ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LUIGI BIANCHI

Ricerche sulle superficie elicoidali e sulle superficie a curvatura costante

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 2 (1879), p. 285-341
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1879_1_2__285_0>

RICERCHE

SULLE SUPERFICIE ELICOIDALI

E

SULLE SUPERFICIE A CURVATURA COSTANTE

INTRODUZIONE

Le ricerche seguenti hanno specialmente per iscopo lo studio delle elicoidi e trovano la loro base nelle teorie, che ho svolte nella mia tesi di laurea. (*)

L' evoluta di una superficie qualunque è composta di due falde, che sono in generale superficie distinte. Io le chiamo *superficie complementari* l' una della altra.

Data una superficie, la sua complementare risulta determinata, quando sia noto sulla prima quel sistema di geodetiche, le cui tangenti debbono essere le normali della evolvente.

Quando parlo di una superficie applicabile sopra una superficie di rivoluzione, intendo sempre, che il sistema di geodetiche in discorso sia quello delle deformate dei meridiani. Fatta questa restrizione, dimostro che ad una serie di superficie applicabili l' una sopra l'altra e sopra una superficie di rivoluzione corrispondono, come superficie com-

(*) Le citazioni, che si riferiscono a questo lavoro, saranno segnate con (m. t.).

plementari, superficie applicabili pure l' una sull' altra e sopra una superficie di rivoluzione.

Naturalmente, se si tratta di una superficie a curvatura costante, la restrizione precedente non individua un solo sistema di geodetiche, ma ne caratterizza infiniti sistemi, poichè le superficie di questa natura godono della proprietà che ogni loro porzione può applicarsi sopra qualunque altra porzione delle superficie stesse.

Particolarmente interessante è la considerazione delle superficie complementari per le superficie a curvatura costante negativa. Su queste superficie, come hanno dimostrato i professori Dini e Beltrami, esistono infiniti sistemi di geodetiche, che, presi per linee coordinate insieme alle loro traiettorie ortogonali, danno all' elemento lineare tre forme diverse appartenenti tutte tre a superficie di rivoluzione. Queste tre forme sono le seguenti:

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{A}} dv^2$$

$$ds^2 = du^2_1 + A^2 \cosh^2 \frac{u_1}{A} dv^2_1$$

$$ds^2 = du^2_2 + A^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u_2}{A} dv^2_2,$$

e come è stato sopra osservato, esistono infiniti sistemi di geodetiche, sia della natura delle $v = \text{cost}$, sia di quella delle $v_1 = \text{cost}$, o finalmente delle $v_2 = \text{cost}$.

Dal teorema di Weingarten risulta facilmente, che la superficie complementare di una superficie a curvatura costante negativa $-\frac{1}{A^2}$ rispetto ad un sistema di geodetiche di 1.ª specie ($v = \text{cost}$) è ancora a curvatura costante negativa $-\frac{1}{A}$; invece la superficie complementare rispetto ad un sistema di geodetiche della 2.ª specie ($v_1 = \text{cost}$) è applicabile sulla superficie di rivoluzione, il cui meridiano è la curva logaritmica.

Da ultimo la complementare rispetto ad un sistema di geodetiche di 3.ª specie ($v_2 = \text{cost}$) è applicabile sulla superficie di rivoluzione, che ha per meridiano una curva, derivata dalla trattrice come l'ellisse dal cerchio, e propriamente proiettando la trattrice sopra un piano passante per l'assintoto. A questa curva do il nome di *trattrice accorciata*.

Ora, noto uno dei sistemi di geodetiche di 1.ª specie, si possono stabilire formole, che danno tutti gli altri infiniti sistemi della stessa specie ed anche tutti quelli di 2.ª e 3.ª specie; da ciò risulta che, data una superficie a curvatura costante negativa, sulla quale si conosca un sistema di geodetiche deformate dei meridiani della pseudosfera e le traiettorie ortogonali, possono dedursene senza calcoli di integrazione infinite superficie pure a curvatura costante negativa, infinite superficie applicabili su quella di rivoluzione logaritmica, ed infinite applicabili sulla superficie di rivoluzione, che ha per meridiano una trattrice accorciata.

Così dalla pseudosfera stessa ho dedotto una superficie a curvatura costante negativa ed una classe di superficie applicabili su quella di rivoluzione, che ha per meridiano una trattrice accorciata. Però in causa della complicazione delle formole non ho potuto trovarne una generazione geometrica.

Ad un risultato più interessante mi ha condotto la considerazione dei sistemi di geodetiche di 2.ª specie.

Ho ottenuto così dalla pseudosfera una singolare superficie applicabile su quella logaritmica di rivoluzione; le trasformate dei paralleli di questa superficie sono catenarie tutte eguali piegate sopra cilindri circolari concentrici, ciascuno di raggio eguale al raggio del parallelo corrispondente. Le sezioni prodotte nella superficie da piani normali alle generatrici dei cilindri sono spirali iperboliche di parametro variabile; la spirale iperbolica di parametro minimo è deformata di un meridiano. Ho dimostrato poi che questa proprietà della catenaria non appartiene ad alcuna altra curva, risolvendo così negativamente la questione, se di questa specie di deformazione erano suscettibili altre superficie di rivoluzione oltre la logaritmica, quando si sostituisse alla catenaria curve di diversa specie.

Fatte queste applicazioni del primo teorema, passo a dimostrare i teoremi fondamentali per le ricerche successive sulle elicoidi, e cioè che le evolute, le evolventi e le complementari delle elicoidi, rispetto alle traiettorie ortogonali delle eliche, sono nuove elicoidi, dello stesso asse e dello stesso passo.

Mi volgo quindi alle ricerche particolari e dimostro, che l' elicoide complementare di un' elicoide rigata è pure rigata ed applicabile sopra di essa.

Trovo l' evoluta dell' elicoide gobba ad area minima; su questa evoluta esiste un sistema semplicemente infinito di curve gobbe del 4.^{0} ordine con un punto doppio nel punto all' infinito dell' asse.

Procedo alla ricerca delle elicoidi a linee di curvatura piane e ritrovo le notevoli elicoidi a curvatura costante negativa, che il professor Dini pel primo fece conoscere. Ne determino le elicóidi complementari, le quali hanno una relazione notevole colle elicoidi ad area minima e sono applicabili sulla saperficie di rivoluzione logaritmica. Dalle elicoidi stesse del Dini deduco una classe di superficie non elicoidali, che hanno costante la differenza fra i raggi di curvatura ed hanno per falde della evoluta due elicoidi del Dini identiche di forma e differenti fra loro solo per una traslazione lungo l' asse.

Stabilito poi il concetto di *superficie dei centri geodetici delle linee di curvatura*, come è stato posto in un recente lavoro da un egregio mio amico il Prof. Gremigni, (*) dimostro che la superficie dei centri geodetici delle elicoidi, sono nuove elicoidi dello stesso asse e dello stesso passo. Trovo l' elicoide dei centri geodetici di quelle a curvature costante negativa del Dini.

Questa nuova elicoide ha una relazione ben semplice con quelle generali ad area minima, potendo essere generate da una medesima curva, cioè da un'elica di un cilindro avente per base una catenaria, differendone solo per il passo. Determino poi la superficie di rivoluzione applicabile sopra di essa.

Da ultimo do un modo di generazione di una classe di elicoidi applicabili sulle superficie di rivoluzione a curvatura media costante.

---

§. I. (**) Consideriamo sopra una superficie qualunque S un sistema semplicemente infinito di geodetiche e conduciamo tutte le tangenti a queste linee. Questa serie doppiamente infinita di rette ammette una serie semplicemente infinita di superficie parallele ortogonali a tutte le rette della serie. Fissiamo una di queste superficie e indichiamola con Σ.

Allora S è una falda dell' evoluta di Σ, e il segmento di tangente A B, compreso fra il punto A di partenza da S e il punto B, ove incontra ortogonalmente Σ, è uno dei raggi di curvatura di Σ, chiamiamolo r_2. L' evoluta S' di Σ

(*) Sulla teoria delle linee di curvatura. Tesi inserita in questo stesso volume degli Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.

(**) La parte di queste ricerche, che si riferisce alle elicoidi, è già stata pubblicata nel XVII vol. del Giornale di Matematiche diretto dal Prof. G. Battaglini.

rispetto all'altro raggio di curvatura r_1 è la superficie, che chiameremo complementare di S. Insieme con S essa costituisce l'evoluta completa di Σ.

Data S ed il sistema di geodetiche, rispetto a cui S' ne è complementare, si può trovare quest'ultima senza previa conoscenza dell' evolvente Σ.

È evidente infatti che S' può generarsi da S, portando su ciascuna tangente a partire dal punto di contatto una porzione eguale alla differenza $r_2 - r_1$ dei raggi di curvatura di Σ. Ora questa differenza è eguale al raggio di curvatura geodetica della traiettoria ortogonale delle geodetiche, uscente da quel punto di contatto. (*) Possiamo quindi dare la seguente generazione per S':

Sopra ciascuna tangente alle geodetiche del sistema si stacchi una porzione eguale al raggio di curvatura geodetica della traiettoria ortogonale delle geodetiche in quel punto. Il luogo dei nuovi estremi è la superficie S' *complementare di* S.

Questa generazione di S' ci dà il modo di trovarla effettivamente, quando sia data S ed il sistema di geodetiche, senza calcoli di integrazione, perchè non ne occorrono per determinare la curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali.

Un altro modo di generazione di S' si ricava da un teorema sulla costruzione del raggio di curvatura geodetica dovuto al Prof. Beltrami (**). Si consideri il sistema di linee L a tangenti coniugate colle geodetiche G. Le tangenti alle geodetiche G nei punti d' incontro con una medesima linea L godono della proprietà, che ciascuna incontra la successiva, inviluppando così una nuova linea

(*) Dini. Ricerche sopra la teoria delle superficie, § 6.

(**) Ricerche di Analisi applicata alla Geometria — Giornale di Battaglini; Vol. III, p. 17. § XVIII.

L', la quale varia al variare di L e descrive la superficie S' complementare di S.

La costruzione precedente rende manifesto, che le tangenti al sistema di geodetiche G, ossia le normali di Σ, inviluppano S' lungo le linee L', le quali sono quindi geodetiche di S'.

§. II. Riprendiamo le considerazioni del §. precedente relative ad S, alla evolvente Σ ed ai segmenti A B di tangente. Supponiamo, che la superficie S, flessibile ed inestendibile, si deformi seco trasportando i segmenti di tangente A B. Il luogo degli estremi B non cessa mai di essere una superficie ortogonale a tutte le tangenti AB (*). Ad ogni nuova forma, che assume S, corrisponde una nuova superficie Σ; però i raggi di curvatura r_2 r_1 di Σ non variano. In quanto al primo, essendo rappresentato dalla lunghezza A B, che resta inalterata, la cosa è evidente Per il secondo poi si osservi che, essendo $r_2 - r_1$ il raggio di curvatura geodetica delle traiettorie ortogonali delle geodetiche, quantità, che non varia al flettersi di S, anche esso non varia.

Supponiamo ora, che S sia applicabile sopra una superficie di rivoluzione, e che le geodetiche G siano le trasformate dei meridiani. In tal caso r_1, r_2 sono funzioni l'uno dell'altro, e possiamo considerare r_2 come funzione di r_1, a meno che non sia: r_1=cost, caso che è da escludersi, perchè allora Σ sarebbe una superficie canale ed S' si ridurrebbe ad una linea.

Per un noto teorema di Weingarten l'elemento lineare della S', evoluta di Σ rispetto al raggio r_1, sarà dato dalla formola:

(*) Ricerche di Analisi applicata alla Geometria — Giornale di Battaglini: Vol. II. p. 282.

$$ds^2 = dr_1^2 + e^{2\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}} dv^2,$$

la quale è indipendente dalle flessioni di S, poichè durante queste r_2 rimane sempre la stessa funzione di r_1. Possiamo dunque enunciare il teorema:

Se una superficie di rivoluzione si deforma, la serie delle superficie complementari delle deformate è composta di snperficie applicabili sopra una medesima superficie di rivoluzione.

In particolare per es. ad una serie di elicoidi applicabili corrispondono, come superficie complementari, elicoidi pure applicabili fra loro (vedasi §. X).

Quando la superficie S ha la forma di superficie di rivoluzione, la complementare S′ si riduce ad una linea, l' asse di S, che può considerarsi come una superficie infinitamente ristretta, limite delle superficie complementari delle forme di S, quando per forme successive, per es. elicoidali di passo indefinitamente decrescente, si avvicina alla forma di superficie di rivoluzione.

Per il teorema superiore ad ogni superficie di rivoluzione ne corrisponde un' altra , come applicabile sulle superficie complementari delle infinite forme, che la prima può assumere. Propriamente ve ne corrispondono infinite deformate l'una dell'altra, ma basterà considerarne una. In generale una superficie di rivoluzione corrisponde a sè medesima, quando la relazione, che lega i raggi di curvatura della evolvente è simmetrica rispetto ai due raggi. Per es. l'alisseide, evoluta della pseudosfera corrisponde a sè medesima.

Facciamo ancora la seguente osservazione, che ha importanza in seguito. Fra due superficie complementari S, S′ viene stabilita pel modo stesso di generazione una corrispondenza di punto a punto, essendo corrispondenti due punti, che segnano gli estremi dei due raggi di curvatura della superficie evolvente. Allora, se S e quindi anche S' è applicabile sopra una superficie di rivoluzione, le rispettive deformate dei paralleli saranno linee corrispondenti sopra S ed S'. Infatti sopra S queste deformate sono le r_2=cost e sopra S' le r_1=cost, ma, essendo r_2 funzione di r_1, quando l'uno è costante, è costante anche l'altro.

§. III. Applichiamo ora le considerazioni generali precedenti ad una superficie S a curvatura costante negativa $-\frac{1}{A^2}$ considerando le tre forme speciali:

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{A}} dv^2,$$

$$(2) \qquad ds^2 = du_1^2 + A^2 \cosh^2 \frac{u_1}{A} dv_1^2,$$

$$(3) \qquad ds^2 = du_2^2 + A^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u_2}{A} dv_2^2$$

che il suo elemento lineare può assumere.

I raggi di curvatura delle evolventi di S rispetto alle geodetiche v = cost sono legati dalla relazione (*):

$$r_2 - r_1 = A,$$

sicchè, per il teorema di Weingarten ricordato al §. precedente, l'elemento lineare della complementare S' di S rispetto alle geodetiche v = cost sarà dato dalla formola:

(*) Dini — Sulle superficie di curvatura costante. Giornale di Napoli, Vol. III. — Beltrami l. c.

$$ds^2 = dr_1^2 + e^{-\frac{2r_1}{A}} dv^2 ;$$

ciò dimostra appunto, che questa complementare è anche essa a curvatura costante negativa $-\frac{1}{A^2}$.

Invece i raggi di curvatura delle evolventi di S rispetto alle geodetiche di 2.ª specie $v_1 = \text{cost}$ sono legati dalla relazione:

$$r_2 - r_1 = A \coth \frac{r_2 + c}{A},$$

dove c è una costante. Da questa relazione si ricava:

$$dr_1 = \coth^2 \frac{r_2 + c}{A} dr_2 ,$$

e quindi, in virtù del solito teorema, l' elemento lineare della complementare S'_1 di S, rispetto alle geodetiche $v_1 = \text{cost}$ sarà dato dalla formola:

$$ds^2 = \coth^4 \frac{r_2 + c}{A} dr_2^2 + \frac{dv^2}{\operatorname{senh}^2 \frac{r_2 + c}{A}}.$$

Questo elemento lineare si riduce alla forma ordinaria:

$$ds^2 = \{ 1 + \varphi'^2 (r) \} dr^2 + k^2 r^2 d v^2$$

delle superficie di rivoluzione, ponendo

$$k r = \frac{1}{\operatorname{senh} \frac{r_2 + c}{A}}.$$

Per determinare l'equazione $z = \varphi(r)$ della curva meridiana si ottiene quindi l'equazione differenziale:

$$1 + \varphi'^2 (r) = \frac{A^2}{r^2} \left\{ 1 + k^2 r^2 \right\},$$

e, prendendo l' arbitraria $k = \frac{1}{A}$:

$$z = \varphi(r) = A \int \frac{dr}{r} = A \log r,$$

che è l'equazione della curva logaritmica.

Un calcolo perfettamente analogo può farsi per il terzo caso; allora i raggi di curvatura delle evolventi sono legati dalla relazione:

$$r_2 - r_1 = A \operatorname{tangh} \frac{r_2 + c}{A},$$

quindi per l' elemento lineare delle complementari S'_2 rispetto alle geodetiche $v_2 = \text{cost}$ si trova:

$$ds^2 = \operatorname{tangh}^4 \frac{r_2 + c}{A} + \frac{dv^2}{\cosh^2 \frac{r_2 + c}{A}}.$$

Per l' equazione $z = \varphi(r)$ della curva meridiana della superficie di rivoluzione, su cui S'_2 è applicabile, si trova quindi:

$$z = \varphi(r) = \int \frac{\sqrt{A^2 - (A^2 k^2 + 1) r^2}}{r} dr,$$

quindi se si pone:

$$r = \frac{A}{\sqrt{A^2 k^2 + 1}} \operatorname{sen} \theta,$$

si trova:

$$z = A \left\{ \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta + \cos \theta \right\}.$$

Ora se si confrontano queste formole colle altre:

$$r = A \operatorname{sen} \theta \ , \ z = A \left\{ \log \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta + \cos \theta \right\},$$

che danno la trattrice di tangente costante $= A$ (la quale, rotando attorno all' assintoto z, genera appunto la pseudosfera applicabile sulla superficie S a curvatura costante negativa $-\frac{1}{A^2}\Big)$ si vede, che la nuova curva non è altro che la proiezione ortogonale della trattrice sopra un piano passante per l' assintoto e che fa col piano della trattrice un angolo α dato da:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{A^2 k^2 + 1}}.$$

Ora, siccome k è una costante arbitraria, che può assumere qualunque valore positivo, α potrà assumere qualunque valore fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ (i limiti esclusi). Queste curve proiezioni della trattrice, cui daremo il nome di *trattrici accorciate* hanno evidentemente una forma analoga alla trattrice stessa, avendo l'asse delle z per assintoto. Così, nello stesso tempo che abbiamo trovato la curva meridiana cercata, abbiamo anche dimostrato questa singolare proprietà della trattrice:

Le proiezioni di questa curva sopra piani passanti per l' assintoto generano, ruotando attorno a quest' assintoto altrettante superficie di rivoluzione applicabili l' una sull' altra (*).

I risultati precedenti possono enunciarsi brevemente, quando si abbia riguardo alle seguenti proprietà, dimostrate dal prof. Beltrami nel suo *Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea* e cioè: le geodetiche di 1.ª specie $v =$ cost sono caratterizzate dall' avere un

(*) La trattrice gode anche di un' altra proprietà analoga, che non credo sia stata osservata. Essa è la seguente: *La superficie di rivoluzione generata da una trattrice ruotando intorno ad altrettante parallele all' assintato, poste dalla stessa banda di questo, sono applicabili l' una sull' altra*.

punto comune a distanza infinita: le geodetiche di 2.ª specie $v_1 = \text{cost}$ sono caratterizzate da ciò, che sono ortogonali ad una medesima geodetica della superficie: le geodetiche di 3.ª specie $v_2 = \text{cost}$ escono da un punto reale a distanza finita della superficie.

Potremo quindi enunciare i teoremi seguenti

1.° *La superficie complementare di una superficie a curvatura costante negativa rispetto ad un sistema di geodetiche uscenti da un punto all'infinito ha la stessa curvatura costante negativa.*

2.° *La superficie complementare di una superficie a curvatura costante negativa rispetto ad un sistema di geodetiche, ortogonali ad una medesima geodetica, è applicabile sulla superficie logaritmica di rivoluzione.*

3.° *La superficie complementare di una superficie a curvatura costante negativa rispetto ad un sistema di geodetiche, uscenti da un punto reale a distanza finita della superficie, è applicabile sopra la superficie di rivoluzione, generata da una trattrice accorciata, che ruota attorno all' assintoto.*

§. IV. Supponiamo noto sopra una data superficie a curvatura costante negativa S un sistema di geodetiche di 1.ª specie e le loro traiettorie ortogonali. Le formole, stabilite dal Prof. Beltrami nel suo *Saggio ec.* sopra citato, permettono di dedurre tutti i sistemi possibili di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie (*). Allora senza calcoli di integrazione ne dedurremo le superficie complementari di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie, le quali saranno rispettivamente applicabili sulla pseudosfera, sulla superficie logaritmica di rivoluzione e sopra la superficie di rivoluzione, che ha per meridiano la trattrice accorciata.

Considheriamo in particolare una superficie comple-

(*) V. nel detto lavoro le formole (15) e (16) e la Nota II.

mentare S′ di 1.ª specie a curvatura costante negativa. Su questa superficie (§. II.) conosciamo un sistema di traiettorie ortogonali di geodetiche di 1.ª specie, corrispondente al sistema noto di traiettorie ortogonali di geodetiche di 1.ª specie della superficie S, da cui siamo partiti. Per determinare adunque sopra S′ quel sistema di geodetiche di 1.ª specie non si avrà che ad integrare un' equazione differenziale del 1.° ordine e allora saremo con S′ nelle stesse condizioni, in cui eravamo con S. Potremo quindi dedurre da S′ tre nuove serie di infinite superficie, come le precedenti, e così di seguito. In tal modo con successive integrazioni di equazioni differenziali del 1.° ordine potremo moltiplicare all' infinito i risultati.

Sarebbe molto interessante vedere, se ogni superficie a curvatura costante negativa può dedursi col processo precedente partendo dalla pseudosfera e quindi anche da ogni altra superficie a curvatura costante negativa.

§. V. Ho accennato dianzi alla possibilità di dedurre da un noto sistema di geodetiche di 1.ª specie e delle loro traiettorie ortogonali tutti gli infiniti sistemi di 1.ª, 2.ª e 3.ª specie. Del resto ciò risulta anche dalle considerazioni seguenti.

Nelle ammesse condizioni l' equazione generale differenziale delle geodetiche si integra immediatamente e allora, per ottenere tutti i sistemi possibili di geodetiche di 2.ª specie, basterà considerare il sistema di geodetiche ortogonali ad una stessa geodetica e far variare quest' ultima. Per ottenere poi i sistemi di 3.ª specie basta far uscire le geodetiche del sistema da un medesimo punto reale ad arbitrio della superficie. Resta solo a vedersi, come si possano ottenere tutti i sistemi di geodetiche di 1.ª specie. Per ciò mi servirò di un metodo, che è stato già usato da Liouville (*) e che spesso può applicarsi con successo.

(*) Monge-Applications de l'Analyse à la Géométrie Note IV.

Il problema da risolversi è il seguente: dato l'elemento lineare:

$$(4)\qquad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{A}}\, dv^2$$

trovare le trasformazioni più generali: $u = u(\theta, \omega)$, $v = v(\theta, \omega)$, che non ne alterano la forma, cioè tali che si abbia ancora:

$$(5)\qquad ds^2 = d\theta^2 + e^{\frac{2\theta}{A}}\, d\omega^2$$

Riducendo le (4), (5) ai parametri isometrici, ponendo:

$$U = A\, e^{-\frac{u}{A}}, \quad \Theta = A\, e^{-\frac{\theta}{A}},$$

il problema si riduce alla stessa questione fra i due elementi lineari:

$$(4')\qquad ds^2 = \frac{A^2}{U^2}(d\,U^2 + dv^2)$$

$$(5')\qquad ds^2 = \frac{A^2}{\Theta^2}(d\,\Theta^2 + d\omega^2).$$

Trasformiamolo ancora in coordinate simmetriche immaginarie, ponendo

$$(6)\qquad \begin{cases} U + i\,v = \alpha\ , & \Theta + i\,\omega = x \\ U - i\,v = \beta\ , & \Theta - i\,\omega = y; \end{cases}$$

allora (4'), (5') divengono:

$$(4'')\qquad ds^2 = \frac{4\,A^2}{(\alpha + \beta)^2}\, d\,\alpha\, d\,\beta$$

$$(5'')\qquad ds^2 = \frac{4\,A^2}{(x + y)^2}\, d\,x\, d\,y.$$

Il modo più generale di trasformare la (4'') nella (5'') consiste nel porre.

$$\alpha = \varphi(x) \quad , \quad \beta = \psi(y)$$

ovvero:

$$\alpha = \varphi(y) \quad , \quad \beta = \psi(x) ;$$

ma, siccome il 2.° caso si deduce evidentemente dal 1.° cangiando v in $-v$, possiamo limitarci al 1.°.

Per le condizioni del problema dovremo avere:

$$(7) \qquad \frac{\varphi'(x)\,\psi'(y)}{[\varphi(x)+\psi(y)]^2} = \frac{1}{(x+y)^2}$$

Se in questa formola si fa y=cost, si può integrare immediatamente rispetto ad x e si trova:

$$\varphi(x) = \frac{1}{ax+b} + c$$

dove a , b , c sono tre costanti. Medesimamente

$$\psi(y) = \frac{1}{dy+e} + f,$$

con d , e , f nuove costanti (*). Sostituendo allora nella (7) si vede che, per soddisfarla effettivamente, si deve avere:

$$d = a \quad , \quad e = -b \quad , \quad f = -c \, ,$$

quindi:

(*) Il ragionamento seguente può essere in difetto, solo quando nella formola:

$$\varphi(x) = \frac{1}{ax+b} + c = \frac{1+cax+cb}{ax+b}$$

si ponga a=0 e si dia a c un valore infinito, in modo che ca resti finito; ma allora $U+iv$ è una funzione lineare di $\theta+i\omega$ e si vede facilmente, che in tal caso non vengono cambiate le linee U , v, giacchè si ha:

$$U = a\,\theta \; , \; \pm v = a\,\omega + b \, .$$

$$\alpha=\varphi(x)=\frac{1}{a\,x+b}+c,\quad \beta=\psi\,(y)=\frac{1}{a\,y-b}-c$$

e introducendo ora le U , v; Θ , ω per mezzo delle (6):

$$U+i\,v=\frac{1}{a(\Theta+i\,\omega)+b}+c$$

$$U-i\,v=\frac{1}{a(\Theta-i\,\omega)-b}-c$$

le costanti a , b , c debbono supporsi per più generalità complesse e però scriveremo:

$$U+i\,v=\frac{1}{(A+i\,A')\,(\Theta+i\,\omega)+B+iB'}+C+i\,C'$$

$$U-i\,v=\frac{1}{(A+i\,A')\,(\Theta-i\,\omega)-(B+iB')}-C-i\,C'.$$

Ma perchè la trasformazione sia reale, bisogna che la 2.ª formola nasca dalla 1.ª cangiando i in $-i$. Si trova quindi facilmente, che deve aversi:

$$A'=0\ ,\ B=0\ ,\ C=0$$

Separando allora le parti reale ed immaginaria, e dando a v il doppio segno per la ragione suesposta, si trova:

$$U=\frac{\Theta}{A\{\Theta^2+(\omega+b)^2\}}\ ,\ \mp v=\frac{\omega+b}{A\{\Theta^2+(\omega+b)^2\}}+C',$$

dove per semplicità si è posto $B'=A\,b$. Queste sono adunque le formole più generali, che trasformano la (4′) nella (5′) cambiando le coordinate.

Se si risolvono rispetto a Θ , ω si trova:

$$\Theta = \frac{U}{A\{U^2+(v-C')^2\}}\ ,\quad \omega+b = \frac{\pm\, v-C'}{A\{U^2+(v-C')^2\}}\quad (^*)$$

§. VI. Applichiamo le formole precedenti alla pseudosfera, sulla quale conosciamo già un sistema di geodetiche di 1.ª specie (i meridiani) e le traiettorie ortogonali (i paralleli). Osservando le formole sopra stabilite, si vede subito, che dalla pseudosfera non si può ottenere che una sola superficie a curvatura costante negativa. Perciò basterà prendere le formole più semplici, caso particolare delle precedenti:

$$U = \frac{\Theta}{\Theta^2+\omega^2}\ ,\quad v = \frac{\omega}{\Theta^2+\omega^2}$$

$$\Theta = \frac{U}{U^2+v^2}\ ,\quad \omega = \frac{v}{U^2+v^2}\ ,$$

e, ripristinando le antiche coordinate:

$$(8)\qquad e^{-\frac{u}{A}} = \frac{e^{-\frac{\theta}{A}}}{\omega^2+A^2 e^{-\frac{2\theta}{A}}}\ ,\quad v = \frac{\omega}{\omega^2+A^2 e^{-\frac{2\theta}{A}}}$$

$$(9)\qquad e^{-\frac{\theta}{A}} = \frac{e^{-\frac{u}{A}}}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}\ ,\quad \omega = \frac{v}{v^2+A^2 e^{-\frac{2u}{A}}}$$

(*) Osservazione. Se si considerano U, v come coordinate cartesiane ortogonali in un piano ponendo $U=x$, $v=y$, si ha della superficie a curvatura costante negativa una rappresentazione piana, in cui gli angoli sono conservati, e le formole precedenti dimostrano, che ad un sistema qualunque di geodetiche di 1.ª specie e alle traiettorie ortogonali corrisponde sul piano un doppio sistema ortogonale di cerchi, di cui i primi toccano in un medesimo punto dell' asse y una parallela all'asse x, e i secondi toccano nello stesso punto l' asse y.

Le coordinate x, y, z della pseudosfera espresse per i parametri u, v dei meridiani e dei paralleli sono:

$$
(10)\quad \begin{cases}
x = e^{\frac{u}{A}} \cos v \\
y = e^{\frac{u}{A}} \operatorname{sen} v \\
z = \dfrac{1}{A} \displaystyle\int \sqrt{A^2 - e^{\frac{2u}{A}}}\, du = \dfrac{A}{2} \log \dfrac{A - \sqrt{A^2 - e^{\frac{2u}{A}}}}{A + \sqrt{A^2 - e^{\frac{2u}{A}}}} + \sqrt{A^2 - e^{\frac{2u}{A}}}
\end{cases}
$$

Dobbiamo trovarne la superficie complementare rispetto al sistema di geodetiche $\omega = \text{cost}$, quindi in primo luogo calcolare i coseni di direzione X, Y, Z delle tangenti a queste linee. Avremo:

$$
X = \frac{dx}{d\theta}\,,\quad Y = \frac{dy}{d\theta}\,,\quad Z = \frac{dz}{d\theta}\,,
$$

quando nelle (10) si siano espresse x, y, z per θ, ω mediante le (8). Non volendo effettuare questa sostituzione converrà calcolarle colle formole:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{dx}{du}\frac{du}{d\theta} + \frac{dx}{dv}\frac{dv}{d\theta} \\
Y &= \frac{dy}{du}\frac{du}{d\theta} + \frac{dy}{dv}\frac{dv}{d\theta} \\
Z &= \frac{dz}{du}\frac{du}{d\theta} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{d\theta}\,,
\end{aligned}
$$

avendo riguardo alle formole:

$$\frac{du}{d\theta}=\frac{v^2-A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}{v^2+A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}\,,\quad \frac{dv}{d\theta}=2A\,\frac{v\,e^{-\frac{2u}{A}}}{v^2+A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}\,,$$

che discendono dalle (8) (9). Così operando, si trova:

$$X=\frac{1}{A}\,\frac{v^2-A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}{v^2+A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}\,e^{\frac{u}{A}}\cos v-2\,A\,\frac{v\,e^{-\frac{u}{A}}}{v^2+A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}\,\mathrm{sen}\,v$$

$$Y=\frac{1}{A}\,\frac{v^2-A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}{v^2+A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}\,e^{\frac{u}{A}}\,\mathrm{sen}\,v+2\,A\,\frac{v\,e^{-\frac{u}{A}}}{v^2+A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}\cos v$$

$$Z=\frac{1}{A}\,\frac{v^2-A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}{v^2+A^2\,e^{-\frac{2u}{A}}}\sqrt{A^2-e^{\frac{2u}{A}}}$$

Il raggio ρ di curvatura geodetica delle $\theta=\mathrm{cost}$ è dato da $\rho=A$, quindi le coordinate ξ, η, ζ della superficie complementare cercata si otterranno colle formole:

$$\xi=x-A\,X\;,\quad \eta=y-A\,Y\;,\quad \zeta=z-A\,Z;$$

effettuando i calcoli, e, ponendo per semplicità:

$$e^{\frac{u}{A}} = A \operatorname{sen} \varphi ,$$

si troverà:

$$(11) \quad \begin{cases} \xi = 2\,A \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} (\cos v + v \operatorname{sen} v) \\ \eta = 2\,A \dfrac{\operatorname{sen} \varphi}{1 + v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} (\operatorname{sen} v - v \cos v) \\ \zeta = A \left\{ \log \operatorname{tang} \dfrac{1}{2} \varphi + \dfrac{2 \cos \varphi}{1 + v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right\} \end{cases}$$

Queste equazioni definiscono una superficie a curvatura costante negativa $- \frac{1}{A^2}$. Inoltre (V. §. II in fine) su questa superficie conosciamo un sistema di linee deformate dei paralleli della pseudosfera; esse sono le linee $\theta =$ cost, ossia $\frac{\operatorname{sen}\varphi}{1+v^2 \operatorname{sen}^2\varphi} =$ cost.

In causa della complicazione delle (11) non mi è riuscito trovare di questa superficie una generazione geometrica semplice.

§ VII. Consideriamo ora sulla pseudosfera un sistema di geodetiche di 3.ª specie, cioè un sistema di geodetiche uscenti da un punto reale della superficie. Evidentemente, per la simmetria della pseudosfera intorno all'asse possiamo supporre che questo punto sia nel meridiano $v = 0$. Allora per formole di trasformazione per passare dall' elemento lineare:

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{A}} dv^2$$

all' altro:

$$ds^2 = du_2^2 + A^2 \operatorname{senh}^2 \frac{u_2}{A} dv_2^2$$

possiamo prendere le seguenti (*):

$$(12) \qquad \begin{cases} v\, e^{\frac{u}{A}} = A \operatorname{senh} \frac{u_2}{A} \operatorname{sen} v_2 \\ e^{\frac{u}{A}} = \frac{A}{k} \left(\operatorname{senh} \frac{u_2}{A} \cos v_2 + \cosh \frac{u_2}{A} \right), \end{cases}$$

essendo $\frac{A}{k}$ il raggio del parallelo, che col meridiano $v = o$ determina il punto di partenza delle geodetiche $v_2 =$ cost. Dalle (12) si ottiene facilmente:

$$(13) \qquad \cosh \frac{u_2}{A} = \frac{e^{\frac{2u}{A}} (k^2 + v^2) + A^2}{2 k A\, e^{\frac{u}{A}}}$$

Allora, osservando che il raggio ρ di curvatura geodetica delle $u_2 =$ cost è dato da

$$\rho = A \operatorname{tgh} \frac{u_2}{A},$$

effettuando i calcoli come al §. precedente, si otterranno per le coordinate ξ_1, η_1, ζ_1 della superficie complemen-

(*) A queste formole si giunge con alcuni calcoli preliminari, che qui sopprimo.

tare della pseudosfera rispetto alle $v_2 = \text{cost}$ le formole seguenti:

$$(14) \quad \begin{cases} \xi_1 = 2\text{A} \dfrac{\text{sen}\,\varphi}{1+(k^2+v^2)\,\text{sen}^2\varphi}(\cos v + v\,\text{sen}\,v) \\ \eta_1 = 2\text{A} \dfrac{\text{sen}\,\varphi}{1+(k^2+v^2)\,\text{sen}^2\varphi}(\text{sen}\,v - v\cos v) \\ \zeta_1 = \text{A} \left\{ \log\text{tang}\dfrac{1}{2}\varphi + \dfrac{2\cos\varphi}{1+(k^2+v^2)\,\text{sen}^2\varphi} \right\} \end{cases}$$

Su questa superficie le deformate dei paralleli della superficie di rivoluzione applicabile su di essa sono le $u_2 = \text{cost}$, ossia per la (13) le $\dfrac{\text{sen}\,\varphi}{1+(k^2+v^2)\,\text{sen}^2\varphi} = \text{cost}$ L' analogia delle (14) colle (11) è evidente; queste ci definiscono una superficie applicabile sulla superficie di rivoluzione, che ha per meridiano la trattrice (pseudosfera), quelle una classe di superficie (contenendo la costante arbitraria k) applicabili le une sulle altre e sopra una medesima superficie di rivoluzione, avente a meridiano una trattrice accorciata. Le (11) poi provengono dalle (14) facendovi $k = 0$.

§. VIII. Andiamo ora a considerare i sistemi di geodetiche di 2.ª specie $v_1 = \text{cost}$, ciò che ci condurrà a risultati più interessanti. Queste geodetiche debbono essere ortogonali ad una medesima geodetica della superficie iniziale (pseudosfera); prese per linee coordinate insieme colle traiettorie ortogonali $u_1 = \text{cost}$ danno all'elemento lineare la forma:

$$ds^2 = du_1^2 + \text{A}^2 \cosh^2 \frac{u_1}{\text{A}}\, dv_1^2.$$

Per geodetica, a cui tutte le $v_1 = \text{cost}$ sono ortogonali, prendiamo il meridiano $v=0$; allora si trova facilmente, che le formole di trasformazione sono le seguenti:

$$(15)\qquad \begin{cases} u = A\log\cosh\dfrac{u_1}{A} + Av_1 \\ v = A\log\operatorname{tangh}\dfrac{u_1}{A}\, e^{-v_1} \end{cases}$$

dalle quali segue:

$$(15')\qquad A\operatorname{sen h}\frac{u_1}{A} = v\, e^{\frac{u}{A}}$$

Allora, osservando che il raggio di curvatura geodetica delle $u_1=\text{cost}$ è dato da;

$$\rho = A\coth\frac{u_1}{A}$$

ed effettuando i calcoli, si troverà per le coordinate ξ', η', ζ' della superficie complementare della pseudosfera (10) rispetto alle geodetiche $v_1=\text{cost}$:

$$\xi' = \frac{A\,sen\,v}{v\,\text{sen}\,\varphi}\,,\quad \eta' = -\frac{A\cos v}{v\,\text{sen}\,\varphi}\,,\quad \zeta' = A\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi\,,$$

dove si è posto $e^{\frac{u}{A}} = A\,\text{sen}\,\varphi$. Evidentemente, senza alterare la superficie, possiamo scriverne le coordinate così:

$$(16)\qquad x = \frac{A}{v\,\text{sen}\varphi}\cos v\,,\quad y = \frac{A}{v\,\text{sen}\varphi}\,\text{sen}\,v\,,\quad z = A\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi.$$

Se introduciamo le coordinate cilindriche r, θ, z ponendo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

avremo per le (16):

$$(17) \qquad r = \frac{A}{v \operatorname{sen}\varphi}, \quad \theta = v$$

e, siccome da

$$z = A \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$$

segue:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\varphi}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi} = \cosh \frac{z}{A},$$

si vede che l' equazione della superficie (16) in coordinate cilindriche sarà:

$$(18) \qquad r\theta = A \cosh \frac{z}{A}.$$

Dunque: *questa superficie è generata da una spirale iperbolica, il cui polo percorre l' asse* z *e il cui piano rimane normale all' asse stesso, mentre la spirale varia di grandezza colla legge assegnata dalla formola precedente*. La superficie è evidentemente simmetrica rispetto al piano xy.

Le trasformate dei paralleli della superficie logaritmica di rivoluzione, sulla quale la superficie (16) è applicabile sono le $u_1 = \text{cost}$, ossia per la (15') le $v \operatorname{sen}\varphi = \text{cost}$. Ma per la 1.ª delle (17) le $v \operatorname{sen} \varphi = \text{cost}$ non sono altro che le $r = \text{cost}$; ora, se si considera uno qualunque dei cilindri circolari $r = \text{cost}$ e si distende sopra un piano, la curva della nostra superficie, che giace su di esso, si dispone per la (18) secondo una catenaria comune di parametro A indipendente dal raggio del cilindro. Di più si vede, che le direttrici di queste catenarie *cilindriche* sono tutte in un piano per l' asse comune dei cilindri e i loro vertici sono sopra un piano normale a quest'asse (il piano xy) (*). Possiamo dunque dire che: *Quando la superficie logaritmica di rivoluzione si applica sulla superficie* (16) *i paralleli divengono catenarie eguali piegate sopra cilindri circolari concentrici.*

Osserviamo poi, che tutte queste catenarie cilindriche escono dal piano $x\,y$ normalmente alla spirale iperbolica luogo dei loro vertici; questa spirale iperbolica è dunque deformata di un meridiano.

Vogliamo ora ridurre direttamente l' elemento lineare della nostra superficie a quello ordinario della superficie logaritmica di rivoluzione, il che, mentre servirà di conferma ai risultati ottenuti, darà anche luogo ad un' ulteriore proprietà di questa singolare deformazione. Se si calcola l' elemento lineare della superficie (16) in coordinate v e φ si trova;

$$ds^2 = \frac{A^2}{v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \left\{ \frac{\cos^2\varphi + v^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} d\varphi^2 + 2\, \frac{\cos\varphi}{v \operatorname{sen}\varphi} dv\, d\varphi + \frac{1+v^2}{v^2} dv^2 \right\}$$

Ora, se si pone

$$(19) \qquad v \operatorname{sen}\varphi = t\,,\ v\cos\varphi = \omega\,,$$

(*) Queste proprietà renderebbero facile la costruzione effettiva di un modello di questa superficie.

la formola precedente si trasforma nell' altra:

$$ds^2 = A^2 \left\{ \frac{1+t^2}{t^4} dt^2 + \frac{1}{t^2} d\omega^2 \right\},$$

e ponendo

$$(20) \qquad t = \frac{A}{\rho}, \frac{\omega}{A} = \psi,$$

si ottiene:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{A^2}{\rho^2}\right) d\rho^2 + \rho^2 d\,\psi^2,$$

che è la forma ordinaria dell' elemento lineare della superficie logaritmica di rivoluzione $z = A \log \rho$. Dalle (20), (19) confrontate colla (17) si trae.

$$\rho = r,$$

dunque *ogni catenaria cilindrica della superficie* (16), *diventando un parallelo della superficie logaritmica di rivoluzione assume un raggio eguale a quello del cilindro, su cui è descritta.*

Osserviamo da ultimo che, analogamente a quello che accade quando le elicoidi si applicano sulle superficie di rivoluzione, colla superficie (16) si ricoprirà infinite volte la superficie logaritmica di rivoluzione, avvolgendo continuamente ciascuna catenaria cilindrica sul parallelo corrispondente. Se poi vogliamo riferirci unicamente alla superficie (16), possiamo dire, che questa superficie gode della proprietà di essere distendibile sopra sè medesima, in modo, che qualunque porzione di una ad arbitrio delle sue catenarie cilindriche si avvolga su qualunque altra porzione della medesima catenaria.

§. IX. La proprietà, che nel §. precedente abbiamo visto appartenere alla catenaria, dà luogo naturalmente alla domanda, se essa sia comune ad altre curve, od esclusiva alla catenaria. In altre parole: con una curva diversa dalla catenaria si può, come colla catenaria si genera la superficie (16), generare una superficie applicabile sopra una superficie di rivoluzione, e tale che le deformate dei paralleli siano precisamente le posizioni di quella curva, piegata sui cilindri circolari concentrici?

Le coordinate di queste superficie generalizzate sarebbero:

$$x = r\cos\theta\ ,\ y = r\,\text{sen}\,\theta\ ,\ z = \Omega\,(r\theta)\ ,$$

dove $\Omega\,(r\theta)$ indica una funzione arbitraria di $r\theta$. L'elemento lineare di queste superficie in coordinate r, θ si trova dato da:

$$ds^2 = \mathrm{E}dr^2 + 2\,\mathrm{F}\,dr\,d\theta + \mathrm{G}d\theta^2,$$

dove E, F, G hanno i valori seguenti:

$$\mathrm{E} = 1 + \theta^2\Omega'^2\,(r\theta)\ ,\ \mathrm{F} = r\,\theta\,\Omega'^2(r\theta),\ \mathrm{G} = r^2\,\{1 + \Omega'^2\,(r\theta)\}.$$

Ma, per ipotesi, le linee $r = \text{cost}$ sono deformate dei paralleli di una superficie di rivoluzione, quindi debbono essere geodeticamente parallele fra loro. Ora è noto essere necessario per questo, che:

$$\frac{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}{\mathrm{G}} = \mathrm{E} - \frac{\mathrm{F}^2}{\mathrm{G}}$$

sia indipendente da θ. Sostituendo i valori di E, F, G si ottiene:

$$E - \frac{F^2}{G} = 1 + \frac{\theta^2 \Omega'^2 (r\theta)}{1 + \Omega'^2 (r\theta)} ,$$

dunque:

$$\theta \frac{\Omega' (r\theta)}{\sqrt{1 + \Omega'^2 (r\theta)}}$$

deve essere indipendente da θ. Derivando rispetto a θ si ricava:

$$\frac{\Omega' (r\theta)}{\sqrt{1 + \Omega'^2 (r\theta)}} + r\theta \left\{ \frac{\Omega' (r\theta)}{\sqrt{1 + \Omega'^2 (r\theta)}} \right\}' = 0 ,$$

da cui integrando:

$$\frac{\Omega' (r\theta)}{\sqrt{1 + \Omega'^2 (r\theta)}} = \frac{A}{r\theta}$$

essendo A una costante. Se ne deduce:

$$\Omega'(r\,\theta) = \frac{A}{\sqrt{r^2 \theta^2 - A^2}}$$

e integrando di nuovo, omettendo la costante additiva, che non influisce sul risultato:

$$\Omega\,(r\,\theta) = A \text{ sett} \cosh \frac{r\,\theta}{A}$$

dunque di superficie della classe assegnata, che godano della proprietà voluta, non vi può essere che la seguente:

$$r\,\theta = A \cosh \frac{z}{A}.$$

Siamo così ricondotti alla superficie (18) e resta quindi dimostrato, che quella proprietà appartiene esclusivamente alla catenaria.

§. X. Fatte queste applicazioni delle proprietà delle superficie complementari alle superficie a curvatura costante negativa, passo ad occuparmi delle superficie elicoidali.

I teoremi fondamentali sulle evolute e sulle evolventi delle elicoidi si possono dimostrare geometricamente, fondandosi sull' osservazione semplicissima, che dando ad un' elicoide E intorno all'asse quel moto elicoidale, che l' ha generata, o il moto retrogrado, essa non fa altro, che scorrere sopra sè stessa.

Ora se si suppone tracciata sull' elicoide E una linea di curvatura C, e si dà a questa linea intorno all'asse il moto elicoidale, che ha generato E, essa si manterrà sempre sull' elicoide, e sarà sempre nelle sue diverse posizioni linea di curvatura di E; poichè, se le normali ad E lungo la posizione primitiva di C si suppongono trasportate insieme con questa linea, esse si conservano sempre normali all' elicoide per l' osservazione fondamentale fatta sopra. Ora nella loro posizione primitiva inviluppavano una linea G, e quindi nelle nuove posizioni successive inviluppano le posizioni successive della linea G, il che dimostra evidentemente, che le posizioni successive di C sono linee di curvatura di E.

Risulta inoltre da queste considerazioni, che l' evoluta dell' elicoide E, rispetto al sistema C di linee di curvatura, è un' elicoide dello stesso asse e dello stesso passo, generata dallo spigolo di regresso G della sviluppabile luogo delle normali all'elicoide E lungo una linea di curvatura C. Si ha quindi il teorema, che altrove ho dimostrato per altra via: (*) *L'evoluta d' un elicoide è un'al-*

(*) M. T. pag. 49.

tra elicoide, avente a comune colla prima l' assè ed il passo.

§. XI. Considerazioni affatto analoghe alle precedenti mostrano, che sull' elicoide E le traiettorie ortogonali delle eliche, ossia le trasformate dei meridiani della superficie di rivoluzione su cui l' elicoide è applicabile, sono curve identiche, che si ottengono da una di esse, dandole attorno all' asse quel moto elicoidale, che ha generato E.

Questa osservazione ci servirà a determinare l' evolvente di E rispetto a quelle geodetiche g traiettorie ortogonali delle eliche.

Consideriamo una di queste geodetiche ed il sistema delle sue tangenti e sulla sviluppabile luogo di queste rette tracciamo una curva t traiettoria ortogonale di queste tangenti, cioè una evolvente della g.

Dico, che l'elicoide E', generata da t intorno all'asse di E collo stesso moto elicoidale, che ha generato E, è una delle evolventi di E.

Insieme con t durante il moto supponiamo trasportata la g col sistema delle sue tangenti; allora g verrà ad occupare sopra E le posizioni successive di tutte le traiettorie ortogonali delle eliche e le tangenti quelle delle tangenti, sicchè il teorema sarà dimostrato, quando si provi, che ognuna di queste tangenti è normale ad E'.

Nella posizione primitiva sia A B una di queste tangenti, essendo A il punto di contatto con g e B il punto ove incontra t. Consideriamo un elemento infinitesimo del moto elicoidale; per questo moto infinitesimo il punto A descrive un elemento di elica di E, il quale è normale alla retta A B, poichè g sega ortogonalmente tutte le eliche di E. Quindi, per una nota proprietà, (*), tutti i punti di A B e in particolare il punto B descriveranno

(*) V. De-Jonquières. Mélanges de Géometrie pure, p. 15.

elementi di traiettorie normali alla posizione attuale di A B. Adunque essendo A B normale a due diverse direzioni uscenti da B sull' elicoide E′, cioè alla curva t ed alla traiettoria di B, è normale all' elicoide stessa.

Abbiamo dunque il teorema:

Le evolventi delle elicoidi sono elicoidi, aventi a comune colle prime l' asse ed il passo.

Come conseguenza necessaria di questo teorema e di quello del §. precedente abbiamo l'altro:

La superficie complementare di un' elicoide è una nuova elicoide dello stesso asse e dello stesso passo.

Questo teorema potrebbe anche dimostrarsi direttamente con considerazioni analoghe.

§. XII. Dalle considerazioni geometriche dei §§. precedenti scaturiscono spontaneamente alcune conseguenze che è utile notare, cioè:

Le eliche di un'elicoide sono traiettorie delle sue linee di curvatura. Conseguentemente l' elemento lineare di un' elicoide, riferito alle linee di curvatura u, v deve assumere la forma (*):

$$ds^2 = f^2(u+v)\,du^2 + \varphi^2(u+v)\,dv^2.$$

Lungo le eliche ($u+v=$cost) non variano i raggi di curvatura di un'elicoide, i quali sono quindi funzioni l' uno dell' altro.

Se si fa la rappresentazione di Gauss di un' elicoide sulla sfera, le immagini delle linee di curvatura di un medesimo sistema sono curve eguali, che si ottengono da una di esse, facendola ruotare attorno al diametro della sfera parallela all'asse dell' elicoide; questo diametro è

(*) Dini *sulle superficie di curvatura costante.* Giornale di Napoli, Vol. III. pag. 241.

perpendicolare ai piani dei paralleli della sfera, immagini delle eliche. Questi paralleli sono quindi traiettorie delle immagini delle linee di curvatura, e perciò l'elemento sferico ds_1 in coordinate u, v assume la forma:

$$ds_1^2 = f_1^2 (u+v)\, du^2 + \varphi_1^2 (u+v)\, dv^2.$$

Se un elicoide ha una linea di curvatura piana, tutte le altre linee di curvatura dello stesso sistema sono piane; i loro piani tagliano l'elicoide tutti sotto uno stesso angolo e segano l'asse pure sotto un medesimo angolo.

Se un' elicoide ha una linea di curvatura sferica, tutte le altre linee di curvatura dello stesso sistema sono sferiche, le sfere, su cui giacciono hanno tutte lo stesso raggio, tagliano l' elicoide sotto un medesimo angolo, e il luogo dei loro centri è un' elica circolare, avente lo stesso asse dell' elicoide ed il medesimo passo.

§. XIII. Andiamo ora alle ricerche particolari e cerchiamo in primo luogo l' elicoide complementare di un' elicoide rigata.

Sia a la minima distanza della generatrice dall'asse, α l' angolo che queste due rette fanno tra loro, m il parametro del moto elicoidale. Le coordinate x , y , z dell'elicoide saranno date dalle formole:

$$\begin{aligned} x &= a \cos v - u \,\text{sen}\, \alpha \,\text{sen}\, v \\ y &= a \,\text{sen}\, v + u \,\text{sen}\, \alpha \cos v \\ z &= u \cos \alpha + m v, \end{aligned}$$

dove u indica la lunghezza della generatrice contata dal piede della perpendicolare all' asse.

Per l' espressione dell' elemento lineare in coordinate u , v si trova facilmente:

(21) $$ds^2 = du^2 + 2(m \cos\alpha + a \,\text{sen}\,\alpha)\, du\, dv + (a^2 + m^2 + u^2 \,\text{sen}^2\alpha)\, dv^2$$

Quest' espressione si riduce alla forma ordinaria dell' elemento lineare della superficie di rivoluzione colle sostituzioni (*).

$$t = v + (m \cos\alpha + a \operatorname{sen}\alpha) \int \frac{du}{a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$w = \int \frac{\sqrt{a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2\alpha - (m\cos\alpha + a \operatorname{sen}\alpha)^2}}{\sqrt{a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2\alpha}} du,$$

poichè essa diventa allora:

$$ds^2 = dw^2 + (a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2\alpha)\, d\, t^2$$

Pel raggio ρ di curvatura geodetica delle $w = \text{cost}$ si trova:

$$\rho = \frac{\sqrt{(a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2\alpha)[a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2\alpha - (m\cos\alpha + a \operatorname{sen}\alpha)^2]}}{u \operatorname{sen}^2\alpha}$$

Con queste formole, eseguendo i calcoli, si trova per le coordinate ξ, η, ζ dell' elicoide complementare:

$$\xi = -m \cot\alpha \cos v + \frac{m(m \operatorname{sen}\alpha - a\cos\alpha)}{u \operatorname{sen}^2\alpha} \operatorname{sen} v$$

$$\eta = -m \cot\alpha \operatorname{sen} v - \frac{m(m \operatorname{sen}\alpha - a\cos\alpha)}{u \operatorname{sen}^2\alpha} \cos v$$

$$\zeta = \frac{a(m \operatorname{sen}\alpha - a\cos\alpha)}{u \operatorname{sen}^2\alpha} + m v$$

Queste equazioni definiscono un' altra elicoide rigata, che ha per generatrice la retta:

(*) m. t. §. 4.

$$x = -m \cot \alpha \;,\; y = -\frac{m}{\sqrt{m^2+a^2}} u_1 \;,\; z = \frac{a}{\sqrt{m^2+a^2}} u_1 \,.$$

Indicando con a_1, α_1 le quantità analoghe ad a, α per questa seconda elicoide, si avrà:

$$(22) \qquad a_1 = m \cot \alpha \;, \quad \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{m}{a}$$

Queste relazioni, come è naturale, sono reversibili, cioè:

$$a = m \cot \alpha_1 \;, \; \operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{a_1}$$

Ora servendosi della (21) per calcolare l'elemento lineare di questa elicoide ed avendo riguardo alle (22) si trova facilmente che essa è applicabile sulla primitiva, sicchè possiamo enunciare il teorema:

L' elicoide complementare di un' elicoide rigata è pure rigata ed applicabile sopra di essa.

Notiamo, che dalle (22) discende, che, se l' elicoide primitiva è a direttrice rettilinea, la complementare è a piano direttore e viceversa. In particolare, se la primitiva è l'elicoide gobba ad area minima $\left(a=0 \,,\, \alpha=\frac{\pi}{2}\right)$, la complementare coincide con essa, come del resto è evidente di per sè poichè in questo caso le tangenti alle deformate dei meridiani coincidono colle generatrici stesse. È notevole il caso in cui si abbia $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{a}$, poichè allora le (22) danno $a_1=a$, $\alpha_1=\alpha$. L' elicoide primitiva è allora identica colla complementare; ne differisce però per la posizione, ottenendosi da questa con una rotazione di due angoli retti intorno all' asse.

§. XIV. Le evolute delle elicoidi generali rigate sono complicate, e perciò mi limito a trovare l' evoluta dell'elicoide gobba ad area minima.

Le coordinate di questa elicoide sono date dalle formole ;

$$x = u \cos v \ , \ y = u \operatorname{sen} v \ , \ z = m v \ ,$$

per i coseni di direzione X , Y , Z della normale si trova

$$X = \frac{m \operatorname{sen} v}{\sqrt{u^2 + m^2}} \ , \ Y = - \frac{m \cos v}{\sqrt{u^2 + m^2}} \ , \ Z = \frac{u}{\sqrt{u^2 + m^2}}$$

Siccome poi si ha

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + m^2)\, d v^2,$$

la curvatura $\frac{1}{r_1 r_2}$ sarà :

$$\frac{1}{r_1 r_2} = - \frac{m^2}{(u^2 + m^2)^2} \ ;$$

ma $r_1 + r_2 = 0$, quindi :

$$r_2 = - \frac{u^2 + m^2}{m} \ , \ r_1 = \frac{u^2 + m^2}{m}$$

le coordinate ξ , η , ζ dell' evoluta rispetto al raggio r_1 per es. si trovano date da

$$\xi = u \cos v + \sqrt{u^2 + m^2} \operatorname{sen} v$$

$$\eta = u \operatorname{sen} v - \sqrt{u^2 + m^2} \cos v$$

$$\zeta = \frac{u \sqrt{u^2 + m^2}}{m} + m v \, .$$

Queste equazioni definiscono un' elicoide generata attorno all' asse z dalla curva:

$$x=u\ ,\ y=-\sqrt{u^2+m^2}\quad ,\ z=\frac{u\sqrt{u^2+m^2}}{m}\ ,$$

la quale è l' intersezione delle due superficie seguenti:

$$m\,z+x\,y=0\quad ,\quad y^2-x^2=m^2\,.$$

La prima è un paraboloide iperbolico equilatero, la seconda un cilindro parallelo all'asse z, avente per sezione retta un' iperbola equilatera, i cui assi sono paralleli alle due rette $x=0$, $y=0$, che il paraboloide ha sul piano $x\,y$. Il punto all'infinito dell' asse z appartiene tanto al paraboloide quanto al cilindro, ed è perciò un punto doppio della loro intersezione. Quindi:

L'evoluta di un' elicoide gobba ad area minima è un' elicoide generata da una curva gobba del 4.° ordine con un punto doppio nel punto all'infinito dell'asse.

È da notarsi, che pel teorema di Weingarten questa evoluta elicoidale è applicabile sull' evoluta dell'alisseide.

§. XV. Cerchiamo ora se esistono elicoidi, che abbiano una linea di curvatura piana e quindi (§. XII) un intero sistema di linee di curvatura piane. Il sistema accennato sia quello delle linee v. Allora sulla sfera rappresentativa le linee v saranno cerchi eguali (§. XII), cioè linee aventi la stessa curvatura geodetica costante.

Ora l'elemento lineare della sfera sarà dato in coordinate u, v dalla formola:

$$(23)\qquad ds^2=f^2\,(u+v)\,d\,u^2+\varphi^2\,(u+v)\,d\,v\,.$$

Se indichiamo con $\sqrt{a^2-1}$ la curvatura geodetica delle linee v (per semplicità del calcolo ulteriore) ed $u+v$ con x, si dovrà quindi avere:

$$\varphi = \frac{1}{f\sqrt{a^2-1}} \frac{df}{dx}.$$

Esprimendo, che la curvatura della superficie, il cui elemento lineare è dato dalla (23) è l'unità positiva, avremo per determinare f la equazione differenziale:

$$\frac{1}{\frac{df}{dx}} \frac{d}{dx} \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 - f\frac{d^2 f}{dx^2}}{f^3} = a^2.$$

Questa equazione, non contenendo la variabile indipendente, si integra con noti processi e si trova:

$$u+v = \int \frac{df}{f\sqrt{C^2+cf-a^2f^2}}$$

dove C , c sono nuove costanti.

Limitandoci al caso di $c=0$, troveremo:

$$f(u+v) = \frac{C}{a\cosh C(u+v)}\ ,\ \varphi(u+v) = \frac{C}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{tgh} C(u+v)$$

e cambiando C u, C v, rispettivamente in u, v, potremo anche scrivere:

$$(24)\quad f(u+v) = \frac{1}{a\cosh(u+v)}\ ,\ \varphi(u+v) = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{tgh}(u+v)$$

Per i raggi r_2, r_1 della superficie richiesta troveremo facilmente dalle note equazioni differenziali, che li legano ad f, φ (*):

$$(25) \quad r_2 = \mathrm{A} \operatorname{senh}(u+v) \ , \ r_1 = -\frac{\mathrm{A}}{\operatorname{senh}(u+v)},$$

dove A è una costante arbitraria e l'altra si è tralasciata, perchè comparendo additivamente sì in r_1 che in r_2, non darebbe che delle elicoidi parallele alle precedenti.

Queste elicoidi sono per le (25) a curvatura costante negativa $-\frac{1}{\mathrm{A}^2}$.

Per le (15) l'elemento lineare della sfera in coordinate u, v assume la forma:

$$ds^2 = \frac{1}{a^2 \cosh^2(u+v)} du^2 + \frac{1}{a^2-1} \operatorname{tgh}^2(u+v)\, dv^2,$$

che si deduce dall' ordinaria:

$$ds^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\omega^2$$

colle sostituzioni:

$$\cos\theta = \frac{1}{a\cosh(u+v)} \ , \ \omega = \frac{v}{\sqrt{a^2-1}} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tgh}(u+v)}{\sqrt{a^2-1}}\right).$$

Quindi le coordinate X, Y, Z dei punti della sfera, che espresse per θ, ω sono:

$$\mathrm{X} = \operatorname{sen}\theta\cos\omega \ , \ \mathrm{Y} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\omega \ , \ \mathrm{Z} = \cos\theta,$$

quando si esprimano per u, v diverranno:

(*) Dini. *Sopra alcuni punti della teoria delle superficie*: §. 24.

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\cos\frac{v}{\sqrt{a^2-1}} + \frac{1}{a}\operatorname{tgh}(u+v)\operatorname{sen}\frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
Y &= \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\operatorname{sen}\frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \quad \frac{1}{a}\operatorname{tgh}(u+v)\cos\frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
Z &= \frac{1}{a\cosh(u+v)}
\end{aligned}
\right.
$$

Le coordinate x, y, z dell' elicoide verranno quindi date dalle formole:

$$
x = \int\left(r_2\frac{dX}{du}\,du + r_1\frac{dX}{dv}\,d\,v\right)
$$

$$
y = \int\left(r_2\frac{dY}{du}\,du + r_1\frac{dY}{dv}\,d\,v\right)
$$

$$
z = \int\left(r_2\frac{dZ}{du}\,du + r_1\frac{dZ}{dv}\,d\,v\right).
$$

Avendo riguardo alle (25), (26), ed eseguendo le derivazioni e le quadrature, si troverà:

$$
(27)\quad \left\{
\begin{aligned}
x &= -\frac{A}{a}\,\frac{1}{\cosh(u+v)}\operatorname{sen}\frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
y &= \frac{A}{a}\,\frac{1}{\cosh(u+v)}\cos\frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
z &= \frac{A}{a}\left\{\operatorname{tgh}(u+v)-(u+v)\right\} + \frac{A}{a}\,v\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Questa elicoide ha per profilo meridiano la curva delle tangenti costanti $= \frac{A}{a}$. Tali profili (trattrici) sono le linee di curvatura del sistema v.

Le linee di curvatura dell'altro sistema u sono tracciate sopra sfere di raggio $\frac{A}{a}$, che tagliano ortogonalmente l'elicoide ed hanno i loro centri sull'asse (*).

§. XVI. Troviamo ora l'elicoide complementare della (27); perciò osserviamo, che l'elemento lineare delle (27) in coordinate u, v, in causa delle (24), (25) assume la forma:

$$(27') \quad ds^2 = \frac{A^2}{a^2} \operatorname{tgh}^2(u+v)\, du^2 + \frac{A^2}{a^2-1} \frac{1}{\cosh^2(u+v)} dv^2.$$

Per ridurlo alla forma ordinaria delle superficie di rivoluzione, basta porre (**).

$$(28) \begin{cases} w = -A \int \dfrac{\operatorname{senh} \omega\, d\omega}{\cosh \omega \sqrt{1+(a^2-1)\cosh^2 \omega}} = A \operatorname{sett\,senh} \dfrac{1}{\cosh \omega \sqrt{a^2-1}} \\ t = \dfrac{1}{a}\left\{ v - (a^2-1) \int \dfrac{\operatorname{senh}^2 \omega\, d\omega}{1+(a^2-1)\cosh^2 \omega} \right\} = \operatorname{sett\,tgh}\left(\dfrac{\operatorname{tgh} \omega}{a}\right) - \dfrac{u}{a}, \end{cases}$$

dove per brevità si è posto $u+v=\omega$. Con queste sostituzioni l'elemento lineare (27') assume infatti la forma:

$$(29) \quad ds^2 = dw^2 + A^2 \cosh^2 \frac{w}{A}\, dt^2.$$

Ciò mostra intanto, che l'elicoide complementare cercata è applicabile sulla superficie logaritmica di rivoluzione (V. §. III). Per mezzo delle formole precedenti si trova poi per le coordinate ξ, η, ζ dell'elicoide complementare:

(*) Sono queste le notevoli elicoidi trovate la prima volta dal Prof. Dini. V. *Ricerche sopra la teoria delle superficie*.

(**) m. t. §. 4.

$$
(29')\left\{\begin{aligned}
\xi &= -\frac{A\sqrt{a^2-1}}{a}\operatorname{senh}\omega\cos\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}+\frac{A(a^2-1)}{a}\cosh\omega\operatorname{sen}\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}\\
\eta &= -\frac{A\sqrt{a^2-1}}{a}\operatorname{senh}\omega\operatorname{sen}\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}-\frac{A(a^2-1)}{a}\cosh\omega\cos\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}\\
\zeta &= -\frac{A}{a}\,\omega+\frac{A}{a}\,v\,.
\end{aligned}\right.
$$

Queste elicoidi sono generate attorno all'asse z dalla curva:

$$
x=-\frac{A\sqrt{a^2-1}}{a}\operatorname{senh}\omega\ ,\ y=-\frac{A(a^2-1)}{a}\cosh\omega\ ,\ z=-\frac{A}{a}\omega\ ,
$$

la quale si proietta sul piano xy secondo una curva, che deriva dalla catenaria, come l' ellisse del cerchio. L'analogìa di queste superficie con quelle elicoidali ad area minima (*) è evidente.

Vi è poi un caso, in cui esse ammettono il medesimo profilo ed hanno inoltre il medesimo passo, differendo soltanto pel senso in cui girano le eliche, che sono *destrorse* per le une, *sinistrorse* per le altre. Si può infatti enunciare il teorema:

La curva:

$$
x=m\operatorname{senh}\omega\ ,\ y=m\cosh\omega\ ,\ z=m\,\omega
$$

con un moto elicoidale di parametro $+$m *intorno all' asse* z *genera un' elicoide ad area minima (applicabile sull'alisseide); con un moto elicoidale di parametro* $-$m *genera un' elicoide complementare di un'elicoide a curvatura costante negativa (applicabile sulla superficie logaritmica di rivoluzione).* Questa curva è elica del cilindro, che la proietta sul piano $y\,z$, cilindro la cui

(*) m. t. §. 24.

sezione retta è una catenaria, e ne taglia le generatrici sotto un angolo di 45.°

§. XVII Dalle elicoidi (27) a curvatura costante negativa potremmo dedurre tre classi di superficie complementari, come abbiamo fatto nei §§. VI, VII, VIII colla pseudosfera; qui però mi limiterò ad una sola ricerca, che darà una proprietà notevole di queste elicoidi.

Consideriamo su queste elicoidi un sistema di geodetiche di 1.ª specie; e precisamente quel sistema speciale, di cui le eliche sono traiettorie (*). Per formole di trasformazione si hanno le seguenti:

$$\mathrm{U} = \mathrm{A} \log \cosh \frac{w}{\mathrm{A}} + \mathrm{A}\, t$$

$$\mathrm{V} = \mathrm{A} \operatorname{tgh} \frac{w}{\mathrm{A}} e^{-t}$$

dove V=cost sono le geodetiche di 1.ª specie accennate, che colle traiettorie ortogonali U=cost danno all'elemeuto lineare la forma:

$$d s^2 = d\,\mathrm{U}^2 + e^{\frac{2\mathrm{U}}{\mathrm{A}}} d\,\mathrm{V}^2 .$$

Siccome le V=cost hanno per traiettorie le eliche, ne segue, che si ottengono tutte da una di esse, dandole attorno all' asse quel moto elicoidale, che ha generato l' elicoide stessa. Dalle considerazioni dei §§. X, XI risulta quindi, che la superficie complementare di quell' elicoide rispetto alle V=cost è una nuova elicoide, avente a comune colla primitiva l'asse ed il passo. Inoltre questa elicoide (§. III.) è a curvatura costante negativa.

(*) Dini. *Sulle superficie di curvatura costante* l. c, Ora per mezzo delle formole precedenti, si ottiene per le coordinate x_1, y_1, z_1 di questa elicoide complementare:

$$x_1 = -\frac{A}{a}\frac{\sqrt{a^2-1}}{\operatorname{senh}\omega+a\cosh\omega}\cos\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$y_1 = \frac{A}{a}\frac{\sqrt{a^2-1}}{\operatorname{senh}\omega+a\cosh\omega}\operatorname{sen}\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$z_1 = \frac{A}{a}\left\{\frac{\cosh\omega+a\operatorname{senh}\omega}{\operatorname{senh}\omega+a\cosh\omega}-\omega-a\right\}+\frac{A}{a}v.$$

Ma, se si pone:

$$\frac{\sqrt{a^2-1}}{\operatorname{senh}\omega+a\cosh\omega}=\frac{1}{\cosh\theta},$$

ne risulta:

$$\operatorname{tgh}\theta=\frac{\cosh\omega+a\operatorname{senh}\omega}{\operatorname{senh}\omega+a\cosh\omega}=\frac{\frac{1}{a}+\operatorname{tgh}\omega}{1+\frac{1}{a}\operatorname{tgh}\omega}=\operatorname{tgh}(\omega+\alpha),$$

dove si è posto

$$\operatorname{tgh}\alpha=\frac{1}{a},$$

il che dà un valore reale per α, poichè $a>1$. Avremo quindi:

$$\theta=\omega+\alpha$$

Allora, se nelle formole precedenti, che danno x_1, y_1, z_1, si aumenta $\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$ di $\frac{\pi}{2}$ si ottiene:

$$x_1 = -\frac{A}{a \cosh \theta} \operatorname{sen} \frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$y_1 = \frac{A}{a \cosh \theta} \cos \frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$z_1 = \frac{A}{a} \left\{ \operatorname{tgh} \theta - \theta + v + \alpha - a + \frac{\pi \sqrt{a^2-1}}{2} \right\}.$$

Se si confrontano queste equazioni colle (27), si vede subito, che esse rappresentano la medesima elicoide, spostata lungo l' asse della quantità $\frac{A}{a}\left(\alpha - a + \frac{\pi \sqrt{a^2-1}}{2}\right)$.
Le coordinate ξ, η, ζ delle evolventi delle elicoidi (27) rispetto alle geodetiche $V = \text{cost}$ si ottengono con note formole che richiedono una sola quadratura (*). Eseguendola si ottengono le formole seguenti:

$$(30)\quad \begin{aligned}
\xi = {} & \frac{A\sqrt{a^2-1}}{a^2} \frac{1}{\operatorname{senh} \omega + a \cosh \omega} \left\{ C + v - \omega + a \log (a + \operatorname{tgh} \omega) \right\} \cos \frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
& + \frac{A}{a^2 \cosh \omega} \left\{ C - a + v - \omega + a \log (a + \operatorname{tgh} \omega) \right\} \operatorname{sen} \frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
\eta = {} & \frac{A\sqrt{a^2-1}}{a^2} \frac{1}{\operatorname{senh} \omega + a \cosh \omega} \left\{ C + v - \omega + a \log (a + \operatorname{tgh} \omega) \right\} \operatorname{sen} \frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
& - \frac{A}{a^2 \cosh \omega} \left\{ C - a + v - \omega + a \log (a + \operatorname{tgh} \omega) \right\} \cos \frac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\
& \frac{A}{a^2 \cosh \omega (\operatorname{senh} \omega + a \cosh \omega)} \left\{ C + v - \omega + a \log (a + \operatorname{tgh} \omega) \right\} \\
& - \frac{A}{a} \left\{ C - \operatorname{tgh} \omega + a \log (a + \operatorname{tgh} \omega) \right\},
\end{aligned}$$

dove C è una costante arbitraria, variando la quale si ha un sistema di superficie parallele.

(*) Beltrami. *Ricerche di Analisi* etc. l. c.

Le equazioni precedenti definiscono una classe di superficie, che certamente non sono elicoidali, poichè altrimenti sull' elicoidi (27) le V = cost dovrebbero essere le traiettorie ortogonali delle eliche (V. §§. X, XI); inoltre i raggi di curvatura delle superficie di questa classe sono legati fra loro dalla relazione (V. §. III):

$$r_2 - r_1 = A$$

Possiamo dunque dire:

Le superficie (30) *hanno costante ed eguale ad* A *la differenza fra i raggi di curvatura*; *inoltre le due falde dell'evoluta sono elicoidi identiche a curvatura costante negativa* $-\frac{1}{A^2}$, *aventi a profilo una trattrice, le quali differiscono fra loro solo per una traslazione lungo l' asse.*

Se nelle formole precedenti si cambia $\frac{v}{\sqrt{a^2-1}}$ in v e si passa al limite per $a = 1$, si ottiene la superficie di rivoluzione, che ha per meridiano l' evolvente della trattrice.

§. XVIII. Data una superficie qualunque, le tangenti alle linee di curvatura di uno stesso sistema lungo i punti di una linea di curvatura qualunque dell' altro sistema formano una sviluppabile, e le porzioni di dette tangenti, comprese fra la linea di curvatura considerata e lo spigolo di regresso della sviluppabile, sono i raggi di curvatura geodetica della stessa linea di curvatura. Questa proprietà, che il Gremigni nel lavoro citato dimostra per via puramente geometrica, risulta anche, come caso particolare, da una costruzione generale, pel raggio di curvatura geodetica di una linea qualunque, dovuta al Prof. Beltrami, costruzione, che ho già avuto occasione di richiamare al §. I.

Variando la linea di curvatura accennata nel suo sistema, lo spigolo di regresso di quella sviluppabile genera una superficie, che il Gremigni ha chiamato *superficie dei centri geodetici* di quel sistema di linee di curvatura.

Le semplici considerazioni geometriche, di cui ho fatto uso ai §§. X, XI conducono immediatamente a stabilire il teorema:

Le superficie dei centri geodetici di un' elicoide sono elicoidi, aventi a comune colla prima l' asse ed il passo.

Supponiamo infatti nei punti di una linea di curvatura C di un' elicoide condotte le tangenti alle linee di curvatura dell' altro sistema. Per la proprietà suesposta queste rette inviluppera nno una linea G, che sarà il luogo dei centri geodetici della C. Diamo ora alla linea di curvatura C ed al sistema delle tangenti considerate quel moto elicoidale, col quale l' elicoide stessa è stata generata. La C occuperà successivamente le posizioni delle linee di curvatura del suo sistema (C), il sistema delle tangenti le posizioni dei sistemi analoghi per le altre linee di curvatura del sistema (C), e la linea G quelle dei successtvi luoghi dei centri geodetici delle linee di curvatura stesse. La G genererà quindi la superficie dei centri geodetici del sistema C di linee di curvatura. Adunque questa superficie è un' elicoide, avente a comune colla primitiva l' asse ed il passo e per profilo una evoluta G della linea di curvatura C.

§. XIX. Per dare un esempio consideriamo l' elicoide (27) a curvatura costante negativa e cerchiamone la superficie dei centri geodetici relativa al sistema di linee di curvatura piane (trattrici). (*)

(*) In quanto alla superficie dei centri geodetici relativa all' altro

Vedremo che questa elicoide dei centri geodetici può essere generata dalla stessa curva (elica di un cilindro a base catenaria) che genera l' elicoide ad area minima, differendo da quest' ultima solo per il moto elicoidale, e invero sì per il passo delle eliche che pel loro senso.

Parte di questi risultati possono prevedersi geometricamente, osservando, che la superficie elicoidale dei centri geodetici ammette, come profilo, una evoluta della linea di curvatura, a cui i centri geodetici sono relativi (§. precedente). Nel nostro caso ammetterà quindi, come profilo, una evoluta della trattrice; ma la trattrice ha per evoluta piana la catenaria, quindi, per un noto teorema (*) ogni altra sua evoluta è un' elica del cilindro retto, che ha per base la catenaria stessa.

Converrà però condurre la ricerca anche analiticamente, poichè, ottenute le coordinate di queste nuove elicoidi, potremo anche ricercare quali sono le superficie di rivoluzione applicabili sopra di essa, ricerca che ci condurrà a semplici risultati.

Le coordinate ξ, η, ζ di queste elicoidi dei centri geodetici saranno date da:

$$\xi = x - \rho_v X_u \ , \quad \eta = y - \rho_v Y_u \ , \quad \zeta = z - \rho_v Z_u \ ,$$

dove x, y, z hanno i valori (27), ρ_v è il raggio di curvatura geodetica delle $v=$cost. quindi per la (27')

$$\rho_v = \frac{A}{\sqrt{a^2-1}} \operatorname{senh}(u+v) \ ,$$

sistema di linee di curvatura sferica è facile accertarsi, che si riduce all' asse dell' elicoide.

(*) V. p. e. Serret Calcul. Différentiel. §. 298.

ed X_u, Y_u, Z_u sono i coseni di direzione delle tangenti alle $u =$ cost. Effettuando i calcoli si trova:

$$(31)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{A}{a\sqrt{a^2-1}} \operatorname{senh}(u+v) \cos\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} - \dfrac{A}{a}\cosh(u+v) \operatorname{sen}\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\ \eta = \dfrac{A}{a\sqrt{a^2-1}} \operatorname{senh}(u+v) \operatorname{sen}\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} + \dfrac{A}{a}\cosh(u+v) \cos\dfrac{v}{\sqrt{a^2-1}} \\ \zeta = -\dfrac{A}{a}(u+v) + \dfrac{A}{a}v. \end{cases}$$

Queste sono adunque le elicoidi cercate. Esse ammettono come profilo la curva:

$$x = \frac{A}{a\sqrt{a^2-1}} \operatorname{senh} \omega \;,\; y = \frac{A}{a}\cosh \omega \;,\; z = -\frac{A}{a}\,\omega,$$

la quale è un' elica del cilindro, che la proietta sul piano yz, cilindro a base catenaria, come si era previsto geometricamente. L' angolo, che quest' elica forma colle generatrici ha per coseno $\dfrac{1}{a}$,

Confrontando queste formole con quelle relative alle elicoidi ad area minima (m. t. §. 24), si vede facilmente, che hanno luogo le proprietà enunciate sopra. Se poi si confrontano queste formole colle (79') del §. XVI, si vede che, quando $\sqrt{a^2-1}=1$, cioè quando il passo dell'elicoide a curvatura costante negativa è eguale alla circonferenza, che ha per raggio la distanza della cuspide della trattrice dall'assintoto, le formole confrontate non differiscono, che pei segni delle due prime coordinate Ciò mostra che: *nel caso supposto la superficie complementare e la superficie dei centri geodetici delle trattrici per le elicoidi a curvatura costante negativa*

٩٤

sono elicoidi identiche, che si ottengono l'una dall'altra con una rotazione di due angoli retti intorno all'asse.

§. XX. Cerchiamo ora la superficie di rivoluzione applicabile sopra l'elicoide (31). Prendendo a linee coordinate le $u+v=\omega$ e le v, si trova con un semplice calcolo la formola:

$$ds^2=\frac{A^2}{a^2-1}\cosh^2\omega d\omega^2-2\frac{A^2}{\sqrt{a^2-1}}d\omega dv+\frac{A^2}{a^2-1}\left\{\operatorname{senh}^2\omega+a^2-1\right\}dv^2$$

che dà l'elemento lineare dell'elicoide (31). Prendendo invece a linee coordinate le ω e le traiettorie ortogonali t, si otterrà (m. t. §. 4):

$$ds^2=\frac{A^2}{a^2-1}\,\frac{\operatorname{senh}^2\omega(\operatorname{senh}^2\omega+a^2)}{\operatorname{senh}^2\omega+a^2-1}d\omega^2+(\operatorname{senh}^2\omega+a^2-1)dt^2.$$

Confrontando questo elemento lineare coll' ordinario:

$$ds^2=\left\{1+\varphi'^2(r)\right\}dr^2+k^2r^2dt^2$$

delle superficie di rivoluzione, si avrà, per determinare la curva meridiana $z=\varphi\,(r)$, l' equazione differenziale:

$$1+\varphi'^2(r)=\frac{A^2\,k^2\,(k^2r^2+1)}{(a^2-1)\left\{k^2r^2-(a^2-2)\right\}}$$

e prendendo:

$$(32)\qquad k=\frac{\sqrt{a^2-1}}{A}\,,$$

si avrà:

$$(33)\; z=\varphi\,(r)=\sqrt{a^2-1}\int\frac{dr}{\sqrt{k^2r^2-(a^2-2)}}=A\int\frac{d(kr)}{\sqrt{k^2r^2-(a^2-2)}}.$$

Ora giova distinguere due casi, quello in cui $a^2-2>0$ e quello in cui $a^2-2<0$. Rispetto all' elicoide del Dini (27) questi due casi si distinguono in ciò. Nel 1.° caso il passo dell' elicoide è maggiore della circonferenza, che ha per raggio la distanza della cuspide della trattrice dall' assintoto, nel 2.° minore.

Se siamo nel 1.° caso, la (33) dà:

$$z = \mathrm{A}\ \text{sett}\cosh\frac{kr}{\sqrt{a^2-2}},$$

ossia per la (32):

$$r = \mathrm{A}\frac{\sqrt{a^2-2}}{\sqrt{a^2-1}}\cosh\frac{z}{\mathrm{A}}\ . \tag{34}$$

Questa curva deriva dalla catenaria come l' ellisse dal cerchio. Basta proiettare la catenaria comune $r=\mathrm{A}\cosh\frac{z}{\mathrm{A}}$ sopra un piano, che passa per l' asse z ed è inclinato sul piano della catenaria di un angolo $\alpha=\text{arc tg}\frac{1}{\sqrt{a^2-2}}$.

Nel primo caso adunque l' elicoide (31) è applicabile sulla superficie di rivoluzione, che ha per meridiano la curva (34) e quindi (*m. t.* §. 7) è anche applicabile sull' elicoide, la cui sezione normale all' asse è una spirale logaritmica.

Nel 2.° caso si trova invece:

$$r = \mathrm{A}\frac{\sqrt{2-a^2}}{\sqrt{a^2-1}}\,\text{senh}\frac{z}{\mathrm{A}}\ .$$

Questa curva è il meridiano della superficie di rivoluzione applicabile sull' elicoide (31) nel caso, che ora consideriamo. Si vede facilmente, che essa è composta di un solo ramo estendentesi all'infinito dalle due parti dell'asse di rotazione, al quale volge sempre la sua convessità, flettendosi nel punto ove l'incontra. Da ultimo osserviamo, che nel caso intermedio in cui $a^2 - 2 = 0$, la (33) dà:

$$z = \mathrm{A} \log r \quad ,$$

che è la stessa curva logaritmica, meridiano della superficie di rivoluzione applicabile sull' elicoide complementare dell' elicoide del Dini (V. §. XVI). Ciò è ben naturale dopo quanto abbiamo detto al §. precedente.

§. XXI. Per bene intendere la generazione seguente di una classe di elicoidi applicabili sulla superficie di rivoluzione a curvatura media costante (superficie, che ha per meridiano la curva generata dal fuoco di un' ellisse o di un iperbola, che rotola senza strisciare sull' asse), è d' uopo premettere alcune considerazioni sulle deformazioni di superficie di rivoluzione, che si conservano di rivoluzione (*).

Quando due superficie di rivoluzione sono applicabili l' una sull' altra è impossibile coprire coll'una interamente l' altra.

Se l' elemento lineare della prima S è:

$$ds^2 = du^2 + r^2\, dv^2$$

e quello della seconda S':

$$ds^2 = du^2 + \lambda^2\, r^2\, dv_1^{\,2}$$

e si suppone $\lambda > 1$, per trasformare S' in S conviene ta-

(*) V. Bour-Théorie de la déformation des surfaces. Journal de l'École Polytechnique Tome XXII.

gliare da S′ una porzione compresa fra due meridiani, indi flettendo S′ ricongiungere gli orli del taglio, dandole di nuovo la forma di superficie di rivoluzione. Allora S′ diventa S″.

E infatti, per trasformare i due elementi lineari l'uno nell'altro, conviene porre $v = \lambda\, v_1$, e quando l'angolo v è già diventato 2π, v_1 non è che $\frac{2\pi}{\lambda} < 2\pi$, poichè $\lambda > 1$.

Ciò posto, cerchiamo delle elicoidi applicabili sulla superficie di rivoluzione a curvatura media costante $\frac{1}{c}$, superficie il cui elemento lineare si riduce facilmente alla forma (m. t. §. 26):

$$ds^2 = du^2 + \left(1 - a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{u}{2c}\right) dv^2, \text{ dove } a < 1.$$

Per trovarle effettivamente converrà determinarne il profilo meridiano $z = \varphi(\rho)$, il che si farà per mezzo della condizione, che l' elemento lineare (m. t. §. 7):

$$ds^2 = \left\{1 + \frac{\rho^2 \varphi'^2(\rho)}{\rho^2 + m^2}\right\} d\rho^2 + k^2 (\rho^2 + m^2)\, dv^2$$

sia trasformabile nel precedente.

Con un processo ben noto si troverà, per determinare $\varphi(\rho)$, la equazione differenziale;

$$1 + \frac{\rho^2 \varphi'^2(\rho)}{\rho^2 + m^2} = \frac{4\, c^2\, k^2\, \rho^2}{\{a^2 - 1 + k^2 (\rho^2 + m^2)\}\{1 - k^2(\rho^2 + m^2)\}}$$

e, disponendo delle arbitrarie m, k in modo, che si abbia:

$$a^2 - 1 + k^2\, m^2 = 0 \ , \ 4\, c^2\, k^2 - 1 + k^2\, m^2 = 0,$$

ossia prendendo

$$(35) \qquad k=\frac{a}{2c}\ , \quad m=\frac{2c\sqrt{1-a^2}}{a}\ ,$$

avremo :

$$\varphi'^2(\rho)=\frac{k^2(\rho^2+m^2)}{1-k^2(\rho^2+m^2)}\,.$$

Quindi, indicando con u l'arco della curva $z=\varphi(\rho)$,

$$\frac{du}{d\rho}=\frac{1}{\sqrt{1-k^2(\rho^2+m^2)}}\,,$$

da cui integrando:

$$(36) \qquad \rho=\frac{\sqrt{1-k^2m^2}}{k}\ \mathrm{sen}\,(ku)\,.$$

Considerando questa curva, come meridiano di una superficie di rivoluzione, fra le sue deformate vi è certamente il cerchio:

$$\rho=\frac{1}{k}\ \mathrm{sen}\,(ku)\,.$$

Il modulo λ per passare dalla curva (36) a questo cerchio è $\lambda=\frac{1}{\sqrt{1-k^2m^2}}>1$. E, siccome per le (34) delle cinque quantità a, c, m, k, λ due sono arbitrarie, ma le altre ne conseguono, possiamo enunciare il teorema seguente:

Da una sfera di raggio qualunque, supposta flessibile ed inestendibile, si tagli una porzione compresa *fra due meridiani, facenti fra loro un angolo arbitrario. Indi, flettendo la sfera, le si dia di nuovo la forma di superficie di rivoluzione, ricongiungendo gli orli dei tagli. Se al meridiano così ottenuto si dà un moto elicoidale conveniente intorno all'asse, si genererà un' elicoide applicabile sopra una superficie di rivoluzione a curvatura media costante.*

Se R è il raggio della sfera, α l' angolo del fuso sferico, che si toglie, avremo:

$$R = \frac{1}{k}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{2\pi - \alpha},$$

ed il parametro m del moto elicoidale e la curvatura media $\frac{1}{c}$ della superficie di rivoluzione, applicabile sull' elicoide generata, saranno dati dalle formole:

$$m = \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}, \quad \frac{1}{c} = \frac{4\pi}{R(2\pi - \alpha)}.$$

Questo modo di generazione di una classe di elicoidi applicabili sulla superficie di rivoluzione a curvatura media costante mi sembra tanto più notevole, in quanto che è precisamente dai profili meridiani delle deformate di rivoluzione della sfera, che si può partire per ottenere il meridiano di una superficie di rivoluzione a curvatura media costante (Bour — *l. c.*).

Questo meridiano è una curva parallela ai precedenti profili e distante da essi del raggio della sfera. Fondandosi su questa proprietà, è facile persuadersi, che si può dare dei profili derivati della sfera la seguente elegante generazione:

Intorno ad uno dei fuochi di un' ellisse o di un' iper-

bola, come centro, si descriva un cerchio di raggio eguale all' asse maggiore dell'ellisse, o all' asse trasverso dell' iperbola; indi si faccia rotolare senza strisciare l' ellisse o l' iperbola sopra una retta. La superficie di rivoluzione che ha per asse questa retta e per meridiano l'inviluppo del cerchio descritto intorno al fuoco, è applicabile sulla sfera, il cui cerchio massimo è il cerchio stesso.

Pag. 296 *Nota* leggasi: *Le superficie di rivoluzione generate* ec.

» 308 linea 1 aggiungasi questa osservazione:

Se si prendesse a considerare un sistema qualunque di geodetiche di 2.ª specie non ortogonali ad un medesimo meridiano, si otterrebbero per le superficie complementari formole, che non differirebbero dalle (14) altro che pel segno di k^2. Possiamo dunque dire che mutando k^2 in $-k^2$ nelle (14) si ottiene una classe di superficie applicabili sulla superficie di rivoluzione logaritmica. Si vede quindi che le formole (14) compendiano in se le tre classi di superficie complementari, di cui abbiamo parlato al §. III. La prima classe corrisponde a $k=0$, la seconda a k puramente immaginario, la terza a k reale.

» 308. linea 4 leggasi $v = \mathrm{A} \tanh \frac{u_1}{\mathrm{A}} e^{-v_1}$

» 317 l'ultimo termine della formola (21) va letto così

$$(a^2 + m^2 + u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha)\, dv^2$$