R. GÂTEAUX

Fonctions d'une infinité de variables indépendantes

Bulletin de la S. M. F., tome 47 (1919), p. 70-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__70_1>

FONCTIONS D'UNE INFINITÉ DE VARIABLES INDÉPENDANTES ;

PAR M. R. GATEAUX.

Ce Mémoire a été retrouvé dans les papiers de R. Gâteaux, en deux rédactions successives, toutes deux datées de mars 1914. La deuxième était presque une rédaction définitive et il a été possible de la publier sans modification appréciable. Mais elle était inachevée, et la théorie des fonctions analytiques a été publiée d'après la première rédaction. Quoique cette rédaction soit moins parfaite, n'étant destinée certainement qu'à servir à l'auteur lui-même pour sa deuxième rédaction, je n'ai eu à y faire qu'un changement de quelque importance :

Les résultats que je présente sous le n° 41 suivaient ceux du n° 39 et étaient démontrés directement. Après les trois pages que comportait cette démonstration, suivait l'indication de déduire ces résultats d'un théorème qui était énoncé sans démonstration et qui était celui du n° 40. Je me suis conformé à cette indication, ce qui ne présentait pas de difficulté puisque le même principe de démonstration s'appliquait à l'un ou à l'autre théorème et améliorait beaucoup l'exposé.

J'attire l'attention sur le n° 45, qui montre bien que la théorie des fonctions d'une infinité de variables présente, par rapport à celle des fonctions d'un nombre fini de variables, des circonstances essentiellement nouvelles et ne consiste pas simplement dans des généralisations évidentes. Il faut donc apporter la plus grande précision dans les énoncés et les démonstrations, et les distinctions entre les différentes sortes de domaines d'existence considérés par l'auteur, domaines — C, domaines — S, domaines Γ, ont une grande importance.

PAUL LÉVY.

CHAPITRE I.

PRÉLIMINAIRES.

1. Parmi les systèmes d'une infinité de variables, les deux plus importants constituent l'espace E_ω et l'espace Ω [1].

2. *L'espace* E_ω. — Un *point* de cet espace est constitué par une suite infinie de valeurs réelles

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots).$$

Le point $x' = (x'_1, \ldots, x'_n, \ldots)$ tend vers le point x si les valeurs x'_n tendent simultanément (uniformément ou non) vers les valeurs x_n. D'après cela, on peut définir l'écart des deux points x et x' par la formule

$$E(x, x') = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \frac{|x_n - x'_n|}{1 + |x_n - x'_n|}.$$

Un ensemble de points est *limité* s'il est tel que

$$|x_n| \leqq M_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

M_n étant une suite de nombres positifs ou nuls.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de points soit *compact* est qu'il soit limité.

Une fonction *continue* dans un ensemble de points *limité et fermé* est *bornée* dans cet ensemble, y *atteint son maximum*, y est uniformément continue.

Si une série de fonctions *continues* dans un domaine D converge *uniformément* dans tout ensemble limité extrait de D, sa somme est une fonction *continue* dans D.

3. *L'espace* Ω. — Un *point* de cet espace est constitué par une suite infinie de valeurs réelles

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$$

telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

---

[1] *Voir* FRÉCHET, *Circolo matematico di Palermo*, 1906 et 1910.

L'*écart* de deux points x et x' est défini par la formule

$$E(x, x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + \ldots + (x_n - x'_n)^2 + \ldots}$$

Pour qu'un ensemble de points soit *compact*, il faut et il suffit qu'il existe une série convergente $\sum a_p^2$ telle que pour tout point x de l'ensemble, et pour toutes les valeurs de n, on ait

$$x_n^2 + x_{n+1}^2 + \ldots < a_n^2 + a_{n+1}^2 + \ldots.$$

Les deux dernières propositions données pour l'espace E_ω s'appliquent à l'espace Ω, en substituant le mot *compact* au mot *limité*.

4. *Les espaces* E'_ω *et* Ω'. — Un point de l'espace E'_ω est constitué par une suite infinie de valeurs complexes

$$z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots); \qquad (z_n = x_n + iy_n).$$

Un point de l'espace Ω' est constitué par une suite infinie de valeurs complexes

$$z = (z_1, \ldots, z_n, \ldots)$$

telles que $\sum |z_n|^2$ converge.

Les définitions et les propriétés des espaces E_ω et Ω s'étendent immédiatement aux espaces E'_ω et Ω'.

5. Nous nous bornerons à étudier les fonctions d'un point de E_ω ou de E'_ω. Mais des considérations analogues peuvent être faites sur les fonctions d'un point de Ω ou de Ω'.

CHAPITRE II.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION CONTINUE EN SÉRIES DE POLYNOMES.

6. *Fonction d'un point de* E_ω. — Soit la fonction

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$$

définie et continue dans E_ω. Faisons

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = 0,$$

$F(x)$ devient une fonction continue $f_n(x_1, \ldots, x_n)$. Déterminons ensuite un polynome $p_n(x_1, \ldots, x_n)$ tel que pour

$$-n \leqq x_p \leqq n \qquad (p = 1, 2, \ldots, n)$$

on ait

$$|p_n - f_n| < \frac{1}{n}.$$

Enfin, représentons par $x'_1, x'_2, \ldots$ des nombres définis par

$$x'_k = x_k \quad \text{si} \quad -n \leqq x_k \leqq n,$$
$$x'_k = 0 \quad \text{si} \quad |x_k| > n.$$

Théorème. — *On a*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \lim_{n \to \infty} p_n(x'_1, \ldots, x'_n),$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble limité de points.

Soit $\mathcal{L}$ un ensemble limité quelconque, tel que

$$|x_n| < M_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Si nous parvenons à déterminer N tel que $n > N$ entraîne dans $\mathcal{L}$ l'inégalité

$$(1) \qquad |F(x_1, \ldots, x_n, \ldots) - p_n(x'_1, \ldots, x'_n)| < \varepsilon,$$

le théorème sera démontré.

Occupons-nous d'abord de $F(x) - f_n(x')$. Les deux points x et x' appartiennent à $\mathcal{L}$, dans lequel F est uniformément continue. Je puis donc déterminer η tel que $E(x, x') < \eta$ entraîne

$$(2) \qquad |F(x) - F(x')| = |F(x) - f_n(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or

$$E(x, x') < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{M_m}{1 + M_m}.$$

On peut déterminer n_1 tel que l'on ait

$$\sum_{m=n_1+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{M_m}{1 + M_m} < \eta$$

et n_2 supérieur à $M_1, \ldots, M_{n_1}$. Dès que n est supérieur à la fois à n_1 et n_2, l'écart $E(x, x')$ est inférieur à η et, par suite, l'inégalité (2) est vérifiée.

Occupons-nous maintenant de $f_n(x') - p_n(x')$. Comme $|x'_k| < n$, k étant un des nombres 1, 2, ..., n, cette différence a son module inférieur à $\frac{1}{n}$, donc à $\frac{\varepsilon}{2}$, si $n > n_3 = \frac{2}{\varepsilon}$ Si alors $n > N$, N étant le plus grand des nombres n_1, n_2, n_3, l'inégalité (1) est vérifiée. Le théorème est donc démontré.

7. Si la fonction F est définie seulement dans un domaine limité $|x_n| \leqq M_n$, le théorème se simplifie. On peut déterminer une suite de polynomes $p_n(x_1, \ldots, x_n)$ qui tendent vers $F(x)$ pour n infini, et cela uniformément dans tout le domaine.

8. *Fonction d'un point de* Ω. — Pour donner une idée des modifications à apporter à nos démonstrations lorsqu'on passe de l'espace E_ω à l'espace Ω, nous allons démontrer le théorème analogue au précédent dans l'espace Ω.

Soit $F(x)$ une fonction définie et continue dans Ω. Déduisons-en, comme précédemment, la fonction f_n et le polynome p_n. *On a*

$$F(x_1, \ldots, x_n, \ldots) = \lim_{n \to \infty} p_n(x_1, \ldots, x_n),$$

la convergence étant uniforme dans tout ensemble compact de points de Ω.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble compact de points de Ω. Il existe une série $\sum a_k^2$ telle que l'on ait pour tout point de $\mathcal{E}$

$$\sum_{k=n+1} x_k^2 < \sum_{k=n+1} a_k^2.$$

Donnons-nous ε, et proposons-nous de déterminer N tel que pour $n > N$ la différence $F(x) - p_n$ ait son module inférieur à ε.

Occupons-nous d'abord de $F(x) - F(\xi_n)$, en appelant ξ_n le point $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$. La fonction $F(x)$ étant uniformément continue dans $\mathcal{E}$, on peut déterminer η tel que la différence considérée soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$, si $E(x, \xi_n) < \eta$. Or,

$$E(x, \xi_n) < \sqrt{a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \ldots},$$

et l'on peut déterminer n_1 tel que pour $n > n_1$ on ait bien $E(x, \xi_n) < \eta$.

Occupons-nous maintenant de $f_n - p_n$. Appelons n_2 le plus grand des nombres $\frac{2}{\varepsilon}$ et $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots}$. Dès que $n > n_2$, on a, quel que soit k, $|x_k| < n$ et, par suite,

$$|f_n - p_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le plus grand des nombres n_1 et n_2 peut alors être pris pour nombre N, de sorte que le théorème est démontré.

CHAPITRE III.

POLYNOMES.

9. *Définition d'un polynome.* — Nous nous bornerons maintenant aux espaces E_ω et E'_ω.

Soient $R_1, \ldots, R_p, \ldots$ un système de nombres positifs; k un facteur positif variable; considérons le domaine D des points pour lesquels il existe une valeur de k telle que $|z_p| < k R_p$.

Une fonction $P(z) = P(z_1, \ldots, z_p, \ldots)$ sera dite *un polynome de degré n, défini dans* D si :

1° Elle est continue dans tout domaine $|z_p| \leqq k R_p$ $(p = 1, \ldots, \infty)$;

2° $P(\lambda z + \mu t)$ est un polynome de degré n par rapport aux variables complexes λ, μ, quels que soient les points z, t, appartenant à D.

Si $P(\lambda z + \mu t)$ est homogène en λ, μ, nous dirons que le polynome $P(z)$ est *homogène*. Nous l'appellerons encore une *forme*.

10. *Décomposition d'un polynome en somme de polynomes homogènes.* — Nous avons, $P(z)$ étant un polynome de degré n, défini dans D,

$$P(\lambda z) = P_0 + \lambda P_1(z) + \ldots + \lambda^n P_n(z), \tag{3}$$

les coefficients de ce polynome en λ étant déterminés pour tout point z. Je dis que $P_q(z)$ *est une forme de degré q*.

Il suffit, dans (3), de donner $n + 1$ valeurs différentes à λ, pour avoir des équations déterminant les $P_q(z)$ et montrant que ce sont des polynomes homogènes.

Remplaçons ensuite z par μz, puis λ par $\lambda\mu$, et comparons les formules obtenues. Nous voyons que

$$P_q(\mu z) = \mu^q P_q(z).$$

La proposition est démontrée, et l'étude des polynomes est ramenée à celle des formes.

11. *Expression d'une forme linéaire.* — Soit

$$\zeta_n = (z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots)$$

la $n^{ième}$ *section* de z (n^e Abschnitt de Hilbert). Si z est dans D, il en est de même de ζ_n. Si $P(z)$ est une forme linéaire définie dans D, il en est de même de $P(\zeta_n)$ qui est alors de la forme

$$P(\zeta_n) = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n.$$

A cause de la continuité, cette expression doit tendre vers $P(z)$, pour n infini, de sorte que

$$P(z) = a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n + \ldots, \tag{4}$$

cette série étant convergente dans tout D. Il faut pour cela que les a_p soient tels que la série

$$|a_1| R_1 + \ldots + |a_p| R_p + \ldots \tag{5}$$

soit convergente.

12. Réciproquement, si cette condition est réalisée, l'expression (4) obtenue pour $P(z)$ converge uniformément dans tout domaine

$$|z_p| \leqq k R_p$$

et y représente donc une fonction continue. On vérifie que c'est une forme linéaire.

13. *Remarque.* — La série (5) est, pour la série (4), une série majorante dans le domaine $|z_p| \leqq R_p$. Si donc on altère les a_p, de manière à altérer de moins de ε la somme de la série de (5), $P(z)$ est, dans ce domaine, altéré de moins de ε,

14. *Expression d'une forme quadratique.* — Si $P(z)$ est une forme quadratique définie dans D, on a

$$\begin{aligned} P(\lambda z + \mu t) &= \lambda^2 P(z) + \mu^2 P(t) + 2\lambda\mu Q(z, t), \\ 2Q(z, t) &= P(z+t) - P(z) - P(t), \\ Q(z, z) &= P(z). \end{aligned}$$

D'après ces formules, Q est une *forme bilinéaire symétrique* dont la connaissance entraîne celle de P.

Considérons z et t comme limites de leurs $n^{\text{ième}}$ et $p^{\text{ième}}$ sections ζ_n et θ_p; $P(z)$ et, par suite, $Q(z, t)$ étant supposés continus, cette dernière fonction est la limite, lorsque n et p deviennent infinis, de $Q(\zeta_n, \theta_p)$. Cette dernière expression étant une forme bilinéaire, on arrive au résultat suivant :

La forme bilinéaire symétrique $Q(z, t)$ *peut être représentée comme la limite, pour n et p infinis, de l'expression*

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta} z_\alpha t_\beta, \tag{6}$$

la convergence étant uniforme dans tout domaine $|z_m| < k R_m$, $|t_m| < k R_m$ $(m = 1, 2, \ldots, \infty)$. *La forme quadratique* $P(z)$ *est égale à* $Q(z, z)$.

Pour que la convergence soit uniforme dans le domaine indiqué, il faut qu'elle le soit pour

$$z_m = \varepsilon_m R_m, \qquad t_m = \varepsilon'_m R_m,$$

les ε et les ε' étant deux suites de nombres de module 1.

15. Réciproquement, cette condition est suffisante et, si elle est vérifiée, la limite, pour n et p, de l'expression (6) est une forme bilinéaire symétrique définie dans D.

Par hypothèse, l'expression

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha \varepsilon'_\beta R_\alpha R_\beta \tag{7}$$

converge uniformément quand n et p deviennent infinis. La limite peut s'écrire

$$(7') \qquad \sum_\alpha \varepsilon_\alpha R_\alpha \sum_\beta a_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta R_\beta.$$

Donc la série

$$(8) \qquad \sum_\alpha R_\alpha \left| \sum_\beta a_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta R_\beta \right|$$

converge et, par suite, l'expression

$$(9) \qquad \sum_\alpha z_\alpha \sum_\beta a_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta R_\beta$$

représente dans D une forme linéaire en z.

Pour introduire le point t, il faut intervertir l'ordre des sommations. L'expression

$$(10) \qquad \sum_\alpha z_\alpha \sum_{\beta=1}^{p} a_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta R_\beta$$

existe et tend vers (9) pour p infini. On le voit immédiatement en appliquant à la différence entre les expressions (9) et (10) la remarque du n° **13**. Dans (10), intervertissons l'ordre des sommations :

$$(10') \qquad \sum_{\beta=1}^{p} \varepsilon'_\beta R_\beta \sum_\alpha a_{\alpha\beta} z_\alpha.$$

Cette expression a un sens et est égale à la précédente; cela est évident pour $p = 1$ et s'établit de proche en proche pour toutes les valeurs de p. Donc à la limite, pour p infini, on obtient l'expression

$$(9') \qquad \sum_\beta \varepsilon'_\beta R_\beta \sum_\alpha a_{\alpha\beta} z_\alpha$$

égale à l'expression (9). Par suite,

$$(11) \qquad \sum_\beta t_\beta \sum_\alpha a_{\alpha\beta} z_\alpha$$

existe quand z et t appartiennent à D et est linéaire par rapport à t.

Montrons qu'elle est continue par rapport à l'ensemble des points z et t dans le domaine $|z_n| \leqq k\mathrm{R}_n$, $|t_n| \leqq k\mathrm{R}_n$. Il suffit de montrer que, étant donné ε, on peut trouver N et P tels que, si $n > \mathrm{N}$, $p > \mathrm{P}$, l'expression

$$(12) \qquad \sum_{\beta=1}^{p} t_\beta \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\beta} z_\alpha$$

diffère de (11) de moins de ε. Nous ne restreignons rien en supposant $k = 1$.

Décomposons cette différence en deux parties. D'abord

$$(13) \qquad \sum_{\beta} t_\beta \sum_{\alpha} a_{\alpha\beta} z_\alpha - \sum_{\beta} t_\beta \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\beta} z_\alpha.$$

Cette expression a un sens. En effet, on peut raisonner sur

$$(14) \qquad \sum_{\alpha=n+1}^{\infty} z_\alpha \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta \mathrm{R}_\beta,$$

comme nous l'avons fait sur (9), et en déduire l'existence de

$$(14') \qquad \sum_{\beta} \varepsilon'_\beta \mathrm{R}_\beta \sum_{\alpha=n+1}^{\infty} a_{\alpha\beta} z_\alpha$$

et, par suite, de

$$(13') \qquad \sum_{\beta} t_\beta \sum_{\alpha=n+1}^{\infty} a_{\alpha\beta} z_\alpha,$$

qui est alors égale à (13). De plus, le module de (13) est au plus égal au maximum, par rapport à ε'_β du module de (14'), qui est lui-même au plus égal au maximum par rapport à ε_α, ε'_β du module de

$$\sum_{\alpha=n+1}^{\infty} \varepsilon_\alpha \mathrm{R}_\alpha \sum_{\beta} a_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta \mathrm{R}_\beta,$$

et par suite, dès que n est supérieur à un certain nombre N, le module de (13) est inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Considérons maintenant

$$(15) \qquad \sum_{\beta=p+1}^{\infty} t_\beta \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\beta} z_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha \sum_{\beta=p+1}^{\infty} a_{\alpha\beta} t_\beta$$

(car les n séries dont la somme constitue le second membre existent). Cette expression a son module inférieur au module maximum, par rapport à ε_α et ε'_β, de

$$(16) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} \varepsilon_\alpha R_\alpha \sum_{\beta=p+1}^{\infty} a_{\alpha\beta} \varepsilon'_\beta R_\beta,$$

inférieur lui-même au module maximum de

$$(17) \qquad \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha R_\alpha \sum_{\beta=p+1}^{\infty} a_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta R_\beta,$$

car on peut choisir les ε d'indice supérieur à n, de manière à rendre (17) supérieur à (16). Donc, pour p supérieur à un certain nombre P, l'expression (15) est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, pour $n > N$ et $p > P$, la somme des expressions (13) et (15), égale à la différence des expressions (11) et (12), est inférieure à ε.

L'expression (12) tendant vers (11), quelle que soit la manière dont n et p deviennent infinis, cette dernière expression est linéaire, non seulement par rapport à t, mais par rapport à z.

16. Si deux formes quadratiques sont identiques dans le voisinage de l'origine $|z_p| \leqq R_p$ ($p = 1, \ldots, \infty$), elles ont mêmes coefficients. Si elles sont nulles, leurs coefficients sont nuls.

17. La série (7) est pour la forme bilinéaire (6) une sorte de série majorante dans le domaine $|z_p| \leqq R_p$, $|t_p| \leqq R_p$. Mais on ne sait pas si elle est absolument convergente.

La série (7) a tous ses termes inférieurs en module à un certain nombre M (on peut prendre pour M le maximum de $|Q|$ dans le domaine $|z_p| \leqq R_p$, $|t_p| \leqq R_p$). Soit h compris entre 0 et 1. La série à termes positifs

$$\sum_{\alpha}\sum_{\beta} \mathrm{M} h^{\alpha+\beta} = \frac{\mathrm{M} h^2}{(1-h)^2} \tag{18}$$

est une majorante pour la forme bilinéaire (6) dans le domaine

$$|z_p| < \mathrm{R}_p h^p, \quad |t_p| < \mathrm{R}_p h^p \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty).$$

18. Soit un tableau de coefficients arbitraires $a_{\alpha\beta}$, tels que $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$.

Il existe toujours un domaine

$$|z_\alpha| < \mathrm{R}_\alpha, \quad |t_\alpha| < \mathrm{R}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \infty)$$

à l'intérieur duquel les $a_{\alpha\beta}$ sont les coefficients d'une forme bilinéaire, et par suite d'une forme quadratique.

19. *Une forme bilinéaire et, par suite, une forme quadratique, n'est jamais convergente dans tout l'espace* E'_ω.

20. *Formes de degrés quelconques.* — On leur étend de proche en proche les raisonnements et les résultats précédents.

21. *Série de polynomes de degré donné.* — Si une série de polynomes de degré p

$$\mathrm{P}_1(z) + \ldots + \mathrm{P}_n(z) + \ldots,$$

définis dans le domaine $|z_p| \leqq \mathrm{R}_n$, converge dans ce domaine vers une fonction continue $\mathrm{P}(z)$, cette fonction est un polynome de degré p au plus.

On obtient les termes de ce polynome en faisant la somme des termes correspondants des P_n.

Si l'on se limite au $n^{\text{ième}}$ terme de la série donnée, l'erreur commise sur un terme quelconque de $\mathrm{P}(z)$ est au plus égale au maximum, par rapport à z, de l'erreur commise sur $\mathrm{P}(z)$. (Peut être démontré, par exemple, au moyen de l'intégrale de Cauchy.)

CHAPITRE IV.

DÉRIVÉES PARTIELLES.

22. Les dérivées partielles des divers ordres d'une fonction d'un point de E_ω ou E'_ω se définissent comme dans le cas d'un nombre fini de variables.

23. *Formule des accroissements finis.* — Soit $F(x)$ une fonction d'un point de E_ω, définie dans le champ

$$a_p \leqq x_p \leqq a_p + h_p \qquad (p = 1, \ldots, \infty).$$

Supposons-la continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre. On peut passer du point $a + h$ au point a en introduisant successivement chacun des accroissements h_1, h_2, ... On arrive ainsi à la formule

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} &F(a+h) - F(a \\ &\quad = \sum_p h_p F'_{x_p}(a_1, \ldots, a_{p-1}, a_p + \theta_p h_p, a_{p+1} + h_{p+1}, \ldots) \\ &\qquad\qquad\qquad (0 < \theta_p < 1). \end{aligned} \right.$$

24. *Représentation d'une fonction admettant des dérivées continues.* — Soit $F(x)$ continue dans E_ω ainsi que ses dérivées du premier ordre. Nous avons vu au n° 6 que $F(x)$ peut être représentée par l'expression

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} p_n(x'_1, \ldots, x'_n).$$

On peut choisir p_n de telle sorte que l'on ait aussi

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x_k} = \lim_{n \to \infty} \frac{\partial p_n(x'_1, \ldots, x'_n)}{\partial x_k},$$

la convergence étant uniforme pour F *et pour chaque dérivée dans tout ensemble limité de points.*

Il suffit de reprendre le raisonnement du n° 6, mais en choisissant p_n de manière que, pour $|x_k| \leqq n$ $(k = 1, \ldots, n)$, on ait

$$|f_n - p_n| < \frac{1}{n}, \quad \left| \frac{\partial f_n}{\partial x_k} - \frac{\partial p_n}{\partial x_k} \right| < \frac{1}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ce résultat s'étend au cas où F admet des dérivées continues jusqu'à un ordre déterminé ou de tous les ordres.

25. *Variations d'une fonction.* — Nous allons emprunter au Calcul fonctionnel la notion de variation, qui nous rendra les services que rend la différentielle totale dans la théorie des fonctions d'un nombre fini de variables.

Soit dans E_ω, soit dans E'_ω, les variations sont définies par l'égalité

$$\delta F(x) = \left[\frac{d}{d\lambda} F(x + \lambda\,\delta x)\right]_{\lambda=0},$$
$$\delta^n F(x) = \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} F(x + \lambda\,\delta x)\right]_{\lambda=0}.$$

Les variations comprennent les dérivées comme cas particulier.

26. *Variations et dérivées d'un polynome.* — Nous nous bornerons à étudier les variations des formes. Soit $F(z)$ une forme de degré p définie dans le domaine

$$\text{(D)}\qquad |z_p| < k R_p \qquad (p = 1, \ldots, \infty).$$

On a

$$(20)\qquad \begin{aligned} F(\mu z + \lambda\,\delta z) = {} & \mu^p F(z) + \mu^{p-1}\lambda A_1(z, \delta z) + \ldots \\ & + \mu^{p-k}\lambda_k A_k(z, \delta z) + \ldots + \lambda^p F(z), \end{aligned}$$

z et δz étant deux points de D.

Étudions $A_k(z, \delta z)$. En procédant comme nous avons fait (n° 10) pour $P_q(z)$, on trouve que A_k est une forme de degré $p - k$ en z et k en δz. En outre, on tire de (20)

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta F(z, \delta z) &= A_1(z, \delta z), \\ \delta^k F(z, \delta z) &= k!\, A_k(z, \delta z), \end{aligned}\right.$$

$$(21')\qquad \delta^p F(z, \delta z) = p!\, F(\delta z).$$

Les variations suivantes sont nulles.

On parvient ainsi à la formule de Taylor pour une forme, puis pour un polynome.

Formons ces variations en partant du développement de F. Soit, par exemple,

$$(22)\qquad F(z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha\beta}\, z_\alpha z_\beta.$$

Formons

$$F(z + \lambda\,\delta z) = \sum_{\alpha, \beta} a_{\alpha,\beta}(z_\alpha + \lambda\,\delta z_\alpha)(z_\beta + \lambda\,\delta z_\beta),$$

série double de polynomes en λ, uniformément convergente quand λ est inférieur à un nombre positif fixe. On peut la dériver terme à terme, par rapport à λ. Par suite, on obtient les variations de $F(z)$ en prenant, terme à terme, les différentielles totales de son développement (22).

On peut encore interpréter ceci en disant qu'un polynome admet des dérivées de tous les ordres dans son domaine D de convergence. Les variations s'obtiennent en combinant ses dérivées comme s'il s'agissait de former les différentielles totales successives d'une fonction d'un nombre fini de variables.

CHAPITRE V.

FONCTIONS ANALYTIQUES.

27. Nous appellerons *série entière* en $z_1, \ldots, z_n, \ldots$, une série de la forme

$$F(z) = P_0 + P_1(z) + \ldots + P_n(z) + \ldots, \tag{23}$$

où

$$P_n(z) = \sum_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} a^{(n)}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} z_{\alpha_1} \ldots z_{\alpha_n} \tag{24}$$

est une forme de degré n. Supposons que ces formes convergent dans un même domaine D, somme des domaines

$$|z|_p < \lambda \rho_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty), \tag{D_λ}$$

λ variant et les ρ étant une suite de nombres positifs bien déterminés. Supposons, de plus, que la série (23) converge uniformément pour tout point z_1 du domaine D_{λ_1}.

Dans le domaine D_λ, $F(z)$ prend la forme

$$P_0 + \frac{\lambda}{\lambda_1} P_1(z_1) + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^n P_n(z_1) + \ldots.$$

Le rayon de convergence de cette série, variable avec z_1, admet une limite inférieure μ, au moins égale à l'unité. $F(z)$ converge uniformément dans tout domaine D_λ tel que $\lambda < \mu\lambda_1$: mais il n'en est pas de même si $\lambda > \mu\lambda_1$.

Nous poserons

$$R_p = \mu\lambda_1\rho_p.$$

Les considérations qui précèdent nous conduisent à donner les définitions suivantes :

28. *Définitions.* — Soient $R_1, \ldots, R_p, \ldots$ une suite de nombres positifs, et C le domaine constitué par la réunion des domaines

$$(C_k) \qquad |z_p| < kR_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty) \quad (0 < k < 1).$$

Il ne faut pas confondre C avec le domaine $|z_p| < R_p$.

Nous appellerons domaine — C tout domaine constitué comme le domaine C précédent, mais ayant pour centre un point quelconque (non nécessairement l'origine).

Si les P_n sont définis dans tout C_k et si la série (23) converge uniformément dans tout C_k, $F(z)$ sera dite *fonction de z holomorphe dans* C. Elle est uniformément continue et bornée dans tout C_k.

29. Si une fonction $F(z)$, holomorphe dans un domaine $|z|_p < \rho_p$, est nulle dans un domaine, les coefficients de son développement sont nuls.

Si deux fonctions holomorphes sont égales dans ce domaine, elles ont même développement.

30. *Domaine de convergence absolue.* — M. Hilbert a étudié les fonctions analytiques d'un point de E'_ω (*Circ. mat. di Palermo*, t. XXVII, 1909, p. 59). Mais il ne considère que des domaines de la forme $|z_p| \leqq \rho_p$, à l'intérieur desquels la série entière qui définit $F(z)$ est absolument convergente. Pour établir le lien entre les deux points de vue, nous allons, en partant de nos définitions, former un tel domaine :

a. Soit un domaine C_k particulier; $|F(z)|$ y admet un maximum M. Chaque terme des polynomes P_n a son module $\leqq M$.

En effet, en annulant tous les z_p ne figurant pas dans le terme considéré, $F(z)$ se réduit à une fonction entière d'un nombre fini de variables, ayant son module $\leqq M$, pour laquelle le résultat énoncé se déduit de l'expression du terme considéré par une intégrale de Cauchy.

b. Soit h compris entre 0 et 1. Dans le domaine

$$(C_{k,h}) \qquad |z_p| \leqq KR_p h^p \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty),$$

la forme linéaire $P_1(z)$ est majorée par

$$Mh + Mh^2 + \ldots = \frac{Mh}{1-h}.$$

Pour majorer $P_2(z)$, en considérant les termes contenant z_1, puis ceux ne contenant plus z_1, mais contenant z_2, et ainsi de suite, on trouve

$$\frac{Mh^2}{1-h}+\frac{Mh^4}{1-h}+\ldots=\frac{Mh^2}{(1-h)(1-h^2)}.$$

On opère de même pour les autres polynomes $P_n(z)$. Finalement, on trouve pour $|F(z)|$ la série majorante

$$(25)\quad M\left[1+\frac{h}{1-h}+\frac{h^2}{(1-h)(1-h^2)}+\frac{h^3}{(1-h)(1-h^2)(1-h^3)}+\ldots\right],$$

qui est convergente. Donc :

Théorème. — *Si une fonction* $F(z)$ *est holomorphe dans le domaine* $-C$ *ayant pour centre l'origine et défini par les nombres* R_p, *le développement de cette fonction en série entière est majoré par une série convergente à termes positifs dans tout le domaine*

$$|z_p| \leqq KR_p h^p \qquad (p=1, 2, \ldots, \infty),$$

K *et* h *étant deux constantes positives inférieures à* 1.

En d'autres termes, $F(z)$ est holomorphe au sens de M. Hilbert dans ce dernier domaine.

31. Théorème. — *Soit* $F(z)$ *une fonction holomorphe autour de l'origine dans le domaine* C *défini par* $R_1, \ldots, R_n, \ldots$. *Soient* z *et* t *deux points de* $-$ C, λ *et* μ *deux variables complexes*, $F(\lambda z+\mu t)$ *est holomorphe en* λ, μ *tant que le point* $\lambda z+\mu t$ *est intérieur à* $-$ C.

En effet, la série

$$(26)\qquad F(\lambda z+\mu t)=P_0+\ldots+P_n(\lambda z+\mu t)+\ldots$$

est une série de polynomes en λ, μ uniformément convergente dans tout domaine de variation de λ, μ tel que

$$|\lambda z_n+\mu t_n| \leqq KR_n,$$

quel que soit K entre 0 et 1.

D'une façon précise, on vérifie sans peine que, si λ_0 et μ_0 sont tels que $\lambda_0 z+\mu_0 t$ appartiennent à $-$ C, la fonction $F(\lambda z+\mu t)$ existe et est développable en série entière quand λ et μ sont respectivement intérieurs à deux cercles de centres λ_0, μ_0. Cela résulte de ce qu'on peut toujours choisir $K < K' < 1$ de manière que z, t et $\lambda_0 z + \mu_0 t$ soient intérieurs à C_k, et qu'alors $\lambda z + \mu t$ est intérieur à $C_{k'}$ si

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{K' - K}{2K}, \qquad |\mu - \mu_0| < \frac{K' - K}{2K}.$$

Dans ces limites, la série (26) converge uniformément et est par suite développable en série entière par rapport à $\lambda - \lambda_0$ et $\mu - \mu_0$. K' étant aussi voisin de 1 que l'on veut, on peut même assurer que le développement est valable pour

$$(27) \qquad |\lambda - \lambda_0| < \frac{1 - K}{2K}, \qquad |\mu - \mu_0| < \frac{1 - K}{2K}.$$

Soient maintenant z, t, $\lambda_0 z + \mu_0 t$, $\lambda_1 z + \mu_1 t$ appartenant à $-C$, et par suite qu'on peut supposer appartenir à un même C_k. On peut passer par prolongement analytique du développement en $\lambda - \lambda_0$, $\mu - \mu_0$ au développement en $\lambda - \lambda_1$, $\mu - \mu_1$. En effet, si le point λ, μ du plan des $\lambda_1 \mu_1$ se déplace en ligne droite de λ_0, μ_0 jusqu'à λ_1, μ_1, le point $\lambda z + \mu t$ reste intérieur à C_k, et par suite les développements successifs à considérer convergent dans deux cercles associés de rayons au moins égaux à $\frac{1 - K}{2K}$.

32. Théorème réciproque. — *Si* $F(z)$ *est continu dans un domaine* $-C$ *et si* $F(\lambda z + \mu t)$ *est holomorphe tant que* z, t, $\lambda z + \mu t$ *appartiennent à ce domaine*, $F(z)$ *y est holomorphe.*

Soit z un point de $-C$, et par suite d'un des $C_{k'}$. Par hypothèse, $F(\lambda z)$ est de la forme

$$(28) \qquad F(\lambda z) = P_0 + \ldots + \lambda^n P_n(z) + \ldots,$$

cette série en λ ayant un rayon de convergence $\rho > 1$. L'expression de $P_n(z)$ par une intégrale de Cauchy prise sur un cercle γ de rayon ρ' compris entre 1 et ρ,

$$(29) \qquad P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\lambda z)\,d\lambda}{\lambda^{n+1}},$$

montre que ce polynome est uniformément contenu dans C_k.

De plus, on a

$$F[\nu(\lambda z + \mu t)] = \sum_n \nu^n P_n(\lambda z + \mu t).$$

Cette expression, étant une fonction holomorphe de $\lambda\nu$, $\mu\nu$, est encore égale à

$$\sum_n \nu^n \mathfrak{P}_n(\lambda, \mu),$$

les $\mathfrak{P}_n$ étant des polynomes de degré n, et ces développements étant valables pour ν assez petit. Leur comparaison montre que $P_n = \mathfrak{P}_n$, et est par suite une forme de degré n en λ et μ.

Donc $P_n(z)$ est une forme de degré n définie dans tout C_k.

La formule (29) montre que

$$|P_n(z)| \leqq \frac{M}{\rho'^n},$$

M étant indépendant de n, et $\rho' > 1$ ne dépendant que de K et non du choix de z dans C_k. Le développement (28) est donc uniformément convergent lorsque $\lambda = 1$ et que z est dans C_k, ce qui achève de démontrer le théorème.

33. *Variations d'une fonction holomorphe.* — Soit la fonction

$$F(z) = P_0 + P_1(z) + \ldots + P_n(z) + \ldots, \tag{30}$$

holomorphe dans — C. Sa variation d'ordre μ est la quantité

$$\left[\frac{d^n}{d\mu^n} F(z + \mu t)\right]_{\mu=0}.$$

Si nous écrivons

$$F(\lambda z + \mu t) = P_0 + \ldots + P_n(\lambda z + \mu t) + \ldots, \tag{31}$$

nous sommes conduits à étudier cette série pour

$$|\lambda| < 1 + \varepsilon_1, \qquad |\mu| < \varepsilon_2.$$

Soient z, t appartenant à un C_k déterminé, $F(\lambda z + \mu t)$ est holomorphe en λ, μ tant que

$$|\lambda| + |\mu| < \frac{1}{k}.$$

Choisissons $\lambda_0 > 1$ et μ_0 vérifiant cette inégalité; la série (31) converge uniformément pour $|\lambda| \leqq \lambda_0$, $|\mu| < \mu_0$. On peut la dériver terme à terme indéfiniment dans ce domaine; en faisant alors $\lambda = 1$, $\mu = 0$, il vient

$$\delta^n F(z, t) = \delta^n P_n(z, t) + \delta^n P_{n+1}(z, t) + \ldots. \tag{32}$$

Donc, *dans* $-C$, $F(z)$ *admet des variations de tous les ordres qu'on obtient en prenant terme à terme les variations de la série* (30). *On obtient ainsi la série* (32), *dont les termes sont des formes en* z, *et qui converge dans* $-C$.

L'emploi de l'intégrale de Cauchy montre sans difficulté que la série (32) converge uniformément quand z et t sont intérieurs à un C_k déterminé, ce qui achève de montrer que $\delta^n F$ *est une fonction holomorphe* de z et δz. De plus, c'est *une forme de degré n en* δz, car chacun de ses termes est une telle forme.

La *série de Maclaurin* se généralise par la série

$$(33) \qquad F(z) = F(0) + \delta F(0, z) + \ldots + \frac{1}{n!}\delta^n F(0, z) + \ldots.$$

34. Une fonction holomorphe autour de l'origine est déterminée par sa valeur et celle de ses dérivées en ce point. En particulier, si toutes ces valeurs sont nulles, la fonction est identiquement nulle.

35. On en déduit le théorème suivant :

Soit, dans le plan de chaque variable, z_n *un arc de courbe* $O_n A_n$, *ces arcs étant tous intérieurs à un même domaine* C_k. *Une fonction holomorphe est déterminée par les valeurs qu'elle prend pour les points* z *telles que toutes leurs coordonnées soient nulles, sauf un nombre fini d'entre elles qui appartiennent aux arcs* O_n, A_n *correspondants.*

36. *Séries de fonctions holomorphes :*

THÉORÈME. — *Si une série de fonctions holomorphes,*

$$(34) \qquad F(z) = F_1(z) + \ldots + F_n(z) + \ldots,$$

de fonctions holomorphes dans $-C$, *converge uniformément dans tout* C_k, *sa somme est holomorphe dans* $-C$. *De plus, le développement de* $F(z)$ *en série entière s'obtient en ajoutant terme à terme les développements des fonctions* $F_n(z)$.

La première partie du théorème se déduit immédiatement du théorème analogue pour les fonctions de deux variables en remplaçant z par $\lambda z + \mu t$ dans la formule (34).

La seconde partie résulte ensuite de l'expression des différents termes des développements des fonctions $F(z)$ et $F_n(z)$ en série entière à l'aide d'une intégrale de Cauchy.

L'emploi de cette intégrale montre de plus que si, en limitant le développement (34) à ses n premiers termes, on commet une erreur inférieure dans C_k à ε_n, l'erreur commise sur un terme quelconque du développement de $F(z)$ en série entière est aussi inférieure à ε_n.

37. Théorème. — *Si une fonction définie dans* — C *est continue dans tous les domaines* C_k *qui composent* — C *et admet en tout point de* — C *des dérivées premières par rapport à toutes ses variables, elle est holomorphe dans ce domaine.*

Soit le domaine — C, défini par les nombres $R_1, \ldots, R_p, \ldots$. Il est d'abord évident que la $p^{\text{ième}}$ section de $F(z)$ est une fonction F_p holomorphe pour $|z_n| < R_n$ $(n = 1, \ldots, p)$.

Si maintenant nous démontrons que, dans tout C_k, F_p converge uniformément vers F, il résultera du théorème précédent que $F(z)$ est bien une fonction holomorphe.

Or, le domaine C_k étant fermé, F y est uniformément continu, et par suite $|F - F_p|$ est inférieur à tout nombre donné ε, dès que l'écart entre z et sa $p^{\text{ième}}$ section est inférieur à un nombre η convenablement choisi en fonction de ε. Or il en est ainsi, quel que soit z, pour p assez grand, puisque cet écart est inférieur à

$$\sum_{n=p+1} \frac{R_n}{1+R_n} \frac{1}{n!}.$$

CHAPITRE VII.

FONCTIONS ANALYTIQUES ET PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

38. *Élément de fonction analytique.* — Nous appellerons ainsi toute expression

$$\sum_n P_n(z-a),$$

admettant un domaine — C de convergence que nous appellerons *domaine* — C *de l'élément.* Le point a sera dit *centre de l'élément.*

Un tel élément peut avoir plusieurs domaines — C de convergence. Ainsi l'élément

$$\sum_n (z_1 + \ldots + z_p + \ldots)^n$$

admet pour domaines — C tous ceux définis par des nombres R_p dont la somme égale l'unité.

39. *Définition d'une opération* Π. — Soient un élément

$$F(z) = \sum_n P_n(z)$$

ayant l'origine pour centre, C un de ses domaines — C de convergence. Soit a un point de C. Posons

$$z = a + z'.$$

L'élément considéré devient une série dont les termes sont des polynomes en z'. D'après le n° 36, elle représente une fonction holomorphe de z' holomorphe dans le domaine C' de centre a défini par les nombres

$$R'_p = R_p - |a_p| \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty),$$

et dont le développement en série de Maclaurin s'obtient en ajoutant terme à terme les développements des fonctions $P_n(a + z')$.

Nous appellerons *opération* Π l'opération qui consiste à passer du développement en série de Maclaurin autour d'un point au développement de la même fonction autour d'un autre point.

Le nouvel élément admettra un domaine de convergence C_1 qui peut comprendre des points n'appartenant pas à C. La valeur fournie par le nouveau développement sera par définition la valeur de la fonction en ces points.

40. Théorème. — *Si deux éléments $\mathfrak{P}_a(z - a)$, $\mathfrak{P}_b(z - b)$, admettant respectivement comme domaines — C de convergence des domaines C_a et C_b ayant un point c commun, ont en ce point la même valeur ainsi que toutes leurs dérivées, ils représentent la même fonction dans toute la partie commune à C_a et C_b.*

Soit m un point autre que c commun à C_a et C_b. Nous voulons montrer que $\mathfrak{P}_a(z - a)$ et $\mathfrak{P}_b(z - c)$ ont même valeur en ce point.

En c, on peut former un domaine — C intérieur à C_a et C_b; soit C ce domaine. L'opération Π, appliquée aux éléments $\mathfrak{P}_a(z - a)$ et $\mathfrak{P}_b(z - b)$, conduit à des développements en série autour du point c, qui sont respectivement égaux à ces éléments dans C, d'après les nos 36 et 39, et qui sont identiques entre eux puisque $\mathfrak{P}_a$ et $\mathfrak{P}_b$ ont même valeur et mêmes dérivées en c. Ces deux éléments ont donc même valeur et mêmes dérivées dans tout C.

Soit c' un point de C. Raisonnant sur ce point comme nous l'avons fait sur c, nous démontrons l'identité de $\mathfrak{P}_a$ et $\mathfrak{P}_b$ dans un nouveau domaine C'; nous la démontrons ensuite dans un nouveau domaine C'', et ainsi de suite.

Il reste à montrer qu'on peut choisir c', c'', ... de manière qu'un des domaines C', C'', ... comprenne le point m. Il suffit pour cela de les prendre sur la droite cm. Les points m et c étant intérieurs à C_a sont, pour une même valeur de K, intérieurs à un des C_k qui forment C_a; tous les points de la droite mc le sont aussi. Ils sont de même, pour une certaine valeur de K', intérieurs à un des ensembles $C_{k'}$ qui forment C_b. En appelant $R_1, \ldots, R_p, \ldots$ et $R'_1, \ldots, R'_p, \ldots$ les suites de nombres définissant les domaines C_a et C_b, nous pouvons considérer les ensembles C', C'', ... comme définis par les nombres $\rho_1, \ldots, \rho_p, \ldots$ en appelant ρ_p le plus petit des nombres $R_p(1-K)$ et $R'_p(1-K')$. Or les coordonnées c_p et m_p de c et m diffèrent d'une quantité certainement inférieure à $2KR_p$ et $2K'R'_p$. Il en résulte qu'on peut passer de c à m en répétant N fois l'opération II, N étant le plus petit entier supérieur à $\frac{2K}{1-K}$ et $\frac{2K'}{1-K'}$, quantité indépendante de l'indice p. Le théorème est donc démontré.

41. On peut en particulier appliquer ce théorème en supposant que b et c coïncident. Nous savions déjà qu'on peut développer $\mathfrak{P}_a$ en série de Maclaurin en b, et qu'on obtient un développement convergent et identique à $\mathfrak{P}_a$ dans un certain domaine — C intérieur à C_a. Mais il peut converger dans un domaine — C plus étendu, soit C_1. Le théorème précédent nous montre qu'il est encore identique à $\mathfrak{P}_a$ en tout point m commun à C_a et C_1, et qu'inversement, connaissant le développement de $\mathfrak{P}_a$ autour de m, même s'il n'est pas convergent en b, on peut retrouver le développement autour de ce point.

42. *Définition d'une fonction analytique.* — Étant donné un élément $\mathfrak{P}_a(z-a)$ admettant un domaine — C de convergence, il en admettra en général plusieurs. Nous appellerons *domaine — S de convergence* l'ensemble des domaines — C de convergence de cet élément (1).

(1) Le domaine — S est donc le lieu des points z pour lesquels il existe un nombre déterminé $K > 1$ tel que les quantités

$$K\,|z_1-a_1|,\ \ldots,\ K\,|z_p-a_p|,\ \ldots$$

puissent être prises comme rayons de convergence associés de l'élément considéré.

(P. L.)

Soit b un point intérieur au domaine — S de convergence de P_a, domaine que nous appellerons S_a. Par une opération Π nous déduirons de P_a un élément P_b qui admet un certain domaine — S de convergence, soit S_b. P_a et P_b ont la même valeur en tout point m commun à S_a et S_b (¹). Nous pouvons opérer à partir de P_b comme nous l'avons fait à partir de P_a, et pour l'opération suivante :

Une fonction analytique est l'ensemble des éléments qu'on peut déduire d'un élément initial par un nombre fini d'opérations Π.

Inversement, en partant d'un élément quelconque, on peut retrouver l'élément initial, et, par suite, tout autre élément, par un nombre fini d'opérations Π.

On appelle *domaine d'existence* d'une fonction analytique l'ensemble des points de E'_ω où elle est définie. M. Hilbert a montré qu'une fonction analytique peut avoir en un même point de E'_ω une infinité continue de déterminations. Il en résulte qu'on ne peut pas étendre aux fonctions analytiques d'un point de E'_ω les considérations développées par Volterra et Poincaré pour les fonctions d'un nombre fini de variables (*voir* Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 53).

Il résulte de la définition donnée qu'une fonction analytique est définie par sa valeur et celles de ses dérivées en un point, ou par ses valeurs dans le voisinage d'un point, comme nous l'avons vu, n° 35 pour les fonctions holomorphes.

43. *Fonctions monogènes dans un système de contours.* — M. Hilbert a indiqué plusieurs différences entre les fonctions analytiques d'une infinité de variables et celles d'un nombre fini de variables. Nous venons d'en voir une. En voici une nouvelle.

Considérons dans le plan de chaque variable z_n une suite de con-

---

(¹) Ce résultat, qui est énoncé sans démonstration, n'est nullement évident, dans le cas où b et m ne sont pas intérieurs à un même domaine — C de centre a, mais à deux domaines différents C_1 et C_2. On peut le démontrer comme suit :

Appelons a_p, b_p, m_p les coordonnées d'indice p des points a, b, m. Considérons le point z dont la coordonnée z_p est, pour chaque valeur de p, celui des deux nombres b_p et m_p qui diffère le moins de a_p. Ce point est intérieur à C_1 et C_2, comme aussi au domaine C_b de centre b et contenant m.

On peut alors appliquer le théorème du n° 40 pour passer de b à z, tous deux intérieurs à C_1 et C_b, puis de z à m, tous deux intérieurs à C_2 et C_b. Donc P_a et P_b ont même valeur en m. (P. L.).

tours simples

$$\Gamma_{n,1}, \ldots, \Gamma_{n,p}, \ldots$$

dont chacun contienne le précédent. Ils peuvent s'étendre à l'infini. Désignons par Γ_p le domaine des points de E'_ω tels que z_n soit intérieur à $\Gamma_{n,p}$ pour toutes les valeurs de n, et par Γ la somme des domaines Γ_p.

Soit $F(z)$ une fonction définie dans Γ, continue dans chaque Γ_p, et admettant des dérivées partielles premières. Nous appellerons une telle fonction *fonction monogène définie dans* Γ.

Est-ce une fonction analytique au sens du n° 42?

Soit a un point intérieur à Γ_p. Soit C_n le plus grand cercle du centre a_n intérieur à $\Gamma_{p,n}$, et R_n son rayon. D'après le n° 37, $F(z)$ *est développable en série entière admettant comme domaine de convergence le domaine* — C *de centre* a *et défini par les nombres* $R_1, \ldots, R_n, \ldots$. C'est donc une fonction holomorphe en tout point de Γ.

Résulte-t-il de là que $F(z)$ est une fonction analytique? Il faudrait encore pour cela qu'on puisse passer d'un élément de $F(z)$ à un autre élément quelconque par un nombre fini d'opérations Π. On peut facilement former des fonctions pour lesquelles cela est possible. Mais il n'en est pas toujours ainsi comme nous le verrons plus loin par un exemple.

44. Théorème. — *Si une série de fonctions monogènes dans* Γ *est uniformément convergente dans toute portion finie de tout* Γ_p, *sa somme est fonction monogène dans* Γ.

Nous appelons portion finie de Γ_p tout domaine déduit de Γ_p en remplaçant chacun des $\Gamma_{n,p}$ par un contour fini intérieur à $\Gamma_{n,p}$ ou partiellement confondu avec lui.

Tout point a de Γ peut, comme nous l'avons vu n° 43, être considéré comme le centre d'un domaine — C intérieur à un des Γ_p. On peut alors appliquer le théorème du n° 36, qui montre que la somme de la série considérée est holomorphe dans ce domaine, et, par suite, admet des dérivées en a. Elle est donc monogène dans Γ.

45. *Exemple de fonction monogène non analytique.* — Soit $\varphi(z)$ une fonction analytique *d'une seule variable* $z = x + iy$, définie entre les droites $y = 1$, $y = -1$, admettant ces droites comme coupures essentielles, et bornée dans toute bande $\alpha \geqq y \geqq -\alpha$, $(0 < \alpha < 1)$.

Ces conditions sont vérifiées, par exemple, par la fonction

$$\sum \frac{A_n}{z - a_n},$$

les a_n étant une suite de points partout dense sur les droites $y = 1$ et $y = -1$, et A_n étant le terme général d'une série absolument convergente.

Considérons alors la fonction d'un point de E'_ω

$$\text{(35)} \qquad F(z) = \sum_n \frac{\varphi(z_n)}{n!}.$$

Cette série est uniformément convergente dans tout système de bandes

$$\alpha \geqq y_n \geqq -\alpha, \qquad (0 < \alpha < 1, \qquad z_n = x_n + iy_n).$$

Désignons par $\Gamma_{n,p}$ le domaine du plan des z_n défini par

$$1 - \frac{1}{p} > y_n > -\left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

et déduisons-en, comme n° 37, les domaines Γ_p et Γ de l'espace E'_ω. $F(z)$ est une fonction monogène définie dans Γ.

Soit a un point de E'_ω pour lequels tous les a_n soient réels. La série (35) a pour domaine — C de convergence de centre a celui défini par les rayons tous égaux à 1. Il n'est pas nécessaire, pour étudier les opérations II pouvant être effectuées sur $F(z)$ de considérer d'autres domaines de convergence que ceux-là, car le domaine — C de convergence ayant pour centre un point b dont les coordonnées b_n ne seraient pas toutes réelles est intérieur au domaine correspondant au point a ayant pour coordonnées les parties réelles de b_n.

Nous voyons alors que, si l'on passe d'un point a à un point a' par un nombre fini p d'opérations II, on a

$$|a'_n - a_n| < p, \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Un élément de centre a' ne pourra donc être déduit d'un élément de centre a que si les différences $a'_n - a_n$ sont toutes inférieures en module à un nombre fini indépendant de n.

$F(z)$ n'est donc pas une fonction analytique, mais on peut extraire de F une infinité de fonctions analytiques, autant qu'on peut constituer des suites $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, telles que si $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ et $a'_1, \ldots, a'_n, \ldots$ sont deux suites distinctes, $|a'_n - a_n|$ ne soit pas borné.

L'ensemble des suites ainsi constitué a la puissance du continu. On obtient, en effet, cette puissance en considérant les suites $a_n = n^\alpha$, α étant un nombre quelconque supérieur à 1. D'autre part, l'ensemble de toutes les suites $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ a la puissance du continu (continu à une infinité de dimensions).

Donc on peut extraire de la même fonction monogène $F(z)$ un ensemble de fonctions analytiques ayant la puissance du continu.

46. *Remarque.* — Si $F(z)$ est une fonction monogène dans Γ, $F(\lambda z + \mu t)$ n'est pas en général analytique en λ, μ quand $\lambda z + \mu t$ est dans Γ.

Reprenons l'exemple précédent, et soient les points z et t définis par

$$z_n = 0, \qquad t_n = n,$$

d'où

$$F(\lambda z + \mu t) = \sum_n \frac{\varphi(n\mu)}{n!},$$

série dont les termes sont des fonctions analytiques en μ. Mais $\varphi(n\mu)$ n'est définie que pour $-\frac{1}{n} < y < \frac{1}{n}$, (en posant $\mu = x + iy$). La série précédente n'a donc de sens que sur l'axe réel, sur lequel elle converge uniformément et représente une fonction continue, et ne représente pas une fonction analytique.

47. Théorème. — *Soit* $F_n(z_1, \ldots, z_n)$ *la* $n^{\text{ième}}$ *section de* $F(z)$. *On a*

$$F(z) = \lim_{n \to \infty} F_n(z_1, \ldots, z_n),$$

la convergence étant uniforme dans toute portion finie de tout Γ_p.

Soit Γ'_p une portion finie d'un Γ_p déterminée. Γ'_p étant compact, il suffit, pour que $|F - F_n|$ soit inférieur dans ce domaine à un nombre positif donné ε, que l'écart entre z et sa $n^{\text{ième}}$ section soit inférieur à un nombre convenablement choisi η. Il en est bien ainsi dans tout l'espace E'_ω dès que n est assez grand, d'une manière précise, dès que

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} < \eta.$$