ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LUIGI BIANCHI

Sulle superficie applicabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 2 (1879), p. 179-236

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1879_1_2__179_0>

SULLE SUPERFICIE APPLICABILI

ESTRATTO DELLA DISSERTAZIONE DI LAUREA

DI

LUIGI BIANCHI

Alunno della R. Scuola N. S.

In questo lavoro espongo alcuni resultati che io detti nella tesi da me presentata per la laurea alla R. Università di Pisa. I primi di questi risultati sono relativi alla deformazione di alcune classi di superficie di rivoluzione, di superficie elicoidali e di quelle che hanno un sistema di linee di curvatura in piani paralleli. Gli ultimi riguardano un problema che in un caso particolare fu studiato dal Codazzi, e il metodo che espongo per la risoluzione di esso, viene applicato allo studio di particolari deformazioni delle superficie *moulures* del Monge e delle superficie di rivoluzione.

Sopra due classi di superficie gobbe.

1.— Sia una curva gobba C e consideriamo la superficie gobba generata da una retta, che si appoggia alla curva normalmente alla normale principale, facendo un angolo costante θ colla curva stessa. Indichiamo con x , y , z le coordinate correnti di un punto della curva C espresse per l'arco u della curva stessa; indichiamo poi rispettivamente con α , β , γ ; ζ , η , ς ; λ , μ , ν i coseni di direzione della tangente, della normale principale e della binormale con R , T i raggi di prima e seconda curvatura. Chiamiamo poi X , Y , Z le coordinate correnti di un punto della superficie gobba generata e con v la lunghezza variabile di generatrice, contata a partire dalla Curva C. Si vedrà facilmente che X , Y , Z sono date dalle formule seguenti:

$$X = x + v\,(\cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\lambda)$$

$$Y = y + v\,(\cos\theta\cos\beta + \operatorname{sen}\theta\cos\mu)$$

$$Z = z + v\,(\cos\theta\cos\gamma + \operatorname{sen}\theta\cos\nu)$$

Derivando ed avendo riguardo a note formule (V. Serret. Calcul. Differentiel. §. 274) si otterrà:

$$\frac{dX}{du} = \cos\alpha + v\left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\right)\cos\xi\ , \quad \frac{dX}{dv} = \cos\theta\cos\alpha + \operatorname{sen}\theta\cos\lambda$$

$$\frac{dY}{du} = \cos\beta + v\left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\right)\cos\eta\ , \quad \frac{dY}{dv} = \cos\theta\cos\beta + \operatorname{sen}\theta\cos\mu$$

$$\frac{dZ}{du} = \cos\gamma + v\left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\right)\cos\varsigma\ , \quad \frac{dZ}{dv} = \cos\theta\cos\gamma + \operatorname{sen}\theta\cos\nu$$

quindi l'elemento lineare ds della superficie in considerazione sarà dato dalla formula:

$$ds^2 = \left\{1 + v^2\left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\right)^2\right\}du^2 + 2\cos\theta\,dv\,du + dv^2.$$

Ma questo elemento lineare non varia finchè θ e $\frac{\cos\theta}{R}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{T}$ restano invariati; possiamo quindi enunciare il teorema: « Se si hanno due curve C , C′ e per ciascuna di esse si considera la superficie gobba generata da una retta, che si appoggia alla curva normalmente alla normale principale e fa un angolo costante θ colla curva, le due superficie generate saranno applicabili l' una sull' altra, quando fra i raggi R , T di prima e seconda curvatura di C e quelli R′ , T′ di C′ abbia luogo la relazione

$$(1) \qquad \frac{\cos\theta}{R}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{T}=\frac{\cos\theta}{R'}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{T'} \text{ »}$$

Evidentemente data la curva C e fissati conseguentemente R ; T vi sono infinite curve C′, che soddisfano la condizione (1), e quindi la nostra superficie S, generata nel modo suddetto colla curva C, può in infiniti modi deformarsi in altre superficie generate nello stesso modo rispetto alle trasformate di C.

Se nel teorema precedente si suppone $\theta=\frac{\pi}{2}$, si avrà un noto teorema sulle superficie delle binormali delle curve gobbe.

Fra le infinite trasformate C′ della curva primitiva C figurerà una curva piana, il cui raggio di curvatura R′ sarà dato dalla formula:

$$\frac{1}{R'}=\frac{1}{R}+\frac{\operatorname{tang}\theta}{T}\,.$$

Per es. se la curva C è un' elica circolare, la trasformata piana è un cerchio; quindi « La superficie della classe considerata, avente a direttrice un' elica circolare, è applicabile sull'iperboloide di rivoluzione ad una falda ». Quando si osservi che nel caso dell'elica circolare la superficie generata è un elicoide, il teorema precedente si potrà enunciare sotto una forma già conosciuta (v. per es. Bour Théorie de la déformation des surfaces §. 36, Journal de l'École. Polytechnique 1862).

2 — Quando $\theta = \frac{\pi}{4}$ la somma delle due curvature non varia nei punti corrispondenti delle successive deformate; osserviamo inoltre che in tal caso si può soddisfare alla (1) prendendo:

$$R' = T \ , \ T' = R$$

sicchè possiamo dire « Se due curve C , C' sono tali che il raggio di 1.ª curvatura di una qualunque di esse sia eguale al raggio di 2.ª curvatura dell'altra, le superficie gobbe generate per ciascuna di esse da una retta, che appoggiandosi alla curva biseca l'angolo della tangente e della binormale sono applicabili l'una sull'altra ».

Evvi una classe di curve per le quali il teorema enunciato acquìsta un significato degno di considerazione.

È noto che, se si considera la curva C_0 luogo dei centri delle sfere osculatrici di C e si indicano rispettivamente con u_0 , R_0 , T_0 l'arco ed i raggi di 1.ª e 2.ª curvatura di C_0 si hanno le formule (Serret. Cal. Dif. §. 292)

$$du_0 = \pm \left\{ \frac{R}{T} + \frac{d}{du}\left(T \frac{dR}{du} \right) \right\} du$$

$$\frac{du_0}{T_0} = \frac{du}{R} \ , \ \frac{du_0}{R_0} = \frac{du}{T}$$

Quando fra R , T abbia luogo la relazione differenziale:

$$(2) \qquad \frac{R}{T}+\frac{d}{du}\left(T\frac{dR}{du}\right)=\pm 1$$

si avrà:

$$T_0=R\ ,\ R_0=T$$

e però il teorema enunciato dà luogo al seguente « Se dai vari punti di una curva gobba C, i cui raggi di curvatura soddisfano la (2), si conducono le bisettrici dell'angolo della tangente e della binormale la superficie generata è applicabile su quella generata nello stesso modo colla curva luogo dei centri delle sfere osculatrici ».

È anche da osservare che in tal caso (V. Serret l. c.) le generatrici corrispondenti delle due superficie sono parallele.

3. — Da ogni punto di una curva gobba C conduciamo una retta normale alla curva e inclinata di un angolo costante sulla normale principale e cerchiamo l'elemento lineare ds della superficie gobba così generata. Facendo uso delle stesse notazioni precedentemente usate, avremo:

$$X=x+v(\cos\theta\cos\xi+\operatorname{sen}\theta\cos\lambda$$

$$Y=y+v(\cos\theta\cos\eta+\operatorname{sen}\theta\cos\mu$$

$$Z=z+v(\cos\theta\cos\varsigma+\operatorname{sen}\theta\cos\nu),$$

dove θ indica l'angolo costante delle generatrici della superficie colla normale principale di C. Derivando ed avendo riguardo alle formule del Serret si troverà subito

$$ds^2=\left\{\left(1-\frac{v\cos\theta}{R}\right)^2+\frac{v^2}{T^2}\right\}du^2+dv^2\ .$$

Osservando che questo elemento lineare non varia finchè T e $\frac{\cos\theta}{R}$ restano invariati, si ha subito il seguente teorema « Se si hanno due curve C , C' aventi la stessa torsione, e tali di più che il rapporto delle loro prime curvature sia una costante, le due superficie gobbe, generate per ciascuna di esse da una retta che, appoggiandosi alla curva normalmente alla curva stessa, fa colla normale principale un angolo costante θ per C e un angolo pur costante θ' per C', saranno applicabili l'una sull' altra, quando θ , θ' siano legati dalla relazione

$$(3) \qquad \frac{\cos\theta}{\cos\theta'} = \frac{R}{R'} \text{ »}$$

Possiamo quindi dire che, data una superficie S generata nel modo del teorema con una curva C, se ne può ottenere un numero infinito applicabili su di essa conservando in ciascun punto alla curva C invariata la sua torsione, e variando in dato rapporto la sua prima curvatura.

Se supponiamo dati θ ed R possiamo dare a θ' qualunque valore, escluso $\frac{\pi}{2}$ ed allora dalla (3) si ha il valore conveniente di R'; in particolare possiamo prendere $\theta'=o$ e allora la superficie deformata è quella delle normali principali della trasformata di C.

Se la curva C è un' elica cilindrica le sue trasformate (nel senso del teorema, sono altrettante eliche cilindriche e i cilindri, su cui esse sono tracciate, sono tutti della stessa natura. Più particolarmente, se C è un elica circolare tutte le sue trasformate sono eliche circolari e fra queste ve ne ha una per la quale $\theta'=o$, e siccome la superficie delle normali principali di un'elica circolare è un elicoide gobbo ad area minima possiamo enunciare il teorema « Una retta che si appoggia normalmente ad un'elica « circolare e fa un angolo costante colla normale principale « genera una superficie applicabile sull'elicoide gobbo ad « area minima ».

Questo teorema era già noto (Dini, Annali di Tortolini Tomo VII; 1864, pag. 33); ma come caso particolare del teorema generale dimostrato possiamo per es. enunciare anche il seguente « Una retta che si appoggia normalmente « ad un' elica cilindro-conica e fa un angolo costante colla « normale principale genera una superficie applicabile sulla « superficie delle normali principali di un'altra elica cilin- « dro conica ».

Sulle superficie di rivoluzione.

4. — Dimostrerò qui un teorema che non so se sia conosciuto sotto la forma generale seguente: « Se nell' espressione dell' elemento lineare di una superficie (4) $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ i coefficienti E , F , G sono funzioni di una sola delle variabili, la superficie è applicabile sopra una superficie di rivoluzione e le linee corrispondenti a quella variabile sono le trasformate dei paralleli ». Supponiamo per es. che E , F , G siano funzioni solo di u e cambiamo nell' elemento lineare le linee v prendendo a linee coordinate le u e le loro traiettorie ortogonali t. Dovremo considerare v come funzione di u , t, con che l' elemento lineare (4) assumerà la forma:

$$ds^2 = \left\{ E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2 \right\} du^2 + 2\frac{dv}{dt}\left\{ F + G\frac{dv}{du} \right\} du\,dt + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 dt^2$$

e dovremo porre:

$$(6) \qquad F+G\frac{dv}{du}=o$$

Quest' equazione per la supposizione fatta si riduce subito alle quadrature e dà

$$v=-\int\frac{F}{G}du+kt$$

avendo scelto kt per la funzione arbitraria di t proveniente dall'integrazione, k essendo una costante. Avendo riguardo alla (6) ed all' altra:

$$\frac{dv}{dt}=k$$

l' elemento lineare (5) si trasformerà nel seguente:

$$ds^2=\frac{EG-F^2}{G}du^2+k^2G\,dt^2,$$

che per essere E , F , G funzioni solo di u appartiene ad una superficie di rivoluzione, di cui le linee u=cost. sono i paralleli. Il teorema è così dimostrato.

Come conseguenza immediata del teorema precedente possiamo notare che:

« Se nell' elemento lineare (4) i coefficienti E , F , G « sono funzioni di $u+v$ la superficie sarà applicabile sopra « una superficie di rivoluzione e le linee $u+v$ cost. saranno « le trasformate dei paralleli ». Per convincersi di ciò basta cambiare le linee u o v ponendo $u+v=\omega$, con che l'elemento lineare assume la forma richiesta dal teorema.

Come caso speciale di quest'ultima proprietà, se $F=o$, l'elemento lineare assume la forma

$$ds^2=\varphi(u+v)du^2+\psi(u+v\ du^2,$$

che già il Prof. Dini aveva dimostrato essere esclusiva alle superficie di rivoluzione (Giornale di Napoli; Anno 1865, pag. 253).

5. — Sulla superficie di rivoluzione generata da una cicloide che ruota intorno alla sua tangente al vertice.

Dal teorema di Weingarten sulle evolute delle superficie per le quali un raggio di curvatura è funzione dell'altro si può dedurre una proprietà della superficie sopra citata.

Consideriamo la superficie di rivoluzione generata da una cicloide che ruota intorno alla sua base: da una nota proprietà di questa curva risulta che il raggio di curvatura relativo al meridiano è doppio di quello relativo al parallelo; per conseguenza se si hanno due di tali superficie generate da due cicloidi qualunque le loro evolute sono, per il teorema di Weingarten, applicabili l'una sull'altra. Ma dalle proprietà della cicloide risulta che l'evoluta di una superficie della classe suddetta è una superficie di rivoluzione generata dal ruotare di una cicloide intorno alla sua tangente al vertice; possiamo quindi enunciare il teorema:

« Le superficie di rivoluzione generate dal ruotare di
« ciclodi qualunque intorno alle respettive tangenti ai vertici
« sono tutte applicabili l'una sull'altra ».

Questa curiosa proprietà della cicloide può anche dimostrarsi, indipendentemente dal teorema di Weingarten, nel modo seguente che ci mostra di più in qual modo due di queste superficie si possono distendere l'una sull'altra. Prendiamo una cicloide qualunque e situiamo l'origine degli archi u al vertice del ramo di cicloide che si considera; indicando con a il raggio del cerchio generatore e con r il raggio del parallelo della superficie generata dal ruotare della cicloide intorno alla tangente al vertice, avremo

$$(7) \quad u = 2\sqrt{2ar},$$

quindi l'elemento lineare della superficie di rivoluzione generata sarà dato da

$$ds^2 = du^2 + \frac{u^4}{(8a)^2} dv^2 \quad (*)$$

che ponendo $\frac{v}{8a} = v_1$, si rende indipendente da a. Si vede quindi subito la verità della proprietà enunciata. Riguardo poi al modo con cui due delle superficie di rivoluzione del teorema si applicano l'una sull'altra, è da osservarsi che, siccome la (7) non vale che per il primo ramo della cicloide, così quelle due superficie si applicano solo a pezzi l'una sull'altra, cioè la parte della prima generata da un ramo della sua cicloide si applica sulla parte della seconda generata pure da un ramo della sua cicloide. Uno qualunque poi di questi due pezzi non può coprire interamente l'altro, nè esserne interamente coperto. Ma se a, b sono i rispettivi dei cerchi generatori delle due cicloidi ed $a > b$ è sovrabbondante nel primo pezzo la parte di superficie compresa fra i paralleli $u = 4a$, $u = 4b$ e la parte simmetrica

(*) Da questa forma dell'elemento lineare si vede che la curvatura geodetica dei paralleli varia in ragione inversa dell'arco del meridiano e la curvatura della superficie in ragione inversa del quadrato di questo arco.

nell' altra metà del ramo, parti le cui aree riunite danno: $\frac{32\pi}{3a}(a^3-b^3)$, e nel secondo pezzo è sovrabbondante la parte di superficie compresa fra due meridiane i cui piani formano fra loro un angolo eguale ad $\frac{2\pi}{a}(a-b)$, parte la cui area è data da: $\frac{32\pi b^2}{3a}(a-b)$.

Osserverò da ultimo che, essendo la costruzione dei profili derivati di una *moulure*, che si deforma conservando le sue linee di curvatura, identica a quella dei profili derivati di una superficie di rivoluzione potremo generalizzare il teorema trovato dicendo « Se agli assi di due superficie di rivoluzione generate dal ruotare di cicloidi qualunque intorno alle rispettive tangenti ai vertici si fanno percorrere due cilindri convenientemente dipendenti l' uno dall' altro le moulures inviluppi saranno pure applicabili l' una sull' altra » In particolare se uno dei cilindri è circolare retto anche l' altro è circolare retto, quindi: « La superficie di rivoluzione generata da una cicloide che ruota intorno ad una parallela alla sua tangente al vertice (ossia alla sua base) è applicabile sopra altre infinite superficie di rivoluzione generate nello stesso modo da altre cicloidi » La condizione di applicabilità di due qualunque di queste superficie di rivoluzione è data dalla formula:

$$ad=bd',$$

ove a , b indicano i rispettivi raggi dei cerchi generatori delle cicloidi e d , d' le distanze degli assi di rivoluzione delle rispettive tangenti ai vertici, intendendo che queste distanze siano contate positivamente o negativamente secondo che la parallela alla tangente al vertice è situata dalla stessa banda della cicloide o dalla banda opposta.

5. *bis* — Sopra una proprietà della trattrice.

Una curva piana C, descritta nel piano coordinato $z\,y$, si muova nello spazio in modo che il suo piano resti parallelo a sè stesso, mentre un determinato punto dell' asse y descrive una curva C′ tracciata nel piano $x\,y$. Sia v l' arco di C contato a partire da un punto fisso e medesimamente u l' arco di C′- e cerchiamo l' elemento lineare della superficie S generata da C nel suo moto, prendendo a linee coordinate le $u\,v$. Sia y=V, dove V è funzione della sola v l'equazione di C nel suo piano ed y=U, dove U è funzione solo di u, l'equazione di C′ nel suo piano; le coordinate correnti x, y, z di un punto di S saranno date dalle formule:

$$(\alpha)\quad x=\int\sqrt{1-U'^2}\,du\ ,\quad y=U+V\ ,\quad 2=\int\sqrt{1-V'^2}\,dv.$$

Di qui si trae:

$$(\beta)\quad ds^2=du^2+2U'V'du\,dv+dv^2.$$

Ora se U′V′ è funzione di $u+v$ la superficie S sarà applicabile sopra una superficie di rivoluzione (N.° 4) e le linee $u+v$ saranno le trasformate dei paralleli. Perchè la condizione precedente sia soddisfatta, occorre che si abbia:

$$U''V'=U'V'',$$

ossia:

$$\frac{U''}{U'}=\frac{V''}{V'}=a,$$

dove a è una costante, quindi integrando:

$$U'=B\,e^{au} \quad , \quad V'=B'e^{av} \,,$$

dove B , B' sono costanti arbitrarie. È facile poi vedere che, senza alterare la generalttà della superficie S, possiamo prendere:

$$(\gamma) \quad U=e^{au} \quad , \quad V=\pm e^{av} \,;$$

si può quindi enunciare il teorema « Se il piano di una « trattrice si muove parallelamente a sè stesso ed in modo « che un punto fisso di esso percorra una trattrice eguale « situata in un piano perpendicolare a quello della trattrice « mobile, quest'ultima curva genera una superficie applica- « bile sopra una superficie di rivoluzione ».

Ponendo in (β) per U , V i loro valori (γ) si ha per l' elemento lineare della superficie considerata la formula:

$$ds^2=du^2\pm 2\,a^2e^{a(u+v)}du\,dv+dv^2.$$

Se si cambiano le linee coordinate u , v ponendo

$$u+v=2\omega \quad , \quad u-v=2\,t \,,$$

si trova:

$$ds^2=2\left\{1\pm a^2e^{2a\omega}\right\}d\omega^2+2\left\{1\mp a^2e^{2a\omega}\right\}dt^2,$$

e ciò mostra che sulla superficie considerata le linee $u+v=$cost. sono le trasformate dei paralleli e le $u-v=$cost. le trasformate dei meridiani.

Per determinare poi la curva meridiana $z=\varphi(r)$ della superficie di rivoluzione, tanto nel caso in cui si prendano i segni superiori quanto in quello in cui si prendano gli inferiori, si trova l'equazione differenziale:

$$1+\varphi'^2(r)=\frac{2\,k^4(2-k^2\,r^2)\,r^2}{a^2(\;\;-k^2r^2)^2}\,,$$

la cui integrazione dipende dalle funzioni ellittiche. La equazione precedente può scriversi:

$$(\delta)\quad \frac{dz}{dr}=\frac{\sqrt{a^2+2\,k^2}}{a}\sqrt{\frac{2}{k^2(a^2+2k^2)}-\frac{\left(r^2-\frac{1}{k^2}\right)^2}{r^2-\frac{1}{k^2}}}\;;$$

ora se invece di questa equazione si considera l'altra:

$$(\varepsilon)\quad \frac{dz}{dr}=\frac{r^2-\frac{1}{k^2}}{\sqrt{\frac{2}{k^2\,(a^2+2\,k^2)}-\left(r^2-\frac{1}{k^2}\right)^2}}$$

questa ci definisce la *curva elastica*, quindi la meridiana (δ) della nostra superficie di rivoluzione ha colla curva elastica (ε) la relazione seguente, che nei punti corrispondenti alla stessa ascissa r per le due curve, le respettive tangenti fanno all'asse di rotazione angoli tali che il prodotto delle loro tangenti trigonometriche è una costante.

Se nelle (α) si pongono per U , V i loro valori (γ) e si eseguiscono le integrazioni, si trova:

$$x=\frac{1}{a}\left(\sqrt{1-a^2e^{2au}}-\operatorname{sett\,tgh}\sqrt{1-a^2e^{2au}}\right)\ ,\ y=e^{au}\pm e^{av}\ ,$$

$$z=\frac{1}{a}\left(\sqrt{1-a^2e^{2av}}-\operatorname{sett\,tgh}\sqrt{1-a^2e^{2av}}\right).$$

Queste formule ci danno in termini finiti le equazioni di due superficie della classe considerata applicabili l' una sull' altra e sulla superficie di rivoluzione, il cui meridiano è la curva (δ). L' una superficie si distingue dall' altra pel modo con cui la trattrice mobile è situata rispetto alla trattrice fissa.

Elicoidi.

6. — Nei §§. seguenti faccio alcune applicazioni del noto teorema di Bour, ricercando le superficie di rivoluzione applicabili sopra superficie elicoidali speciali; ma prima mi è utile il premettere le seguenti considerazioni. In un elicoide possiamo considerare la sezione che si ottiene tagliandolo con un piano passante per l' asse ovvero con un piano perpendicolare all' asse; indicherò la prima col nome di *profilo meridiano* e la seconda con quello di *sezione retta*. Ora è evidente che, dato il parametro del moto elicoidale, il profilo meridiano e la sezione retta debbono essere legati per modo fra loro che dato l' uno di questi elementi l' altro ne consegua. Per trovare quale è la relazione accennata supponiamo che $z=\varphi(\rho)$ sia l'equazione del profilo meridiano; allora le coordinate x, y, z dell'elicoide saranno date (ritenendo le consuete notazioni) dalle formule:

$$(8)\qquad x=\rho\cos\omega\quad,\quad y=\rho\cos\omega\quad,\quad z=m\,\omega+\varphi(\rho).$$

Se si fa in queste relazioni $z=0$, le coordinate x , y della sezione retta saranno date da:

$$x=\rho\cos\omega \quad , \quad y=\rho \operatorname{sen}\omega$$

ove ρ è legato con ω dalla equazione

$$m\omega+\varphi(\rho)=0.$$

Ora, se si riferisce la sezione retta ad un sistema di coordinate polari R , θ, di cui il polo sia l'origine delle primitive coordinate e l' asse polare sia l'asse delle x, si vedrà subito per le formule precedenti che l'equazione in coordinate polari R , ω della sezione retta sarà

$$m\theta=-\varphi(\mathrm{R}).$$

Possiamo dunque enunciare il teorema « Se l'equazione in coordinate Cartesiane del profilo meridiano di un elicoide è: $z=\varphi(\rho)$, quella in coordinate polari della sezione retta dell' elicoide stesso sarà: $m\theta=-\varphi(\mathrm{R})$ » Viceversa « Se la sezione retta ha per equazione $\theta=f(\mathrm{R})$ quella del profilo meridiano sarà $z=-mf(\rho)$ ».

Per es. la sezione retta di un elicoide gobbo a direttrice rettilinea è una spirale di Archimede, quella di un elicoide, il cui profilo meridiano è un iperbola equilatera avente l'asse per assintoto, è una spirale iperbolica ec.

7. — Ricordiamo che l' elemento lineare dell' elicoide (8) è dato dalla formula

$$ds^2=\left\{1+\frac{\rho^2\varphi'^2(\rho)}{\rho^2+m^2}\right\}d\rho^2+k(\rho^2+m^2)\,dt^2$$

quando si riferisca alle eliche ρ ed alle loro traiettorie ortogonali t, k essendo una costante arbitraria e che quindi l' equazione $z=\psi(r)$ della meridiana della superficie di rivoluzione applicabile sovra di esso è data dall'equazione differenziale:

$$(9) \qquad \frac{r^2}{k^2(r^2-m^2k^2)}+\frac{1}{k^2}\varphi'^2\left(\frac{\sqrt{r^2-m^2k^2}}{k}\right)=1+\psi'^2(r)$$

Supponiamo che la sezione retta del nostro elicoide sia la spirale logaritmica.

$$\theta=a\log R;$$

il profilo meridiano sarà allora (N.° 6) la curva logaritmica

$$z=-am\log\rho$$

e la (9) diverrà:

$$\frac{r^2}{k^2(r^2-m^2k^2)}+\frac{a^2m^2}{r^2-m^2k^2}=1+\psi'^2(r)$$

che prendendo $k=1$ si integra immediatamente e dà

$$z=\psi(r)=m\sqrt{a^2+1}\,\text{sett}\cosh\frac{z}{m}$$

cioè

$$r=m\cos h\frac{z}{m\sqrt{a^2+1}}$$

Questa curva deriva dalla catenaria come l' ellisse dal cerchio, *accorciando* le sue ordinate in un rapporto costante. Invece la superficie di rivoluzione la cui meridiana è la curva

$$r=b\cos h\frac{z}{a}$$

ove $b>a$ è applicabile sull' iperboloide di rivoluzione ad una falda (V. Dini, Annali di Tortolini Tomo VII. p. 42) ossia sull' elicoide gobbo a direttrice rettilinea, la cui sezione retta è una spirale di Archimede. Possiamo quindi dire. « La superficie di rivoluzione, il cui meridiano « è la curva

$$r=b\cos h\frac{z}{a}$$

« è applicabile sopra un elicoide, la cui sezione retta è una « spirale logaritmica o una spirale di Archimede col polo « sull' asse, secondo che b è minore o maggiore di a ».

Nel caso di $b=a$ la superficie di rivoluzione è l'alissoide e la sezione retta dell' elicoide è una retta, che sega l' asse. Questa retta serve così di passaggio dalla forma della spirale logaritmica a quella della spirale di Archimede.

8. — Consideriamo l' elicoide la cui sezione retta è una circonferenza di raggio a segante l' asse; l' equazione di questa curva in coordinate polari è:

$$\mathrm{R}=a\cos\theta$$

e quindi quella del profilo meridiano sarà:

$$z=\varphi(\rho)=-m\operatorname{arc}\cos\frac{\rho}{a}$$

La (9) diverrà quindi nel nostro caso:

$$\frac{r^2}{k^2(r^2-m^2k^2)}+\frac{m^2}{(a^2+m^2)k^2-r^2}=1+\psi'^2(r)$$

se si prende $k=1$ si avrà:

$$z=\psi(r)=m\,a\int\frac{dr}{\sqrt{(a^2+m^2-r^2)(r^2-m^2)}}$$

Introducendo le funzioni ellittiche questa quadratura si eseguisce subito e si trova:

$$r=m\,sn\left(\frac{i\sqrt{a^2+m^2}}{a\,m}z+c\,,\ \frac{m}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)$$

Possiamo disporre della costante c in modo da far sparire l'immaginario ed ottenere un semplice risultato. Se prendiamo infatti $c=$K, essendo $=4$K il periodo reale di $sn\left(z,\ \frac{m}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)$, avremo per note formule:

$$r=m\frac{cn\left(\frac{i\sqrt{a^2+m^2}}{a\,m}z\,,\ \frac{m}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)}{dn\left(\frac{i\sqrt{a^2+m^2}}{a\,m}z\,,\ \frac{m}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)}$$

e servendosi delle trasformazioni complementarie delle funzioni ellittiche si trova

$$(10)\qquad r=\frac{m}{dn\left(\frac{\sqrt{a^2+m^2}}{am}z\,,\ \frac{a}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)}$$

La equazione precedente può porsi sotto altra forma; è evidente infatti che all' argomento della funzione ellittica che vi comparisce possiamo aggiungere una costante qualunque, ciò equivalendo soltanto ad uno spostamento dell'origine delle coordinate lungo l'asse z. Se si aggiunge K, essendo 2K il periodo reale di $dn\left(z, \frac{a}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)$ e si applica la formula $dn(z+K, k) = \frac{k'}{dn(z, k)}$ si avrá:

$$(11) \qquad r = \sqrt{a^2+m^2}\, dn\left(\frac{\sqrt{a^2+m^2}}{am} z, \frac{a}{\sqrt{a^2+m^2}}\right)$$

Possiamo quindi dire « L'elicoide, la cui sezione retta è una circonferenza di raggio a segante l'asse, è applicabile sulla superficie di rivoluzione il cui meridiano è la curva (11) ».

Se il raggio a della sezione retta dell'elicoide diviene infinito, l'elicoide diviene l'ordinario gobbo ad area minima e la curva (10) diviene:

$$r = \frac{m}{dn\left(\frac{z}{m}, 1\right)} = m\cosh\frac{z}{m}$$

cioè la catenaria comune e si ritrova un noto risultato. È facile vedere la ragione per cui dalla (11) non si può ottenere la stessa riprova; la costante K, che serve per passare dalla (10) alla (11) diverrebbe in questo caso infinita.

Dalle note proprietà delle funzioni ellittiche risulta che il raggio del parallelo della superficie di rivoluzione trovata varia fra m e $\sqrt{a^2+m^2}$, e la curva meridiana dopo essersi recata dall'estremità di un raggio eguale ad m a quella di un altro raggio pure eguale ad m e susseguente al primo si riproduce periodicamente estendendosi all'infinito nell'un senso e nell'altro dell'asse z. Inoltre in ogni passaggio dall'estremità di un raggio eguale a: $\sqrt{a^2+m^2}$ al minimo susseguente eguale ad m ha un punto di flesso essendo concava verso l'asse z nella prima parte del suo cammino e convessa nella rimanente.

Osserviamo da ultimo che l'area compresa fra due raggi minimi successivi, l'asse z e la curva è data da $\pi\, a\, m$. Nel caso di $a=m$ quest'area è eguale a quella della sezione retta dell'elicoide, il cui profilo meridiano è allora la curva sinusoidale $\rho=m\cos\frac{z}{m}$; il modulo della funzione ellittica che compare nelle formule (10) (11) è allora $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

9. — Consideriamo l'elicoide la cui sezione retta è una lemniscata di Bernoulli:

$$R^2=a^2\cos 2\,\theta$$

col nodo sull'asse. Il profilo meridiano di questo elicoide sarà la curva

$$z=\frac{m}{2}\operatorname{arc}\cos\frac{\rho^2}{a^2}$$

da cui:

$$\varphi'(\rho)=\frac{m\rho}{\sqrt{a^4-\rho^4}}$$

La (9), prendendovi $k=1$, dà quindi nel nostro caso:

$$\frac{r^2}{r^2-m^2}+\frac{m^2(r^2-m^2)}{a^4-(r^2-m^2)^2}=1+\psi'^2(r)$$

da cui:

$$z=\psi(r)=ma^2\int\frac{dr}{\sqrt{(r^2-m^2)\{a^4-(r^2-m^2)^2\}}}.$$

Questa quadratura, quando si ponga $r^2-m^2=y$, è subito ridotta alle funzioni ellittiche e colle formule di questa teoria si troverà facilmente per equazione del meridiano della superficie di rivoluzione applicabile sull' elicoide considerato

$$(12)\quad r=\frac{m\sqrt{a^2+m^2}}{\sqrt{a^2+m^2-a^2\,sn^2\left(\frac{\sqrt{a^2+m^2}}{am}z,\ \sqrt{\frac{a^2-m^2}{a^2+m^2}}\right)}}$$

Il raggio del parallelo della superficie di rivoluzione trovata varia fra m e $\sqrt{a^2+m^2}$ e la curva meridiana si comporta come quella del numero precedente — La (12) viene a contenere solo un seno circolare quando $m=a$. se poi si fa crescere a all'infinito si riduce alle funzioni iperboliche e si ha:

$$r=\frac{m}{\sqrt{1-sn^2\left(\frac{z}{m},1\right)}}=\frac{m}{\sqrt{1-\tang h^2\frac{z}{m}}}=m\cos h\frac{z}{m}$$

La superficie di rivoluzione è allora l' alissoide e l' elicoide diviene l' ordinario gobbo ad area minima.

10. — Per ultimo esempio considero l'elicoide la cui sezione retta è una spirale iperbolica: il suo profilo meridiano sarà un iperbola equilatera avente l' asse per assintoto. L'equazione del profilo meridiano sarà quindi:

$$z=\frac{a^2}{\rho}$$

da cui

$$\varphi'(\rho)=-\frac{a^2}{\rho^2}.$$

La (9) diverrà quindi nel nostro caso

$$(13)\qquad \frac{r^2(r^2-m^2k^2)+a^4k^4}{k^2(r^2-m^2k^2)^2}=1+\psi'^2(r)$$

e prendendo $k=1$ si otterrà:

$$z=\psi(r)=\int\frac{\sqrt{m^2(r^2-m^2)+a^4}}{r^2-m^2}\,dr$$

ed eseguendo la quadratura:

$$z=m\log\left\{mr+\sqrt{m^2(r^2-m^2)+a^4}\right\}+\frac{a^2}{2m}\log$$
$$\left\{1-\frac{2a^2m}{r[mr+\sqrt{m^2(r^2-m^2)+a^4}]+m(a^2-m^2)}\right\}$$

Nel caso di $m=a$ la curva meridiana trovata si riduce assai semplice; essa è la seguente

$$r=\sqrt{a^2+e^{\frac{2z}{a}}}$$

Noterò da ultimo che se nella (13) si suppone $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$ ed inoltre m , a legati dalla relazione $m^4=2a^4$ si ottiene per equazione della curva meridiana

$$z=r+\frac{m}{2\sqrt{2}}\log\frac{r\sqrt{2}-m}{r\sqrt{2}-m}$$

11. — Ciò che segue non è relativo alla deformazione degli elicoidi, sibbene ad un nuovo modo con cui queste superficie possono generarsi e per il quale vengono in certa guisa a collegarsi colla *moulures* e colle *canali*.

Sia data una curva gobba C ed una curva piana C′ ambedue arbitrarie; un punto del piano di C′ percorra la curva C, mentre il piano resta costantemente normale della C stessa, ed una retta fissa nel piano di C′ e segante C fa un angolo costante colla normale principale di quest' ultima curva — Si genera così una superficie, che è nello stesso tempo una generalizzazione delle superficie canali e di quelle *moulures*. Chiamerò la curva C direttrice e la C′ generatrice della superficie cons derata.

Ricerchiamo ora l'elemento lineare di questa superficie; a variabile v prenderò l' arco della C, rispetto alla quale poi riterrò le altre denominazioni usate ai numeri 1, 2. Riferendo la curva C′ ad un sistema di coordinate polari ρ , u nel suo piano, di cui il polo sia nel punto del piano di C′ che percorre C e l'asse polare la normale principale di C, prenderò a nuova variabile la u. Se con X , Y , Z indichiamo le coordinate correnti di un punto della superficie generata, sarà facile vedere che si ha:

$$(14)\qquad X = x + \rho(\cos\xi\cos u + \cos\lambda\,\mathrm{sen}\,u)\,,$$
$$Y = y + \rho(\cos\eta\cos u + \cos\mu\,\mathrm{sen}\,u)\,,\ Z = z + \rho(\cos\varsigma\cos u + \cos\nu\,\mathrm{sen}\,u).$$

Di qui, avendo riguardo alle formule di Serret già citate, si trae:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dX}{du} &= \rho(\cos u\cos\lambda - \mathrm{sen}\,u\cos\xi) + \frac{d\rho}{du}\cos u\cos\xi + \mathrm{sen}\,u\cos\lambda)\,,\\
\frac{dX}{dv} &= \cos\alpha\left(1 - \frac{\rho\cos u}{R}\right) - \frac{\rho\cos u}{T}\cos\lambda + \frac{\rho\,\mathrm{sen}\,u}{T}\cos\xi\\
\frac{dY}{du} &= \rho\left(\cos u\cos\mu - \mathrm{sen}\,u\cos\eta\right) + \frac{d\rho}{du}\left(\cos u\cos\eta + \mathrm{sen}\,u\cos\mu\right),\\
\frac{dY}{dv} &= \cos\beta\left(1 - \frac{\rho\cos u}{R}\right) - \frac{\rho\cos u}{T}\cos\mu + \frac{\rho\,\mathrm{sen}\,u}{T}\cos\eta\\
\frac{dZ}{du} &= \rho\left(\cos u\cos\nu - \mathrm{sen}\,u\cos\varsigma\right) + \frac{d\rho}{du}\left(\cos u\cos\varsigma + \mathrm{sen}\,u\cos\nu\right),\\
\frac{dZ}{dv} &= \cos\gamma\left(1 - \frac{\rho\cos u}{R}\right) - \frac{\rho\cos u}{T}\cos\nu + \frac{\rho\,\mathrm{sen}\,u}{T}\cos\varsigma.
\end{aligned}\right.$$

Ed ora con queste formule si troverà per l'elemento lineare cercato.

$$(15)\ ds^2 = \left\{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{du}\right)^2\right\}du^2 - 2\frac{\rho^2}{T}du\,dv + \left\{\left(1 - \frac{\rho\cos u}{R}\right)^2 + \frac{\rho^2}{T^2}\right\}dv^2.$$

Ora, se si suppone R, T costanti, i coefficienti di questo elemento lineare saranno funzioni delle sole u, quindi (V. N.° 4) la superficie sarà applicabile sopra una superficie di rivoluzione e le linee u saranno le trasformate dei paralleli. Questo risultato coincide con quello di Bour, poichè le superficie della classe considerata, aventi a direttrice un elica circolare, sono precisamente le superficie elicoidali e le linee u=cost sono le eliche.

12. — Quantunque non sia difficile convincersi di ciò geometricamente, credo bene darne qui una dimostrazione analitica, provando che se C è un' elica circolare le linee u=cost sono altrettante eliche dello stesso passo dell'elica C e descritte su cilindri concentrici a quello su cui è descritta la C stessa.

Siano

$$x=a\cos\varphi \qquad y=a\,\text{sen}\,\varphi \qquad z=a\,\varphi\,\text{cot}\,i$$

le coordinate di un punto di C. Avremo (Serret Cal. Dif. §. 300)

$$\cos\xi=-\cos\varphi\ ,\ \cos\eta=-\text{sen}\,\varphi\ ,\ \cos\varsigma=0$$

$$\cos\lambda=-\cos i\,\text{sen}\,\varphi\ ,\ \cos\mu=\cos i\cos\varphi\ ,\ \cos\nu=-\text{sen}\,i$$

Le (14) diverranno quindi in questo caso:

$$\begin{aligned} X&=a\cos\varphi-\rho(\cos u\cos\varphi+\cos i\,\text{sen}\,u\,\text{sen}\,\varphi\ ,\\ Y&=a\,\text{sen}\,\varphi+\rho(\cos i\,\text{sen}\,u\cos\varphi-\cos u\,\text{sen}\,\varphi)\ ,\\ Z&=a\,\varphi\,\text{cot}\,i-\rho\,\text{sen}\,i\,\text{sen}\,u. \end{aligned}$$

Di qui si ricava:

$$X^3+Y^2=a^2-2\,a\,\rho\cos u+\rho^2(\cos^2 u+\cos^2 i\,\text{sen}^2 u)$$

dunque le u sono descritte sopra cilindri circolari aventi per asse l'asse dell'elica C. Il raggio R del cilindro corrispondente ad un dato valore di u è determinato dalla relazione:

$$R^2=a^2-2\,a\,\rho\cos u+\rho^2(\cos^2 u+\cos^2 i\,\text{sen}^2 u).$$

Se indichiamo con I l'angolo che la curva u=cost fa coll'asse z, avremo:

$$\cos \mathrm{I} = \frac{\dfrac{d\mathrm{X}}{d\varphi}}{\sqrt{\left(\dfrac{d\mathrm{X}}{d\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{d\mathrm{Y}}{d\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{d\mathrm{Z}}{d\varphi}\right)^2}}$$

e calcolandolo effettivamente si trova:

$$\cos \mathrm{I} = \frac{a \cot i}{\sqrt{\mathrm{R}^2+a^2 \cot^2 i}},$$

dunque I=cost, per u=cost, e perciò le u = cost sono eliche. Finalmente se indichiamo con p il passo dell'elica C e con P quello di u=cost si ha:

$$p=2\pi\, \mathrm{a} \cot i \quad , \quad \mathrm{P}=2\pi \mathrm{R} \cot \mathrm{I}$$

e colle formule precedenti si trova subito: $\mathrm{P}=p$. Il teorema è quindi dimostrato.

13° — Dalla formula (15) ne deduce un' altra, di cui in seguito dovrò far uso. Supponiamo nella formula citata $\rho=a$, essendo a una costante, essa diverrà.

$$ds^2=a^2\, du^2 - \frac{2a^2}{\mathrm{T}}\, du\, dv + \left\{\left(1-\frac{a\cos u}{\mathrm{R}}\right)^2+\frac{a^2}{\mathrm{T}^2}\right\} dv^2$$

Se riduciamo le coordinate ortogonali, cambiando le linee u, il che si otterrà ponendo:

$$u=\int\frac{dv}{\mathrm{T}}+k\,\omega,$$

k essendo una costante arbitraria, avremo

$$(16) \quad ds^2 = \left[1 - \frac{a}{R}\cos\left(k\,\omega + \int \frac{dv}{T}\right)\right]^2 dv^2 + a^2k^2d\omega^2,$$

che è una forma rimarchevole, cui può ridursi l' elemento lineare delle superficie canali, quando si riferisca alle linee di curvatura, che sono i cerchi v=cost e le traiettorie ortogonali ω=cost (*). Se R, T sono costanti, si ha la superficie canale, la cui direttrice è un' elica circolare. Essa, come risulta da ciò che abbiamo dimostrato in generale, od anche del ridursi del suo elemento lineare alla forma: $ds^2 = f^2(\omega + v)dv^2 + b^2d\omega^2$, è applicabile sopra una superficie di rivoluzione. Dalla formula precedente si deduce di più (Dini — Giornale di Napoli Anno 1865, P.ª 65) che, nel deformarsi di questa superficie canale in superficie di rivoluzione, i suoi cerchi si trasformano in un sistema di geodetiche, seganti i paralleli secondo un angolo costante lungo ciascuno di questi. Viceversa si può dire che questa superficie di rivoluzione gode della proprietà, che il suddetto sistema di geodetiche può divenire colla deformazione della superficie in sistema di linee di curvatura della superficie deformata.

(*) Con queste formule si trova subito che tanto l'elemento superficiale, quanto la curvatura delle superficie canali non dipendono dalla torsione T della direttrice, la quale può quindi torcersi con qualunque modo, pure conservando in ciascun punto invariata la prima curvatura, senza che gli elementi suddetti della superficie canale subiscano alterazione.

Superficie che hanno un sistema di linee di curvatura in piani paralleli.

14. — L'elemento lineare delle moulures, riferito alle linee di curvatura u, v, assume la forma:

$$(17) \qquad ds^2 = du^2 + (U - V)^2 dv^2,$$

dove U è funzione solo di u e V di v. Le v=cost sono i profili e le u=cost sono il sistema di linee di curvatura in piani paralleli. Ora è noto che, se l'elemento lineare di una superficie è posto sotto la forma:

$$(18) \qquad ds^2 = du^2 + G\, dv^2,$$

la curvatura K della superficie e la curvatura geodetica $\frac{1}{\rho_u}$ delle linee u sono date dalle formule:

$$(19) \qquad K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d^2 \sqrt{G}}{du^2}, \quad \frac{1}{\rho^2_u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d\sqrt{G}}{du}$$

le quali applicate alla (17) mostrano, che nelle moulures il rapporto fra la loro curvatura e la curvatura geodetica delle linee u è costante lungo una stessa linea u. Reciprocamente dico che si ha il teorema: « Se esiste sopra una « superficie un sistema di linee geodeticamente parallele, e « tali che lungo ciascuna di esse il rapporto fra la « curvatura della superficie e la curvatura geodetica della « linea stessa non varii, la superficie sarà applicabile sopra « una moulure e le traiettorie ortogonali di quelle linee « saranno le trasformate dei profili. »

Prendiamo il sistema di linee accennato a linee u e le traiettorie ortogonali a linee v; siccome le u sono parallele geodeticamente, l'elemento lineare riferito alle u v, assumerà la forma (18) e, per quello che si è supposto, si dovrà avere per le (19):

$$\frac{\frac{d^2\sqrt{G}}{du^2}}{\frac{d\sqrt{G}}{du}}=\varphi(u)\,,$$

dove φ (u) indica una funzione di u; di qui si trae con una prima integrazione

$$\log\frac{d\sqrt{G}}{du}=\int\varphi(u)du+\psi(v)$$

e con una seconda integrazione:

$$\sqrt{G}=\psi(v)\int e^{\int\varphi(u)du}du+\chi(v),$$

dove ψ (v) e χ (v) sono due funzioni arbitrarie di v. Siccome poi, senza alterare la natura della superficie, possiamo fare $\psi(v)=1$, così il teorema è dimostrato.

15. — Allorquando il rapporto indicato con $\varphi(u)$ nel numero precedente è costante su tutta l'estensione della superficie, l' elemento lineare di questa moulure si può ridurre alla forma :

$$(20)\qquad ds^2=du^2+(e^{au}=V_1)^2dv^2,$$

ciò che mostra il profilo essere in questo caso una trattrice.

È notevole che sulle moulures, aventi questo profilo, si possono determinare i sistemi isotermi e risolvere quindi il problema di rappresentarle sopra un piano in modo da conservare la similitudine nelle parti infinitesime. Si può infatti trovare un fattore integrante dell' espressione differenziale.

$$du+i(e^{au}-V_1)dv$$

per mezzo del prodotto di due funzioni, l'una di u l' altra di v. Un tal fattore integrante è dato dalla formula:

$$\lambda=e^{-au}e^{ia\int V_1 dv}.$$

Sulle superficie in questione ritroviamo quindi un sistema di linee isoterme α , β mediante la formula:

$$\alpha+i\beta=-\frac{1}{a}e^{-au}e^{ia\int V_1 dv}+i\int e^{i\int V_1 dv}dv,$$

che, separando le parti reale ed immaginaria, dà:

$$(21)\quad \begin{cases} \alpha=-\dfrac{1}{a}e^{-au}\cos(a\int V_1 dv)-\int \operatorname{sen}(a\int V_1 dv)dv \\ \beta=-\dfrac{1}{a}e^{-au}\operatorname{sen}(a\int V_1 dv)+\int \cos(a\int V_1 dv)dv. \end{cases}$$

Se poniamo per semplicità:

$$a\int V_1 dv=V,$$

con che l'elemento lineare (20) diverrà:

$$ds^2=du^2+\left(e^{au}-\frac{V'}{a}\right)^2dv^2,$$

le (21) daranno:

$$(22)\quad \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{a}e^{-au}\cos V-\int \operatorname{sen} V dv \\ \beta=-\frac{1}{a}e^{-au}\operatorname{sen} V+\int \cos V dv. \end{cases}$$

L'elemento lineare della moulure considerata riferito alle α, β diverrà:

$$ds=e^{2au}(d\alpha^2+d\beta^2),$$

dove per u si intende sostituito il suo valore in funzione di α, β che se ne otterrebbe dalle (22).

16. — Se le moulures aventi a profilo una trattrice, fossero tutte applicabili sopra superficie di rivoluzione, l'avere trovato per questa classe di superficie le linee isoterme non darebbe nulla di nuovo. Ora esistono effettivamente delle moulures di questa classe applicabile sopra delle superficie di rivoluzione (Dini — Giornale di Napoli Anno 1865 pag. 70); è ben vero che il loro cilindro direttore non è arbitrario, ma ciò potrebbe dipendere dal modo particolare con cui esse si deformano in superficie di rivoluzione, essendo che i loro profili vengono a disporsi secondo geodetiche, di cui i paralleli sono traiettorie. Potrebbe quindi darsi che le moulures della classe che consideriamo, aventi cilindri direttori diversi da quelle trovate dal Prof. Dini, fossero suscettibili di deformazioni in diverso modo in superficie di rivoluzione. Dimostrare che ciò non è, è lo scopo del calcolo seguente.

Prendiamo perciò l'elemento lineare delle moulures della classe suddetta:

$$ds^2=du^2+(e^{au}-V)^2dv^2.$$

ed osserviamo che, se la superficie cui appartiene questo elemento lineare è applicabile sopra una superficie di rivoluzione, le linee t lungo le quali è costante la curvatura della superficie, ovvero nel caso nostro la curvatura geodetica delle u, debbono essere geodeticamente parallele fra loro. (*) Ma si ha:

$$\frac{1}{\rho u}=-\frac{ae^{au}}{e^{au}-V},$$

potremo dunque porre:

$$\frac{e^{au}}{e^{au}-V}=t,$$

da cui:

$$e^{au}=\frac{Vt}{t-1}\ ,\quad du=\frac{V'}{aV}dv-\frac{1}{at(t-1)}dt\ ,$$

e se prendiamo a linee coordinate le v e le t avremo:

$$ds^2=\frac{dt^2}{a^2t^2(t-1)^2}-2\frac{V'}{aV}\frac{1}{at(t-1)}dvdt+\left\{\frac{V^2}{(t-1)^2}+\frac{V'^2}{a^2-V^2}\right\}du^2.$$

Ponendo ora:

$$\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t(t-1)}=\omega$$

si otterrà:

$$(23)\quad ds^2=d\omega^2-2\frac{V'}{aV}d\omega dv+\left\{\frac{V'^2}{a^2V^2}+\left(e^{a\omega}-1\right)^2V^2\right\}dv\ .$$

(*) Ciò non potrebbe più dirsi se la superficie considerata potesse essere a curvatura costante, ma ciò non può essere a meno che non sia di rivoluzione.

Ora è noto che se l'elemento lineare di una superficie si pone sotto la forma:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

la condizione necessaria e sufficiente, affinchè le u siano geodeticamente parallele fra loro è che si abbia:

$$\frac{d}{dv}\frac{EG - F^2}{G} = o;$$

ciò del resto risulta facilmente dal calcolo fatto a N.° 4. E, siccome nella formula (23) le ω debbono essere geodeticamente parallele, si dovrà avere:

$$\frac{d}{dv}\frac{V^2\left(e^{a\omega}-1\right)^2}{\frac{V'^2}{a^2V^2}+V^2\left(e^{a\omega}-1\right)^2} = o,$$

ovvero:

$$\frac{V'^2}{a^2V^2}\frac{d}{dv}\left[V^2\left(e^{a\omega}-1\right)^2\right] - V^2\left(e^{a\omega}-1\right)^2\frac{d}{dv}\frac{V'^2}{a^2V^2} = o,$$

cioè:

$$\frac{d}{dv}\frac{V'}{V^2} = o.$$

Di qui si ha subito:

$$V = \frac{1}{c'(v+c)},$$

dove c, c' sono costanti. Ora tale appunto devè essere il cilindro direttore per le moulures, aventi a profilo una trattrice, che si applicano nel modo speciale già detto sopra superficie di rivoluzione. Si conclude quindi che delle moulures, avente a profilo una trattrice, quelle trovate dal Prof. Dini sono le uniche applicabili sopra superficie di rivoluzione.

Sopra un problema della teoria della deformazione delle superficie (*).

(17).— Mi propongo qui di risolvere il seguente problema: «È possibile deformare una data superficie in modo « che un sistema di linee tracciato su di essa diventi un « sistema di linee di curvatura per la deformata? »

Sulla superficie data S si prendano a linee coordinate il sistema dato di linee, che diremo v e le loro traiettorie ortogonali u. L'elemento lineare della superficie S riferito a queste coordinate sarà dato dalla formula:

$$(24) \qquad ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

dove E , G sono determinate funzioni di u, v dipendenti sì dalla natura di S, si da quella delle linee v scelte su di essa. Si vede subito che il problema proposto coincide coll'altro: « Esiste una superficie, per la quale l'elemento « lineare riferito alle linee di curvatura assume la forma « (24), dove E , G sono quelle funzioni di u , v avanti « stabilite? » Supponiamo che una tal superficie S' esista;

(*) Un caso particolare di questo problema è stato trattato dal Codazzi negli Annali di Tortolini (Anno 1856). Egli ha ricercato se esistono superficie, che possano deformarsi conservando le loro linee di curvatura, ed ha trovato che solo le moulures e le sviluppabili sono suscettibili di tali deformazioni.

se con r_1, r_2 indichiamo i suoi raggi di curvatura relativi alle linee u, v rispettivamente, dovremo avere le seguenti relazioni (Dini — Sopra alcuni punti della teoria delle superficie §. 24.):

$$(25)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{d\log\sqrt{E}}{dv}-\frac{d\frac{1}{r_2}}{dv}=0 \\ \left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\frac{d\log\sqrt{G}}{du}+\frac{d\frac{1}{r_1}}{du}=0 \end{cases}$$

Se poi l'elemento lineare sferico corrispondente della rappresentazione di Gauss è dato da:

$$(26)\qquad ds'^2=E'du^2+G'dv^2,$$

si dovrà avere:

$$(27)\quad \sqrt{E'}=\frac{\sqrt{E}}{r_2}\,,\quad \sqrt{G'}=\frac{\sqrt{G}}{r_1}$$

ed E', G' dovranno soddisfare la equazione seguente:

$$(28)\quad \sqrt{E'G'}=-\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{d\sqrt{G'}}{du}\right)-\frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{d\sqrt{E'}}{dv}\right)$$

la quale esprime che la curvatura della superficie, cui appartiene l'elemento lineare (26), è data dall' unità positiva.

Viceversa, avendo riguardo a ciò che il prof. Dini ha esposto in un altra sua memoria (Ricerche sopra la teorica delle superficie §. 3.), si vedrà che il problema sarà possibile, quando esistano due funzioni r_1 r_2 che soddisfino le due (25) ed insieme la (28), ove $\sqrt{E'}$, $\sqrt{G'}$ hanno i valori (27).

Alla equazione (28) possiamo sostituirne un' altra in termini finiti fra r_1, r_2 che semplicizza grandemente il problema. L'equazione accennata è la seguente:

$$(29) \qquad \frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}\right)\right\}.$$

È facile vedere effettivamente che, ammesse le (25), la (29) è conseguenza della (28) e viceversa. La equazione scritta esprime che la quantità $\frac{1}{r_1 r_2}$ è eguale alla curvatura K della superficie. Il problema proposto è così ridotto a trovare due funzioni r_1, r_2, che soddisfino le due equazioni a derivate parziali (25) e l'equazione in termini finiti (29).

Il problema è suscettibile di ulteriore riduzione, potendosi eliminare per mezzo della (29) le derivate di $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ dalle (25). Senza stare qui a ripetere un calcolo che è stato già fatto dal Codazzi (Annali di Tortolini. Anno 1856 p.ª 410; darò la equazione risultante:

$$(30) \qquad \left\{\frac{d^2\log\sqrt{E}}{du\,dv} - \frac{d\log\sqrt{E}}{dv}\frac{d\log(KG)}{du}\right\}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 -$$
$$- \left\{\frac{d^2\log(K\sqrt{G})}{du\,dv} - \frac{d\log E}{dv}\frac{d\log G}{du}\right\}\left(\frac{r_2}{r_1}\right) +$$
$$+ \frac{d^2\log\sqrt{G}}{du\,dv} - \frac{d\log\sqrt{G}}{du}\frac{d\log(KE)}{dv} = 0,$$

dove K indica il secondo membro della (29), ossia la curvatura della superficie.

Per vedere adunque se è possibile deformare la superficie data nel modo voluto, basterà ricavare dalle (29), (30) i valori di $\frac{1}{r_1}$, $\frac{1}{r_2}$ ed osservare se essi rendono identiche le (25). Questa prima parte della ricerca è ridotta quindi ad una semplice questione algebrica. Un sol caso di eccezione si presenta ed è quando la (30) è un'identità; ciò ha luogo soltanto (Codazzi m. c.) quando la superficie data sia la deformata di una *moulure* e le u, v siano le trasformate del sistema di linee di curvatura in piani paralleli e dei profili, astrazione fatta dalle superficie sviluppabili, che intendiamo escluse da queste ricerche.

Quantunque il metodo indicato sia teoricamente il più semplice, si troverà utile nei casi speciali, in causa della complicazione della (30), seguire l'altro, che ora passo ad esporre.

Sostituendo nella prima delle (25) ad $\frac{1}{r_1}$ il suo valore $\mathrm{K}\, r_2$, si otterrà l'altra:

$$\frac{d\frac{1}{r_2^2}}{dv}+\frac{1}{r_2^2}\frac{d\log \mathrm{E}}{dv}=\mathrm{K}\frac{d\log \mathrm{E}}{dv},$$

che si integra immediatamente e dà:

$$(31)\qquad \frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{\mathrm{E}}\left(\varphi(u)+\int \mathrm{K}\frac{d\mathrm{E}}{dv}\,dv\right),$$

dove $\varphi(u)$ è una funzione arbitraria di u. Ora, se sarà possibile determinare $\varphi(u)$ in modo da soddisfare anche la seconda delle (25), il problema ammetterà una soluzione.

Verificata la possibilità del problema, si dovranno trovare le coordinate X, Y, Z dei punti della sfera rappresentativa espresse per u , v , e dopo di ciò si troveranno con semplici quadrature le coordinate ξ , η , ς della superficie deformata colle formule seguenti:

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= \int\left(r_2 \frac{dX}{du}du + r_1 \frac{dX}{dv}dv\right) \\ \eta &= \int\left(r_2 \frac{dY}{du}du + r_1 \frac{dY}{dv}dv\right) \\ \varsigma &= \int\left(r_2 \frac{dZ}{du}du + r_1 \frac{dZ}{dv}dv\right). \end{aligned}\right.$$

Per mostrare subito un esempio di ciò che qui si è detto osserviamo che, se si prende, $r_1 = r_2 = a$, dove a è una costante, le (25) sono identicamente soddisfatte e la (29) lo sarà pure, quando l'elemento lineare (24) appartenga ad una sfera di raggio a. Segue di qui che una superficie applicabile sopra una sfera può deformarsi in modo che qualunque sistema di linee tracciato su di essa diventi un sistema di linee di curvatura della deformata, la quale è una sfera. Ciò è ben naturale, poichè ogni linea di una sfera è una sua linea di curvatura.

(18). — Ricerchiamo se esistono superficie gobbe, le quali si possano deformare in modo che le loro generatrici diventino linee di curvatura della superficie deformata. L'elemento lineare delle superficie gobbe, riferito alle generatrici v ed alle loro traiettorie ortogonali u, assume la forma:

$$(33)\quad ds^2 = du^2 + \left\{(u-\alpha)^2 + \beta^2\right\} dv^2 ,$$

dove α , β sono funzioni solo di v. Qui si ha:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d^2\sqrt{G}}{du^2} = -\frac{\beta^2}{\left\{(u-\alpha)^2 + \beta^2\right\}^2}$$

Dalla (31) risulta:

$$r_2 = \varphi(u)$$

e la seconda delle (25), che nel caso di G qualunque da:

$$(33') \quad \frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{du}\frac{d^2\sqrt{G}}{du^2} + \varphi^2 \frac{d^3\sqrt{G}}{du^3} = -\frac{d\sqrt{G}}{du},$$

nel nostro caso somministra l'altra:

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{du}\frac{\beta^2}{(u-\alpha)+\beta^2} - 3\varphi\frac{2\beta^2(u-\alpha)}{\left\{(u-\alpha)^2+\beta^2\right\}^2} = u-\alpha,$$

la quale devé essere un' identità. Ora dunque se β contenesse effettivamente la v, un valore di v, che annullasse β annullerebbe il primo membro e non il secondo, dunque β è una costante. Se α non fosse anch'essa una costante riducendo la equazione precedente a forma intera, dovrebbero essere nulli i coefficienti delle diverse potenze di u-α, il che non è. Ora, essendo α, β costanti, l'elemento lineare (33) appartiene all'elicoide gobbo ad area minima; dunque questa superficie e le sue deformate gobbe sono le uniche superfici rigate, che soddisfino alle condizioni del problema. Esse, deformandosi nel modo voluto, diventano di rivoluzione e le generatrici si trasformano nei meridiani, perchè l'elicoide suddetto è applicabile sull'alisseide e le generatrici sono le trasformate dei meridiani e d'altra parte, se una superficie di rivoluzione si deforma, conservando le sue linee di curvatura, essa resta di rivoluzione.

La questione precedente era già stata risoluta per altra via dal Prof. Dini (Ricerche sulla teorica delle superficie N.° 12).

19. — Consideriamo una superficie moulure e cerchiamo se è possibile deformarla in modo che le sue linee di curvatura restino tali per la deformata. L'elemento lineare di una tal superficie riferito alle linee di curvatura è dato dalla formula:

$$ds = du^2 + (U - V)^2 dv^2$$

La prima delle (25) ci dà:

$$r_2 = \varphi(u)$$

ed avendosi: $K = -\frac{U''}{U - V}$, quindi: $\frac{1}{r_2} = -\frac{U''}{U - V}\varphi(u)$,
la seconda delle (25) diviene:

$$\frac{U''}{2}\frac{d\varphi^2}{du} + U'''\varphi^2 = -U'.$$

Se ne trae, integrando:

$$\varphi(u) = \frac{\sqrt{n^2 - U'^2}}{U''}$$

e si avrà perciò.

$$(34) \quad r_2 = \frac{\sqrt{n^2 - U'^2}}{U''}, \quad r_1 = -\frac{U - V}{\sqrt{n^2 - U'^2}}$$

$$(35) \quad \sqrt{E'} = \frac{U''}{\sqrt{n^2 - U'^2}}, \quad \sqrt{G'} = \sqrt{n^2 - U'^2}$$

Dal calcolo fatto si conclude intanto che è possibile in infiniti modi (poichè n è arbitrario) deformare nel modo voluto una superficie moulure, e poichè le immagini sferiche delle linee di curvatura delle deformate sono un sistema di meridiani e di paralleli, queste ultime superficie sono altrettante moulures.

Prendiamo ora a ricercare in termini finiti le equazioni delle superficie deformate. Coi valori (35) l'elemento lineare sferico diviene:

$$ds'^2 = \frac{U''}{n^2 - U'^2} du^2 + (n^2 - U'^2) dv^2 ,$$

che si deduce dall'ordinario sferico:

$$ds'^2 = dt^2 + \cos^2 t d\theta^2$$

alle sostituzioni:

$$U' = n \operatorname{sen} t \quad , \quad v = \frac{\theta}{n} .$$

Le coordinate X , Y , Z, che espresse per t , θ sono:

$$X = \cos t \cos \theta \ , \ Y = \cos t \operatorname{sen} \theta \ , \ Z = \operatorname{sen} t ,$$

quando si esprimano per u , v saranno date dalle formule:

$$X = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - U'^2} \cos nv \ , \ Y = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - U'^2} \operatorname{sen} nv \ , \ Z = \frac{U'}{n}$$

Di qui si trae:

$$\frac{dX}{du} = -\frac{U'U'' \cos nv}{n\sqrt{n^2 - U'^2}} , \frac{dY}{du} = -\frac{U'U'' \operatorname{sen} nv}{n\sqrt{n^2 - U'^2}} , \frac{dZ}{du} = \frac{U''}{n}$$

$$\frac{dX}{du} = -\sqrt{n^2 - U'^2} \operatorname{sen} nv \ , \ \frac{dY}{dv} = \sqrt{n^2 - U'^2} \cos nv \ , \ \frac{dZ}{dv} = 0 ,$$

ed avendo riguardo a queste formole ed alle (34) ed applicando le (32) si troveranno i valori delle coordinate ξ , η , ς della deformata sotto la forma:

$$\xi = -\frac{U}{n}\cos n\, v - \int V \operatorname{sen} n\, v\, dv \ , \ \eta = -\frac{U}{n}\operatorname{sen} n\, v +$$

$$\int V \cos n\, v\, dv \ , \ \varsigma = \int \sqrt{1-\frac{U'^2}{n^2}}\, d\, u$$

Se si cangiano i segni di ξ , η , ς il che non altera la natura della superfic e si ottengono formule identiche a quelle già date dal Bour (Théorie de la deformation des surfaces §. 42.), le quali danno così le deformazioni più generali di una moulure sotto la condizione richiesta.

20. — Ricerchiamo ora se è possibile deformare una superficie di rivoluzione in modo che un sistema di geodeche, di cui i paralleli sono traiettorie, diventi un sistema di linee di curvatura della deformata.

Prese a linee coordinate sulla superficie di rivoluzione quel sistema di geodetiche e le loro traiettorie ortogonali u l'elemento lineare prenderà la forma. (Dini. Giornale di Napoli Anno 1865, P.ª 65):

$$ds^2 = du^2 + f^2(u+v)dv^2 .$$

Avendosi qui $E=1$, si avrà come abbiamo già osservato al N.° 18;

$$r_2 = \varphi(u)$$

e la seconda delle (25) ci darà la (33'), che nel nostro caso diviene:

$$(36) \quad \frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{du} f''(u+v) + \varphi^2 f'''(u+v) + f'(u+v) = 0 \ .$$

Derivando questa relazione prima rispetto ad u, poi rispetto a v, e sottraendo i risultati si ottiene:

$$\frac{1}{2} f''(u+v)\frac{d^2\varphi^2}{du^2}+f'''(u+v)\frac{d\varphi^2}{du},$$

ovvero.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}\log\frac{d\varphi^2}{du}=-(\log f'')'$$

Ciò non può essere a meno che non si abbia:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}\log\frac{d\varphi^2}{du}=c \quad , \quad (\log f'')'=-c,$$

dove c è una costante. Ne risulta:

$$\frac{d\varphi^2}{du}=\mathrm{C}\,e^{2cu} \quad , \quad f''=\mathrm{C}'e^{-c(u+v)}$$

e integrando di nuovo:

$$\varphi^2(u)=\frac{\mathrm{C}}{2c}e^{2cu}+\mathrm{C}'' \quad , \quad f'=-\frac{\mathrm{C}'}{c}e^{-c(u+v)}+\mathrm{C}''',$$

dove C , C' , C'' , C''' sono nuove costanti. Se si sostituiscono questi valori nella (36) si vede che, per soddisfarla effettivamente bisogna prendere: $\mathrm{C}''=-\frac{1}{c^2}$, $\mathrm{C}'''=o$. Come si vedrà facilmente dopo tutto ciò, $\sqrt{\mathrm{E}'}$, $\sqrt{\mathrm{G}'}$ si possono ridurre ad essere funzioni della sola u, quindi le deformate sono moulures. Inoltre, poichè: $f'=-\frac{\mathrm{C}'}{\mathrm{C}}\,\mathrm{e}^{-c(u+v)}$, l'elemento lineare delle nostre superficie di rivoluzione è dato dalla formula:

$$ds^2 = du^2 + \left(\alpha\, e^{c(u+v)} + \beta\right)^2 dv^2,$$

dove α, β, c sono costanti arbitrarie. Queste superficie di rivoluzione erano già state trovate dal Prof. Dini (Giornale di Napoli Anno 1865, P.ª 70).

21. — Consideriamo ora il caso in cui nelle formule del N.º precedente si abbia $r_2 = \varphi(u) = a$, dove a è una costante; se la soluzione esiste, la superficie primitiva dovrà essere una superficie canale. In questo caso la (33') diviene:

$$f'''(u+v) + \frac{1}{a} f'(u+v) = 0,$$

che integrata dà:

$$f(u+v) = \mathrm{A} \cos\left(\frac{u+v}{a} + \mathrm{B}\right) + \mathrm{C},$$

dove A, B, C sono costanti arbitrarie. Si conclude quindi che la superficie di rivoluzione, il cui elemento lineare è dato dalla formola:

$$(37) \quad ds^2 = du^2 + \left\{\mathrm{A} \cos\left(\frac{u+v}{a} + \mathrm{B}\right) + \mathrm{C}\right\}^2 dv^2$$

può deformarsi nel modo voluto e la deformata è una superficie canale. Confrontando poi la formula precedente colla (16) del N.º 13, si vede che questa forma dell'elemento lineare conviene alla superficie canale, la cui direttrice è un'elica circolare, a meno che non sia $\mathrm{C} = 0$; ma ciò porterebbe che si avesse $r_1 = a = r_2$, cioè la deformata sarebbe una sfera. Siccome poi una superficie canale a direttrice gobba non può deformarsi conservando le linee di curvatura, se ne conclude che la circostanza voluta si presenta per la superficie di rivoluzione (37) esclusivamente quando si trasforma nella canale, la cui direttrice è un' elica circolare.

Riassumendo i risultati ottenuti, possiamo dunque dire:
« La classe completa di superficie di rivoluzione, per le
« quali colla deformazione della superficie si può ridurre un
« sistema di geodetiche, di cui i paralleli sono traiettorie,
« linee di curvatura della deformata, è costituita dalle
« superficie di rivoluzione applicabili sopra moulures in
« modo che ai profili di queste corrispondano le geodetiche
« del detto sistema, e dalle superficie di rivoluzione appli-
« cabili sulle canali aventi a direttrice un' elica circolare.
« La circostanza voluta si presenta poi esclusivamente per
« le prime quando si trasformano nelle moulures corri-
« spondenti e per le seconde quando si trasformano nelle
« corrispondenti canali ».

22. — Generalizzando la questione trattata nei numeri precedenti, ricerchiamo se è possibile deformare una superficie di rivoluzione in modo che un sistema di linee, di cui i paralleli sono traiettorie (sotto angolo variabile in generale da un parallelo all'altro), diventi un sistema di linee di curvatura per la superficie deformata. Prendendo il sistema suddetto a linee v e le traiettorie ortogonali a linee u, l' elemento lineare assumerà la forma (Dini Giornale di Napoli 1865, P.ª 251):

$$ds^2 = f^2(u+v)du^2 + \varphi^2(u+v)dv$$

e si potrà in generale stabilire tra f e φ una relazione qualunque senza particolarizzare la superficie di rivoluzione, ma determinando solo convenientemente la legge, con cui l'angolo dei paralleli colle linee v varia da un parallelo all'altro.

Ciò posto, le equazioni (29), (30) mostrano che $r_1\, r_2$ si dovranno prendere funzioni di $u+v$, a meno che la (30) non fosse un' identità; ma questo caso è già stato considerato a parte al N.° 20 e perciò ora lo intenderemo escluso. Dovendo essere $r_1\, r_2$ funzioni di $u+v$ le (25) s'integrano subito e danno:

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_2}=C\displaystyle\int\frac{df}{f^2\varphi}+C' \\ \dfrac{1}{r_1}=C\displaystyle\int\frac{df}{f^2\varphi}+C'+\dfrac{C}{f\varphi}\,. \end{cases}$$

Rimarrà a soddisfare la (29), il che si potrà sempre fare in infiniti modi perchè ciò stabilisce semplicemente un'equazione differenziale tra f e φ. Osserviamo poi che $\sqrt{E'}$, $\sqrt{G'}$ divengono anch' esse funzioni di $u+v$, cioè l' elemento lineare sferico assume la forma:

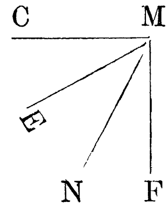
$$ds'^2=f_1^2(u+v)\,du^2+\varphi_1^2(u+v)\,dv^2$$

Vogliamo ora dimostrare che le superficie deformate sono elicoidi, per il che basterà provare che linee $u+v=\text{cost}$ sulle superficie deformate sono eliche circolari dello stesso passo, descritte su cilindri concentrici.

Le linee $u+v=\text{cost}$ sono caratterizzate sulle superficie deformate S dalle seguenti proprietà: sono a curvatura geodetica costante, sono parallele geodeticamente fra loro, sono traiettorie delle linee di curvatura, lungo di esse non variano i raggi di curvatura principale e, siccome le loro immagini sferiche sono un sistema di paralleli, la normale alla superficie lungo ciascuna di esse fa un angolo costante con una direzione fissa F, la normale comune ai piani di quei paralleli.

Consideriamo ora una individuata linea $u+v=\text{cost}$ che chiameremo E; se si osserva che essa taglia sotto un angolo costante le linee di curvatura e che lungo E non variano i raggi di curvatura principale di S, si vedrà subito, per le formole che legano i raggi di curvatura delle sezioni normali di una superficie, che è costante il raggio di curvatura della sezione normale tangente ad E. Quindi la linea E, avendo costante la curvatura normale e la curvatura geodetica, avrà costante il raggio di prima curvatura e sarà pur costante l'angolo che la sua normale principale forma colla normale alla superficie.

Ma se consideriamo un sistema C, di linee di curvatura di S, siccome le loro immagini sferiche sono linee di cui i paralleli sono traiettorie, e siccome nella rappresentazione le tangenti alle linee di curvatura della superficie rappresentata sono parallele alle tangenti nei corrispondenti punti delle immagini sferiche, si vede che le tangenti alle linee C nei punti di E formano un angolo costante colla direzione fissa F. Ora se consideriamo un punto qualunque M di E, l'elemento MC della linea di curvatura del sistema C che parte da M, la normale MN ad S e la direzione fissa MF, siccome al variare di M sulla linea E non variano le tre facce del triedro M.CNF così



non variano nemmeno gli angoli driedri e in particolare l'angolo del piano MNC col piano MNF. Ma se ME è l'elemento di linea E uscente da M, al variare di M su E l'angolo CME non varia, cioè non varia l'angolo dei piani MNC, MNE, dunque non varia l'angolo dei piani MNE, MNF. Ora nel triedro M.ENF sono costanti le due facce NME, NMF e l'angolo diedro MNEF, quindi è costante anche l'altra faccia, cioè le tangenti alla linea E fanno un angolo costante colla direzione fissa F. Da tutto ciò risulta intanto che la linea E è un' elica circolare, descritta sopra un cilindro parallelo alla direzione F.

Consideriamo ora la linea E e gli elementi geodetici che partono dai varii punti di E normalmente alla E stessa sulla superficie S; il luogo degli estremi di lunghezze eguali di questi elementi è una nuova linea $u+v$ che diremo E′. Ma da tutto ciò che si è detto avanti risulta che questi elementi geodetici formano un angolo costante colla normale principale di E, quindi (V.N.11) E′ è descritta sopra un cilindro concentrico a quello su cui è descritta E ed ha lo stesso passo di quest'ultima. La superficie deformata S è quindi un elicoide e perciò possiamo enunciare il teorema. « Ogni super-
« ficie di rivoluzione può deformarsi in modo che un sistema
« conveniente di linee, di cui i paralleli sono traiettorie,
« diventi un sistema di linee di curvatura per la superficie
« deformata. Questi sistemi sono inoltre in numero infinito
« e le deformate sono elicoidi ».

Fa eccezione il caso in cui quel sistema sia formato di geodetiche, allora oltre le deformazioni elicoidali si hanno le deformazioni in superficie moulures, come già si è detto al N.° 20.

Osservazione. Dal processo di dimostrazione ora tenuto si possono dedurre alcune proprietà degli elicoidi.

Poichè le normali all'elicoide nei varii punti dell'elica E fanno lo stesso angolo colla normale principale dell'elica stessa, il luogo degli estremi di lunghezze eguali di queste normali è un'altra elica circolare dello stesso passo di E e descritta sopra un cilindro concentrico a quello su cui la E stessa è descritta (N.° 11). Quindi se si ripete la stessa costruzione su tutte le eliche dell'elicoide, facendo variare con continuità da un'elica all'altra quel segmento di normale, il luogo di tutti gli estremi di quei segmenti sarà un nuovo elicoide. Come casi particolari del teorema precedente possiamo enunciare i teoremi:

« L'evoluta di un elicoide è un altro elicoide ».

« Le superficie parallele ad un elicoide sono altrettanti « elicoidi ».

23. — Supponiamo nelle formole del N.° precedente $\varphi = a\, f$, dove a è una costante, cioè ricerchiamo se esistono superficie di rivoluzione, per le quali delle traiettorie sotto lo stesso angolo dei paralleli possono diventare linee di curvatura delle deformate. Le (38) ci daranno:

$$(39) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{1}{2c} + \dfrac{C}{f^2(u+v)} \\ \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{2c} - \dfrac{C}{f^2(u+v)} \end{cases}$$

dove c, C sono costanti arbitrarie.

Cominciamo dal prendere $c = \infty$; allora si ha:

$$(40) \qquad \frac{1}{r_2} = \frac{C}{f^2(u+v)}\,, \quad \frac{1}{r_1} = -\frac{C}{f^2(u+v)}$$

e le deformate sono quindi elicoidi ad area minima. Per determinare poi la f, la (29) ci darà la equazione differenziale:

$$f''f - f'^2 = \frac{a^2C^2}{1+a^2}$$

e integrando:

$$(41) \qquad f = \frac{a\,C}{C'\sqrt{a^2\,1}} \cos h\, C'(u+v)\,,$$

dove C′ è una costante arbitraria e l'altra si è lasciata, perchè non modifica la soluzione. Quindi l'elemento lineare della superficie di rivoluzione richiesta assumerà la forma:

$$ds^2 = \frac{a^2 C^2}{C'^2(a^2+1} \cos h^2 C'(u+v)[du^2+a^2dv^2].$$

Ora col metodo del N.°4 si troverà, per determinare la curva meridiana $z=\psi(r)$ la equazione:

$$1+\psi'^2(r) = \frac{a^2 r^2}{h^2(a^2+1)^2 \left\{ C'^2 r^2 - k^2 a^2 C^2 \right\}},$$

dove k è arbitraria. Prendendo $k = \frac{a}{C'(a^2+1)}$ troveremo:

$$r = m \cos h \frac{z}{m}$$

dove per brevità si è posto $m = \frac{a^2 C}{C'^2(a^2+1)}$; la superficie di rivoluzione richiesta è quindi un' alisseide.

Osserviamo di più che qualunque sia a, possiamo disporre di C, C' in modo che m abbia un valore stabilito avanti; quindi una stessa alisseide (ed ogni sua deformata di rivoluzione) può deformarsi in modo che un sistema qualunque di traiettorie sotto lo stesso angolo dei paralleli diventi un sistema di linee di curvatura della deformata. Questo teorema è un caso particolare di un altro già noto (V. N.° 25), però il nostro metodo ci dà anche il modo di determinare in termini finiti le equazioni delle deformate, ciò che ora faremo.

24. — L'elemento lineare sferico corrispondente alle deformate considerate nel N.° precedente assume la forma:

$$(42) \quad ds'^2 = \frac{C'^2(a^2+1)}{a^2 \cos h^2 C'(u+v)} \left\{ du^2 + a^2 dv^2 \right\}$$

quindi ad ogni deformazione dell'alisseide del genere sopra considerato corrisponde sulla sfera un sistema di traiettorie sotto lo stesso angolo di un sistema di meridiani, e l'angolo che definisce queste lossodromie sulla sfera, è lo stesso di quello che fanno le linee di curvatura della deformata con quelle che erano linee di curvatura della superficie primitiva. Ora osserviamo che l'elemento lineare (42) si deduce dall'ordinario sferico: $ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta d\omega^2$ colle sostituzioni:

$$\cos\theta = \frac{1}{\cos h\,C'(u+v)} \quad , \quad \omega = \frac{C'}{a}(a^2 v - u).$$

Le coordinate X , Y , Z dei punti della sfera, che espresse per θ , ω sono.

$$X = \cos\theta \cos\omega \quad , \quad Y = \cos\theta \operatorname{sen}\omega \quad , \quad Z = \operatorname{sen}\theta,$$

quando si esprimano per u , v saranno date dalle formule seguenti:

$$(43) \quad X = \frac{\cos\frac{C'}{a}(a^2 v - u)}{\cos h\,C'(u+v)} \; , \; Y = \frac{\operatorname{sen}\frac{C'}{a}(a^2 v - u)}{\cos h\,C'(u+v)} \; , \; Z = \operatorname{tang} h\,C'(u+v)$$

Derivando queste formole ed avendo riguardo alle altre:

$$r_1 = -\frac{a^2 C}{C'^2(a^2+1)} \cos h^2 C'(u+v) \; , \; r_2 = \frac{a^2 C}{C'^2(a^2+1)} \cos h^2 C'(u+v)$$

si otterranno le coordinate ξ , η , ς delle deformate mediante le formule (32) del N.° 17. Facendo le sostituzioni ed eseguendo le quadrature ivi indicate, si otterrà facilmente:

$$
(44)\begin{cases}
\xi = -\dfrac{a^2C}{C'^2(a^2+1)^2}\left\{(a^2-1)\cosh hC'(u+v)\cos\dfrac{C'}{a}(a^2v-u) - \right. \\
\qquad\qquad \left. -2\,\operatorname{sen}hC'(u+v)\operatorname{sen}\dfrac{C'}{a}(a^2v-u)\right\} \\
\eta = -\dfrac{a^2C}{C'^2(a^2+1)^2}\left\{(a^2-1)\cosh hC'(u+v)\operatorname{sen}\dfrac{C'}{a}(a^2v-u)+\right. \\
\qquad\qquad \left. +2a\,\operatorname{sen}h\,C'(u+v)\cos\dfrac{C'}{a}(a^2v-u)\right\} \\
\varsigma = -\dfrac{a^2C}{C'^2(a^2+1)}(v-u) = -\dfrac{a^2C}{C'(a^2+1)} \\
\qquad\qquad \left\{\dfrac{1-a^2}{1+a^2}(u+v)+\dfrac{2(a^2v-u)}{1+a^2}\right\}.
\end{cases}
$$

Queste relazioni definiscono un elicoide generato dalla curva gobba:

$$
x = -\frac{a^2(a^2-)C}{C'^2(a^4+1)^2}\cosh h\omega\,,\; y = -\frac{2a^3C}{C'^2(a^2+1)^2}\operatorname{sen}h\omega\,,\; z = \frac{a^2(a^2-1)C}{C'^2(a^2+1)^2}\omega
$$

attorno all'asse z. Questa curva si proietta sul piano xy secondo un'iperbola, il cui asse reale è l'asse delle x e sul piano x, z secondo una catenaria comune.

Nel caso di $a=1$, cioè nel caso in cui le lossodromiche siano inclinate di 45° sui meridiani, le formule precedenti definiscono un elicoide gobbo ad area minima, il quale rimane invariato, finchè tale rimane il rapporto $\frac{C}{C'^2}$.

Osserviamo poi che sulle superficie deformate le linee $a^2v-u=\text{cost}$ sono le traiettorie ortogonali delle $u+v=\text{cost}$, cioè sono le trasformate dei meridiani dell'alisseide ovvero delle generatrici dell'elicoide gobbo ad area minima, su cui l'alisseide stessa è applicabile. Ora per le (43) le immagini sferiche delle linee $a^2v-u=\text{cost}$ sono il sistema di meridiani ω=cost (*), quindi le normali all' elicoide lungo una linea a^2v-u=cost, cioè le normali principali di questa linea sono parallele al piano del meridiano corrispondente, Ciò porta subito a concludere che le a^2v-u=cost sono eliche cilindriche e che i cilindri su cui sono tracciate hanno le generatrici perpendicolari all' asse comune delle eliche $u+v$=cost. Gli elicoidi (44) coincidono quindi colle superficie trovate dal Prof. Dini nelle sue *Ricerche sopra la teorica delle superficie* §. 30.

25. — Come già ho osservato, la proprietà ritrovata per l'alisseide non è particolare a questa superficie; essa si estende a tutte le superficie ad area minima, per le quali si può enunciare il teorema seguente (Salmon — Analytische Geometrie des Raumes, II. Auflage S. 685): «Ogni « superficie ad area minima può deformarsi in modo che « si conservi ad area minima e le traiettorie sotto un « angolo costante qualunque delle sue linee di curvatura « diventino linee di curvatura per la superficie deformata ». Per dimostrare col nostro metodo questo teorema, ricordiamo che l'elemento lineare di una superficie ad area minima, riferito alle linee di curvatura t , ω, assume la forma:

$$(45) \qquad ds^2=\lambda\,(dt^2+d\omega^2)$$

e il corrispondente sferico assume l'altra:

$$(46) \qquad ds'^2=\frac{1}{\lambda}\,(dt^2+d\omega^2)\,.$$

Si trasformi ora l' elemento lineare (45), prendendo a linee coordinate le traiettorie u sotto lo stesso angolo

(*) Ciò risulta del resto anche dall' osservare che nella rappresentazione sferica di Gauss di una superficie ad area minima gli angoli vengono conservati.

delle t e le traiettorie ortogonali v delle linee u. Si vedrà subito che per formole di trasformazione si potranno prendere le seguenti:

$$(47) \quad t = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(u+av) \quad , \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(au-v),$$

dove a è la tangente dell'angolo che le v fanno colle t. Se si indica con λ' ciò che diviene λ, facendovi le sostituzioni (47), l'elemento lineare (45) diverrà:

$$(48) \quad ds^2 = \lambda'(du^2+dv^2).$$

Ora colle osservazioni generali fatte al N.° 17 si vedrà che se l'elemento lineare sferico potrà assumere la forma:

$$(49) \quad ds'^2 = \frac{1}{\lambda'}(du^2+dv^2),$$

esisterà effettivamente una superficie ad area minima, il cui elemento lineare riferito alle linee di curvatura assume la forma (48). Ora colle sostituzioni (47) l'elemento lineare sferico (46) si cangia appunto nell'altro (49), quindi il teorema è dimostrato.

Si scorge poi facilmente che due superficie ad area minima deformate l'una dell'altra secondo la legge detta godono anche della proprietà che le loro normali nei punti corrispondenti sono parallele.

Nel caso particolare di $a=1$ le linee di curvatura della deformata sono le assintotiche della primitiva e si hanno le superficie ad area minima coniugate in applicabilità del Bonnet.

26. — Riprendiamo le formule (39), supponendovi c qualunque; allora le deformate sono elicoidi a curvatura

media costante: $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{c}$. La (29) del N.º 17 ci darà per determinare f la equazione differenziale:

$$ff''-f'^2=\frac{a^2}{1+a^2}\left(C^2-\frac{f^4}{4c^2}\right),$$

che si riduce subito alle quadrature e dà:

$$u+v=\int\frac{df}{\sqrt{-\frac{a^2}{4c^2(1+a^2)}f^4+C'f^2-\frac{a^2C^2}{1+a^2}}}$$

dove C′ è una costante arbitraria. Questa relazione si può scrivere:

$$(50)\qquad u+v=\frac{2c\sqrt{1+a^2}}{i\,a}\int\frac{df}{\sqrt{(\alpha-f^2)(\beta-f^2)}},$$

quando con α, β si indichino le radici dell' equazione di 2.º grado:

$$x^2-\frac{4C'(1+a^2)c^2}{a^2}x+4C^2c^2=0;$$

queste radici, intendendo che C′ sia positiva, saranno ambedue positive. Dalla (50) introducendo le funzioni ellittiche si ottiene:

$$f(u+v)=\sqrt{\alpha}\,sn\left(\frac{i\,a\sqrt{\beta}}{2c\sqrt{1+a^2}}(u+v)+A\,,\ \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right),$$

dove A è una costante arbitraria di cui potremo disporre in modo da far sparire l'immaginario (V. N.º 8).

Potremo prendere:

$$f(u+v)=\sqrt{\beta}\,dn\left(\frac{a\sqrt{\beta}}{2c\sqrt{1+a^2}}(u+v)\;,\;\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{\beta}}\right)$$

Determinata così la forma della funzione f, si troverà col modo indicato al N.° 4 la seguente equazione differenziale per determinare la curva meridiana $z=\psi(r)$ della superficie di rivoluzione richiesta:

$$(51)\quad 1+\left(\frac{dz}{dr}\right)^2=\frac{4\,c^2\,r^2}{\left(r^2-k^2\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(k^2-r^2\right)}$$

la quale rimane invariata; finchè tali rimangono c , k , $\frac{\alpha}{\beta}$ e siccome dati c ed a possiamo sempre disporre di C , C′ in modo che $\frac{\alpha}{\beta}$ abbia un valore stabilito avanti, la superficie di rivoluzione che ha per meridiano la curva (51) può, come l' alisseide , deformarsi in modo che un sistema qualunque di traiettorie sotto lo stesso angolo dei meridiani diventi un sistema di linee di curvatura della deformata. Ma la (51), disponendo convenientemente dell'arbitraria k, può scriversi:

$$\frac{dz}{dr}=\frac{r^2\pm b^2}{\sqrt{4c^2r^2-(r^2\pm b^2)^2}}$$

Ora questa equazione differenziale appartiene alla curva generata dal fuoco di un'ellisse o di un'iperbola, che rotola senza strisciare sull' asse z; la superficie di rivoluzione generata da questa curva ruotando attorno all'asse z è inoltre a curvatura media costante $\frac{1}{c}$ (V. Serr. Cal. Int. §. 712). Possiamo quindi enunciare il teorema: « La superficie di

« rivoluzione, che ha per meridiano la curva generata dal
« fuoco di un' ellisse o di un' iperbola, che senza strisciare
« rotola sull'asse della superficie, si può deformare in infi-
« niti modi, pur conservandosi a curvatura media costante,
« e ciascun sistema di traiettorie sotto lo stesso angolo dei
« meridiani diventa una volta un sistema di linee di curva-
« tura della deformata ».

Allorquando l'ellisse degenera in una parabola, il meridiano di questa superficie di rivoluzione diviene la catenaria e si ha la proprietà già osservata dell' alisseide. Osserviamo da ultimo che le superficie considerate nei Numeri 23, 25 e nel presente sono superficie in cui un raggio di curvatura è funzione dell'altro, e quando si deformano nel modo considerato conservano ancora invariati in ciascun punto i raggi principali di curvatura, sicchè per il teorema di Weingarten anche le evolute delle successive deformate sono applicabili sull' evoluta della superficie primitiva.

LUIGI BIANCHI.