ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. B. ANTONELLI

Nota sulle relazioni indipendenti tra le coordinate di una forma fondamentale, in uno spazio di quantesivogliano dimensioni e sulla forma normale di una funzione omogenea di esse

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 3 (1883), p. 69-77
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1883_1_3__69_0>

NOTA

SULLE RELAZIONI INDIPENDENTI

TRA LE COORDINATE DI UNA FORMA FONDAMENTALE

In uno spazio di quantesivogliano dimensioni

E

Sulla forma normale di una funzione omogenea di esse

6

NOTA

SULLE RELAZIONI INDIPENDENTI TRA LE COORDINATE DI UNA FORMA FONDAMENTALE IN UNO SPAZIO DI QUANTESIVOGLIA DIMENSIONI E SULLA FORMA NORMALE DI UNA FUNZIONE OMOGENEA DI ESSE

1. Le equazioni

$$\sum_{i=1}^{i=k} u_i^{(1)} x_i = 0 \,, \sum_{i=1}^{i=k} u_i^{(2)} x_i = 0 \,, \ldots . \sum_{i=1}^{i=k} u_i^{(r)} x_i = 0$$

definiscono una forma fondamentale $(k-r\,,\, r)$ le cui coordinate sono i determinanti minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} u_1^{(1)} \,, u_2^{(1)} \ldots . u_k^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_1^{(r)} \,, u_2^{(r)} \ldots . u_k^{(r)} \end{matrix} \right\|$$

e le indico col simbolo

$$P_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \left| \begin{matrix} u_{i_1}^{(1)} & u_{i_2}^{(1)} & \ldots . & u_{i_r}^{(1)} \\ u_{i_1}^{(2)} & u_{i_2}^{(2)} & \ldots . & u_{i_r}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{i_1}^{(r)} & u_{i_2}^{(r)} & \ldots . & u_{i_r}^{(r)} \end{matrix} \right|$$

Queste coordinate P sono in numero di $\binom{k}{r}$, ma si dimostra facilmente che soltanto $r(k-r)+1$ sono arbitrarie; mi propongo di trovare le relazioni indipendenti che le legano.

2. Pongo

$$\Delta_{s,\,1,\,2\,\ldots\,r} = \begin{vmatrix} u^{(s)}_{h_1} & u^{(s)}_{h_2} & \ldots & u^{(s)}_{h_{r+1}} \\ u^{(1)}_{h_1} & u^{(1)}_{h_2} & \ldots & u^{(1)}_{h_{r+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u^{(r)}_{h_1} & u^{(r)}_{h_2} & \ldots & u^{(r)}_{h_{r+1}} \end{vmatrix}$$

dove le h sono r dei numeri $1, 2, \ldots k$ ed s è uno dei numeri $1, 2, \ldots r$, ed indico con

$$\alpha_1\,,\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_r$$

gli elementi reciproci a quelli della prima colonna nel determinante $P_{i_1\,,\,i_2\,\ldots\,i_r}$; si ha identicamente

$$\Sigma\,\Delta_{s\,,\,1\,,\,2\,\ldots\,r}\,\alpha_s = 0$$

e sommando i determinanti del primo membro e sviluppando il determinante somma per gli elementi della prima linea

$$\sum_{1}^{r+1}{}_{s} \pm P_{h_s\,i_1\,\ldots\,i_r}\,P_{h_1\,h_2\,\ldots\,h_{s-1}\,h_{s+1}\,\ldots\,h_{r+1}} = 0;$$

ed anche, ponendo in luogo delle $h_1\, h_2\, h_3 \ldots h_{r+1}$ respettivamente le $i_1\, h_1\, h_2 \ldots h_r$

$$(1) - P_{i_1 i_2 \ldots i_r} P_{h_1 h_2 \ldots h_r} + \sum_{1}^{r}{}_s P_{h_s i_2 \ldots i_r} P_{h_1 h_2 \ldots h_{s-1} i_1 h_{s+1} \ldots h_r} = 0$$

e questa relazione indico col simbolo

$$[\, P_{i_1 i_2 \ldots i_r} | P_{h_1 h_2 \ldots h_r}] = 0$$

Queste relazioni contengono in generale $(r+1)$ termini ma se si pongono alcuni degli indici i eguali ad alcuni degli indici h, il numero dei termini va diminuendo, sinchè quando si prendono $r-2$ degli indici i eguali ad $r-2$ degli indici h si hanno le relazioni a tre termini del tipo

$$(2)\, P_{cdi_3 \ldots i_r} P_{efi_3 \ldots i_r} + P_{fdi_3 \ldots i_r} P_{cei_3 \ldots i_r} + P_{cfi_3 \ldots i_r} P_{dei_3 \ldots i_r} = 0$$

3. Queste relazioni furono trovate per altra via dal sig. d'Ovidio (¹) il quale osservando che il loro numero è maggiore del numero

$$N = \binom{k}{r} - r\,(k-r) - 1$$

delle relazioni indipendenti che debbono legare le P con-

(¹) Vedi. D'Ovidio — Ricerche sui sistemi indeterminati di equazioni lineari — Atti dell'Acc. di Torino 1877 — Le funzioni metriche fondamentali negli spazi di quante si vogliano dimensioni ed a curvatura costante — R. Acc. dei Lincei 1876-77.

chiude che tali relazioni indipendenti debbono trovarsi tra le (2). Mi sembra che ciò abbia bisogno di una dimostrazione più rigorosa.

Presa una P qualunque ad esempio $P_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ si costruiscano tutte le P che non differiscono da questa che per un' indice: vale a dire tutte quelle del tipo $P_{i_1 \ldots i_{s-1} t i_{s+1} \ldots i_r}$, dove t e uno degli indici diverso da $i_1 . i_2, \ldots, i_r$; queste P insieme con quella da cui siamo partiti sono precisamente $r(k-r)+1$ e tutte indipendenti tra di loro. Infatti scelti convenientemente le u del determinante

$$P_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \begin{vmatrix} u_{i}^{(1)} & \ldots & u_{i_r}^{(1)} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ u_{i_1}^{(r)} & \ldots & u_{i_r}^{(r)} \end{vmatrix}$$

in modo che assuma un valore dato a piacere si potranno sempre determinare le quantità $u_t^{(1)}, u_t^{(2)} \ldots, u_t^{(r)}$ in modo che

$$P_{t i_2 \ldots i_r}\ ,\ P_{i_1 t i_3 \ldots i_r}\ ,\ P_{i_2 i_3 t i_4 \ldots i_r} \ldots P_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_{r-1} t}$$

acquistino pure valori dati ad arbitrio. Per mezzo di queste $r(k-r)+1$ coordinate indipendenti P servendosi delle relazioni (1) trovate possiamo esprimere tutte le altre P. Poichè data una P con due indici differenti da $i_1, i_2 \ldots i_r$, p. es. $P_{h l i_1 \ldots i_2}$ si potrà esprimere per mezzo della P considerate adoperando la relazione a tre termini

$$[\,P_{i_1 i_2 \ldots i_r} P_{hli_2 \ldots i_r}] = 0:$$

data poi una P con due indici differenti dalle i e per esempio $P_{hlmi_4 \ldots i_r}$ si potrà esprimerla mediante le P sin qui considerate, sia servendosi della relazione a tre termini

$$[\,P_{i_1 i_2 m i_4 \ldots i_r} P_{hlmi_4 \ldots i_r}] = 0,$$

sia di quella a quattro

$$[\,P_{i_1 i_2 \ldots i_r} P_{hlmi_4 \ldots i_r}\,] = 0,$$

ed in generale data una P con s indici differenti dalle i p. es. $P_{h_1 h_2 \ldots h_s i_{s+1} \ldots i_r}$ si potrà avere espressa mediante le P con numero di indici differenti dalle i minori di s, sia tenendo conto della relazione a tre termini

$$[\,P_{h_1 h_2 \ldots h_{s-2} i_{s-1} i_s, \ldots i_r} P_{h \ldots h_s i_{s+1} \ldots i_r}\,] = 0$$

sia infine di quella a $(s+1)$ termini

$$[\,P_{h_1 h_2 \ldots h_s i_{s+1} \ldots i_r} P_{i_1 i_2 \ldots i_r}\,] = 0$$

4. Teniamo conto delle relazioni di tre termini ed osserviamo che due di essi non possono contenere due medesime P. Siano

$$P_1 = 0\ ,\ P_2 = 0\ \ldots\ .\ P_N = 0$$

N di tali relazioni indipendenti tra di loro e si indichi con $\Delta_s \varphi$ la funzione che si ottiene da una funzione φ omogenea delle P quando si sommino le sue derivate seconde rispetto alle coppie delle P che entrano nella identità $P_s = 0$.

Allora se Φ è una funzione omogenea qualunque delle P la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia sotto la forma normale e che siano identicamente verificate le

$$\Delta_1{}^m \Phi = 0 \ , \ \Delta_2{}^m \Phi = 0 \ \ldots \ \Delta_N{}^m \Phi = 0 \ ; \ (m = 1, 2, \ldots)$$

Se ciò non è dico che si può scegliere sempre delle funzioni omogenee delle P di grado $(n-2)$, (se n è il grado della Φ) in modo tale che la

$$\Phi + \sum_{1q}^{N} P_q \varphi_q = f$$

goda di questa proprietà. Scelgo per φ_s una funzione delle P che compariscono in P_s sarà allora

$$\Delta_s(\varphi_i P_i) = 0$$

per s differente da i, e

$$\Delta_s(\varphi_s P_s) = P_s \Delta_s \varphi_s + (n+1) \varphi_s$$

Ed in generale

$$\Delta_s{}^q (\varphi_s P_s) = \Delta_s{}^q \varphi_s + (n+q-2) q \ \Delta_s{}^{q-1} \varphi_s$$

e però

$$\Delta_s{}^q f = \Delta_s{}^q \Phi + (n+q-2) \ q \ \Delta_s{}^{q-1} \varphi_s + \Delta_s{}^q \varphi_s = 0 .$$

Eliminando tra le equazioni di questa specie le φ_s si ha che

$$=\Phi-\frac{\sum_1^N{}_s P_s \Delta_s \Phi}{n+1}+\frac{\sum_1^N{}_s P_s \Delta_s \Phi}{(n+1)2n}-\ldots\pm\frac{\sum_1^N P_s^q \Delta_s^q \Phi}{(n+1)2n\ldots q(n-q+2)}\mp\ldots$$

è la forma normale cercata.

Questo metodo elegante fu applicato da Clebsch per trovare la forma normale dell'equazione di un complesso.

G. B. ANTONELLI.