ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BERTINI EUGENIO

Sui poliedri euleriani

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 1 (1871), p. 89-132

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1871_1_1__89_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUI POLIEDRI EULERIANI

INTRODUZIONE

Il sig. *Jordan* in una memoria inserita nel giornale di *Crelle* (vol. 66. Pag. 22) intitolata « *Recherches sur les polyèdres* » ha considerato i poliedri Euleriani nei loro caratteri più astratti, cioè nei rapporti di successione dei loro vertici, faccie e spigoli, non tenendo conto delle relazioni di grandezza, e ne ha dedotto una bella classificazione dei poliedri stessi. Studiando quella teoria, aggiunsi alcune nuove considerazioni per determinare in modo più semplice, almeno in alcuni casi, la natura dei poliedri Euleriani. Esponendo qui tali considerazioni, mi pare utile di dire prima brevissimamente del processo, con cui il sig. Jordan determina il modo di successione delle parti del poliedro, e di richiamare gli enunciati di quelle proprietà, da esso dimostrate, di cui ho fatto uso.

1. Sia mn uno spigolo qualunque di un poliedro. Un osservatore posto sopra mn, in un punto vicinissimo al vertice m, si muova sulla superficie esterna del poliedro intorno a questo vertice e nel senso diretto, cioè lasciando il vertice stesso alla sua destra. Egli incontrerà ordinatamente un certo numero di spigoli mo, mp, mq.... e un certo numero di faccie nmo, omp, pmq . . . . A ciascuno degli spigoli mn, mo, mp, mq . . . . attribuisca rispettivamente i numeri 1, 2, 3, 4 . . . e a ciascuna delle faccie nmo, omp , pmq . . . parimenti i numeri 1, 2, 3 . . . . Inoltre

indichi il vertice *m* col numero 1 e gli altri estremi *n, o, p, q,* ... degli spigoli *mn, mo, mp, mq* ... coi numeri 2, 3, 4... Numerati così tutte le faccie e gli spigoli concorrenti in *m* e gli estremi di questi spigoli, l'osservatore si trasporti sopra *mn,* in prossimità al vertice *n* e muovendosi ivi come intorno al vertice *m,* dia agli spigoli, faccie e vertici che incontra non numerati, numeri di seguito ai precedenti. Quindi l'osservatore si porti presso al vertice *o* nella direzione *om,* e così via via si ponga successivamente in prossimità al vertice già numerato, che ha il numero più piccolo e si muova intorno ad esso, partendo da quello degli spigoli numerati che vi concorrono, che ha il numero minore.

Ciò posto, il sig. Jordan chiama *aspetto* del poliedro relativamente al vertice *m* ed allo spigolo *mn,* o, brevemente, *aspetto m, mn*: *La relazione fra il numero d' ordine di ciascun spigolo, quelli de' suoi due vertici estremi e quelli delle faccie che esso congiunge.*

Un aspetto A di un poliedro si dice *simile* ad un altro aspetto A_1 dello stesso poliedro o di un poliedro differente (il quale allora è detto *simile* al dato) se ad uno spigolo S qualunque in quell'aspetto corrisponde in questo uno spigolo S_1 avente lo stesso numero, e se inoltre le due faccie che si congiungono in S_1 e i due vertici di questo spigolo hanno rispettivamente gli stessi numeri delle due faccie che si congiungono in S e de' suoi due vertici.

Se A, A_1 sono due aspetti simili di un poliedro (o di due poliedri simili) ed S, S_1 due parti tali di esso, che S abbia in A lo stesso numero che S_1 ha in A_1, si dice che S ha per *omologo* S_1 relativamente agli aspetti A, A_1. E due porzioni qualunque di un poliedro si chiamano *simili* o *della stessa specie* se si possono trovare due aspetti simili, rapporto ai quali esse sieno omologhe.

Se gli aspetti di un poliedro relativamente ad un vertice e ad *n* spigoli concorrenti in esso sono simili, si dice che *quel vertice presenta una simmetria di rotazione di or-*

dine n. Analogamente *una faccia presenta simmetria di rotazione di ordine n* se sono simili gli aspetti relativi ad n degli spigoli che la limitano e a quello dei due vertici di ciascuno di questi spigoli, per cui quella faccia abbia il numero 1. Infine si dice *spigolo con simmetria di ritorno o di 2.° ordine* uno spigolo tale che i due aspetti relativi ad esso ed ai suoi due vertici sieno simili.

2. Inoltre il sig. Jordan conviene di esprimere per:

A) *Linea tracciata sulla superficie di un poliedro,* ogni linea spezzata continua formata da una serie di spigoli consecutivi. — Se una linea ha comune con un altra linea (o con se stessa) un vertice v (e anche uno spigolo o una porzione di linea) s'intenderà che quella linea *sega* o *tocca* in v questa, secondochè passa da una parte all'altra di essa, ovvero resta dalla medesima parte. Un osservatore che si muovesse intorno a v nel senso diretto, nel 1.° caso incontrerebbe alternativamente i tronchi delle due linee, nel 2.° incontrerebbe prima i due tronchi dell' una, poi quelli dell' altra.

B) *Lunghezza di una linea,* il numero degli spigoli che essa contiene.

C) *Linea geodetica,* la linea più *breve* che si può condurre fra due vertici dati. La sua lunghezza misura la distanza di questi due vertici.

D) *Contorno chiuso,* qualunque linea chiusa che non taglia se medesima, intendendo che questa linea può avere due o più parti che si toccano e anche coincidono purchè un osservatore possa percorrerla tutta con continuità senza mai attraversarla.

E) *Linea geodetica sopra una regione* limitata da un contorno chiuso, la linea più *breve* che si può tirare fra due vertici dati formata di spigoli della regione stessa.

F) *Ordine di successione intorno ad un vertice* degli spigoli che vi concorrono, l'ordine secondo cui essi sono incontrati da un osservatore che descriva intorno a quel vertice un contorno piccolissimo nel senso diretto e sulla superficie esterna.

G) *Ordine di successione intorno ad una faccia* degli spigoli che la limitano, l'ordine secondo cui li incontra un osservatore che si muova lungo il contorno della faccia nel senso diretto (cioè lasciando questa faccia alla sua destra) e sulla superficie esterna.

H) *Ordine di successione di più linee partenti da un vertice*, l'ordine di successione dei loro primi spigoli.

I) *Ordine di successione di più linee partenti dai differenti vertici di una faccia*, l'ordine nel quale un osservatore, che percorra il contorno della faccia nel senso diretto, incontra questi vertici.

3. Ciò premesso, nella suddetta memoria il sig. Jordan dimostra varie proposizioni preliminari, fra cui le seguenti.

Proposizione I. — *La linea omologa di una geodetica relativamente a due aspetti simili è pure geodetica.*

Proposizione II. — *Se* E, E_1 *sono due elementi* (*) *omologhi relativamente a due aspetti simili di un poliedro (o di due poliedri simili), l'ordine di successione degli spigoli intorno ad* E *è quello stesso dei loro omologhi intorno ad* E_1.

Da questa proposizione segue che se m, mn, m_1, m_1n_1 sono due aspetti simili di un poliedro, un osservatore che si ponga in m nella direzione mn vede le faccie, i vertici, gli spigoli del poliedro succedersi nella stessa maniera, in cui un altro osservatore posto in m_1, nella direzione m_1n_1 vede succedersi le faccie, i vertici, gli spigoli omologhi. Onde gli aspetti simili di un poliedro ci rappresentano altrettanti punti di vista differenti, sotto cui il poliedro si presenta nella stessa maniera. Si dice perciò che un poliedro è *dissimmetrico* quando è privo di aspetti simili, ed in-

(*) S'indica col nome generico di *elemento* una faccia o un vertice. Questa denominazione è giustificata dalla legge di dualità.

vece è *simmetrico* ovvero *offre una certa simmetria* se ha un certo numero di aspetti simili. In questo caso la natura della simmetria del poliedro dipenderà dal *numero* e dalla *disposizione* degli aspetti simili.

Proposizione III. — *Se due linee si segano o si toccano in un vertice, le loro omologhe, relativamente a due aspetti simili, si segano o si toccano nel vertice omologo.*

Proposizione IV. — Se A, A_1 *sono due aspetti simili di uno stesso poliedro,* a *un vertice qualunque,* ab *uno spigolo (partente da esso), S uno spigolo o elemento, e* a_1 a_1b_1, S_1 *i loro omologhi rapporto ad* A, A_1; *gli aspetti* a, ab , a_1, $a_1 b_1$ *sono simili e relativamente ad essi* S *ha per omologo* S_1 — Di qui risulta che non può avvenire che uno spigolo *ab* e un suo estremo *a* sieno ordinatamente omologhi a se stessi relativamente a due aspetti simili (distinti) A, A_1.

Proposizione V. — *Due elementi, spigoli, linee, o regioni simili ad una terza sono simili fra di loro.*

Proposizione VI. — *Il numero degli aspetti differenti di un poliedro di* S *spigoli è un divisore di* 2 S.

Questa proposizione si dimostra osservando che se esistono μ aspetti simili ad un dato aspetto *a, ab,* per la Proposizione IV ne esistono altri μ simili ad un altro aspetto *e, ed,* ec. Da cui discende altresì che uno qualunque di questi gruppi di μ aspetti simili basta a definire la simmetria del poliedro.

Proposizione VII. *Un elemento* E *di un poliedro omologo a se stesso relativamente ad* m *aspetti simili presenta simmetria di rotazione di ordine* m.

Proposizione VIII. — *Il numero* μ *degli aspetti simili di un poliedro è il prodotto del numero degli elementi (o spigoli) simili per l'ordine di simmetria (ordine che può ridursi all'unità) di uno di essi.*

Proposizione IX. — *Se* abcde . . . a *è un contorno* *chiuso, il quale divide la superficie del poliedro in due regioni, una* R *situata alla destra dell'osservatore che percorra il contorno nel senso* abcde . . . a *e l'altra* R_1 *alla sinistra, ed è* $a_1b_1c_1d_1e_1 \ldots a_1$ *il contorno omologo relativamente a due aspetti simili: questo contorno non taglierà se medesimo* (Proposizione III) *e dividerà la superficie del poliedro in due nuove regioni, di cui quella a destra dell' osservatore, che si muova nel senso* $a_1b_1c_1d_1e_1 \ldots a_1$, *è l'omologa di R, e l'altra a sinistra è l'omologa di* R_1.

Dato un poliedro, si dimostra che può sempre prendersi il suo poliedro polare in modo che, essendo E un elemento *qualunque* del poliedro primitivo ed E_1 l'elemento polare corrispondente, l'ordine di successione degli spigoli intorno ad E sia quello stesso degli spigoli polari intorno ad E_1: e si dà il nome di *poliedro polare diretto* al poliedro polare che gode di questa proprietà.

Proposizione X. — *Se* π *è un poliedro polare diretto di un poliedro dato* P; A, A_1 *sono due aspetti simili di P; ed* α, α_1 *sono due aspetti di* π *relativi a due vertici e a due spigoli polari respettivamente di due faccie e di due spigoli omologhi di P* (*riguardo ad* A, A_1): *gli aspetti* α, α_1 *saranno simili, e rapporto ad essi saranno omologhi gli elementi o spigoli polari di elementi o spigoli omologhi rispetto ad* A, A_1.

4. Le cose precedenti sono vere per un poliedro qualunque. In appresso si considerano soltanto i poliedri *euleriani* o *semplici*, cioè: *Quei poliedri chiusi tali che qualunque contorno chiuso tracciato sulla loro superficie divide la superficie stessa in due regioni separate*: e si trova che:

Proposizione XI. — *Dicendo* V, F, S *i vertici, le faccie e gli spigoli di una regione di un poliedro euleriano limitata da un contorno chiuso (compresi quelli del contorno), ha luogo la relazione*

$$V+F=S+1.$$

Dalla quale si deduce immediatamente il teorema di Eulero.

Sui poliedri euleriani si dimostrano quindi due teoremi fondamentali; di cui il primo è il seguente:

Proposizione XII. — Teorema fondamentale — *Se una regione* R *limitata da un contorno chiuso* C *è omologa a se medesima relativamente ad* n *aspetti simili* A, A_1, A_2. A_{n-1} *del poliedro cui appartiene, essa, se* $n > 2$, *conterrà un elemento dotato di simmetria di rotazione di cui l'ordine sarà almeno eguale ad* n, *e se* $n=2$ *potrà invece contenere uno spigolo con simmetria di ritorno: e in ogni caso gli altri elementi* o *spigoli della regione stessa si raccoglieranno in tanti gruppi, ciascuno di* n *elementi* o *spigoli simili tutti distinti.*

Dalla dimostrazione di questo teorema si deduce una proprietà che importa avvertire. — Il contorno chiuso C avrà in generale (2, D) delle parti che si toccano e anche coincidono; ma si dimostra che in qualunque caso dovrà esistere almeno un vertice s di C pel quale un osservatore, che percorra tutto il contorno, passerà una volta sola; e, prendendo gli omologhi $s, s_1, .., s_{n-1}$ relativamente agli aspetti $A, A_1, \ldots, A_{n-1}$, si trova che questi n vertici appartenenti a C (poichè C è omologo a se stesso relativamente a quegli aspetti) sono distinti ed hanno tutti la proprietà di s, cioè l'osservatore che descrive C passa per ciascun di essi una volta sola. Ora, se l'elemento E della regione R che presenta simmetria di rotazione almeno di ordine n è un vertice, conduciamo fra E ed s una geodetica Λ e prendiamo rapporto agli aspetti $A, A_1, A_2, \ldots, A_{t-1}, A_t, \ldots, A_{n-1}$ le omologhe $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_{t-1}, \Lambda_t .., \Lambda_{n-1}$ (congiungenti E ai vertici $s, s_1, .. s_{n-1}$ ordinatamente). Si operi nello stesso modo se E è una faccia o uno spigolo, avvertendo soltanto di prendere per la linea Λ quella che va da s al vertice di E più prossimo ad s, e allora le $\Lambda, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{t-1}, \Lambda_t, \ldots, \Lambda_{n-1}$ termineranno ai differenti vertici di E. Ciò premesso, dalla dimostrazione di quel teorema risulta che le linee $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2.., \Lambda_{t-1}, \Lambda_t.., \Lambda_{n-1}$ non possono avere alcun vertice comune (tranne una loro estremità se E è un vertice) e inoltre, che, *relativamente agli aspetti* A, A_t *le linee.*

$$\Lambda, \Lambda_1, \ldots \Lambda_{t-1}, \Lambda_t, \Lambda_{t+1}, \ldots \quad, \Lambda_{n-1}$$

hanno rispettivamente per omologhe le

$$\Lambda_t, \Lambda_{t+1}, \ldots, \Lambda_{2t-1} \ldots\ldots \Lambda_{t-1} \quad ;$$

intendendo che, l'ordine $\Lambda, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}$ rappresenti l'ordine di successione di queste linee intorno ad E (2, H) I).

5. Il sig. Jordan prende poi a studiare i differenti casi che può presentare un poliedro (euleriano), e considera dapprima i tre seguenti:

A) *Un elemento* E *di un poliedro offra simmetria di rotazione di ordine* n *e sia unico della sua specie.*

B) *Un elemento E di un poliedro, intorno al quale la simmetria di rotazione è di ordine massimo* n, *abbia un altro (solo) elemento* E_1 *simile ad esso.*

C) *Non esista in un poliedro alcun elemento con simmetria di rotazione.* In questa ipotesi si dimostra che debbono esservi necessariamente spigoli con simmetria di ritorno e si distinguono i due casi;

1.° *Esista uno spigolo con simmetria di ritorno unico della sua specie.* Se ne conclude che dovrà esistere un altro spigolo e un altro solo con simmetria di ritorno (unico della sua specie); gli altri spigoli o elementi raccogliendosi in gruppi di due simili.

2.° *Esistano più spigoli simili ad un dato* ab, *che presentino simmetria di ritorno.* In questo caso si dimostra che potrà esistere soltanto un altro spigolo $a\ b$ simile al ab, e che quattro linee geodetiche congiungenti gli estremi di questi spigoli ab, $a\ b$ dividono il poliedro in quattro regioni, di cui due non successive sono simili e ciascuna è omologa a se stessa relativamente a due aspetti simili. Onde ciascuna di queste regioni contiene uno spigolo con simmetria di ritorno (N. 4, Prop. XII), e gli altri spigoli o elementi si aggruppano in sistemi di quattro simili.

E dallo studio dei tre casi precedenti si deducono le seguenti cinque classi di poliedri euleriani, aventi ordinatamente n, 2, 2, $2n$, 4 aspetti simili:

I. *Poliedri con simmetria per rotazione.* Presentano due elementi con simmetria di rotazione di ordine n (n qualunque), ciascuno unico della sua specie, tutti gli altri elementi o spigoli essendo n volte ripetuti (*).

II. *Poliedri con simmetria per rotazione e ritorno.* Presentano un elemento con simmetria di 2.° ordine e uno spigolo con simmetria di ritorno, ciascuno unico della sua specie, gli altri elementi o spigoli essendo due volte ripetuti.

III. *Poliedri con simmetria per ritorno.* Hanno due spigoli con simmetria di ritorno, ciascuno unico della sua specie, e tutti gli altri elementi o spigoli sono due volte ripetuti.

IV. *Poliedri con simmetria per rotazione e rovesciamento.* Presentano due elementi simili (soli della loro specie) con simmetria di rotazione di ordine n (n qualunque) e due sistemi di n elementi (o spigoli) simili con simmetria di rotazione binaria, gli altri elementi o spigoli essendo $2n$ volte ripetuti.

(*) Si usa per brevità questa frase ad esprimere che tutti gli altri elementi o spigoli si raccolgono in gruppi di n elementi o spigoli simili.

V. *Poliedri con simmetria per ritorno e rovesciamento.* Offrono tre sistemi di due spigoli simili con simmetria di ritorno, e gli altri spigoli o elementi sono quattro volte ripetuti.

Per esempio: appartengono alla I.ª classe le piramidi (esclusi i tetraedri), alla IVª i prismi e i loro poliedri polari che sono formati da due piramidi congiunte per la base (esclusi i parallelepipedi), ec. ec.

6. Esaminati i casi in cui un poliedro fosse privo di elementi con simmetria di rotazione o ne avesse uno, solo della sua specie, ovvero due simili e soli della loro specie, con simmetria di ordine massimo, restavano da considerare i poliedri, nei quali gli elementi simili aventi simmetria di rotazione di ordine massimo fossero più di due. Studiando appunto questo caso, il sig. Jordan giunge a tre altre classi di poliedri euleriani, dotate di 12, 24, 60 aspetti simili rispettivamente:

VI. *Poliedri con simmetria tetraedrica.* Possono essere considerati come derivati da un poliedro simile al tetraedro, sostituendo a' suoi spigoli, fusi simili e alle sue faccie, regioni simili. Presentano due sistemi di quattro elementi simili con simmetria di rotazione di 3.° ordine e un sistema di sei elementi (o spigoli) simili con simmetria binaria, gli altri elementi o spigoli essendo dodici volte ripetuti.

VII. *Poliedri con simmetria cubottaedrica.* Derivano da un poliedro simile al cubo o all'ottaedro nella stessa maniera ora accennata. Hanno un sistema di sei elementi simili con simmetria di rotazione di 4.° ordine, un altro di otto elementi simili con simmetria di rotazione di 3.° ordine, e un sistema di dodici elementi (o spigoli) simili con simmetria binaria, gli altri elementi o spigoli essendo ventiquattro volte ripetuti.

VIII. *Poliedri con simmetria icosidodecaedrica.* Derivano da un poliedro simile all'icosaedro o al dodecaedro. Presentano un sistema di dodici elementi simili con simmetria di rotazione di 5.° ordine, uno di venti elementi simili con simmetria di rotazione di 3.° ordine e un sistema di trenta elementi (o spigoli) simili con simmetria binaria, gli altri elementi o spigoli essendo ripetuti sessanta volte.

Per completare la classazione, a queste otto classi dovrà aggiungersi una nona, che comprenda tutti i poliedri dissimetrici.

7. Il problema che mi proposi a risolvere è il seguente; — Per mezzo di due aspetti simili di un poliedro si può determinare la natura di esso? — , o altrimenti; — Si può fare una classazione dei poliedri euleriani considerando due soli aspetti simili? — : e giunsi a dimostrare le proprietà che vengono appresso; per le quali, scegliendo opportunamente due aspetti simili, la risoluzione del problema è ridotta allo studio di casi particolari.

L'importanza di quel problema risulta da semplici osservazioni. — In prima, la teorica degli aspetti, non dipendendo dalla estensione e dalla forma degli spigoli e delle faccie, ma soltanto dalla loro disposizione relativa, può applicarsi immediatamente ad altri studi, oltre a quello dei poliedri. In generale se si considera sopra una superficie piana o curva, chiusa o aperta, concava o convessa (priva di punti e linee multiple) un numero qualunque di punti, congiunti a due a due per mezzo di linee che non abbiano parti a comune e che conducano con continuità da un punto ad un altro, si ha una specie di rete, per la quale valgono tutte le cose generali dette sugli aspetti. Se poi quella superficie è chiusa e semplicemente connessa possono applicarsi inoltre i teoremi dimostrati sui poliedri euleriani. Ciò posto, per riconoscere la *classe* di un poliedro o di una rete è duopo trovare il numero e la posizione degli aspetti simili, osservando attentamente il modo con cui sono disposte le sue parti. Ma è chiaro che quella ricerca è semplificata se si riduce

BIBLIOTHÈ... UNIVERS...

allo studio delle proprietà del poliedro o della rete relativamente a due aspetti simili.

DEFINIZIONI.

8. Sieno A, A_1 due aspetti simili di un poliedro (euleriano). L'omologo di un elemento qualunque s di esso, rapporto ad A, A_1, sarà (in generale) un altro elemento s_1. Relativamente agli stessi aspetti, s_1 avrà un altro omologo s_2; così s_2 avrà un altro omologo s_3, ec. ec., finchè si giungerà ad un elemento s_n che sarà uno dei precedenti. Dico che s_n è precisamente s. Infatti, se s_n fosse uno degli elementi $s_1, s_2, \ldots s_{r-1}, s_r, \ldots s_{n-1}$, per esempio s_r, questo elemento relativamente agli aspetti A, A_1 sarebbe l'omologo di due elementi s_{r-1}, s_{n-1} distinti (poichè per ipotesi s_n è il primo elemento eguale ad uno dei precedenti) il che è assurdo. Prendasi ora un altro elemento t differente dai precedenti; collo stesso ragionamento si potrà ottenere un altro gruppo $t, t_1, t_2 \ldots t_{m-1}$ e così di seguito. Talchè, relativamente a due aspetti simili A, A_1, gli elementi del poliedro si potranno disporre in tanti gruppi $(s, s_1, \ldots s_{n-1})$, $(t, t_1, t_2 \ldots t_{m-1})$, $\ldots$ $(v, v_1 \ldots v_{p-1})$ ottenuti nel modo anzidetto (essendo $n+m+\ldots\ldots+p$ il numero degli elementi del poliedro) (*). Questi gruppi si diranno *cicli di elementi* relativamente agli aspetti A, A_1. È chiaro che analogamente si possono considerare cicli di spigoli, di linee o di regioni.

9. Sia $(s\, s_1 \ldots s_{n-1})$ un ciclo di vertici rapporto a due aspetti simili A, A_1. Consideriamo tutte le geodetiche

(*) Ciò può vedersi anche dall'osservare che, prendendo gli omologhi di tutti gli elementi di un poliedro relativamente a due aspetti simili A, A_1, si hanno gli elementi stessi in un altro ordine, cioè si fa una certa *sostituzione* su quegli elementi, e si sa che ogni sostituzione può considerarsi sempre come il prodotto di più sostituzioni circolari; onde ec. ec.

condotte da ciascuno dei vertici $s, s_1, \ldots s_r, \ldots s_{n-1}$ a tutti gli altri e fra esse prendiamone una formata del minor numero di spigoli; e sia, per es., quella che congiunge i due vertici s, s_r. Indichiamo questa linea con $L_{0,r}$, e diciamo δ la sua lunghezza. Non esisteranno due vertici s_p, s_q fra quelli del ciclo $(s\, s_1 \ldots s_{n-1})$ tali, che la geodetica condotta fra essi abbia una lunghezza minore di δ.

Ciò posto, relativamente ai due aspetti A, A_1 la linea $L_{0,r}$ avrà per omologa una linea $L_{1,r+1}$ condotta fra s_1 ed s_{r+1}; parimenti $L_{1,r+1}$ avrà per omologa una linea $L_{2,r+2}$ condotta fra s_2 ed s_{r+2} e così via via, finchè si giungerà ad una linea $L_{n-1,r-1}$ congiungente s_{n-1} ad s_{r-1}, la quale avrà per omologa una linea $L_{n,r}$, che in generale sarà differente da $L_{0,r}$. Poi $L_{n,r}$ avrà per omologa una linea $L_{n+1,r+1}$, ec.. Considerando tutte le linee

$$L_{0,r}, L_{1,r+1} \ldots L_{n-1,r-1} L_{n,r} \ldots L_{2n,r} \ldots L_{pn,r} \ldots,$$

si dimostra, come al N.° 8, che la prima di esse, che è identica ad una delle precedenti, coincide appunto colla $L_{0,r}$. D'altronde fra quelle linee non esistono che le $L_{n,r} L_{2n,r} \ldots L_{pn,r} \ldots$ che abbiano amendue gli estremi a comune colla $L_{0,r}$; quindi una di queste, per es. la $L_{pn,r}$, sarà la prima linea che coincide colla $L_{0,r}$. Il sistema delle geodetiche $L_{0,r}$, $L_{1,r+1} \ldots L_{pn-1,r-1}$ si dirà *ciclo di geodetiche* corrispondente al ciclo di vertici $(s s_1 \ldots s_{n-1})$ e si scriverà $(L_{0,r} L_{1,r+1} \ldots L_{pn-1,r-1})$. Evidentemente ad un ciclo di vertici possono corrispondere piu cicli di geodetiche; ma, in ogni caso: — *Il numero delle geodetiche di un ciclo è sempre un multiplo del numero dei vertici del ciclo a cui corrisponde.* —

10. Aggiungeremo ancora poche altre definizioni. Per *grandezza* di una regione, limitata da un contorno chiuso, s'intenderà la somma de' suoi vertici, delle sue faccie e de' suoi spigoli (compresi quelli del contorno). Dicendo

V,F,S il numero dei vertici, delle faccie e degli spigoli della regione, dalla relazione (N. 4, prop. XI):

$$V+F=S+1$$

si trae:

$$V+F+S=2S+1;$$

per cui la grandezza di una regione è anche il doppio degli spigoli che essa contiene aggiuntavi l'unità. — Due regioni saranno *eguali* se contengono lo stesso numero di spigoli, *diseguali* nel caso opposto e *più grande* quella che contiene un maggior numero di spigoli. Due regioni simili sono evidentemente eguali.

PROPRIETÀ DEI CICLI.

11. Sia $(ss_1..s_{n-1})$ un ciclo qualunque di elementi relativamente a due aspetti simili A, A_1. Poichè s è simile ad s_1 ed s_1 ad s_2, s sarà simile ad s_2 (N. 3, Prop. V). Ma s_2 è simile ad s_3, quindi s è anche simile ad s_3 e così ec.. Onde s è simile a tutti gli elementi $s_1, s_2, ..s_{n-1}$, i quali per conseguenza sono simili fra loro. Un ragionamento analogo si può ripetere per le geodetiche di un ciclo corrispondente ad un ciclo di vertici. Dunque:

Prop. I. — *Gli elementi di un ciclo sono elementi simili e le linee di un ciclo linee simili.* — Di qui si deduce che, se i vertici di un ciclo $(ss_1..s_{n-1})$ non presentano simmetria, dovrà essere $p=1$ (N.° 9), cioè sarà $(L_{0,r}L_{1,r+1}...L_{n-1,r-1})$ un ciclo qualunque di geodetiche ad esso corrispondente; perchè, altrimenti, da un vertice s partirebbero almeno due linee simili, cioè s sarebbe simile a se stesso relativamente a due aspetti e quindi presenterebbe almeno simmetria di rotazione binaria (N. 3, Prop. VII). Segue inoltre che, considerando il ciclo che contiene il massimo numero di elementi (o di linee), il numero degli aspetti simili del poliedro non potrà esser minore di quel numero (N. 3, Prop. VIII).

Non è vera la reciproca della proposizione precedente, cioè non si possono sempre trovare due aspetti simili relativamente ai quali un gruppo di vertici simili formi un ciclo (*).

12. In seguito prenderemo a studiare principalmente i cicli di vertici, poichè dalle proprietà di questi si potrà passare facilmente a quelle dei cicli di faccie mediante la

Proposizione II. — *Essendo π un poliedro polare diretto di P, i cicli di elementi (vertici o faccie) relativamente a due aspetti simili dell'uno hanno per polari cicli di elementi (faccie o vertici) relativamente a due aspetti simili dell'altro.*

Questa proposizione risulta subito dalla Prop. X. (N.3). Infatti sieno A, A_1 due aspetti simili di P ed α, α_1 i due aspetti simili corrispondenti di π, cioè due aspetti riferiti a due spigoli e due vertici polari di due spigoli e due faccie omologhe relativamente ad A, A_1. Se $(s\, s_1 \,..\, s_{n-1})$ è un ciclo di elementi rapporto a questi aspetti, e sono $\delta, \delta_1, \delta_2 \,..\, \delta_{n-1}$ ordinatamente gli elementi polari di s, s_1 $s_2 \,..\, s_{n-1}$, risulta da quella proposizione che, rispetto ad α, α_1, sono omologhi δ e δ_1, δ_1 e δ_2, ..., δ_{n-1} e δ, cioè $(\delta\, \delta_1\, \delta_2 \,..\, \delta_{n-1})$ è un ciclo di elementi.

13. Si consideri adunque un ciclo di vertici $(ss_1 ... s_{n-1})$ relativamente a due aspetti A, A_1. Sia $(L_{0,r} L_{1,r+1} \,...\, L_{np-1,r-1})$ un ciclo corrispondente di geodetiche; ed A, A_1 sieno rispettivamente m, mo; m_1, $m_1\, o_1$. Rapporto ad A, A_1, lo spigolo $m_1 o_1$ avrà per omologo uno spigolo $m_2 o_2$; del pari, relativamente agli stessi aspetti, $m_2 o_2$ avrà

(*) Per es. la reciproca non è vera nel caso semplicissimo di un poliedro formato da due prismi triangolari aventi una base a comune; poichè i sei vertici delle due basi distinte sono simili e tuttavia non è possibile trovare due aspetti simili, rapporto ai quali essi formino un ciclo.

per omologo uno spigolo m_3o_3,... e così $m_{t-1}o_{t-1}$ avrà per omologo uno spigolo m_to_t ec. Per la Prop. IV (N. 3) gli omologhi del poliedro restano i medesimi relativamente agli aspetti simili m, mo ed m_1, m_1o_1, m_1, m_1o_1 ed m_2, m_2o_2,... m_{t-1}, $m_{t-1}o_{t-1}$ ed m_t, m_to_t . . . rispettivamente. Onde può scriversi che rapporto agli

aspetti simili	sono	omologhi
m , mo	$s, s_1 .. s_{n-1}$	$L_{o,r}, \ldots L_{np-1,r-1}$
m_1 , m_1o_1	$s_1, s_2 .. s$	$L_{1,r+1} .. L_{o,r}$
m_2 , m_2o_2	$s_2, s_3 ... s_1$	$L_{2,r+2} .. L_{1,r+1}$
. . . . . .	. . . .	
m_{t-1}, $m_{t-1}o_{t-1}$	$s_{t-1}, s_t, .. s_{t-2}$	$L_{t-1,r+t-1} .. L_{t-2,r+t-2}$
m_t , m_to_t	$s_t, s_{t+1} .. s_{t-1}$	$L_{t,r+t} .. L_{t-1,r+t-1}$
. . . . . .	. . . .	

Di qui si ricava che, relativamente agli aspetti simili m, mo, m_t, m_to_t,

$$s, s_1, \ldots s_{n-1} \qquad L_{o,r}, L_{1,r+1}, \ldots L_{np-1,r-1}$$

hanno per omologhi rispettivamente

$$s_t,\ s_{t+1},\ \ldots s_{t-1} \quad L_{t,r+t}\,,\ L_{t+1,r+t+1}\,,\ \ldots\ L_{t-1,r+t-1}$$

e ne segue che gli aspetti simili m, mo, m_1, m_1o_1,.. m_t, m_to_t,.. $m_{np-1}, m_{np-1}o_{np-1}$ sono tutti distinti e che l'aspetto $m_{np}, m_{np}o_{np}$ è precisamente m, mo. Infatti, se i due aspetti m, mo, m_t, m_to_t fossero identici, le linee $L_{o,r}L_{1,r+1} \ldots L_{np-1,r-1}$ dovrebbero essere eguali ordinatamente alle $L_{t,r+t} \ldots L_{t-1,r+t-1}$, il che è impossibile finchè sia $t < np$. Ma quando, si abbia $t = np$, le linee $L_{t,r+t} \ldots L_{t-1,r+t-1}$, sono precisamente le $L_{o,r} .. L_{np-1,r-1}$ e quindi non può essere che l'aspetto $m_{np}, m_{np}o_{np}$ sia distinto dall'aspetto m, mo; giacchè relativamente a questi due aspetti simili, una linea $L_{o,r}$ (per es.) avrebbe per omologa se stessa, vertice a vertice, il che è assurdo (N. 3, Prop. IV). Si ha adunque $m_{np}=m$, $o_{np}=o$; e quindi, rappresentando brevemente con A, $A_1, \ldots A_t, \ldots A_{np-1}$ gli aspetti simili m, mo , $m_1, m_1 o_1, \ldots$ $m_t, m_t o_t, \ldots m_{np-1}, m_{np-1} o_{np-1}$, si conchiude che:

Proposizione III. — *Essendo* $(ss_1 \ldots s_{n-1})$ *un ciclo di vertici ed* $(L_{o,r} \ldots L_{np-1,r-1})$ *un ciclo corrispondente di geodetiche relativamente a due aspetti* A, A_1, *si può sempre trovare un aspetto* A_t *simile ad* A *e tale che, rapporto ad* A, A_t,

$$s,\ s_1,\ s_2, \ldots s_t, \ldots s_{n-1}\ \ L_{o,r}, \ldots L_{t,r+t}, \ldots L_{np-1,r-1}$$

abbiano per omologhi ordinatamente

$$s_t, s_{t+1}, \ldots s_{2t}, \ldots s_{t-1}\ \ L_{t,r+t}, \ldots L_{2t,v+2t}, \ldots L_{t-1,r+t-1};$$

gli aspetti simili A, A_1, $A_2 \ldots A_{t-1}, A_t \ldots A_{np-1}$ *essendo tutti distinti ed avendo la proprietà che gli omologhi del poliedro restano i medesimi relativamente a due aspetti successivi* A_{t-1} A_t (posto A_{np}=A). — Evidentemente questa proposizione comprende in se la Proposizione I.

14. Le geodetiche di un ciclo $(L_{o,r}\ L_{\ ,r+1} \ldots L_{np-1,r-1})$ corrispondente ad un ciclo di vertici $(ss_1 \ldots s_{n-})$ relativamente a due aspetti A, A_1 avranno in generale vertici a comune. Distinguiamo due casi, cioè quello in cui esse hanno uno o amendue gli estremi e qualche vertice intermedio a comune e quello in cui hanno soltanto qualche vertice intermedio a comune.

1.° caso. È chiaro che, indicando brevemente con $(sv)_{o,r}$ la distanza di due vertici s, v contata sopra una geodetica $L_{o,r}$, si ha la

Proposizione IV. — *Se due geodetiche* $L_{np-r,o}$ $L_{o,r}$, *aventi almeno un medesimo estremo* s, *passano per uno stesso vertice* v *dovrà essere*

$$(sv)_{np-r,o}=(sv)_{o,r} \text{ ; da cui } (s_{np-r}v)_{np-r,o}=(s_rv)_{o,r}$$

poichè, se fosse p. es. $(sv)_{np-r,o}>(sv)_{o,r}$, la linea $L_{np-r,o}$ non sarebbe geodetica fra due suoi vertici, come deve essere. - In questo caso poi è importante notare un altra proprietà. Le due linee $L_{np-r,o}, L_{o,r}$ relativamente ai due aspetti simili A, A_r (N. 13, Prop. III) hanno per omologhe le linee $L_{o,r}$ $L_{r,2r}$; onde se quelle passano per un vertice v, queste passeranno per un altro vertice v_1 omologo di v, e viceversa se queste passano per un vertice v_1, quelle passeranno per un vertice v di cui v_1 sia l' omologo. In ambedue i casi, essendo omologhi i tronchi $(sv)_{np-r,o}$, $(s_rv_1)_{o,r}$, dovrà aversi;

$$(sv)_{np-r,o}=(s_rv_1)_{o,r}$$

cioè, per la proposizione precedente,

$$(sv)_{o,r}=(s_rv_1)_{o,r} :$$

dunque;

Proposizione V. — *Se una geodetica* $L_{o,r}$ *passa per un vertice* v *della* $L_{np-r,o}$ (*avente un estremo* s *a comune con essa*) *ad una distanza* d *da* s, *passerà altresì per un vertice* v_1, *omologo di* v, *che appartiene alla geodetica* $L_{r,2r}$ (*avente a comune colla* $L_{o,r}$ *l'altro estremo* s_r) *ed è situato alla stessa distanza* d *da* s_r; *e viceversa* —.

E inoltre le L_{or}, $L_{r,2r}$ si segheranno o toccheranno in v_1

come le $L_{np-r,0}$ $L_{0,r}$ in v (N. 3, Prop. III). Nel caso particolare che la linea $L_{np-r,0}$ coincidesse colla $L_{r,2r}$ cioè fosse $r=\frac{np}{2}$, il ragionamento non si modifica e allora si conclude che: — *Se una geodetica* $L_{0,\frac{np}{2}}$, *passa per un vertice* v *della geodetica* $L_{\frac{np}{2},0}$ *(che ha comuni con essa amendue gli estremi) ad una distanza* d *da uno di essi, passerà ancora per un vertice* v_1 *della stessa geodetica, alla medesima distanza* d *dall'altro estremo.*

2.° caso. Consideriamo l'altro caso, cioè supponiamo che due geodetiche $L_{p,p+r}$ $L_{q,q+r}$, non aventi alcun estremo comune, passino per uno stesso vertice v. Dico che questo vertice sarà il mezzo di amendue. Infatti, se ciò non fosse, la geodetica $L_{p,p+r}$ (per es.) sarebbe divisa dal vertice v in due tronchi disuguali; e quindi, prendendo il più piccolo di essi che sarebbe minore di $\frac{1}{2}\delta$ (N. 9), e aggiungendolo al più piccolo degli altri due tronchi in cui v divide $L_{q,q+r}$, il quale al più sarebbe eguale a $\frac{1}{2}\delta$, avremmo una linea, congiungente due vertici distinti del ciclo, di lunghezza $<\delta$; il che è impossibile. Dunque:

Proposizione VI. — *Due geodetiche di un ciclo* $L_{p,p+r}$, $L_{q,q+r}$, *di cui gli estremi sieno differenti, non possono avere a comune che il loro vertice di mezzo.*

Le geodetiche di un ciclo godono inoltre della seguente proprietà:

Proposizione VII. - *Un vertice* v *di una geodetica* $L_{0,r}$ *di un ciclo* $(L_{0,r} .. L_{np-1,r-1})$ *corrispondente ad un ciclo* $(ss_1 ... s_{n-1})$ *relativamente a due aspetti* A, A_1, *omologo a se stesso rapporto a questi aspetti, è il vertice di mezzo comune a tutte le linee del ciclo.*

Infatti, il tronco $(sv)_{0,r}$ relativamente agli aspetti A, A_r (N. 13, Pr. III) avendo per omologo il tronco $(s_r v)_{r,2r}$, si ha,

$$(sv)_{o,r} = (s_r v)_{r,2r}$$

quindi, poichè la distanza fra i due vertici s_r, v deve essere evidentemente la stessa sopra $L_{o,r}$ o $L_{r,2r}$, sarà

$$(sv)_{o,r} = (s_r v)_{o,r};$$

donde ec. È poi evidente che quel vertice v presenta simmetria di rotazione almeno di ordine np.

15. Supponiamo che un ciclo di geodetiche ($L_{o,r} \ldots L_{n-,r-1}$) sia formato di un numero di geodetiche eguale al numero dei vertici del ciclo ($ss_1 \ldots s_{n-1}$) a cui corrisponde, e inoltre che le geodetiche del ciclo non si seghino in alcun punto. Cerchiamo il numero dei contorni chiusi formati da esse, il che ci tornerà utile in seguito.

Prendansi le geodetiche che hanno successivamente un estremo a comune

$$\text{(a)} \qquad L_{o,r}, L_{r,2r}, L_{2r,3r}, \ldots, L_{(n-1)r,o}.$$

Se r è primo con n, per un teorema noto (*), soltanto colla linea $L_{(n-)r,o}$ si ritornerà ad s, cioè le (a) saranno tutte differenti e però saranno le $L_{o,r}, L_{,r+}, \ldots L_{n-1,r-1}$ disposte in un certo ordine: onde in quel caso il ciclo

(*) Il teorema è il seguente:

Avendo una serie di n *punti, di cui è determinato soltanto l' ordine di successione* $s, s_1, \ldots s_{n-1}$ *e trasportandoci in questi punti di* r *in* r *a partire da* s, *cioé da* s *in* s_r, *da* s *in* s_{2r} .... *ec; se* r *è primo con* n *si ritornerà al punto di partenza* s, *dopo essere passati una volta per ciascuno di quegli* n *punti; se* r *non è primo con* n *ed ha con* n *il massimo comun divisore* ε, *ed* $\frac{n}{\varepsilon} = \nu$, *si tornerà ad* s *dopo essere passati una volta per ciascuno dei* ν *punti* $s, s_r, s_{2r}, \ldots s_{(\nu-1)r}$.

formerà un sol contorno chiuso. Ma se r ed n non son primi ed è ε il loro massimo comun divisore, ponendo $\frac{n}{\varepsilon}=\nu$ per lo stesso teorema, la linea $L_{(\nu-1)r,\nu r}$, o $L_{(\nu-1)r,o}$ sarà la prima delle (a) che ritorna ad s, e quindi queste linee si ridurranno alle sole distinte

$$L_{o,r}\ L_{r,2r},\ldots L_{(p-1)r,pr}\ldots L_{(\nu-1)r,o},$$

le quali formeranno un contorno chiuso. Fra queste ν linee non sono comprese certamente le $L_{1,r+1}$ $L_{2,r+2}\ldots L_{k,r+k}\ldots$ $L_{\varepsilon-1,r+\varepsilon-1}$, perocchè, se ciò avvenisse, dovrebbe essere

$$pr=k+\mu n, \text{ essendo } k<\varepsilon \text{ e } \mu \text{ intero,}$$

eguaglianza che non può verificarsi, giacchè r ed n sono divisibili per ε, e k no. Quindi, relativamente agli aspetti A, A_1, le linee $L_{o,r}$, $L_{r,2r}\ldots$ $L_{(\nu-1)r,o}$ avranno per omologhe altre ν linee $L_{1,r+1}$ $L_{r+1,2r+1}$ $\ldots$ $L_{(\nu-1)r+1,1}$, le quali formeranno un altro contorno chiuso. Parimenti le linee $L_{2,r+2}\ldots L_{\varepsilon-1,r+\varepsilon-1}$ daranno origine ad altri contorni chiusi. Adunque, ricordando anche la Prop. III (N. 13);

Proposizione VIII. — *Se ad un ciclo di* n *vertici* ($ss\ldots s_{n-}$) *corrisponde un ciclo di* n *geodetiche*($L_{o,r}\ldots L_{n-1,r-1}$) *che non si segano in alcun punto, questo ciclo formerà un sol contorno chiuso* $L_{o,r}L_{r,2r}\ldots L_{(n-1\,r,o}$ *se* r *è primo con* n; *ne formerà* ε,

$$L_{o,r}L_{r,2r}\ldots L_{(\nu-1)r,o},\ldots L_{\varepsilon-1,r+\varepsilon-1}\ldots L_{(\nu-1)r+\varepsilon-1,\varepsilon-1}$$

se r *non è primo con* n *ed ha con esso il massimo comun divisore* ε *e si pone* $\frac{n}{\varepsilon}=\nu$; *ciascun contorno chiuso essendo omologo a se stesso relativamente a* ν *aspetti simili*

$$A, A_r, A_{2r}, \ldots A_{(t-1)r}, A_{tr}, \ldots A_{(\nu-1)r}$$

aventi la proprietà che gli omologhi del poliedro restano i medesimi relativamente a due aspetti successivi $A_{(t-1)r}\ A_{tr}$.

16. Aggiungerò ancora la dimostrazione di due altre proprietà dei cicli, benchè in appresso non si presenti occasione di applicarle.

Prendiamo sopra una geodetica $L_{0,r}$ di un ciclo $(L_{0,r} \ldots L_{np-1,r-1})$ corrispondente ad un ciclo $(ss_1 \ldots s_{n-1})$, un vertice u qualunque (che non sia un estremo). Questo vertice apparterrà ad un ciclo di vertici $(uu_1u_2\ldots u_{h-})$, u_1 trovandosi sopra $L_{,r+}$, u_2 sopra $L_{2,r+2}, \ldots, u_{h-1}$ sopra $L_{h-1,r+h-1}$, u sopra $L_{h,r+h}$, ec. Il ciclo $(uu_1 \ldots u_{h-1})$ si potrebbe dire *ciclo secondario del ciclo primitivo* $(ss_1 \ldots s_{n-1})$. Sieno m le geodetiche che passano pel vertice u: pel vertice u_1 passeranno altre m geodetiche, per u_2 altre m, ec.. Sommando tutte le geodetiche che passano per $u, u, u_2, \ldots u_{h-1}$, si hanno mh linee. Fra esse se ne trova certamente una qualunque del ciclo $(L_{0r} \ldots L_{np-,r-})$, perchè questa linea deve contenere uno dei vertici del ciclo secondario; ma però in quel numero potrà, in generale, essere contata più volte. Poniamo che la linea $L_{0,r}$ contenga k vertici del ciclo secondario, (essendo $k < h$). La linea $L_{,r+1}$ conterrà i k vertici omologhi dello stesso ciclo e così di seguito; e quindi ogni geodetica nel numero mh sarà evidentemente contata k volte Dunque:

Essendo np *il numero delle geodetiche di un ciclo corrispondente ad un ciclo* $(ss \ldots s_{n-1})$, h *il numero dei vertici di un suo ciclo secondario,* m *il numero delle geodetiche che passano per un vertice di questo ciclo e* k *il numero dei vertici di esso che giacciono sopra una geodetica, si ha la relazione*

$$np=\frac{mh}{k}.$$

Se $h=n$ ed $m=1$ si ha $p=\frac{1}{k}$, e poichè p è intero dovrà essere $k=1$ e quindi $p=1$, come si vedrebbe anche geometricamente.

Consideriamo ora tutti i cicli secondarii di un ciclo primitivo (relativi ad un dato ciclo di geodetiche), e sieno $h, m, k,; h_1, m_1, k_1; \ldots h_t, m_t, k_t,$ le quantità relative a ciascuno di essi, considerate nella proposizione precedente. Se V è il numero dei vertici di una geodetica (esclusi gli estremi), è evidente che deve essere:

$$k+k_1+k_2+\ldots\ldots+k_t=\mathrm{V},$$

cioè, per la proposizione ora dimostrata.

$$hm+h_1m_1+h_2m_2+\ldots\ldots+h_tm_t=\mathrm{V}np;$$

la qual relazione dà un altra proprietà facile ad enunciare.

PROPRIETÀ GENERALI

DEI POLIEDRI EULERIANI RELATIVE AI CICLI

17. Supponiamo che una regione R di un poliedro, limitata da un contorno chiuso C, sia omologa a se medesima relativamente ad n aspetti simili $A, A_1, A_2 \ldots A_{n-1}$. Consideriamo in quella regione le geodetiche $\Lambda, \Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_{n-1}$ che notammo nel n.° 4. Ivi si disse che, intendendo disposti gli aspetti $A, A_1, A_2 \ldots A_{t-1}, A_t \ldots A_{n-1}$ in un certo ordine, relativamente agli aspetti A, A_t, le linee

$$A,\ A_1, \ldots\ A_{t-1},\ A_t, \ldots\ A_{n-1}$$

hanno per omologhe le

$$A_t,\ A_{t+1},\ \ldots,\ A_{2t-1},\ \ldots.\ A_{t-1};$$

talchè, riguardo agli

aspetti simili	sono omologhe
$A,$	$A,\ A_1, \ldots.\ A_{t-1}, \ldots\ A_{n-1},$
$A_1,$	$A_1,\ A_2, \ldots.\ A_t, \ldots.\ A,$
$A_2,$	$A_2,\ A_3, \ldots.\ A_{t-1}, \ldots\ A_1,$
..	....
$A_{t-1},$	$A_{t-1}, A_t, \ldots\ldots\ldots\ A_{t-2},$
$A_t,$	$A_t,\ A_{t+1}, \ldots\ldots\ldots\ A_{t-1},$
..	....
$A_{n-1},$	$A_{n-1}, A, \ldots\ldots\ldots\ A_{n-2}.$

Segue di qui che: *gli omologhi del poliedro relativamente a due aspetti simili successivi* A_{t-1}, A_t *sono i medesimi.* Infatti il primo spigolo mo di A_{t-1} (per es.), relativamente agli aspetti A, A_1 ovvero agli aspetti A_{t-1}, A_t avrà sempre per omologo il primo spigolo m_1o_1 di A_t. Ma gli omologhi del poliedro relativamente agli aspetti m, mo, m_1, m_1o_1 sono omologhi per la Prop. IV (N. 3) sì rapporto ad A, A_1, come rapporto ad A_{t-1}, A_t; dunque ec.

Ora la regione R_1, che si ottiene staccando dal poliedro la regione R, è pure omologa a se medesima relativamente agli aspetti simili $A, A_1, \ldots A_{n-1}$ (N. 3, Prop. IX). A ciascuna delle due regioni R, R_1 si applica quindi il teorema fondamentale enunciato nel N. 4 (Prop. XII). Sieno $s, s_1, s_2, \ldots s_{n-1}$ n elementi (distinti) del poliedro omologhi rapporto agli aspetti $A, A_1, \ldots A_{n-1}$ ordinatamente (situati tutti in R o in R_1). Poichè s_2 è omologo di s_1 rispetto ad A_1, A_2, per l'osservazione fatta sopra, sarà suo omologo anche rispetto ad A, A_1. Parimenti, relativamente a questi due aspetti, saranno omologhi s_2 ed s_3, s_3 ed s_4, ... s_{n-1} ed s; il che vuol dire che $(ss_1 .. s_{n-1})$ è un ciclo di elementi rapporto ad A, A_1 e in generale rapporto ad A_{t-1}, A_t. Ciò si ripete per tutti i gruppi di n elementi simili del poliedro. Se $n > 2$, ciascuna delle regioni R, R_1 conterrà inoltre un elemento con simmetria di rotazione almeno di ordine n che formerà un ciclo di un solo elemento; e se $n=2$, quell' elemento potrà essere sostituito da uno spigolo con simmetria di ritorno, di cui i due vertici comporranno un ciclo. Dunque:

TEOREMA I. – *Se una regione* R *di un poliedro è omologa a se stessa rapporto ad* n *aspetti simili, si possono disporre questi aspetti in un certo ordine* $A, A_1, .. A_{t-1}, A_t, .. A_{n-1}$; *pel quale gli omologhi del poliedro sieno i medesimi rapporto a due aspetti successivi* A_{t-1}, A_t. *Riguardo a questi aspetti gli elementi del poliedro formano tanti cicli dello stesso numero* n *di elementi, tranne due, che, se* $n > 2$, *dovranno essere formati di un solo elemento, e, se* $n=2$, *potranno essere formati o di un elemento o di due (come gli altri).*

18. Dal teorema dimostrato dedurremo facilmente quest'altra proprietà:

TEOREMA II. — *In un poliedro (euleriano) simmetrico, si possono sempre trovare due aspetti simili, relativamente ai quali i cicli di elementi sieno formati dello stesso numero di elementi, tranne due, che potranno invece contenere un solo elemento.*

Ricordando infatti che in un poliedro (euleriano e simile a stesso relativamente a un certo numero di aspetti) deve esistere almeno un elemento o spigolo che presenti simmetria (N. 5, C), basterà che consideriamo i tre casi seguenti:

A) *Esista almeno una faccia* F *che presenti sim-*

metria di rotazione di ordine n. Allora la regione formata dal poliedro rimanente, esclusa la faccia F, è omologa a se stessa relativamente ad n aspetti simili e quindi si può applicare il teorema I (N. 17); donde si deduce immediatamente il teorema II.

B) *Esista almeno un vertice con simmetria di rotazione di ordine* n. Allora il poliedro polare diretto del poliedro dato avrà almeno una faccia con simmetria di rotazione di ordine n (N. 3, Prop. X). Quindi, pel caso precedente, nel poliedro polare esisteranno certamente due aspetti simili A, A_1 che hanno la proprietà enunciata. Ai due aspetti A, A_1 corrispondono nel poliedro dato due aspetti simili α, α_1 (N. 11, Prop. II) rapporto ai quali i cicli di elementi sono polari dei cicli di elementi del poliedro polare e quindi sono formati dello stesso numero di elementi; onde ec.

C) *Non esista alcun elemento con simmetria di rotazione*. Allora dovrà esistere uno spigolo con simmetria di ritorno. Se questo è unico della sua specie. (N. 5, C, caso 1.°) il teorema è evidente, poichè tutti i cicli vengono formati di due elementi. Se non è unico della sua specie, vedemmo (N. 5, C, caso 2.°) che ne esiste un altro solo simile ad esso e che fra i due spigoli si potevano condurre quattro geodetiche che dividevano il poliedro in quattro regioni a due a due simili e ciascuna simile a se stessa relativamente a due aspetti; e ora, applicando ad una qualunque di queste regioni il teorema I (N. 17), se ne conclude la proprietà enunciata. Anche in questo caso tutti i cicli sono formati di due elementi.

In tal modo il teorema II è pienamente dimostrato. — Diremo *aspetti fondamentali* di un poliedro, due aspetti simili A, A_1 che godono della proprietà detta in quel teorema, e che potranno essere anche altri, differenti da quelli considerati nella dimostrazione (*).

(*) Anzi qui si può proporre la questione: — Rapporto a due aspetti simili qualunque come si comportano i cicli di elementi?

19. Sia $(L_{o,r} L_{1,r+1} \dots L_{np-1,r-1})$ un ciclo di geodetiche corrispondente ad un ciclo di vertici $(ss_1..s_{n-1})$ relativamente a due aspetti fondamentali A, A_1. Dico che dovrà essere $p=1$. Infatti poniamo che abbiasi $p>1$, cioè la linea $L_{n,r}$ sia differente dalla $L_{o,r}$; e sia, per esempio, v un vertice di $L_{o,r}$, pel quale non passa la linea $L_{n,r}$. Il ciclo a cui appartiene v non può essere formato di un vertice, perchè allora per esso passerebbe anche la linea $L_{n,r}$: dunque dovrà essere formato di n vertici. Ma anche questo è impossibile; poichè, trasportandoci successivamente nei vertici $v, v_1, v_2, \dots$ di quel ciclo, che si trovano rispettivamente nelle linee $L_{o,r}$, $L_{1,r+1}$, $L_{2,r+2}$.., si deve ritornare a v o prima o dopo di essere arrivati alla linea $L_{n,r}$, cioè essendo passati per un numero di vertici v, v_1, v_2.. minore o maggiore di n. Quindi la linea $L_{n,r}$ passerà per v. Se tutti i vertici di $L_{o,r}$ debbono trovarsi sopra $L_{n,r}$, segue necessariamente che dovrà essere $L_{o,r} = L_{n,r}$, e però:

TEOREMA III. — *Relativamente a due aspetti fondamentali il numero delle geodetiche di un ciclo è eguale al numero dei vertici del ciclo a cui corrisponde.*

20. Avendosi adunque un ciclo $(ss_1..s_{n-1})$ relativamente a due aspetti fondamentali A, A_1, un ciclo qualunque di geodetiche ad esso corrispondente sarà $(L_{o,r} \dots L_{n-1,r-1})$. Le geodetiche di questo ciclo avranno in generale vertici a comune. Ci proponiamo di dimostrare che per ogni ciclo di vertici si può sempre trovare un ciclo di geodetiche le quali non si seghino in alcun vertice (*).

I vertici di una geodetica $L_{o,r}$, tranne quello di mezzo (quando esista), per la Prop. VI (N. 14) non possono

Il caso di due aspetti fondamentali è un caso particolare o il caso generale di due aspetti simili? — Esamineremo tale questione in una appendice che farà seguito a questa tesi.

(*) In alcune parti, questa dimostrazione è analoga a quella data dal sig. Jordan pel 2.° teorema fondamentale.

essere comuni che alle geodetiche $L_{n-r,o}$, $L_{r,2r}$, che sono le sole fra quelle del ciclo che abbiano un estremo comune con essa. Sia w il vertice, comune alle linee $L_{n-r,o}$ $L_{o,r}$, più lontano dal loro estremo comune s. Quel vertice w non potrà avere da s una distanza $> \frac{1}{2}\delta$ (N. 9). Infatti se fosse $(sw)_{o,r} > \frac{1}{2}\delta$, sarebbe $(s_r w)_{o,r} < \frac{1}{2}\delta$, e poichè, (N. 14, Prop. IV),

$$(s_r w)_{o,r} = (s_{n-r} w)_{n-r,o}$$

ne seguirebbe:

$$(s_r w)_{o,r} + (s_{n-r} w)_{n-r,o} < \delta\ ;$$

il che non può essere (*). Dunque w si troverà nella prima metà di $L_{o,r}$. Nella seconda metà, $L_{o,r}$ avrà vertici a comune colla linea $L_{r,2r}$ dei quali il più distante w_1 da s_r, per la Prop. V (N. 14), sarà tale che

$$(s_r w_1)_{o,r} = (sw)_{o,r}$$

ed è chiaro, per le cose dette, che i vertici del tronco $(w w_1)_{o,r}$ (che potrebbe anche esser nullo), escluso quello di mezzo, non sono comuni ad alcuna delle linee $L_{1,r+1}, \ldots L_{n-1,r-1}$.

Ciò posto, consideriamo la linea

$$L'_{o,r} = (sw)_{o,r} + (w w_1)_{o,r} + (w_1 s_r)_{r,2r}$$

che è di lunghezza δ. Essa formerà un ciclo di geodetiche

(*) Questo ragionamento non vale se $s_{n-r} = s_r$, cioè $r = \frac{n}{2}$. Ma in questo caso le linee $L_{n-r,o}$ $L_{r,2r}$ coincidono, e allora, per l'osservazione fatta dopo la Prop. V (N. 14), è facile vedere come ciò che segue, con leggiere modificazioni, sussista rigorosamente.

$(L'_{o,r} L'_{1,r+1} \ldots L'_{n-1,r-1})$ relativamente ad A, A_1 (N. 19, Teor. III). Le geodetiche $L'_{1,r+1} \ldots L'_{n-1,r-1}$, essendo formate (come la $L'_{o,r}$) di tronchi delle $L_{o,r} \ldots L_{n-1,r-1}$, nel tratto $(w\, w_1)_{o,r}$ non potranno aver vertici a comune colla $L'_{o,r}$, tranne quello di mezzo. Inoltre, relativamente ai due aspetti A, A_r (N. 13, Prop. III), s, $L_{o,r}$, w hanno per omologhe s_r, $L_{r,2r}$, w_1, cioè il tronco $(sw)_{o,r}$ che appartiene ad $L'_{o,r}$ ha per omologo il tronco $(s_r\, w_1)_{r,2r}$ che appartiene pure a quella linea. Ma relativamente ad A,A_r, la $L'_{o,r}$ deve avere per omologa la $L'_{r,2r}$; dunque questa linea coincide interamente colla $L'_{o,r}$ nel tronco $s_r\, w_1$. Parimenti per la Prop. V (N. 14) la linea $L'_{n-r,0}$ coinciderà colla $L'_{o,r}$ nel tronco sw. Nei tronchi $s_r w_1$, sw la linea $L'_{o,r}$ non può avere vertici a comune con alcun altra linea del ciclo, cui essa appartiene; dunque quella linea è tale che non può essere tagliata che nel vertice di mezzo dalle $L'_{1,r+1} \ldots L'_{n-1,r-1}$. Del pari la linea $L'_{1,r+1}$ omologa della $L'_{o,r}$ non può essere segata che nel suo vertice di mezzo dalle $L'_{2,r+2} \ldots L'_{n-1,r-1}, L'_{o,r}$ omologhe delle precedenti relativamente ad A, A_1 (N. 3, Prop. III): e così ec. Si conclude che: — *Dato un ciclo di vertici* $(ss_1 \ldots s_{n-1})$ *esiste sempre un ciclo di geodetiche, ad esso corrispondente,* $(L'_{o,r} L'_{1,r+1} \ldots L'_{n-1,r-1})$ *avente la proprietà che le geodetiche non si possono segare che nel vertice di mezzo*—.

21. Sia v il vertice di mezzo comune a due geodetiche $L_{o,r}$ $L_{t,\, t+r}$ (aventi o no un estremo a comune) di un ciclo $(L_{o,r} \ldots L_{n-1,r-1})$ rapporto a due aspetti fondamentali A, A_1. Le omologhe $L_{1,r+1}, L_{t+1,t+r+1}$ di quelle due linee rapporto ad A, A_1 passeranno pel loro vertice di mezzo v_1, omologo di v e così via via, finchè si giungerà alle linee $L_{t-1,t+r-1}$ $L_{2t-1,2t+r-1}$ passanti per un vertice v_{t-1} mezzo di amendue; di cui l'omologo sarà il vertice di mezzo comune alle $L_{2t,2t+r}$, $L_{t,t+r}$ (omologhe delle precedenti), cioè v. Dunque $(vv_1 v_2 \ldots v_{t-1})$ è un ciclo di vertici, e, poichè $t<n$, dovrà essere $t=1$. Ciò significa che: — *Se due geodetiche qua-*

lunque di un ciclo ($L_{o,r}\ldots L_{n-1,r-1}$) *hanno a comune il loro vertice di mezzo, esso è un vertice di mezzo comune a tutte le linee del ciclo.* — Evidentemente questo vertice è con simmetria di rotazione almeno di ordine n; e però si trae di qui che: — *Se in un ciclo di geodetiche* ($L_{o,r}\ldots L_{n-1,r-1}$), *rapporto a due aspetti fondamentali, due geodetiche hanno a comune il vertice di mezzo, questo è un vertice di simmetria di rotazione del poliedro* almeno *di ordine* n. —

Dalle cose precedenti risulta dunque che le geodetiche del ciclo ($L'_{o,r}$, $L'_{1,r+1}$, $\ldots L'_{n-1,r-1}$) o avranno tutte a comune il vertice di mezzo, o non avranno alcun vertice a comune. Ora, supposto che esse abbiano a comune il vertice di mezzo v, imaginiamo un osservatore che situato fra v ed s in prossimità di v sopra $L'_{o,r}$, ruoti intorno a v nel senso diretto e sia il tronco vs_g della linea $L'_{g,g+r}$ quello che egli incontra immediatamente. La linea

$$L''_{o,g}=(sv)'_{o,r}+(vs_g)'_{g,g+r}$$

è di lunghezza δ e non è segata nel vertice v da qualunque linea formata coi tronchi $(sv)'_{o,r}$, $(s_r v)'_{o,r}$, $(s_1 v)'_{1,r+1}$, $(s_{r+1}v)'_{1,r+1}$ .... e neppure potrà essere segata da una tal linea in altri vertici, poichè, se ciò fosse, le linee $L'_{o,r}$, $L'_{1,r+1}\ldots L'_{n-1,r-1}$ si taglierebbero in vertici differenti dal vertice di mezzo. Ora la $L''_{o,g}$ dà luogo ad un ciclo ($L''_{o,g}\ldots L''_{n-1,g-1}$) di cui le geodetiche sono appunto formate di quei tronchi. Quindi la $L''_{o,g}$ non sarà segata da alcuna delle $L''_{1,g+1}\ldots L''_{n-1,g-1}$; e perciò la $L''_{1,g+1}$ non potrà essere segata dalle $L''_{2,g+2}$, $\ldots L''_{n-1,g-1}$, $L''_{o,g}$ e così via via; cioè le geodetiche del ciclo ($L''_{o,g}\ldots L''_{n-1,g-1}$) non si tagliano in alcun vertice. Laonde si può concludere che:

Teorema IV. — *Dato un ciclo di vertici* ($ss_1\ldots s_{n-1}$), *relativamente a due aspetti fondamentali* A, A_1, *esiste sempre* (almeno) *un ciclo di geodetiche* ($L_{o,r}$, $L_{1,r+1}\ldots$

$L_{n-1,r-1}$), *ad esso corrispondente, avente la proprietà che le geodetiche non si seghino in alcun vertice.*

22. Quanti contorni chiusi può formare un ciclo (comunque ottenuto) di geodetiche ($L_{o,r} \ldots L_{n-1,r-1}$) che non si taglіano? — Consideriamo dapprima il caso in cui le geodetiche abbiano a comune il loro vertice di mezzo v. Una linea $L_{o,r}$ consterà di due tronchi $(vs)_{o,r}$, $(vs_r)_{o,r}$ concorrenti in v. Imaginiamo un osservatore che si muova intorno a v (nel senso diretto) partendo da $(vs)_{o,r}$; e supponiamo che egli non trovi immediatamente il tronco $(vs_r)_{o,r}$ ma un altro $(vs_g)_{g,g+r}$ appartenente alla linea $L_{g,g\ r}$. È chiaro che l'osservatore dovrà incontrare il secondo tronco di questa linea prima di arrivare a $(vs_r)_{o,r}$, altrimenti (N. 2, A) le $L_{o,r}$, $L_{g,g+r}$ si taglierebbero in v. Similmente se l'osservatore parte da $(vs_g)_{g,g+r}$ e incontra subito un tronco di un altra linea, dovrà trovarne il secondo tronco prima di pervenire a $(vs_{g+r})_{g,g+r}$: e così di seguito. E poichè il numero dei tronchi, compresi fra i due della linea che si considera, diminuisce ciascuna volta, risulta che dovrà giungersi infine ad una linea del ciclo di cui i due tronchi sieno successivi. Gli omologhi di questi tronchi rispetto ad A, A_1 debbono godere della stessa proprietà (N. 3, Prop II): quindi *una linea qualunque del ciclo è formata di due tronchi successivi*. Ora se r ed n hanno il massimo comun divisore ε, per la Prop. VIII (N. 15), quel ciclo si scinde in ε contorni chiusi. Prendasi uno di essi, per es. $L_{o,r} L_{r,2r} \ldots L_{(\nu-1)r,o}$ $\left(\text{posto } \nu = \frac{n}{\varepsilon}\right)$. Questo contorno divide il poliedro in due regioni; delle quali una è formata da ν porzioni $\rho, \rho_1, \rho_2, \ldots$ (congiunte fra loro dal toccarsi delle linee in v) limitate rispettivamente dai tronchi $(vs)_{n-r,o}$ e $(vs)_{o,r}$, $(vs_r)_{o,r}$ e $(vs_r)_{r,2r}$, $(vs_{2r})_{r,2r}$ e $(vs_{2r})_{2r,3r} \ldots$; rapporto ad A, A_r (N. 13, Prop. III) essendo evidentemente omologhe ρ e ρ_1, ρ_1 e $\rho_2 \ldots$, donde (N. 10) $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \ldots$ Una linea $L_{g,g+r}$ del ciclo differente da quelle del contorno considerato, non può esi-

stere fuori di quelle porzioni, giacchè i suoi due tronchi verrebbero ad interporsi fra i due tronchi di una linea del contorno, i quali perciò non sarebbero successivi. Sia ρ la porzione che contiene il tronco $(vs_g)_{g,g+r}$ e quindi l'altro $(vs_g)_{g-r,g}$. Rapporto ai due aspetti A, A_g, i due tronchi che limitano ρ hanno per omologhi i due tronchi precedenti; cioè ρ ha per omologa l'una o l'altra delle due regioni, nelle quali il contorno formato da questi tronchi divide il poliedro. Ma ciò non può aver luogo, di quelle due regioni una essendo più piccola di ρ poichè vi è contenuta e l'altra più grande di ρ, perchè comprende $\rho_1, \rho_2, \ldots$ Non può quindi esistere linea del ciclo diversa da quelle del contorno considerato, e però dovrà essere $\varepsilon = 1$. Dunque *le linee del ciclo formano un sol contorno chiuso.*

23. Abbiasi ora un ciclo $(L_{o,r} \ldots L_{n-1,r-1})$ di geodetiche che non si tagliano e non passano pel loro vertice di mezzo. Applicando di nuovo la Prop. VIII (N. 15) quel ciclo formerà ε contorni chiusi, essendo ε il massimo comun divisore fra r ed n. Esaminiamo il caso in cui sia $\varepsilon > 1$.

Gli ε contorni chiusi formati dalle linee del ciclo sono (N. 15);

$$(L_{o,r} L_{r,2r} \ldots\ldots L_{(\nu-1)r,o}) = C$$

$$(L_{1,r+1} L_{r+1,2r+1} \ldots\ldots L_{(\nu-1)r+1,1}) = C_1$$

$$(L_{2,r+2} L_{r+2,2r+2} \ldots\ldots L_{(\nu-1)r+2,2}) = C_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(L_{\varepsilon-1,r+\varepsilon-1} L_{r+\varepsilon-1,2r+\varepsilon-1} \ldots\ldots L_{(\nu-1)r+\varepsilon-1,\varepsilon-1}) = C_{\varepsilon-1}$$

Relativamente agli aspetti A, A_1, C ha per omologo C_1, C_1 ha per omologo C_2 .... (cioè $(C\, C_1 \ldots C_{\varepsilon-1})$ è un ciclo di contorni). Onde se diciamo R ed R', R_1 ed R'_1,

R_2 ed R'_2...ordinatamente le due regioni, nelle quali ciascuno di quei contorni chiusi divide il poliedro, saranno, per es., omologhe, rapporto ad A, A_1, le R ed R_1, R_1 ed R_2 . . . . . R' ed R'_1 , R'_1 ed R'_2 . . . . (N. 3, Prop. IX): talchè sarà (N. 10).

$$\text{(b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} R = R_1 = R_2 = \ldots = R_{\varepsilon-1} \\ R' = R'_1 = R'_2 = \ldots = R'_{\varepsilon-1}. \end{array} \right.$$

Ora è chiaro dapprima che non può aversi $R=R'$, perchè, se ciò fosse, C_1 non tagliando in alcun punto il contorno C ed avendo differenti da questo contorno almeno i vertici del ciclo, dovrebbe staccare da quella delle due regioni R , R' in cui è situato, una regione più piccola di amendue: e ciò per le (b) è assurdo. Sarà adunque R differente da R' e per esempio $R<R'$. Allora il contorno C_1 non potrà trovarsi nella regione più piccola R, giacchè dovrebbe separare da essa una regione minore di R e di R'. Per la stessa ragione il contorno C_2 non si troverà nella regione R e neppure nella R_1 e così ec. Per conseguenza *le regioni* $R, R_1, \ldots R_{\varepsilon-1}$ *sono tutte esterne l' una all' altra,* cioè *non possono avere altri vertici o spigoli a comune tranne quelli dei contorni che le limitano.*

Inoltre ciascuna delle $C, C_1, \ldots C_{\varepsilon-1}$ (presa sempre nello stesso senso) è omologa a se stessa relativamente ai ν aspetti simili (N. 15),

$$(c) \qquad A \;,\; A_r \;,\; A_{2r} \quad \ldots . A_{(\nu-1)r}:$$

quindi rapporto agli stessi aspetti è pure omologa a sè stessa ciascuna delle $R, R_1, \ldots R_{\varepsilon-1}$.

Ciò premesso, consideriamo due casi:

A) $\nu>2$. Allora ciascuna delle regioni $R, R_1, \ldots R_{\varepsilon-1}$ contiene certamente un elemento con simmetria di rotazione almeno di ordine ν (N. 4, Prop. XII), cioè un elemento che è omologo a se stesso relativamente ai ν aspetti simili (c). Questo elemento rapporto agli aspetti fondamentali A, A_1 deve formare un ciclo di un solo elemento, perocchè, se formasse un ciclo di n elementi, rapporto ad A, A_r non potrebbe esser simile a se stesso. Per conseguenza l'elemento di simmetria della regione R, essendo omologo a sè stesso relativamente ad A, A_1, dovrebbe appartenere anche alla regione R_1 che le è omologa rapporto a questi aspetti e così alla R_2 omologa della R_1... ec. Ciò è possibile soltanto, per la proprietà dimostrata sopra, quando quell'elemento esista sui contorni $C, C_1, C_2, \ldots$ cioè (Prop. VII, N. 14) quando esso sia il vertice di mezzo comune a tutte le linee del ciclo: il che ora escludiamo. Dunque non può essere $\nu > 2$.

B) $\nu = 2$, cioè $\varepsilon = \frac{n}{2}$; il che suppone n pari.

In questo caso la seconda parte del ragionamento precedente non sussiste più, perchè ciascuna delle regioni R, R_1, .. $R_{\varepsilon-1}$ essendo omologa a sè stessa relativamente ai due aspetti A, A_r può contenere (N. 4) in luogo di un elemento con simmetria di rotazione di 2.° ordine, uno spigolo con simmetria di ritorno; e allora non si cade nell'assurdo precedente, giacchè i due vertici di ognuno degli spigoli con simmetria di ritorno (simile a sè stesso rapporto ad A, A_r), contenuti nelle regioni R, R_1,.. $R_{\varepsilon-1}$ potrebbero appartenere ad un ciclo di n vertici relativamente ad A, A_1. Ma, ciò supponendo, non può tuttavia aversi $\nu = 2$; il che proveremo, mostrando prima che deve essere $n = 4$ e poi che questo caso conduce all'assurdo. In vero, il contorno C (per es.) è omologo a se stesso rapporto ad A, A_r e nella regione R trovasi uno spigolo simile a se stesso riguardo a questi aspetti. Nella regione R' si troverà un altro spigolo o elemento simile a se medesimo rapporto ad A, A_r, e gli altri spigoli o elementi del poliedro si distribuiranno in gruppi di due simili *distinti*, relativamente a quegli aspetti (N. 4, Prop. XII). Sicchè potranno esservi, al più, due spigoli simili a se stessi rispetto ad A, A_r. Ma vedemmo che debbono esistere ε di tali spigoli (tutti distinti, affinchè i loro estremi compongano un ciclo di 2ε vertici): dunque $\varepsilon=2$; cioè $n=4$ ed $r=2$. Allora, essendo $(aa_1a_2a_3)$ un ciclo rapporto ad A, A_1, esistono due spigoli aa_2 , a_1a_3 omologhi a sè stessi rapporto ad A, A_2 : onde, riguardo a questi aspetti, non è alcun elemento simile a sè medesimo. Segue (N. 13, Prop. III) che relativamente ad A, A_1 non può aversi alcun ciclo di un elemento; e quindi nessun elemento è omologo a sè stesso riguardo a due qualunque dei quattro aspetti A, A_1, A_2, A_3. Ora conduciamo da ciascuno dei due vertici a, a_2 agli altri due a_1, a_3 le geodetiche e fra esse scegliamo la più breve e sia (per es.) quella che congiunge a, a_1. Detta Λ_0, questa linea produrrà un ciclo $(\Lambda_0\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3)$ rapporto ad A, A_1 (N. 13), le $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ congiungendo rispettivamente a_1, a_2 ; a_2, a_3 ; a_3, a. Se due linee del ciclo hanno un vertice comune, è chiaro che la sua distanza dai due estremi di esse, posti sullo stesso spigolo, deve essere la medesima sopra le due linee. Ne discende dapprima che le due linee pari Λ_0, Λ_2 non possono passare per uno stesso vertice; il quale sarebbe omologo a sè medesimo rapporto ad A, A_2; e parimenti le due linee dispari non possono avere a comune alcun vertice. Però una linea pari, che ha con una delle linee dispari uno stesso estremo, potrà avere con queste altri vertici comuni. Sia u_1 il vertice di Λ_0, fra quelli che trovansi sulle linee dispari, più prossimo al mezzo (vertice o spigolo) di essa e per u_1 passi (per es.) la linea Λ_1. Supposto che u_1 sia situato fra a_1 e il mezzo di Λ_0, indichiamo con u quel vertice di Λ_0, pel quale $(au)_0=(a_1u_1)_0=(a_1u_1)_1$. Per le proprietà di u, u_1 è evidente che nel tratto uu_1 la linea Λ_0 non avrà vertici a comune con alcun altra e che, rapporto ad A, A_1, u_1 sarà omologo di u. Per cui, dicendo $(u\,u_1u_2u_3)$ il ciclo a cui appartiene u, i quattro tronchi $(uu_1)_0$, $(u_1u_2)_1$, $(u_2u_3)_2$, $(u_3u)_3$, che non hanno fra loro alcun vertice comune, comporranno un ciclo rapporto ad A, A_1; cioè il contorno chiuso $u u_1 u_2 u_3 u$, formato da essi, sarà omologo a sè stesso (nella medesima direzione) relativamente ai quattro aspetti A, A_1 , A_2, A_3. Se il vertice u_1 era situato sulla linea A_3 avremmo trovato analogamente un contorno chiuso $uu_1u_2u_3u$ simile a sè stesso rapporto ad A, A_3, A_2, A_1. Siffatto contorno divide il poliedro in due regioni, ciascuna contenente (N. 4) un elemento con simmetria, riguardo a quegli aspetti: il che non può avvenire. Questa conseguenza non sarebbe alterata quando u, cadesse in a_1 cioè le A_0, A_1, A_2, A_3, non avessero vertici a comune (tranne gli estremi), giacchè allora esse formerebbero parimenti un contorno chiuso omologo a sè stesso rapporto ad A, A_1, A_2, A_3. Dunque per ciò che precede, non potendo essere $n = 4$, il supposto di $\nu = 2$ è assurdo.

Si conclude che, anche nel caso considerato in questo N.°, dovrà essere $\varepsilon = 1$. Quindi, ricordando il risultato del N.° precedente, si ha la seguente proprietà,

Teorema V. *In un poliedro (euleriano) un ciclo di geodetiche* ($L_{0,r} \ldots L_{n-1,r-1}$) (*che non si segano*) *corrispondenti ad un ciclo di vertici, relativamente a due aspetti fondamentali, forma un sol contorno chiuso: cioè,* r *è primo con* n.

CASO PARTICOLARE

24. A mostrare un applicazione, supponiamo che il numero n dei vertici di un ciclo relativamente a due aspetti fondamentali di un poliedro sia > 5.

In questo caso il contorno chiuso formato da un ciclo di geodetiche, che non si tagliano, corrispondente ad un ciclo di vertici, essendo simile a sè medesimo relativamente ad n aspetti, divide il poliedro in due regioni, ciascuna omologa a sè stessa almeno rapporto a quegli n aspetti e quindi (N. 4) contenente un elemento con simmetria di rotazione di ordine > 5. Onde il poliedro che consideriamo non potrà appartenere ad alcuna delle tre classi II, III, V

(N. 5) e neppure alle tre classi VI, VII, VIII (N. 6) del sig. Jordan, i poliedri che vi appartengono essendo privi di elementi di simmetria di ordine >5. Quel poliedro sarà adunque necessariamente di una delle due classi I, IV; cioè; — *Un poliedro che relativamente a due aspetti fondamentali presenta un ciclo di un numero di elementi* >5 *sarà con simmetria per rotazione, o con simmetria per rotazione e rovesciamento.*

Pisa 1.° Luglio 1868.

Bertini Eugenio.

APPENDICE

In questa appendice è risoluta la questione proposta nella tesi (N. 18, Nota) relativa al modo con cui si comportano i cicli di elementi riguardo a due aspetti simili qualunque, ed è aggiunto qualche altro caso particolare.

25. Sieno A, A_1 due aspetti simili qualunque di un poliedro, ed E un elemento omologo a sè medesimo rapporto ad essi. Potremo supporre che E sia una faccia, sostituendo il poliedro polare se è un vertice (N. 12). La regione che rimane, staccando dal poliedro la faccia E, è omologa a sè stessa relativamente ad A, A_1. Sieno $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{\nu-1}$, altri $\nu-2$ aspetti, rapporto ai quali la regione (e quindi la faccia) è omologa a sè medesima. In essa (N. 4, Prop. XII) si troverà un elemento E_1 con simmetria, gli altri elementi o spigoli della regione raccogliendosi in gruppi di ν simili (distinti) rapporto ad A, A_1, α_2, $\alpha_3 \ldots \alpha_{\nu-1}$. Talchè, rispetto ad A, A_1, potrà esservi un altro solo elemento E_1 simile a sè stesso: cioè *rapporto a due aspetti simili qualunque possono esistere al più due cicli di un elemento*: e però, *due aspetti simili, rapporto ai quali esistano più di due cicli di un elemento, sono identici.*

Ciò premesso, prendasi fra tutti i cicli di elementi, rapporto ad A, A_1, quello $(s\, s_1 \ldots s_{n-1})$ che è formato del massimo numero n di elementi. Se $n=2$, tutti i cicli saranno di due elementi, tranne due che potranno essere invece di un elemento. Supponiamo quindi $n>2$. In prima dovrà essere l'aspetto A_n (N. 13) identico all'aspetto A, perchè, rapporto ad A, A_n, s, $s_1 \dots s_{n-1}$ sono ordinatamente simili a sè stessi, cioè si hanno almeno tre cicli di un elemento. Ora sia $(\sigma\,\sigma_1 \dots \sigma_{\nu-1})$ un altro ciclo di elementi rapporto ad A, A_1, ove $\nu < n$ e > 1. Ricordando la dimostrazione della Prop. III (N. 13), si ha che

rapporto ad	sono omologhi
$A = m, mo$	$s, s_1, \dots s_{n-1}\ ,\ \sigma, \sigma_1, \dots \sigma_{\nu-1}$
$A_1 = m_1, m_1 o_1$	$s_1, s_2, \dots s\ ,\ \sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma$
. . . .	. . . .
$A_\nu = m_\nu, m_\nu o_\nu$	$s_\nu, s_{\nu+1}, \dots s_{\nu-1}, \sigma, \sigma_1, \dots \sigma_{\nu-1}$
. . . .	. . . .
$A_{n-1}, = m_{n-1}, m_{n-1} o_{n-1}$	$s_{n-1}, s, \dots s_{n-2}\ ,\ \sigma_{\nu-1}, \sigma, \dots \sigma_{\nu-2}$;

cioè (σ), (σ_1),... $(\sigma_{\nu-1})$ sono ordinatamente, rapporto ad A, A_ν, tanti cicli di un elemento. Poichè A_ν è distinto dall'aspetto A (N. 13), segue che dovrà essere $\nu = 2$. E non potrà esistere un altro ciclo di elementi $(\nu\,\nu_1 \dots \nu_{\mu-1})$, pel quale sia $\mu < n$, e > 1; perchè, collo stesso ragionamento si troverebbe $\mu = 2$; e, rapporto ad A, A_2, avremmo quattro cicli di un elemento (σ), (σ_1), (ν), (ν_1). Aggiungasi che, rispetto ad A, A_1, quando esista il ciclo $(\sigma\,\sigma_1)$, non vi sarà alcun ciclo (a) di un elemento, poichè, riguardo ad A, A_2, esisterebbero tre cicli (a), (σ), (σ_1). Ne risulta che, rapporto a due aspetti A, A_ν, $(\nu < n)$, alcun elemento (tranne σ, σ_1) non sarà simile a sè stesso, giacchè dovrebbe formare un ciclo di un elemento, ovvero appartenere ad un ciclo di un numero di elementi $\nu < n$, rispetto ad A, A_1.

Le cose precedenti mostrano che, rapporto a due aspetti simili qualunque di un poliedro (euleriano), non possono aver luogo casi differenti da questi due.

1.° Tutti i cicli sono dello stesso numero di elementi tranne due che possono essere invece di un elemento.

2.° Tutti i cicli sono dello stesso numero n di elementi ($n > 2$), tranne uno ($\sigma\,\sigma_1$) di due elementi; non avendosi in questo caso alcun elemento (diverso da σ, σ_1) omologo a sè stesso rapporto a due aspetti A, A_ν.

Il teorema II (N. 18) ci avverte che il 1.° caso può avvenire. Ora domandiamo: è egualmente possibile il 2.° caso?

26. Dimostreremo anzitutto che, se il 2.° caso è possibile, deve essere $n=4$. — In vero, sia S uno spigolo concorrente in σ (*) ed ($S S_1 \ldots S_{n-1}$) il ciclo a cui appartiene. Gli spigoli di questo ciclo si dividono in due gruppi; quelli con indice pari concorrenti in σ e quelli con indice dispari in σ_1 (i qua' due gruppi sono due cicli rapporto ad A, A_2). Si conducano tutte le geodetiche fra l'estremo (differente da σ o σ_1) di ciascun spigolo di un gruppo e gli estremi degli spigoli dell'altro gruppo, e sia la più breve quella (per es.) che congiunge i due spigoli S, $S_{2\mu+1}$. Indichiamo con Λ_0 la linea formata da essa e da questi due spigoli. Rapporto ad A, A_1, la linea Λ_0 genera un ciclo di linee ($\Lambda_0 \Lambda_1 \ldots \Lambda_{2\tau} \Lambda_{2\tau+1} \ldots \Lambda_{n-1}$), essendo ordinatamente S_1 ed $S_{2\mu+2}, \ldots S_{2\tau}$ ed $S_{2\tau+2\mu+1}$, $S_{2\tau+1}$ ed $S_{2\tau+2\mu+2} \ldots S_{n-1}$ ed $S_{2\mu}$ gli spigoli estremi di $\Lambda_1, \ldots \Lambda_{2\tau}, \Lambda_{2\tau+1}, \ldots \Lambda_{n-1}$. Due linee pari di quel ciclo Λ_0, $\Lambda_{2\tau}$ non potranno avere alcun vertice a comune t; poichè, dovendo essere evidentemente $(\sigma t)_0 = (\sigma t)_{2\tau}$, e Λ_0, σ avendo per omologhi $\Lambda_{2\tau}$, σ, rapporto ad A, $A_{2\tau}$, il vertice t sarebbe omologo a sè medesimo riguardo agli stessi aspetti: e similmente due linee dispari non possono avere alcun vertice comune. Ora imaginiamo un osservatore che faccia un sol giro intorno a σ (nel

(*) Qui si suppone, per brevità, che σ, σ_1 sieno due vertici. Però il ragionamento, con qualche modificazione, è egualmente valido se quei due elementi sono due faccie. D'altronde il risultato ottenuto nell'una ipotesi è vero anche nell'altra, in virtù delle Prop. X. (N. 3) e II. (N. 12).

senso diretto). Se egli incontra (per es.) lo spigolo $S_{2\tau}$ immediatamente dopo lo spigolo S, giacchè relativamente ad A, $A_{2\tau}$ gli spigoli S, $S_{2\tau}$ hanno per omologhi gli spigoli $S_{2\tau}$, $S_{4\tau}$, è evidente (N. 3, Prop. II) che, dopo $S_{2\tau}$, troverà subito $S_{4\tau}$, e così di seguito; talchè sarà

$$S\,,\ S_{2\tau}\,,\ S_{4\tau},\ldots\ S_{n-2\tau}$$

l'ordine di successione delle linee pari (o dispari) intorno a σ (N. 2, H). E siccome quelle linee non hanno alcun vertice comune, l'ordine di successione delle stesse linee intorno a σ_1, come appare manifestamente dalla rappresentazione grafica, sarà (inversamente)

$$S_{2\mu+1}\,,\ S_{2\mu+1-2\tau}\,,\ \ldots\ldots\ S_{2\mu+1+2\tau}.$$

Ma, rapporto ad A, $A_{2\mu+1}$, gli spigoli S, $S_{2\tau}$,.. $S_{n-2\tau}$ hanno per omologhi

$$S_{2\mu+1}\,,\ S_{2\mu+1+2\tau}\ \ldots\ldots\ S_{2\mu+1-2\tau}\ ;$$

e però (N. 3, Prop. II) anche questo è l'ordine di successione intorno a σ_1: onde dovrà essere

$$2\mu+1+2\tau \equiv 2\mu+1-2\tau \ (\text{mod. } n)\,,$$

ossia,

$$4\tau \equiv o \ (\text{mod. } n)\,,$$

cioè $S_{4\tau}=S$; e quindi $n=4$.

Sarà adunque $(A_0\,A_1\,A_2\,A_3)$ il ciclo considerato dianzi, nel quale A_0 e A_2, A_1 e A_3 non hanno rispettivamente vertici a comune. Bensì una linea pari (o dispari) ha coll'una o l'altra delle due linee dispari (o pari) uno stesso spigolo estremo e potrà avere con esse altri spigoli o vertici a comune. Sia u_1 quello dei vertici di A_0 pe' quali passano le linee dispari, più prossimo al mezzo (vertice o spigolo) di A_0 e giaccia (per es.) sulla linea A_1. Supposto che u_1 trovisi fra σ e il mezzo di A_0, diciamo u quel vertice di A_0 pel quale è $(\sigma u)_0 = (\sigma_1 u_1)_0 = (\sigma_1 u_1)_1$. Ripetendo un ragionamento esposto nel N. 23 (B), dimostreremmo similmente che il ciclo a cui dà luogo il tronco $(uu_1)_0$ forma un contorno chiuso, simile a sè stesso rapporto ad A, A_1, A_2, A_3 : onde dovrebbe esistere un elemento omologo a sè medesimo riguardo a quegli aspetti; il che non può avvenire.

Dunque il 2.° caso (N. 25) non è possibile; cioè *due aspetti simili qualunque sono due aspetti fondamentali*; o altrimenti:

Teorema. — Relativamente a due aspetti simili qualunque tutti i cicli sono formati dello stesso numero di elementi, tranne due che possono essere invece di un elemento.

Laonde i teoremi III, IV, V (N. 19, 21, 23) e il caso particolare del N. 24 valgono per due aspetti simili qualunque.

27. Diremo *ordine* di una coppia di aspetti simili il numero di elementi che entra in un ciclo rapporto ad essi.

Un poliedro, che abbia due aspetti simili A, A_1 *d'ordine* n, *presenta due elementi* (*o spigoli*) *con simmetria d' ordine* n *o multiplo di* n. — Infatti il contorno chiuso formato da un ciclo di geodetiche, che non si tagliano, corrispondente ad un ciclo di vertici, relativamente ai due aspetti A, A_1, divide il poliedro in due regioni omologhe a sè stesse rapporto agli n aspetti A, A_1,... A_{n-1}. Onde in ciascuna di quelle regioni trovasi un elemento con simmetria almeno di ordine n, che forma un ciclo rapporto ad A, A_1. Si indichi con E uno di essi e si supponga che sia un vertice, intendendo di considerare il poliedro polare se è una faccia. Sia Em uno spigolo concorrente in E ed (mm_1... m_{n-1}) il ciclo a cui appartiene l'altro vertice m di questo spigolo. Se esiste un altro spigolo Eμ simile agli n spigoli Em, Em_1, ... Em_{n-1}, il vertice μ appartenendo ad un ciclo ($\mu\,\mu_1 \ldots \mu_{n-1}$), saranno E$\mu_1$, E$\mu_2$, ... E$\mu_{n-1}$ altri $n-1$ spigoli simili agli n precedenti. Sicchè il numero degli spigoli simili concorrenti in E dovrà essere multiplo di n; onde ecc.

Viceversa: *Un poliedro che presenta un elemento con simmetria di ordine* n *ha coppie di aspetti simili degli ordini* n *e submultipli di* n. — In vero l'elemento sia, per semplicità, un vertice E. Si prendano n spigoli simili concorrenti in E e sia Em, Em_1, ... Em_{n-1} il loro ordine di successione intorno ad E. Essendo $\frac{n}{\rho} = \nu$ (numero intero), si considerino gli aspetti simili E, Em; E, Em_ρ. Riguardo ad essi, Em, Em_1, ... E$m_{\rho-1}$ hanno per omologhi rispettivamente (N. 3, Prop. II) Em_ρ, E$m_{\rho+1}$, ... E$m_{2\rho-1}$. Rapporto agli stessi aspetti, questi spigoli hanno per omologhi E$m_{2\rho}$, E$m_{2\rho+1}$, ... E$m_{3\rho-1}$. Così seguitando, si troverà infine che, relativamente a quegli aspetti, ($m\, m_\rho\, m_{2\rho} \ldots m_{(\nu-1)\rho}$), ($m_1\, m_{\rho+1} \ldots m_{(\nu-1)\rho+1}$), ... sono tanti cicli di ν elementi; e quindi ecc. - Per esempio, un poliedro della VII classe (N. 6) presenterà coppie di aspetti simili degli ordini 4, 3, 2 rispettivamente; un poliedro dell' VIII classe, coppie di aspetti degli ordini 5, 3, 2.

28. Vedemmo nel N. 24 che, se un poliedro ha due aspetti simili d'ordine $n > 5$, appartiene alla classe I o IV.

Supponiamo ora che un poliedro offra due aspetti simili d'ordine $n > 2$; ed inoltre che i due elementi con simmetria d'ordine $n > 2$, che formano due cicli rapporto a quegli aspetti (N. 27), sieno di natura differente, cioè una faccia e un vertice. Il poliedro che consideriamo non può entrare nelle classi II, III, V (N. 5) prive di elementi di simmetria di ordine > 2: e neppure nella classe IV (N. 5) che può avere soltanto due elementi *simili* (cioè due faccie o due vertici) con simmetria di ordini > 2. Inoltre, se $n > 3$, si vede immediatamente che quel poliedro non appartiene alle classi VI, VII, VIII (N. 6) giacchè un poliedro di queste classi non contiene due gruppi *differenti* di elementi simili con simmetria d' ordine > 3. Se poi $n=3$ il poliedro considerato avrà due gruppi *differenti* di elementi simili con simmetria d'ordine 3 o multiplo di 3 (N. 27); e però non potrà essere delle classi VII, VIII. Dunque: — *Se un poliedro presenta due aspetti simili d'ordine* $\mathrm{n} > 2$, *esistono due cicli di un elemento. Se questi elementi sono una faccia e un vertice il poliedro sarà con simmetria per rotazione quando* $\mathrm{n} > 3$, *e con simmetria per rotazione ovvero tetraedrica quando* $\mathrm{n} = 3$.

29. Se un poliedro ha due aspetti simili di 2.° ordine A, A_1, possono esservi o due cicli di un elemento o uno solo o nessuno (N. 27). Poniamo che abbia luogo il 2.° caso. Sieno E, S rispettivamente l' elemento e lo spigolo simili a sè stessi rapporto ad A, A_1: l' elemento E potrà avere simmetria di rotazione d' ordine > 2? S' immagini che E sia una faccia. La regione che risulta, togliendo dal poliedro la faccia E, è omologa a sè medesima riguardo ad A, A_1. Se E fosse simile a sè stessa rapporto ad altri $\nu - 2$ aspetti $\alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_{\nu-1}$, lo stesso avverrebbe di quella regione; e allora in questa (N. 4, Prop. XII), sarebbe situato un elemento con simmetria, gli altri elementi o spigoli distribuendosi in gruppi di ν simili (distinti) rapporto ai ν aspetti A, A_1, $\alpha_2; \dots \alpha_{\nu-1}$. Laonde non potrebbe esservi uno spigolo S simile a sè stesso riguardo ad A, A_1. Dunque il poliedro che consideriamo ha un gruppo di spigoli simili e uno di elementi simili con simmetria di 2.° ordine; e quindi non è compreso nelle classi I, III, V, VI, VII, VIII; cioè: — *Un poliedro che, relativamente a due aspetti simili (del 2.° ordine), presenta un solo ciclo di un elemento, è con simmetria per rotazione e ritorno, oppure per rotazione e rovesciamento.*

Forlì 19 Agosto 1869.

BERTINI EUGENIO.