-\alpha)\,(\lambda-\beta)^5 \\ p_{24} &= 2\,(\lambda-\alpha)^5\,(\lambda-\beta) \\ p_{34} &= (\lambda-\alpha)^4\,(\lambda-\beta)^2 \end{aligned}$$

ovvero ponendo al solito $\dfrac{\lambda-\beta}{\lambda-\alpha} = a$

$$(10) \qquad \begin{aligned} p_{23} &= 1 \\ p_{31} &= 3\,a^4 \\ p_{12} &= -4\,a^3 \\ p_{14} &= -2\,a^5 \\ p_{24} &= 2\,a \\ p_{34} &= a^2 \end{aligned}$$

Queste espressioni ci mostrano che le generatrici di Σ appartengono al complesso tetraedrale

$$p_{24}\,p_{31} + 3\,p_{23}\,p_{14} = 0$$

(*) l. c.

e quindi, per una ben nota proprietà dei complessi tetraedrali, si ha:

Il rapporto anarmonico dei 4 punti d'incontro di una generatrice di Σ colle faccie del tetraedro fondamentale, è costante e uguale a 3.

Il rapporto anarmonico dei 4 piani che proiettano una generatrice di Σ dai vertici del tetraedro fondamentale, è costante e uguale a 3.

§. 33. Un piano che passi per la retta che unisce il punto cuspidale di C con un' altro suo punto, incontra la curva stessa in un sol punto variabile; abbiamo dunque una corrispondenza univoca fra i punti di C e i piani del fascio che ha per asse una tal retta.

Similmente abbiamo che da un punto della retta d'intersezione del piano stazionario di C con un suo piano osculatore si può condurre un sol piano variabile osculatore a C; e quindi abbiamo una corrispondenza univoca fra i punti di una tal retta e i piani osculatori di C. Dunque:

Il rapporto anarmonico dei 4 piani che proiettano quattro punti di C da una sua corda che passi pel suo punto cuspidale, è costante è uguale a quello dei 4 punti.

Il rapporto anarmonico dei 4 punti d'incontro di 4 piani osculatori di C colla retta d'intersezione del piano stazionario con un piano osculatore qualunque, è costante e uguale a quello dei 4 piani.

§. 34. Occupiamoci ora della curva doppia di Σ e della sviluppabile doppia di C. Due piani coniugati, e quindi due generatrici coniugate, si tagliano sul piano $x_3=0$, dunque la curva doppia, che dalla tabella delle singolarità delle sviluppabili dei primi 7 ordini, sappiamo dover essere una conica, giace nel piano $x_3=0$. La chiameremo K.

Abbiamo visto ancora che un piano che passi pel punto $u_3=0$ taglia la curva C in due coppie di punti coniugati allineati col punto stesso, ossia il cono S che proietta la curva C da quel punto è di 2.º grado ed è la sviluppabile doppia, perchè può riguardarsi come inviluppo dei piani che contengono due generatrici coniugate.

Se per brevità indichiamo con 1, 2, 3, 4 i vertici del tetraedro fondamentale respettivamente opposti ai piani $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=0$, è facile riconoscere geometricamente che la conica K tocca in 1 la retta 14 in 2 la 24, e che il cono S tocca il piano 143 lungo la 13, e il piano 243 lungo la 23.

Oltre alla conica doppia K abbiamo sopra la sviluppabile Σ un' altra conica K', intersezione di essa col piano $x_1=0$. Difatti per un punto di questo piano si posson condurre altri due piani tangenti a Σ solamente, e quindi l' intersezione di esso colla sviluppabile è una curva di 2.ª classe. Per la conica K' è facile vedere che tocca la 23 nel punto 2 e la 34 nel punto 4.

Similmente un piano che passi per 1 taglia la C in altri due punti, ossia il cono S' che proietta da 1 la C è del 2.º ordine. È facile vedere che esso tocca il piano 134 lungo la 14 e il piano 123 lungo la 12.

§. 35. Siamo ora in grado di risolvere colla massima facilità il problema della ricerca dell'imagine della curva doppia, senza bisogno di ricorrere al metodo generale svolto nel §. 15. Poichè infatti la conica doppia K giace nel piano $x_3=0$, e l' imagine dell' intersezione completa di questo piano colla sviluppabile Σ, è

$$(\xi-\alpha\eta)^2\left((\xi-\alpha\eta)(\xi-\beta\eta)+\zeta\,[\,3(\xi-\beta\eta)+(\xi-\alpha\eta)\,]\right)=0,$$

avremo, lasciando da parte il fattore $(\xi-\alpha\eta)^2$, che l'imagine della conica doppia K' è

$$(\xi-\alpha\eta)(\xi-\beta\eta)+\zeta\,[\,3(\xi-\beta\eta)+(\xi-\alpha\eta)\,]$$

Si vede di qui che:

L' imagine della conica doppia K *è una conica che taglia la retta* $\zeta=0$ *nei suoi punti d' incontro colle* $\xi-\alpha\eta=0$, $\xi-\beta\eta=0$, *tocca nel punto* $\xi=0\ \eta=0$ *la retta*

$$4\,\xi=(\alpha+3\beta)\,\eta$$

e passa pel punto foudamentale ($\xi+4\,\zeta=0$, $\eta=0$).

Un punto qualunque della curva doppia ha per imagini i due punti in cui la conica suddetta è incontrata dalle imagini delle due generatrici che passano per il punto che consideriamo. Siccome le immagini delle coppie di generatrici coniugate costituiscono una involuzione di raggi col centro nel punto ($\xi=0$, $\eta=0$), che appartiene alla conica imagine della curva doppia, ne segue che :

Le coppie di punti imagini di uno stesso punto della conica doppia K, *determinano un' involuzione sulla conica imagine della curva* K *stessa.*

Perciò le congiungenti dei punti che corrispondono a uno stesso punto di K, passano per un punto, per il quale naturalmente devon passare le tangenti alla conica imagine di K nei punti doppi dell' involuzione suddetta, i quali sono i punti d' incontro di essa colle rette $\xi=\alpha\eta$, $\xi=\beta\eta$ sulla $\zeta=0$. Queste tangenti hanno per equazioni respettivamente

$$\xi-\alpha\eta+3\,\zeta=0$$
$$\xi-\beta\eta+\zeta=0,$$

e servono a determinare il punto comune alle congiungenti i punti corrispondenti ad uno della curva K.

Analogamente si trova che, se si stabilisce la corrispondenza fra i piani tangenti di C e i punti di un piano, la sviluppabile doppia S è rappresentata dalla conica

$$(\xi-\alpha\eta)(\xi-\beta\eta)+\zeta[3(\xi-\alpha\eta)+(\xi-\beta\eta)]=0$$

Un piano di S ha per imagini due punti di questa curva e le congiungenti di quelle coppie di punti passano per il punto d' incontro delle due rette

$$\xi-\alpha\eta+\zeta=0$$
$$\xi-\beta\eta+3\zeta=0.$$

§. 36. Abbiamo visto che la curva C è la intersezione completa dei due coni S ed S'; quindi sarà la base di un fascio di quadriche. Per mezzo delle formule (3) del §. 28. si deduce facilmente che l' equazioni di quei due coni sono respettivamente

$$(11) \qquad x_1 x_2 = x_4^2 \qquad x_2 x_4 = x_3^2$$

La forma stessa di queste equazioni ci mostra subito (cosa del resto già veduta geometricamente al §. 34) che il cono S tocca il piano 2 3 4 ($x_1=0$) lungo la 2 3 ($x_1=0$, $x_4=0$) e il piano 1 3 4 ($x_2=0$) lungo la 1 3 ($x_2=0$, $x_4=0$), e che il cono S' tocca il piano 1 3 4 ($x_2=0$) lungo la 1 4 ($x_2=0$, $x_3=0$) e il piano 1 2 3 ($x_4=0$) lungo la 1 2 ($x_4=0$, $x_3=0$).

Trovate l' equazioni dei coni S, S', l' equazione del fascio di quadriche che ha C per base, sarà

$$(12) \qquad \mu(x_2 x_4-x_3^2)-\nu(x_1 x_2-x_4^2)=0$$

Tra le quadriche di questo fascio non vi sono altri coni che S ed S′; poichè i coni corrispondono a quei valori di $\frac{\mu}{\nu}$ pei quali è zero il discriminante

$$\begin{vmatrix} 0 & -\nu & 0 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & -2\mu & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 2\nu \end{vmatrix} = 4\,\mu\,\nu^3,$$

ossia corrispondono a $\mu=0$, $\nu=0$. Dunque dei 4 coni del fascio in quistione uno è il cono S, gli altri tre coincidono con S′.

Similmente troviamo che l'equazioni delle coniche K , K′ sono

$$(13) \qquad 12\,u_1\,u_2 + u_4^2 = 0 \quad , \quad 9\,u_3^2 - 32\,u_2\,u_4 = 0$$

e quindi l'equazione della schiera di quadriche inscritte a Σ da esse definita, è

$$(14) \qquad \mu(9\,u_3^2 - 32\,u_2\,u_4) - \nu(u_4^2 + 12\,u_1\,u_2) = 0.$$

L'equazione (12) può scriversi

$$(15) \qquad x_2(\mu x_4 - \nu x_1) - (x_3\sqrt{\mu} - x_4\sqrt{\nu})(x_3\sqrt{\mu} + x_4\sqrt{\nu}) = 0$$

$$(16) \qquad x_4(\mu\,x_2 + \nu\,x_4) - (\mu\,x_3^2 - \nu\,x_1\,x_2) = 0$$

dunque:

Tutte le quadriche del fascio che ha C per base,

I coni che proiettano le quadriche inscritte a Σ dal *tagliano il piano osculatore nel punto cuspidale* ($x_2=0$) *secondo coppie di rette passanti pel punto cuspidale stesso coniugate nell' involuzione che ha le rette* 13, 14 *per raggi doppi.*

punto di contatto del piano stazionario, si spezzano in due piani che tagliano il piano stazionario 234 *secondo coppie di rette coniugate nell'involuzione che ha le rette* 23, 24 *per raggi doppi.*

Questa proprietà ci mostra che tutte le quadriche che passan per C toccano nel suo punto cuspidale, il suo piano osculatore, e che le quadriche inscrite a Σ passan per il punto di contatto del piano stazionario;

È anche facile di vedere che:

Le quadriche che passan per C *tagliano il piano* 1 2 3 ($x_4=0$) *secondo coniche che toccano in* 1, 2 *le* 1 3, 2 3, *tagliano il piano* 1 2 4 *secondo coniche le quali toccano in* 1 *la retta* 1 4 *e quindi anche la conica* K, *e che passan per* 2; *tagliano il piano stazionario* 2 3 4 *secondo coniche che toccano in* 2 *la* 2 3 *e quindi la conica* K'.

I coni che inviluppano le quadriche inscritte a Σ *col vertice in* 4 *toccano i piani* 2 3 4, 1 3 4 *lungo le* 2 4, 1 4; *i coni che le inviluppano col vertice in* 3 *toccano il piano* 2 3 4 *lungo la* 2 3 *e quindi anche il cono* S, *e toccano il piano* 1 3 4, *i coni ehe le inviluppano col vertice in* 1 *toccano il piano* 1 3 4 *e quindi il cono* S' *lungo la* 1 4.

§. 37. Ponendo

$$\mu=4(\lambda-\beta)^2=4a_1^2 \qquad \nu=(\lambda-\alpha)^2=a_2^2$$

l' equazione delle quadriche che passan per C prende la forma

$$(17)\qquad 4\,a_1^2\,(x_3^2-x_2\,x_4) - a_2^2\,(x_4^2-x_1\,x_2) = 0$$

che può anche scriversi

$$(18)\ [2a_1a_2x_3-(a_2^2x_4+a_1^2x_2)][2a_1a_2x_3+(a_2^2x_4+a_1^2x_2)]-x_2(a_2^4\,x_1-2\,a_1^2\,a_2^2\,x_4+a_4\,x_2) = 0$$

e quella delle quadriche inscritte a Σ prende la forma

$$(19)\quad 4\,a_1^2(9\,u_3^2-3\,2\,u_2\,u_4)-a_2^2(u_4^2+12\,u_1\,u_2) = 0.$$

L' equazione (18) ci mostra che la quadrica in quistione contiene la generatrice di Σ che passa per il punto λ e la sua coniugata.

Ciò risulta evidente, osservando che da quel che abbiamo detto al §. 29. si r.cava che la generatrice che passa pel punto λ deve riguardarsi come intersezione dei due piani

$$2\,a_1\,a_2\,x_3 - (a_2^2\,x_4 + a_1^2\,x_2) = 0$$
$$a_2^4\,x_1 - 2\,a_1^2\,a_2^2\,x_4 + a_2^4\,x_2 = 0,$$

e quindi la sua coniugata come intersezione dei due

$$2\,a_1\,a_2\,x_3 + (a_2^2\,x_4 + a_1^2\,x_2) = 0$$
$$a_2^4\,x_1 - 2\,a_1^2\,a_2^2\,x_4 + a_2^4\,x_2 = 0$$

Dunque:

Ogni quadrica che passa per C taglia la sviluppabile Σ secondo due generatrici coniugate.

Ogni quadrica iscritta a Σ, taglia questa sviluppabile secondo due generatrici coniugati.

ossia:

Per due generatrici coniugate di Σ passano due quadriche una delle quali passa per C, l'altra è inscritta a Σ.

Chiameremo col Prof. Cremova *associate* queste due quadriche.

§. 38. Dalla equazione (19) del §. precedente si passa facilmente all'equazione in coordinata di punti delle quadriche inscritte a Σ, che è

$$\begin{vmatrix} 0 & -48\,a_1^2 & 0 & 0 & x_1 \\ -48\,a_1^2 & 0 & 0 & -32\,a_2^2 & x_2 \\ 0 & 0 & 18\,a_2^2 & 0 & x_3 \\ 0 & -32\,a_2^2 & 0 & -8\,a_1^2 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ossia

$$(20)\; 4a_2^6x_1^2-12a_2^4a_1^2x_1x_4+3a_2^2a_1^4x_1x_2+9a_2^2a_1^4x_4^2-a_1^6x_3^2=0,$$

che può anche scriversi

$$(21)\qquad a_1^4\,(4\,a_1^2\,a_2^2\,x_3^2-[\,a_2^2\,x_4+a_1^2\,x_2\,]^2\,)+$$
$$+(-4a_2^4x_1+a_1^4x_2-4\,a_1^2a_2^2x_4)\,(a_2^4x_1+a_1^4x_2-2a_1^2a_2^2x_4)=0.$$

Confrontando questa equazione colla (19), si vede che l'intersezione di due quadriche associate è quella di una di esse col luogo di second'ordine

$$(\,a_2^4\,x_1-2\,a_1^2\,a_2^2\,x_4+a_1^4\,x_2\,)\,(\,a_2^2\,x_1-a_1^2\,x_4\,)=0,$$

ossia le due quadriche associate, oltre alle due generatrici coniugate hanno a comune una conica che giace sul piano

$$(10) \qquad a_2^2\, x_1 = a_1^2\, x_4 \quad .$$

che passa evidentemente per la retta 2 3. Queste coniche costituiscono una superficie di 3.º ordine T (*) la cui equazione

$$4\, x_1\, (\, x^2_3 - x_2\, x_4\,) - x_4\, (x_4^2 - x_1\, x_2) = 0,$$

ossia

$$(23) \qquad 4\, x_1\, x_3^2 - 3\, x_1\, x_2\, x_4 - x_4^3 = 0,$$

si ottiene facilmente eliminando $\frac{a_1}{a_2}$ fra la (17) e la (22).

Nello stesso modo si potrebbe dimostrare che due superfici associate sono inscritte nello stesso cono di 2.º ordine e che questi coni inviluppano una superficie T′ di 3.ª classe.

§. 39. L'equazione (23) della superficie T mostra che essa gode delle seguenti proprietà.

Contiene il punto 1 come doppio.

Taglia il piano $x_1=0$ contato tre volte, ossia oscula lungo la 2 3 il piano 2 3 4.

Taglia il piano $x_2=0$ lungo la cubica

$$4\, x_1\, x_3^2 - x_4^3 = 0,$$

e il piano $x_3=0$ secondo la retta $x_4=0$ e secondo la

(*) l. c.

conica

$$3\, x_1\, x_2 + x_4^2 = 0$$

che tocca in 1 , 2 le 14 , 24 e quindi la cônica K.

Taglia il piano $x_4 = 0$ secondo la retta $x_1 = 0$ e due volte secondo la retta $x_3 = 0$, cioè tocca il piano 1 2 3 lungo la 12 .

Passa per la curva C , come è facile verificare, e inoltre tocca lungo di essa la sviluppabile Σ. Infatti le coordinate del piano polare di un punto di coordinate $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ rispetto a T sono

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv 4\, x_3^2 - 3\, x_2\, x_4 \\ u_1 &\equiv -3\, x_1\, x_4 \\ u_3 &\equiv 8\, x_1\, x_3 \\ u_4 &\equiv -3\, x_1\, x_4 - 3\, x_4 . \end{aligned}$$

Quindi le coordinate del piano tangente a T in un punto a di C, sono

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv 1 \\ u_2 &\equiv -3\, a^4 \\ u_3 &\equiv 8\, a^3 \\ u_4 &\equiv -6\, a^2, \end{aligned}$$

che sono appunto le coordinate del piano osculatore di C nel punto a .

§. 40. Le generatrici delle quadriche che passan per C e quelle delle quadriche inscritte a Σ sono reali, cioè queste quadriche appartengono alla famiglia degli iperboloidi. È facile dimostrare anche i seguenti teoremi.

Le generatrici di tutte le quadriche del fascio che ha C *per base, passanti per un punto di* C *costituiscono un cono di* 3.° *ordine.*

Le coppie di piani che proiettano le coppie di generatrici delle diverse quadriche del fascio che ha C *per base, passanti per un punto fisso di* C *dal punto stazionario* 1, *sono coniugati nell'involuzione di cui i piani doppi passano pei punti* 3 , 4.

L'inviluppo di tutte le generatrici delle quadriche inscritte a Σ *che giacciono in un piano tangente di* Σ *è una curva di* 3.ª *classe.*

Le coppie di punti d'intersezione del piano stazionario colle coppie di generatrici delle varie quadriche inscritte a Σ, *che giacciono in un suo piano tangente, sono coniugati nell' involuzione di cui i punti doppi sono nei piani* 124 , 123.

§. 41. Passiamo ora ad occuparci più specialmente dalla rappresentazione piana di questa superficie.

Abbiamo già veduto al §. 35. come vien rappresentata la curva doppia. Sappiamo poi dalla teoria generale che le imagini delle sezioni piane sono curve del 4.° ordine con un punto fondamentale triplo ($\xi=0$, $\eta=0$) e due semplici ($\xi+4\zeta=0$, $\eta=0$) ($\xi=\alpha\eta$, $\zeta=-\frac{1}{4}(\alpha-\beta)\eta$), e che tagliano la retta $\zeta=0$ in 4 punti, nei quali toccano le congiungenti dei medesimi col punto ($\xi+\zeta=0$, $\eta=0$). Abbiamo così per queste imagini $6+2+8=16$ condizioni, mentre ne occorrerebbero soltanto 14 per determinarle. Potremo dunque per definire il piano secante, prendere tre dei 4 punti in cui taglian la curva C. Le imagini di quei tre punti basteranno a definire l' imagine della sezione prodotta da quel piano.

Se il piano secante è un piano tangente in un punto ε di C, la sezione da esso prodotta nella sviluppabile, si spezza nella generatrice che passa per ε, rappresentata dalla retta $\xi=\varepsilon\eta$ e in una quartica rappresentata da una cubica che passa due volte per il punto ($\xi=0$, $\eta=0$), semplicemente pei punti ($\xi+4\zeta=0$, $\eta=0$), ($\xi=\alpha\eta$, $\zeta=-\frac{1}{4}(\alpha-\beta)\eta$), ($\xi=\varepsilon\eta$, $\zeta=0$) e per altri due punti della retta $\zeta=0$, imagini delle ulteriori intersezioni di quel piano colla curva C, nei quali toccano le congiungenti di questi punti col punto ($\xi+\zeta=0$, $\eta=0$); Così abbiamo 10 condizioni, mentre ne occorron 9 sole per definire una cubica. È chiaro del resto che dato il punto ε, ed un punto d'incontro del piano colla curva C, l'altro è dato dalla relazione (6).

Se poi il piano secante è il piano osculatore in un punto ε di C, il punto λ ulteriore intersezione di esso colla curva C vien dato dalla suddetta relazione (6). L' intersezione di un tale punto colla sviluppabile Σ si spezza nella generatrice pel punto ε contata due volte, rappresentata dalla retta $\xi=\varepsilon\eta$, e in una cubica rappresentata da una conica per la quale sono date le 6 condizioni di passare pei punti ($\xi=0, \eta=0$), ($\xi+4\zeta=0, \eta=0$), ($\xi=-\frac{1}{4}(\alpha-\beta)\zeta, \xi=\alpha\eta$), ($\xi=\varepsilon\eta$, $\zeta=0$), ($\xi=\lambda\eta$, $\zeta=0$) e di toccare in questo punto la retta che lo unisce al punto ($\xi+\zeta=0$, $\eta=0$).

Se finalmente il piano passa per due generatrici coniugate tangenti a C nei punti ε, ε' l'intersezione prodotta da questo piano si spezza nelle due generatrici suddette rappresentate dalle rette $\xi=\varepsilon\eta$, $\xi=\varepsilon'\eta$, e in una cubica rappresentata dalla conica pei punti ($\xi=0$, $\eta=0$), ($\xi+4\zeta=0$, $\eta=0$) ($\xi=-\frac{1}{4}(\alpha-\beta)\zeta$, $\xi=\alpha\eta$), ($\xi=\varepsilon\eta$, $\zeta=0$), ($\xi=\varepsilon'\eta$, $\zeta=0$).

Considerazioni analoghe potrebbero ripetersi per l'imagini dei coni tangenti alla curva C, quando si stabilisca la corrispondenza fra i piani tangenti di C e i punti di un piano.

§. 4. Cerchiamo ora le principali curve esistenti sulla superficie Σ per mezzo delle formule del §. 18.

Sia m l'ordine di una curva nel piano rappresentativo, che passi β volte pel punto fondamentale triplo B, α volte per il punto A imagine della generatrice cuspidale, e γ volte per l' altro punto fondamentale C, e che al di fuori di questi punti possieda d nodi ed r cuspidi. Se M. è l' ordine e p il genere della curva rappresentata, abbiamo per le formule citate

$$M = 4\,m - 3\,\beta - \alpha - \gamma$$
$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\beta(\beta-1) - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1) - \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma-1) - r - d$$
$$1 \leq \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) - \tfrac{1}{2}\beta(\beta+1) - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha+1) - \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma+1) - 3\,d - 4r.$$

Da queste si ricava facilmente

$$M + p - 1 \geq m - 2\,\beta + 2\,d + 3\,r$$

e da questa abbiamo evidentemente un limite superiore per m, dato M , p . . .

Per determinare le curve degli ordini più bassi, esistenti sulla sviluppabile faremo dunque uso delle formule

$$m \leq M + p + 2\,\beta - 1 - 2\,d - 3\,r$$
$$m = \tfrac{1}{4}\,(M + 3\,\beta + \alpha + \gamma)$$
$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\beta(\beta-1) - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1) - \tfrac{1}{2}\gamma(\gamma-1) - d - r,$$

tenendo anche presente che deve essere

$$\beta \leq 3\,M \quad , \quad \alpha \leq M \quad , \quad \gamma \leq M\,.$$

Nella rappresentazione dei piani tangenti di C sui punti di un piano, per determinare le imagini delle sviluppabili per C, dovremmo fare uso delle formule precedenti nelle quali solamente si deve intendere che M rappresenta la classe delle sviluppabili suddette.

$$M=1 \quad , \quad p=0 \; .$$

Il solo caso possibile è

$$m=1 \quad , \quad \beta=1 \quad , \quad \alpha=0 \quad ; \quad \gamma=0 \, .$$

Non esiston dunque sopra Σ altre rette che le generatrici

$$M=2 \quad , \quad p=0 \; .$$

Il solo caso possibile è

$$m=1 \quad , \quad \beta=0 \quad , \quad \alpha=1 \quad , \quad \gamma=1 \, .$$

Fatta astrazione dalla conica doppia (che essendo contata due volte, va riguardata come una curva di 4.º ordine), non esiste sopra Σ altro che la conica K' *rappresentata dalla retta che unisce i due punti fondamentali semplici.*

Fatta astrazione dal cono doppio (che essendo contato due volte, va riguardato come della 4.ª classe), non passa per C *altro che il cono di 2.ª classe* S' *rappresentato dalla retta che unisce i due punti fondamentali semplici.*

$$M=3 \; .$$

I soli casi possibili sono

$$m = 1 \quad , \quad \beta = 0 \quad , \quad \alpha + \gamma = 1$$
$$m = 2 \quad , \quad \beta = 1 \quad , \quad \alpha = 1 \quad , \quad \gamma = 1.$$

Esiston sulla sviluppabile Σ *due sistemi di* ∞' *cubiche* C_3, C_3' *rappresentate dai due fasci coi centri nei due punti fondamentali* A , C *e un sistema di* ∞^2 *cubiche* C''_3 *rappresentate dalla rete di coniche che passano per tre punti* A , B , C.

Per la curva C *passan due sistemi di* ∞' *sviluppabili di* 3.ª *classe* S_3, S_3', *rappresentate da due fasci coi centri nei punti* A , C, *e un sistema di* ∞^2 *sviluppabili di* 3,ª *classe* S_3'' *rappresentate dalla rete di coniche, che passano pei tre punti* A , B , C.

M=4

I soli casi possibili sono

$$m = 1 \qquad \beta = 0 \qquad \alpha = 0 \qquad \gamma = 0$$
$$m = 2 \qquad \beta = 1 \qquad \alpha + \gamma = 1$$
$$m = 3 \qquad \beta = 2 \qquad \alpha = 1 \qquad \gamma = 1$$

Esiste sulla sviluppabile Σ *un sistema di* ∞^2 *quartiche rappresentate dalle rette del piano che non passano per nessun punto fondamentale; due sistemi di* ∞^3 *quartiche rappresentate dalle coni-*

Per la curva C *passa un sistema di* ∞^2 *sviluppabili di* 4.ª *classe rappresentate dalle rette del piano che non passano per nessun punto fondamentale; due sistemi di* ∞^3 *sviluppabili di* 4.ª *classe rappresentate* *che che passan per* B *e per uno dei punti* A , C; *un sistema di* ∞^4 *quartiche rappresentate dalle cubiche che passan due volte per* B *ed una pei punti* A , C .

dalle coniche che passan per B *e per uno dei punti A , C; un sistema di* ∞^4 *sviluppabili di* 4.ª *classe, rappresentate dalle cubiche che passan due volte per* B *e una pei punti* A,C.

Tutte le curve e sviluppabili considerate fin qui son razionali perchè tali sono le loro imagini. Analogamente potremmo trovare le curve di Σ di ordine superiore e le sviluppabili per C di classe superiore.

Con queste formule si potrebbero enunciare molti teoremi relativi all' incontro delle curve di C, che per brevità tralascierò.

§. 43. Facendo uso del cono S′ che proietta la curva C dal punto 1, potremmo stabilire geometricamente la corrispondenza fra le generatrici di Σ e le rette del piano 1 3 4 che passan pel punto 1, nel modo stesso con cui è stata stabilita al §. 27. per le generatrici della sviluppabile di 4.⁰ ordine.

CAPITOLO IV.

Superficie sviluppabili del 6.⁰ *ordine.*

§. 44. Abbiamo già notato nel §. 3 che esistono tre specie di sviluppabili senza singolarità straordinarie del 6.⁰ ordine, di cui l' una ha per spigolo di regresso una curva del 4.⁰ ordine con 4 piani stazionari , la seconda ha per spigolo di regresso una curva del 5.⁰ ordine con due piani stazionari e due punti stazionari , la terza ha per spigolo di regresso una curva del 6.⁰ ordine con 4 punti stazionari. Per distinguerle, le indicheremo con Σ,

Σ', Σ'' respettivamente e indicheremo con C, C', C'' i loro spigoli di regresso.

È notevole la seguente proprietà di queste sviluppabili, che si dimostra facilissimamente (*).

Lo spigolo di regresso di una sviluppabile del 6.° *ordine è sempre situato sopra una quadrica.*

Dato un punto y si può costruire il suo piano polare rispetto alla quadrica che passa per lo spigolo di regresso di una sviluppabile del 6.° ordine, senza costruire la quadrica.

Infatti per un punto y si posson condurre 3 corde della curva C, 4 della C', 6 della C''. I punti coniugati armonici di y rispetto alle 4 coppie di punti d'intersezione delle corde suddette colle curve C, C', C'' giacciono sempre in un piano, che è il piano polare di y rispetto alla quadrica che passa per quella curva.

Tutte le sviluppabili del 6.° *ordine sono sempre circoscritte a una quadrica.*

Dato un piano qualunque v si può costruire il suo polo rispetto alla quadrica inscritta in una sviluppabile del 6.° ordine senza costruire questa quadrica.

Infatti in un piano v giacciono 6, 4 o 3, rette dalle quali si può condurre una coppia di piani tangenti a Σ. Σ', Σ'' respettivamente. I piani coniugati armonici di v rispetto alle coppie di piani suddetti, passan per un punto, che è il polo di v rispetio alla quadrica inscritta a quella inviluppabile.

Se prendiamo y a distanza infinita in una data direzione, avremo che esistono 3, 4 o 6 corde di C, C' o C'' respettivamente parallele a quella direzione. I punti di mezzo di quelle corde giacciono in un piano che è il piano

(*) Schwarz — De superficibus in planum explicabilibus primorum septem ordinum. (Crelle. Bd. 64, 1864).

diametrale coniugato alla data direzione rispetto alla quadrica che passa per la curva C, C' o C''.

Se il piano v è il piano all'infinito si ha che si posson condurre 6, 4 o 3 coppie di piani paralleli tangenti alle sviluppabili Σ, Σ', Σ'' respettivamente. I piani egualmente distanti da queste coppie di piani passan per un punto, che è centro di simmetria del poliedro di 12, 8 o 6 (parallelepipedo) faccie da essi formato ed è il centro della quadrica inscritta alla sviluppabile.

Visto ora il modo di determinare in ogni caso il piano polare di un punto e i piani diametrali rispetto alla quadrica che passa per C, C' C'', si capisce che potremo determinare anche il polo di un piano rispetto alla quadrica stessa, come intersezione dei piani polari di tre punti del piano dato, e il centro come intersezione di tre piani diametrali. Analogamente si determinerà il piano polare di un punto rispetto alla quadrica inscritta, a Σ, Σ' o Σ'' per mezzo dei poli di tre piani che passano per esso.

§. 45. Prendiamo ora a studiare le superficie sviluppabili del 6.° ordine Σ e Σ''. Converrà considerarle contemporaneamente, attesa la corrispondenza dualistica che esiste fra i punti dell'una e i piani tangenti allo spigolo di regresso dell'altra.

Sieno α_1, α_2, α_3, α_4 i valori del parametro λ corrispondenti ai punti di contatto dei piani stazionari della curva C, e prendiamo questi piani per piani fondamentali. È facile vedere che, scegliendo convenientemente il punto unità, dovrà essere allora

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= (\lambda-\alpha_1)^4\\ \Theta_2 &= (\lambda-\alpha_2)^4\\ \Theta_3 &= (\lambda-\alpha_3)^4\\ \Theta_4 &= (\lambda-\alpha_4)^4\end{aligned}$$

e conseguentemente

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_2)(\lambda-\alpha_2)^2(\lambda-\alpha_3)^2(\lambda-\alpha_4)^2\\
\Phi_2 &= (\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3)(\lambda-\alpha_3)^2(\lambda-\alpha_4)^2(\lambda-\alpha_1)^2\\
\Phi_3 &= (\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_4)(\lambda-\alpha_4)^2(\lambda-\alpha_1)^2(\lambda-\alpha_2)^2\\
\Phi_4 &= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)(\lambda-\alpha_1)^2(\lambda-\alpha_2)^2(\lambda-\alpha_3)^2.
\end{aligned}$$

Similmente se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ sono i valori del parametro λ corrispondenti ai punti stazionari della curva C'', prendendo questi punti per vertici del tetraedro fondamentale e scegliendo convenientemente il punto unità, le coordinate dei punti di C'' posson porsi sotto la forma

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &= (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_2)(\lambda-\alpha_2)^2(\lambda-\alpha_3)^2(\lambda-\alpha_4)^2\\
\Theta_2 &= (\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_3)(\lambda-\alpha_3)^2(\lambda-\alpha_4)^2(\lambda-\alpha_1)^2\\
\Theta_3 &= (\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_4)(\lambda-\alpha_4)^2(\lambda-\alpha_1)^2(\lambda-\alpha_2)^2\\
\Theta_4 &= (\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)(\lambda-\alpha_1)^2(\lambda-\alpha_2)^2(\lambda-\alpha_3)^2,
\end{aligned}$$

e conseguentemente quelle dei suoi piani osculatori sotto l' altra

$$\begin{aligned}
\Theta_1(\lambda) &= (\lambda-\alpha_1)^4\\
\Theta_2(\lambda) &= (\lambda-\alpha_2)^4\\
\Theta_3(\lambda) &= (\lambda-\alpha_3)^4\\
\Theta_4(\lambda) &= (\lambda-\alpha_4)^4.
\end{aligned}$$

Queste formule mettono ancora meglio in evidenza, la corrispondenza dei punti di Σ e dei piani di C, coi piani di C'' e i punti di Σ''.

§. 46. Le coordinate p delle generatrici di Σ sono

$$p_{ik} \equiv (\alpha_i-\alpha_k)(\lambda-\alpha_i)^3(\lambda-\alpha_k)^3$$

e le coordinate q delle generatrici di Σ'' sono pure

$$q_{ik} \equiv (\alpha_i - \alpha_k)\,(\lambda - \alpha_i)^3\,(\lambda - \alpha_k)^3.$$

Tanto le une quanto le altre appartengono dunque al complesso tetraedrale

$$p_{24}\,p_{31} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_3)\,(\alpha_2 - \alpha_4)}{(\alpha_1 - \alpha_4)\,(\alpha_2 - \alpha_3)}\,p_{23}\,p_{14} = 0$$

il che mostra i teoremi:

Il rapporto anarmonico dei 4 punti d'incontro di una generatrice di Σ coi 4 piani osculatori stazionari della curva C, e quello dei 4 piani che la proiettano dai vertici del tetraedro formato da quei piani, è costante e uguale a quello dei punti di contatto di quei piani.

Il rapporto anarmonico dei 4 piani che proiettano una generatrice qualunque di Σ'' dai 4 punti stazionari di C'', e quello dei 4 punti d'incontro di essa colle faccie del tetraedro determinato da quei punti, è costante e uguale a quello di quei punti.

§. 47. Quando è data una curva razionale del 4.° ordine le coordinate dei punti della quale sono

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_\lambda{}^4 = a_0\,\lambda^4 + a_1\,\lambda^3 + a_2\,\lambda^2 + a_3\,\lambda + a_4 \\
x_2 &= b_\lambda{}^4 = b_0\,\lambda^4 + b_1\,\lambda^3 + b_2\,\lambda^2 + b_3\,\lambda + b_4 \\
x_3 &= c_\lambda{}^4 = c_0\,\lambda^4 + c_1\,\lambda_3 + c_2\,\lambda^3 + c_3\,\lambda + c_4 \\
x_4 &= d_\lambda{}^4 = d_0\,\lambda^4 + d_1\,\lambda^3 + d_2\,\lambda^2 + d_3\,\lambda + d_4\,,
\end{aligned}$$

onde 4 suoi punti sieno in un piano fra i valori λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 del parametro λ corrispondenti ad essi, deve esistere la relazione

$$\begin{vmatrix} {a^4}_{\lambda_1} & {a^4}_{\lambda_2} & {a^4}_{\lambda_3} & {a^4}_{\lambda_4} \\ {b^4}_{\lambda_1} & {b^4}_{\lambda_2} & {b^4}_{\lambda_3} & {b^4}_{\lambda_4} \\ {c^4}_{\lambda_1} & {c^4}_{\lambda_2} & {c^4}_{\lambda_3} & {c^4}_{\lambda_4} \\ {d^4}_{\lambda_1} & {d^4}_{\lambda_2} & {d^4}_{\lambda_3} & {d^4}_{\lambda_4} \end{vmatrix} = 0,$$

ossia

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_1^4 & \lambda_1^3 & \lambda_1^2 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2^4 & \lambda_2^3 & \lambda_2^2 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3^4 & \lambda_3^3 & \lambda_3^2 & \lambda_3 & 1 \\ \lambda_4^4 & \lambda_4^3 & \lambda_4^2 & \lambda_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ma indicando con U_i la somma dei prodotti i ad i in tutti i modi possibili delle $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, abbiamo (*)

(*) Indicando con

$$(y^n, y^{n-1} \dots y^{n-i+1}, y^{n-i-1} \dots y, 1)$$

il determinante formato colle potenze di n quantità $y_1, y_2 \dots y_n$, e con v_i la somma dei prodotti delle y combinate i a i in tutti i modi possibili si ha in generele

$$(y^n \dots y^{n-i+1}, y^{n-i-1} \dots y, 1) = v_i (y^{n-1}, y^{n-2} \dots y, 1)$$

Prendasi infatti un' equazione

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

che abbia per radici le n quantità disuguali $y_1, y_2 \dots y_n$. Avremo

$$a_0 y_1^n + a_1 y_1^{n-1} + \dots + a_{n-1} y_1 + a_n = 0$$

$$a_0 y_2^n + a_1 y_2^{n-1} + \dots + a_{n-1} y_2 + a_n = 0$$

$$\dots \dots \dots \dots$$

$$a_0 y_n^n + a_1 y_n^{n-1} + \dots + a_{n-1} y_n + a_n = 0$$

$$\begin{aligned}
(\lambda^4 \quad \lambda^2 \quad \lambda \quad 1) &= U_1\,(\lambda^3 \quad \lambda^2 \quad \lambda \quad 1)\\
(\lambda^4 \quad \lambda^3 \quad \lambda \quad 1) &= U_2\,(\lambda^3 \quad \lambda^2 \quad \lambda \quad 1)\\
(\lambda^4 \quad \lambda^3 \quad \lambda^2 \quad 1) &= U_3\,(\lambda^3 \quad \lambda^2 \quad \lambda \quad 1)\\
(\lambda^4 \quad \lambda^3 \quad \lambda^2 \quad \lambda) &= U_4\,(\lambda^3 \quad \lambda^2 \quad \lambda \quad 1).
\end{aligned}$$

Per cui la relazione trovata diverrà

$$\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4\\
c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4\\
d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4\\
1 & -u_1 & u_2 & -u_3 & u_4
\end{vmatrix} = 0.$$

Se poi le coordinate dei punti della curva sono date sotto la forma

$$x_i = (\lambda - \alpha_i)^4$$

Da qui abbiamo

$$\begin{aligned}
\rho\, a_0 &= (y^{n-1},\ y^{n-2},\ y^{n-3} \ldots y\ .\ 1)\\
-\rho\, a_1 &= (y^{n-1},\ y^{n},\ y^{n-2},\ y^{n-3} \ldots y,\ 1)\\
\rho\, a_2 &= (y^{n},\ y^{n-1},\ y^{n-3} \ldots y\ .\ 1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(-1)^n \rho\, a_i &= (y^n,\ y^{n-1} \ldots y^{n-i+1},\ y^{n-i-1} \ldots y,\ 1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(-1)^n \rho\, a_n &= (y^n,\ y^{n-1} \ldots y^2,\ y)
\end{aligned}$$

Ma sappiamo dalla teorica dell'equazioni che

$$a_i = (-1)^i\, V_i\, a_0$$

Dunque

$$(y^n,\ y^{n-1} \ldots y^{n-i+1},\ y^{n-i-1} \ldots y,\ 1) = V_i\,(y^{n-1},\ y^{n-2} \ldots y,\ 1)$$

quelle della curva C, avremo

$$a_0=1 \quad a_1=-4\alpha_1 \quad a_2=6\alpha_1^2 \quad a_3=-4\alpha_1^3 \quad a_4=\alpha_1^4$$

ec. E quindi l'equazione precedente diverrà

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \alpha_1^4 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & \alpha_2^4 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & \alpha_3^4 \\ 1 & \alpha_4 & \alpha_4^2 & \alpha_4^3 & \alpha_4^4 \\ 1 & \frac{1}{4}u_1 & \frac{1}{6}u_2 & \frac{1}{4}u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0$$

ossia indicando con V_i la somma dei prodotti i ad i in tutti i modi possibili delle α_1, α_2, α_3, α_4

$$v_4 - \tfrac{1}{4}v_3 u_1 + \tfrac{1}{6}v_2 u_2 - \tfrac{1}{4}v_1 u_3 + u_4 = 0.$$

Ponendo la condizione che λ_3 sia infinitamente vicino a λ_1 e λ_4 infinitamente vicino a λ_2, si deduce di qui che la condizione d'incontro di due generatrici di Σ o Σ'' è

$$6\lambda_1^2\lambda_2^2 - 3v_1(\lambda_1^2\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^2) + v_2(\lambda_1^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2) - 3v_3(\lambda_1+\lambda_2) + \\ + 6v_4 = 0 .$$

Questa relazione stabilisce una corrispondenza (2 , 2) fra le imagini delle generatrici di Σ o di Σ''. I raggi uniti, che si ottengono ponendo $\lambda_1 = \lambda_2$ nell' equazione precedente, è evidente che sono dati dall' equazione

$$(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)(\lambda-\alpha_3)(\lambda-\alpha_4) = 0$$

come del resto sapevamo già dalla teoria generale (v. §. 14.).

§. 48. Un piano che passi per due punti cuspidali della C'' taglia ulteriormente la C'' in due punti uno dei quali determina univocamento l'altro. Dunque

I piani del fascio che ha per asse la congiungente due punti cuspidali della curva C'' determinano sulla curva stessa coppie di punti coniugati nell'involuzione, che ha gli altri due punti cuspidali per punti doppi.

Da ciascun punto della retta d'intersezione di due piani stazionari della curva C si posson condurre due piani osculatori alla curva stessa coniugati nell'involuzione, che ha gli altri due piani stazionari per piani doppi.

Da un punto qualunque dello spazio posson condursi 6 corde della curva C''. Ma ogni punto stazionario dovendo esser riguardato come formato dalla riunione di due punti consecutivi, la congiungente due di essi vale per 4 corde, e quindi da uno dei suoi punti non potranno condursi altro che due corde distinte della curva C stessa. Segue di qui facilmente che:

Per un punto qualunque della congiungente due punti cuspidali α_1 α_2 della curva C'' passano altre due corde della curva stessa.

In ogni piano che passa per la retta d'intersezione di due piani stazionari α_1 α_2 della curva C, giaccion due rette, da ognuna delle qnali si può condurre una coppia di piani osculatori di C.

I piani che proiettano le coppie di corde suddette dalla congiungente i punti α_1 α_2 sono coniugati nel-

I punti d' incontro di queste coppie di piani colla intersezione dei due piani α_1 α_2, sono coniugati nel-

l'involuzione che ha per piani doppi quelli che toccan la C *nei punti* α_1 α_2.

l' involuzione che ha per punti doppi i punti d' incontro della retta stessa colle tangenti a C *giacenti nei piani* α_1 α_2.

Le corde suddette (luoghi di punti) generano una superficie rigata di 3.° *ordine che ha la retta* α_1 α_2 *per retta doppia.*

Le rette suddette (luoghi di piani) generano una superficie di 3.ª *classe che ha la retta* α_1 α_2 *(considerata come luogo di piani) per retta doppia.*

§. 49. Passiamo a studiare la rappresentazione di queste superficie.

Per quanto abbiamo detto nel Cap. I., abbiamo che le imagini delle sezioni piane della sviluppabile Σ sono curve del 4.° ordine che hanno il punto ($\xi=0$, $\eta=0$), che indicheremo con B, per punto triplo e il punto ($\xi+4\zeta=0$, $\eta=0$) , che indicheremo con A per punto fondamentale semplice, e toccano nei punti ove incontrano la retta $\zeta=0$ le congiungenti di questi punti col punto ($\xi+\zeta=0$, $\eta=0$). Abbiamo così 15 condizioni, mentre per definire una curva di 4.° ordine ne bastano sole 14.

Sarebbe facile di ritrovare, come abbiamo fatto per le sviluppabili di 4.° e 5.° ordine, come si modifichino queste imagini, se il piano secante è un piano tangente, o un piano osculatore , o un piano tangente doppio della curva C.

Così l'imagini delle sezioni piane di Σ'' sono curve del 6.° ordine con un punto fondamentale quintuplo nel punto B ($\xi=0$, $\eta=0$) e 5 punti fondamentali semplici, che sono A_1 ($\xi+6\zeta=0$, $\eta=0$) e i 4 punti A_2 , A_3 , A_4 , A_5, imagini delle tangenti nei punti stazionari di C''. Queste imagini tagliano la retta $\zeta=0$ in 6 punti, nei quali toccano le congiungenti di questi punti col punto ($\xi+\zeta=0$, $\eta=0$).

Nello stesso modo si hanno le imagini dei coni proiettanti le curve C'', C nella rapppesentazione dei piani tangenti di queste curve sui punti di un piano.

§. 50. Cerchiamo le principali curve che sono sopra Σ e le sviluppabili che passan per C''.

Applicando le formule del §. 18. troviamo, indicando con m l'ordine di una curva nel piano rappresentativo, che passa β volte per B ed α volte per A e che al di fuori di questi punti ha d nodi ed r cuspidi, e con M, p l'ordine e il genere della curva rappresentata,

$$M = 4\,m - 3\,\beta - \alpha$$
$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\beta(\beta-1) - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1) - d - r$$
$$1 \leqq \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) - \tfrac{1}{2}\beta(\beta+1) - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha+1) - 3\,d - 4r$$

Da queste si ricava

$$M + p - 1 \geqq m - 2\,\beta + 2\,d + 3\,r.$$

Possiamo dunque far uso delle relazioni

$$m \leqq M + p + 2\,\beta - 1 - 2\,d - 3\,r$$
$$m = \tfrac{1}{4}(M + 3\,\beta + \alpha)$$
$$p = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\beta(\beta-1) - \tfrac{1}{2}\alpha(\alpha-1) - r - d$$

Queste formule stesse valgono anche per ricercare le sviluppabili che passan per C'', quando s'intenda che M rappresenti la classe delle medesime.

Esse mostrano che su Σ non esista altre rette che le generatrici e non vi son coniche, e per C non passan coni di 2.° grado.

M 3 . — Il solo caso possibile è

$$m = 1 \quad , \quad \beta = 0 \quad , \quad \alpha = 1$$

Esiste sopra Σ un sistema di ∞' cubiche razionali C, rappresentate dal fascio di raggi col centro in A.

Nessuna di queste cubiche C_3 può essere piana.

Per C'' passa un sistema di ∞' sviluppabili razionali di 3.ª *classe* S, *rappresentate dal fascio di raggi col centro in A.*

Nessuna di queste sviluppabili S_3 può essere un cono.

M=4 . — I soli casi possibili sono

$$m=1 \quad . \quad \beta=0 \quad , \quad \alpha=0$$
$$m=2 \quad , \quad \beta=1 \quad , \quad \alpha=1$$

Esiste sulla sviluppabile Σ un sistema di ∞^2 curve di 4.⁰ *ordine* C_4, *rappresentate da tutte le rette del piano che non passano per nessun punto fondamentale, e un sistema di ∞^3 curve di* 4.⁰ *ordine* C'_4, *rappresentate dalle coniche pei due punti fondamentali.*

Per la C'' passa un sistema di ∞^2 sviluppabili di 4.ª *classe* S_4, *rappresentate da tutte le rette del piano che non passano per nessun punto fondamentale, e un sistema di ∞^3 sviluppabili di* 4.ª *classe* S_4', *rappresentate dalle coniche pei due punti fondamentali.*

Tutte queste curve e sviluppabili sono razionali.

Così proseguendo potremmo trovare anche le curve di ordine superiore che giacciono su Σ e le sviluppabili di classe superiore che passan per C''. Senza andare più oltre in questa ricerca, notiamo soltanto i teoremi seguenti, che si deducono immediatamente dai precedenti risultati .

Ogni generatrice di Σ *ha un solo punto comune con una curva* C_3 , C_4 o C_4'.

Due curve C_3 *non hanno nessun punto a comune, due curve* C_4 *ne hanno uno, due* C_4' *ne hanno due*

Una curva C_3 *ha un punto a comune con una* C_4 *o* C_4' *una curva* C_4 *ne ha due comuni con una* C_4'

Se sullo spigolo di regresso C *di* Σ *consideriamo due serie omografiche di punti, il luogo dei punti d'incontro delle generatrici pei punti della prima serie colle cubiche* C_3 *pei punti corrispordenti della seconda è sempre una curva del* 4.° *ordine* C_4 *o* C_4'.

Per una tangente di C'' *si può condurre un sol piano tangente a una sviluppabile* S_3 S_4 *o* S_4'.

Due sviluppabili S_3 *non hanno nessun piano tangente comune, due* S_4 *ne hanno uno, due* S_4' *ne hanno due.*

Una sviluppabile S *ha un piano tangente comune con una* S_4, S_4', *una* S_4 *ne ha due comuni con una* S_4'.

Se consideriamo due serie omografiche di piani osculatori di C'', *l'inviluppo dei piani che passan per le generatrici giacenti nei piani della prima serie e toccan le sviluppabili* S_3 *tangenti ai piani corrispondenti della seconda e sempre una sviluppabile di* 4.ª *classe* S_4 *o* S_4'.

§. 51. Col metodo stesso del §. precedente cerchiamo le curve di Σ'' e le sviluppabili che passan per C.

Sia m il grado di una curva nel piano rappresentativo che passa β volte pel punto fondamentale quintuplo B e α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 volte per gli altri punti fondamentali A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, e che al di fuori di questi punti possieda d nodi ai r cuspidi. Sia poi M l'ordine (o la classe), p il genere della curva (o della sviluppabile) rappresentata. Per le formule più volte citate, sarà

$$M = 6\,m - 5\,\beta - \Sigma\,\alpha$$
$$pm = \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) - \tfrac{1}{2}\beta(\beta-1) - \Sigma\,\tfrac{1}{2}\,\alpha(\alpha-1) - d - r$$
$$1 \leq \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) - \tfrac{1}{2}\beta(\beta+1) - \Sigma\,\tfrac{1}{2}\,\alpha(\alpha-1) - 3d - 4r$$

Dalle qnali deducesi

$$m \leqq \tfrac{1}{3}(M + p + 4\,\beta - 1 - 2\,d - 3\,r).$$

Per mezzo di queste formule si vede subito che su Σ'' non esiston coniche e per C non passan coni di 2.° ordine.

M = 3. I casi possibili sono

$$m = 2 \qquad \beta = 1 \qquad \Sigma\,\alpha = 4$$
$$m = 3 \qquad \beta = 2 \qquad \Sigma\,\alpha = 5$$

Esiston sulla sviluppabile Σ'' 5 *cubiche razionali* C_3 *rappresentate dalle coniche che passan per* B *e per* 4 *dei punti* A; *e un sistema di* ∞^1 *cubiche pure razionali* C_3', *rappresentate dalle cubiche che passan due volte per* B *e semplicemente pei* 5 *punti* A.

Per la curva C *passan* 5 *sviluppabili razionali di* 3.ª *classe* S_3 *rappresentate dalle coniche che passan per* B *e per* 4 *dei punti* A; *e un sistema di* ∞^1 *sviluppabili pure razionali di* 3.ª *classe* S_3', *rappresentate dalle cubiche che passan due volte per* B *e semplicemente pei* 5 *punti* A.

M = 4 — I casi possibili sono

$m = 1$	$\beta = 0$	$\Sigma\,\alpha = 2$
$m = 2$	$\beta = 1$	$\Sigma\,\alpha = 3$
$m = 3$	$\beta = 2$	$\Sigma\,\alpha = 4$
$m = 4$	$\beta = 3$	$\Sigma\,\alpha = 5$

M = 5. — I casi possibili sono

$m = 1$	$\beta = 0$	$\Sigma\,\alpha = 1$
$m = 2$	$\beta = 1$	$\Sigma\,\alpha = 2$
$m = 3$	$\beta = 2$	$\Sigma\,\alpha = 3$
$m = 4$	$\beta = 3$	$\Sigma\,\alpha = 4$
$m = 5$	$\beta = 4$	$\Sigma\,\alpha = 5$

M = 6. — I casi possibili sono

$m = 1$	$\beta = 0$	$\Sigma\,\alpha = 0$
$m = 2$	$\beta = 1$	$\Sigma\,\alpha = 1$
$m = 3$	$\beta = 2$	$\Sigma\,\alpha = 2$
$m = 4$	$\beta = 3$	$\Sigma\,\alpha = 3$
$m = 5$	$\beta = 4$	$\Sigma\,\alpha = 4$
$m = 6$	$\beta = 5$	$\Sigma\,\alpha = 5$

Omettiamo per brevità di enumerare le curve di Σ'' e le sviluppabili per C, che resultan da queste formule, come pure vari teoremi che si potrebbero dedurre relativamente ad esse. Notiamo soltanto che:

Sulla sviluppabile Σ'' *esiston* 10 *sistemi di* ∞' *curve del* 4.° *ordine rappresentate dalle coniche che passan per* B *e per* 3 *punti* A,	*Per la curva* C *passan* 10 *sistemi di* ∞' *sviluppabili di* 4.ª *classe rappresentate dalle coniche che passan per* B *e per* 3 *punti*

e 5 *sistemi di* ∞' *curve del* 5.° *ordine, rappresentate dalle rette che passan per un punto* A.

Per un punto di Σ'' *passa una ed una sola curva di ciascuno di questi sistemi non che una curva* C_3'.

A, *e* 5 *sistemi di* ∞' *sviluppabili della* 5.ª *classe rappresentate dalle rette che passan per un punto* A.

Un piano tangente di C *è toccato da una ed una sola sviluppabile di ciascuno di questi sistemi non che da una sviluppabile* S_3'.

Giugno 1882

Dott. G. Lazzeri.