BULLETIN DE LA S. M. F.

L. GODEAUX

Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 47 (1919), p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1919__47__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

RECHERCHES SUR LES INVOLUTIONS DOUÉES D'UN NOMBRE FINI DE POINTS DE COÏNCIDENCE APPARTENANT A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE;

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Les recherches de MM. Enriques et Severi sur les surfaces hyperelliptiques (¹) nous ont conduit à étudier les involutions douées d'un nombre fini de coïncidences, appartenant aux surfaces algébriques. Les études de MM. Enriques et Severi étaient basées sur ce fait qu'une surface hyperelliptique est l'image d'une involution appartenant à une surface de Jacobi et douée d'un nombre fini de coïncidences. Partant de cette propriété, on démontre qu'une telle involution est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface de Jacobi en elle-même. On détermine alors des « modèles projectifs » des différentes surfaces hyperelliptiques. La propriété qui vient d'être énoncée subsiste pour les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface de genre un ($p_a = P_4 = 1$) (²) ou de genre zéro et de bigenre un ($p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$) (³). Nous avons

(¹) *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques* (*Acta mathematica*, 1909, Vol. XXXII et XXXIII).

(²) F. ENRIQUES, *Sulle trasformazioni razionali delle superficie di genere uno* (*Rend. R. Accad. Bologna*, 1910).

(³) L. GODEAUX, *Sur les involutions appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 0$, $p_6 = 1$ (*Bull. Soc. math. de France*, 1913); *Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de coïncidences, appartenant à certaines surfaces algébriques* (*Mémoire Soc. des Sciences du Hainaut*, 1913).

été assez heureux pour pouvoir l'étendre au cas de surfaces quelconques ([1]).

Nous reprenons, dans ce travail, cette démonstration. Précisément, nous démontrons que :

Une involution, douée d'un nombre fini de points de coïncidence, appartenant à une surface algébrique, est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de cette surface en elle-même.

Ensuite, nous construisons une surface normale, image d'une involution d'ordre premier, en déterminant les singularités de cette surface aux points de diramation (correspondant aux points de coïncidence). Nous terminons ces recherches en établissant les relations qui lient les caractères invariants de la surface support de l'involution et ceux de la surface image de l'involution ([2]).

CHAPITRE I.

THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LES INVOLUTIONS DOUÉES D'UN NOMBRE FINI DE POINTS DE COÏNCIDENCE.

1. Soit F une surface algébrique possédant une involution I_n, d'ordre $n(> 2)$, doublement infinie, douée d'un nombre fini de points de coïncidence. Nous allons démontrer que cette involution est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même, c'est-à-dire, en d'autres termes, que les points d'un groupe de l'involution I_n dépendent rationnellement de l'un d'entre eux.

([1]) *Sur les involutions douées d'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique* (*Rend. Accad. Lincei*, 1914).

([2]) Des résumés de ces recherches ont paru dans les *Comptes rendus*, 2e semestre 1914 et 2e semestre 1916.

Outre nos Travaux déjà cités sur les involutions, nous citerons encore : *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genre un* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1914); *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation* (*Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 1914); *Mémoire sur les surfaces algébriques de genre zéro et de bigenre un* (*Bull. Soc. math. de France*, 1915); *Recherche des involutions de genres zéro, bigenre un, appartenant à une surface de genre un* (*Annaes Acad. Porto*, 1916).

Nous pouvons toujours trouver, sur la surface F, un système continu complet $\{C\}$, irréductible, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les points unis de I_n ne sont pas des points-base de $\{C\}$.

2° Le système $\{C\}$ n'est composé, ni avec I_n, ni avec une involution avec laquelle I_n serait elle-même composée.

3° La dimension de chacun des systèmes linéaires $|C|$, contenus dans $\{C\}$, est au moins égale à l'unité.

L'involution I_n définit, entre les points de F, une correspondance symétrique $(n-1, n-1)$ qui transforme les courbes C en des courbes K. En général, un groupe de I_n dont un point se trouve sur une courbe C générique n'a pas un second point sur cette courbe, mais il peut y avoir exception pour un nombre fini, α, de groupes de I_n.

Les groupes de I_n, dont un point se trouve sur une courbe C, ont $n-1$ points sur la courbe K correspondante et ces $n-1$ points forment une série γ'_{n-1}. Lorsqu'un groupe de I_n possède deux points sur la courbe C, ses $n-2$ autres points sont évidemment doubles pour la courbe K. Celle-ci possède donc $(n-2)\alpha$ points doubles variables.

Au système $\{C\}$, l'involution I_n fait donc correspondre un système $\{K\}$, continu, ayant un certain nombre de points-base (aux points fondamentaux de I_n et aux points qui correspondent aux points-base de $\{C\}$) et dont la courbe générique possède $(n-2)\alpha$ points doubles variables.

2. Nous démontrerons actuellement que si les courbes K sont irréductibles, le système continu complet $\{K\}$ est de dimension supérieure à celle de $\{C\}$.

Considérons à cet effet un système linéaire complet $|C|$ de $\{C\}$. Les courbes K, transformées des courbes de $|C|$, forment un système rationnel, non linéaire (puisque $n>2$) et dont la dimension, égale à celle de $|C|$, est au moins l'unité, d'après la troisième hypothèse faite sur $\{C\}$.

D'après un théorème de M. Enriques [1], les courbes K qui

---

[1] *Un'osservazione relativa alla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* (*Rend. Circ. Matem. Palermo*, 1896).

viennent d'être envisagées, appartiennent totalement à un système linéaire $|K|$ dont la dimension est supérieure à celle de $|C|$. Observons, de plus, que la courbe générique du système $|K|$ n'a pas de points doubles variables ([1]), mais que $|K|$ possède les mêmes points-bases, avec les mêmes multiplicités, que le système rationnel formé par les courbes K homologues des courbes de $|C|$.

Lorsque $|C|$ décrit le système continu $\{C\}$, le système $|K|$ décrit un système continu $\{K\}$ (que nous supposerons complété le cas échéant) dont la dimension est supérieure à celle de $\{C\}$ et qui comprend, comme courbes totales, toutes les courbes K transformées des courbes de $\{C\}$.

Si les courbes K *sont irréductibles, elles sont les courbes totales d'un système continu complet* $\{K\}$, *dont la dimension surpasse celle de* $\{C\}$ *et dont la courbe générique est dépourvue de points doubles variables.*

3. Nous allons démontrer *l'incompatibilité des deux hypothèses suivantes :*

a. Les courbes K *sont irréductibles.*

b. Le système $\{C\}$ *n'a pas de points-base aux points unis de* I_n.

Nous utiliserons à cette fin le raisonnement fait par MM. Enriques et Severi dans leur Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques, en l'étendant un peu.

D'après l'hypothèse a, le système complet $\{K\}$ est plus ample que $\{C\}$ et nous pouvons donc trouver une courbe $\overline{K}$ de ce système qui ne soit pas la transformée d'une courbe C. Soit L la courbe engendrée par $n-1$ points des groupes de I_n dont le $n^{\text{ième}}$ point se trouve sur $\overline{K}$. Lorsque la courbe $\overline{K}$ varie d'une façon continue dans le système $\{K\}$ de manière à se réduire à une courbe K_1 transformée d'une courbe C_1 de $\{C\}$, la courbe L se réduit à la courbe composée $(n-2)K_1 + C_1$. Observons qu'en se réduisant à K_1, la courbe $\overline{K}$ acquiert en général des points

([1]) Enriques, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* (n° 5) (*Mém. Soc. Ital. delle Scienze*, 1896).

doubles, c'est-à-dire que la connexion de la surface de Riemann $\overline{K}$ s'abaisse lorsque celle-ci se réduit à K_1.

Supposons la courbe L irréductible et indiquons par x_1, x_2, x_3, ..., x_n les n points d'un groupe variable de I_n. Pour fixer les idées, supposons que x_2 soit le point situé sur $\overline{K}$, x_1, x_3, ..., x_n, étant situés sur L.

La courbe L étant irréductible, on peut faire décrire à x_2, sur la courbe $\overline{K}$, envisagée comme surface de Riemann, un cycle $\bar{\sigma}$ tel que, sur L, x_1 et x_3 soient échangés entre eux. Lorsque $\overline{K}$ se réduit, par une variation continue, à K_1, un des points x_1, x_3, ..., x_n, par exemple x_1, se trouve sur C_1, les autres étant sur K_1.

Mais par le fait que cette réduction s'opère par variation continue, la propriété de x_1, x_3 d'être échangés quand x_2 décrit un certain cycle $\bar{\sigma}$ sur $\overline{K}$ doit subsister. Deux cas peuvent se présenter :

1° Le cycle $\bar{\sigma}$, décrit sur $\overline{K}$, devient, sur K_1, un cycle σ_1 non homologue à zéro. Lorsque x_2 décrit σ_1, x_1, qui se trouve sur C_1, et x_3, qui se trouve sur K_1, doivent s'échanger.

2° Le cycle $\bar{\sigma}$, décrit sur $\overline{K}$, devient, sur K_1, un cycle homologue à zéro ou, en d'autres termes, se réduit à un point P.

Dans le premier cas, l'échange des points x_1, de C_1 et x_3, de K_1, ne peut se produire qu'en un point commun aux deux courbes. Mais ce point est alors point de coïncidence pour l'involution, ce qui n'a pas lieu en général, d'après l'hypothèse b.

Dans le second cas, le point P auquel se réduit le cycle $\bar{\sigma}$ est nécessairement un des points doubles que $\overline{K}$ acquiert lorsque cette courbe se réduit à K_1, c'est-à-dire un des points doubles variables des courbes K homologues des courbes C. Le groupe de I_n déterminé par P contient donc deux points P_1, P_2 communs aux courbes C_1, K_1. Faisons décrire à x_2, sur la courbe K_1, envisagée comme surface de Riemann, un cycle infiniment petit σ autour du point P; le point x_1, qui se trouve sur C_1, et le point x_3, qui se trouve sur K_1, doivent s'échanger et cet échange ne peut se faire qu'en un des points P_1, P_2. Mais alors ce point est un point de coïncidence de l'involution I_n, ce qui n'a pas lieu en général, d'après l'hypothèse b.

De tout ceci, on conclut que les hypothèses a et b sont contradictoires si la courbe L est supposée irréductible. Il faut donc que la courbe L soit réductible, et de telle manière que l'on ne puisse faire décrire à x_2, sur $\overline{K}$, un cycle tel que x_1 et x_3 soient échangés. Pour cela, la courbe L doit contenir une partie X, lieu du point x_1, se réduisant à C_1 lorsque $\overline{K}$ se réduit à K_1. Cette propriété subsiste encore si l'involution I_n possède des points de coïncidence qui soient en même temps des points fondamentaux (¹).

La courbe X varie sur F d'une manière continue et doit se réduire à une courbe de $\{C\}$. Mais le système continu $\{C\}$ est complet, donc X est une courbe de $\{C\}$. La courbe $L - X + \overline{K}$ est une courbe totale de $\{K\}$, puisque transformée d'une courbe X de $\{C\}$. La courbe X n'étant qu'une partie de L, $\overline{K}$ est à la fois courbe totale et courbe partielle de $\{K\}$, ce qui est absurde. On en conclut donc que les hypothèses a et b sont incompatibles, que L soit réductible ou non. Comme on peut toujours choisir $\{C\}$ de manière à satisfaire à l'hypothèse b, c'est l'hypothèse a qui doit tomber. Les courbes K ne peuvent être irréductibles.

Les courbes K *sont réductibles.*

4. Supposons que les courbes K soient réductibles, mais en un nombre de courbes inférieur à $n - 1$. Alors, une des composantes K' sera le lieu de plusieurs points appartenant à un même groupe variable de I_n.

On démontrera, en suivant le raisonnement fait plus haut, que le système continu complet $\{K'\}$, contenant les courbes K' comme courbes totales, a la dimension supérieure à celle de $\{C\}$. Le raisonnement de MM. Enriques et Severi, répété comme ci-dessus, conduira alors à une absurdité. Par suite :

Les courbes K *se décomposent en* $n - 1$ *courbes variables.*

5. Considérons un système linéaire $|C_1|$, triplement infini, contenu dans un système continu complet $\{C_1\}$ satisfaisant aux mêmes conditions que le système $\{C\}$ dont il a été question cidessus. Les courbes qui correspondent aux courbes C_1 au moyen

(¹) Enriques et Severi, *Mémoire*... (*loc. cit.*), p. 336.

de la correspondance $(n-1, n-1)$ déterminée sur F par I_n se décomposent donc en $n-1$ parties que nous désignerons par C_2, $C_3, \ldots, C_n$.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les points d'un groupe générique de I_n qui ne soient ni l'un ni l'autre des points-base de $|C_1|$. Les courbes de $|C_1|$ passant par x_1 forment un réseau que nous désignerons par Σ_1. Les courbes $C_2, C_3, \ldots, C_n$, homologues des courbes C_1 de Σ_1, passent respectivement par les points $x_2, x_3, \ldots, x_n$ et engendrent des systèmes doublement infinis que nous désignerons par $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_n$.

Deux des systèmes $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ ne peuvent coïncider. Cela ne pourrait en effet se présenter que dans deux cas :

a. Σ_1 coïncide, par exemple, avec Σ_2.
b. Les systèmes Σ_2, Σ_3, par exemple, coïncident.

Dans le premier cas, les courbes de Σ_1 passeraient par x_2, ce qui est impossible par hypothèse.

Dans le second cas, les courbes C_2 de Σ_2 passeraient par x_3 et celles C_3 de Σ_3 par x_2. Mais alors, quand x_1 décrit une courbe arbitraire C_1, les courbes C_2 et C_3 coïncident, ce qui est impossible.

Les systèmes $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ sont donc n systèmes doublement infinis distincts.

Considérons un groupe générique de I_n et soit y_1 un quelconque de ces points. Soit H_1 le faisceau formé par les courbes de Σ_1 passant par y_1.

Les courbes de Σ_2, homologues des courbes C_1, de H_1, passent par un certain point du groupe considéré. Désignons ce point par y_2 et par H_2 le système des courbes C_2 homologues des courbes de H_1. Désignons de même par $y_3, y_4, \ldots, y_n$; $H_3, H_4, \ldots, H_n$ les autres points et les autres systèmes ∞^1 homologues respectivement de y_1 dans le groupe de I_n considéré, et de H_1 dans les systèmes $\Sigma_3, \ldots, \Sigma_n$.

Faisons décrire au point y_1 sur la variété réelle V à quatre dimensions, qui représente la surface F dans le sens de Riemann, un cycle fermé quelconque. Les systèmes $H_1, H_2, \ldots, H_n$ varieront respectivement dans les systèmes *distincts* $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ et par suite ne coïncideront jamais. Donc, après un chemin fermé quelconque décrit par y_1 sur V, les systèmes H_1, H_2, ..., H_n n'ont subi aucun changement. Les points y_2, y_3, ..., y_n dépendent par suite rationnellement de y_1. Par conséquent :

Si une involution, appartenant à une surface algébrique, ne possède qu'un nombre fini (éventuellement nul) de points de coïncidence, cette involution est engendrée par un groupe de transformations birationnelles de la surface en elle-même.

CHAPITRE II.

SURFACES NORMALES REPRÉSENTANT LES INVOLUTIONS D'ORDRE PREMIER.

6. Considérons, sur une surface algébrique F, une involution I_p, d'ordre premier p, ne possédant qu'un nombre fini de points de coïncidence. Soit T la transformation birationnelle de la surface F en elle-même, de période p, qui, d'après le théorème que nous venons d'établir, engendre l'involution I_p. Nous nous proposons de construire une surface normale Φ, image de I_p (c'est-à-dire dont les points correspondent birationnellement aux groupes de I_p) et de déterminer les singularités que cette surface possède aux points de diramation.

Soit $|C_1|$ un système linéaire infini, complet, simple, dépourvu de points-base. Désignons respectivement par n et π les degré et genre de $|C_1|$.

La transformation T et ses différentes puissances fait correspondre à $|C_1|$ $p-1$ systèmes $|C_2|$, $|C_3|$, ..., $|C_p|$ (qui peuvent d'ailleurs coïncider avec $|C_1|$). Le système

$$|C| = |C_1 + C_2 + \ldots + C_p|$$

est transformé en lui-même par T, c'est-à-dire qu'une courbe C est transformée en une courbe C distincte ou non de la première.

Soit Φ une surface image de l'involution I_p. A une courbe C_1 (non transformée en elle-même par T) correspond, sur Φ, une courbe Γ, birationnellement équivalente, qui possède autant de points doubles (variables) qu'il y a de couples de points de C_1 transformés en eux-mêmes par T ou par une puissance de T. Soit m ce nombre. La courbe Γ est de genre virtuel $\pi + m$ et elle détermine, sur Φ, un système linéaire infini $|\Gamma|$ de genre $\pi + m$, complet, simple, dépourvu de points-base. Aux courbes de $|\Gamma|$ correspondent, sur F, des courbes de $|C|$.

Le nombre de points communs aux courbes $C_1, C_2, \ldots, C_p$ est égal à pm, par suite, les degré et genre des courbes C sont respectivement égaux à $p(n+2m)$, $p(\pi+m-1)+1$. Le degré de $|\Gamma|$ est par suite égal à $n+2m$.

Rapportons projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions, r étant la dimension de $|\Gamma|$. Observons que cette dimension peut toujours être supposée au moins égale à 3, car si elle était inférieure à 3, il suffirait de prendre, au lieu de $|C_1|$, un multiple de ce système. La surface Φ se transforme en une surface simple d'ordre $n+2m$, que nous désignerons toujours par Φ.

7. Soit P un point de coïncidence de I_p et soit P′ le point de diramation correspondant sur Φ.

La transformation T peut opérer, dans le domaine de P, de deux manières différentes. Ou bien elle laisse invariants les points infiniment voisins de P, ou bien elle les échange entre eux. En d'autres termes, dans le plan tangent à F en P, T laisse les tangentes invariantes ou non. Dans le premier cas, nous dirons que P est un *point de coïncidence parfaite;* dans le second, un *point de coïncidence non parfaite.*

8. Commençons par examiner le premier cas. Soit P un point de coïncidence parfaite. Considérons deux courbes C_1^*, C_1^{**} passant par P et ne s'y touchant pas. Les transformées $C_2^*, \ldots, C_p^*$; $C_2^{**}, \ldots, C_p^{**}$ de ces deux courbes les touchent respectivement en P. Les deux courbes $C_1^*+C_2^*+\ldots+C_p^*$, $C_1^{**}+C_2^{**}+\ldots+C_p^{**}$ sont deux courbes C ayant un point p-uple en P auquel est infiniment voisin pour courbe un deuxième point p-uple. Ces deux points infiniment voisins de P étant distincts, les deux courbes déterminent un système linéaire de courbes C, composé avec I_p, ayant en P un point p-uple à tangentes variables.

A ces courbes C correspondent, sur Φ, des courbes Γ_1 formant un système linéaire dont le degré est égal à $n+2m-p$, car les courbes C transformées des Γ_1 ont p^2 intersections en P. Quant au genre des courbes Γ_1, on le calcule en appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance $(1, p)$ existant entre une courbe Γ_1 et sa transformée sur F, et en remarquant qu'il y a, sur cette dernière, p points de coïncidence infiniment voisins de P. On trouve le nombre $\pi + m - p + 1$.

Remarquons que les courbes Γ_1 ont p points variables voisins de P'; ce sont les points qui correspondent aux groupes de I_p formés de p points coïncidants, infiniment voisins de P sur les branches des courbes C correspondantes. Il en résulte que le point P' est au moins p-uple pour la surface Φ.

Considérons les courbes C assujetties aux seules conditions d'être invariantes pour T et de passer par P. Elles forment un système de dimension $r - 1$ et ont, en P, un point multiple d'ordre au moins égal à p, puisque les courbes Γ qui leur correspondent sur Φ ont en P' un point au moins p-uple et que chaque point voisin de P' sur une des courbes Γ envisagées correspond à un point infiniment voisin de P sur la courbe C correspondante. D'autre part, les courbes C envisagées plus haut, ayant en P un point p-uple à tangentes variables, font partie des courbes C, invariantes pour T et passant par P. On en conclut que les courbes Γ_1 sont découpées sur Φ par les hyperplans passant par P'. La surface Φ possède donc un point p-uple, en P', dont le cône tangent est rationnel, car ces génératrices correspondent biunivoquement aux tangentes à F en P. Au point de vue des transformations birationnelles, un tel point est équivalent à une *courbe rationnelle de degré* p, ayant p points communs avec les courbes Γ_1, mais fondamentales pour le système $|\Gamma|$.

9. Soit maintenant P un point de coïncidence non parfaite. Dans le domaine de P, la transformation T opère comme une homographie involutive et il y a par suite deux seuls points P_1 et P_2 infiniment voisins de P, invariants pour T.

On peut former sur F, comme tantôt, un système linéaire de courbes C, invariantes pour T, ayant en P un point p-uple à tangentes variables. On partira d'une courbe C_1^* passant par P et P_1 et d'une courbe C_1^{**} passant par P et P_2 et l'on opérera comme précédemment. Soient Γ_1 les courbes qui correspondent aux courbes C considérées, sur Φ. Le degré du système $|\Gamma_1|$ est égal à

$n + 2m - p$. Pour trouver le genre de ce système, appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance existant entre une courbe Γ_1 et la courbe C correspondante, en remarquant que, sur cette dernière, il n'y a pas de points de coïncidence, les p points infiniment voisins de P formant un groupe de I_p. On trouve que le genre de Γ_1 est égal à $\pi + m - \frac{1}{2}(p - 1)$. De plus, on voit que cette courbe possède, en P′, un point de rebroussement, car au groupe de I_p infiniment voisin de P sur la courbe C homologue ne correspond qu'un point infiniment voisin de P′.

Désignons par $\overline{C}$ les courbes C, invariantes pour T, assujetties à la seule condition de passer par P, et soient $\overline{\Gamma}$ les courbes correspondantes sur Φ. Les courbes $\overline{C}$ ont certainement un point multiple en P, car autrement elles posséderaient une involution n'ayant qu'un seul point de coïncidence, ce qui est absurde. De plus, les courbes $\overline{\Gamma}$ sont certainement des courbes Γ_1 particulières, par suite les courbes $\overline{C}$ ont, en P, un point au plus multiple d'ordre p.

Aux points P_1, P_2, infiniment voisins de P et invariants pour T, correspondent, sur Φ, deux courbes de diramation infiniment petites dans le domaine de P′. Les courbes $\overline{\Gamma}$, qui sont découpées sur Φ par des hyperplans assujettis à la seule condition de passer par P′, rencontreront ces deux courbes et par suite les courbes $\overline{C}$ passeront par les points P_1, P_2. Les courbes $\overline{C}$ ont donc en P un point double à tangentes fixes.

La formule de Zeuthen, appliquée à la correspondance existant entre deux courbes $\overline{C}$, $\overline{\Gamma}$ homologues, donne pour le genre de cette dernière la valeur $\pi + m - 1$. Le point P′ est donc double pour la surface Φ', et comme son domaine se décompose en deux courbes infiniment petites, c'est un point double biplanaire.

Le degré du système $|\overline{\Gamma}|$ est égal à $n + 2m - 2$, par suite le degré effectif de $|\overline{C}|$ est égal à $p(n + 2m - 2)$ et les branches des courbes $\overline{C}$ ont, en P, des contacts multiples d'ordre p.

Le système $|\overline{C}|$ a la dimension de $r - 1$. Considérons les courbes $\overline{C}$ assujetties à la seule condition de toucher, en P, une direction distincte des directions invariantes pour T. Les courbes ainsi obtenues forment un système de dimension $r-2$ et ont nécessairement, en P, un point p-uple à tangentes variables. Le système $|\Gamma_1|$ a donc la dimension $r-2$.

La singularité de la surface Φ en P′ est donc un point double biplanaire auquel sont infiniment voisins une série de $\frac{1}{2}(p-3)$ points doubles successifs dont le dernier est biplanaire ordinaire. En effet, la singularité de Φ en P′ doit abaisser le genre des courbes Γ_1 de $\frac{1}{2}(p-1)$ unités et leur degré de p unités.

Les points de diramation de la surface normale Φ sont :

1° *Ou des points p-uple coniques équivalents, au point de vue des transformations birationnelles, à des courbes rationnelles de degré $-p$.*

2° *Ou des points doubles biplanaires formés de $\frac{1}{2}(p-1)$ points doubles infiniment voisins successifs dont le dernier est biplanaire ordinaire.*

CHAPITRE III.

RELATIONS ENTRE LES INVARIANTS D'UNE SURFACE ET D'UNE INVOLUTION D'ORDRE PREMIER.

10. Nous allons rechercher quelles sont les relations entre les genres arithmétiques et linéaires et les invariants de Zeuthen-Segre des surfaces F et Φ dont il a été question au Chapitre précédent. Nous supposerons toutefois que ces surfaces ne sont ni rationnelles, ni réglées.

Considérons un faisceau de courbes Γ, et soit δ la classe de la surface normale Φ. Désignons par α le nombre des points de coïncidence parfaite de I_p, par β le nombre des points de coïncidence non parfaite.

Les singularités des points de diramation de la surface Φ abaissent la classe d'une surface de p unités chacune. Si donc on désigne par I^* l'invariant de Zeuthen-Segre de Φ, on a

$$I^* = \delta + p(\alpha+\beta) - n - 6m - 4\pi.$$

Considérons le faisceau de courbes C correspondant, sur F, au faisceau de courbe Γ considéré. A chaque courbe Γ, dont l'hyperplan touche Φ, correspond une courbe C ayant p points doubles. Le faisceau comprend donc δ courbes ayant p points doubles, α courbes ayant un point p-uple à tangentes variables, équivalentes, comme on sait, à $(p-1)^2\alpha$ courbes ayant un point double, et β courbes ayant un point double. L'invariant de Zeuthen-Segre I de F est donc

$$I = p\delta + (p-1)^2\alpha + \beta - p(n+6m+4\pi) + 4(p-1).$$

De la comparaison de ces deux formules, on déduit :

$$I + 4 = p(I^* + 4) - (2p-1)\alpha - (p^2-1)\beta \quad (^1).$$

11. Soient $p^{(1)}$, $\pi^{(1)}$ les genres linéaires respectifs des surfaces F, Φ.

Considérons le système $|\Gamma'|$ adjoint au système des sections hyperplanes $|\Gamma|$ de Φ. On sait que le degré du système $|\Gamma'|$ est $\pi^{(1)} + 4\pi + 2m - n - 5$.

Si D est une courbe rationnelle de degré p équivalente à un des α points de diramation correspondant à un point de coïncidence parfaite, le système linéaire $|\Gamma + D|$ a le degré $n + 2m - p$ et le genre $\pi + m - 1$. Le système adjoint $|(\Gamma + D)'|$ à ce système a le degré $\pi^{(1)} + 4\pi + 2m - n + p - 9$. Mais ce système contient, comme courbes particulières totales, les courbes $\Gamma' + D$. Ces courbes ont le degré $\pi^{(1)} + 4\pi + 2m - n - 5 - p + 2x$, x étant le nombre des points communs à Γ' et à D. On en déduit $x = p - 2$, c'est-à-dire que les courbes adjointes aux sections hyperplanes de Φ rencontrent les courbes telles que D en $p - 2$ points.

Aux points de coïncidence non parfaite de I_p correspondent sur Φ des points de diramation qui sont des points doubles équivalents à des ensembles de courbes rationnelles de degré -2. On sait que de telles courbes ne peuvent pas être rencontrées par les courbes adjointes à $|\Gamma|$.

A une courbe Γ' adjointe à $|\Gamma|$ correspond, sur F, une courbe $\overline{C}$ possédant, en chacun des α points de coïncidence parfaite, un point $(p-2)$-uple, mais ne passant pas par les autres points de

(1) Cette formule est un cas particulier d'une formule de M. Severi [*Sulle relazioni che legano i carrateri*... (*Rend Ist. Lomb.*, 1903)].

coïncidence. A un groupe canonique d'une courbe Γ quelconque correspond, d'après l'interprétation géométrique de la formule de Zeuthen donnée par M. Castelnuovo, un groupe canonique de la courbe C homologue. Les courbes $\overline{C}$ ne sont donc que des courbes adjointes C′ à | C |.

Le degré des courbes C′ est, d'une part, égal à p fois le degré de | Γ′ |, augmenté du nombre des points d'intersection absorbés par les points de coïncidence parfaite, c'est-à dire est égal à

$$p(\pi^{(1)}+4\pi+2m-n-5)+(p-2)^2\alpha.$$

D'autre part, le degré de | C′ | est égal à

$$p^{(1)}+p(4\pi+2m-n)-(4p+1).$$

De la comparaison de ces deux formules, on conclut

$$p^{(1)}-1=p(\pi^{(1)}-1)+(p-2)^2\alpha.$$

12. Désignons par p_a, π_a les genres arithmétiques respectifs de F, Φ. On a

$$12p_a+9=p^{(1)}+\mathrm{I}, \qquad 12\pi_a+9=\pi^{(1)}+\mathrm{I}^*$$

On en conclut

$$12p_a=12p\pi_a+(p-1)(p-5)\alpha-(p^2-1)\beta+12(p-1)\ (^1).$$

Si une involution d'ordre premier p possède α points de coïncidence parfaite et β points de coïncidence non parfaite, ses genres arithmétique π_a et linéaire $\pi^{(1)}$ sont liés aux genres p_a, $p^{(1)}$ de la surface par les relations

$$12p_a=12p\pi_a+(p-1)(p-5)\alpha-(p^2-1)\beta+12(p-1),$$
$$p^{(1)}=p(\pi^{(1)}-1)+(p-2)^2\alpha+1.$$

13. Les formules précédentes ont été établies sans faire d'hypothèses sur l'existence du système canonique de Φ. Lorsque celui-ci existe, ses courbes ont $p-2$ points communs avec les courbes

(1) M. Severi, dans son travail qui vient d'être cité, établit des relations entre les genres arithmétiques et linéaires de deux surfaces en correspondance (n, n').

rationnelles de degré p équivalentes aux α points de diramation correspondant aux points de coïncidence parfaite.

Observons que le fait que le système canonique de Φ est composé au moyen d'un faisceau irrationnel de courbes n'entraîne pas nécessairement $\alpha = 0$. Les courbes de ce faisceau irrationnel ne peuvent rencontrer les courbes rationnelles de degré $-p$, car il ne peut exister sur une courbe rationnelle une involution irrationnelle. Si donc le système canonique de Φ est composé au moyen des courbes d'un faisceau irrationnel et si $\alpha > 0$, il existe une composante fixe du système canonique rencontrant en $p-2$ points chaque courbe rationnelle de degré $-p$.

14. Supposons que la surface Φ possède un système canonique infini, qui ne soit pas composé au moyen d'un faisceau irrationnel de courbes.

M. Picard a démontré que le système adjoint à un système linéaire infini non composé avec un faisceau irrationnel de courbes est régulier ([1]). Par suite, les systèmes pluricanoniques de Φ sont réguliers et les plurigenres $\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_i, \ldots$ de cette surface ont pour valeurs

$$\Pi_2 = \pi_a + \pi^{(1)}, \quad \ldots, \quad \Pi_i = \pi_a + \frac{1}{2} i(i-1)(\pi^{(1)} - 1) + 1, \quad \ldots.$$

Le système canonique de F est également infini et ne peut être composé avec un faisceau irrationnel, les systèmes pluricanoniques de cette surface sont donc réguliers et ses plurigenres $P_2, P_3, \ldots, P_i, \ldots$ ont pour valeurs

$$P_2 = p_a + p^{(1)}, \quad \ldots, \quad P_i = p_a + \frac{1}{2} i(i-1)(p^{(1)} - 1) + 1, \quad \ldots.$$

On en déduit que :

Si l'involution I_p, d'ordre premier p, possède un système canonique infini, non composé au moyen d'un faisceau, ses plurigenres $\Pi_2, \ldots, \Pi_i, \ldots$ sont liés à ceux $P_2, \ldots, P_i, \ldots$ de la

---

([1]) Picard et Simart, *Fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1906). Voir aussi Severi, *Sulla regolarità del sistema aggiunto ad un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica* (*Rend. R. Accad. Lincei*, 1908).

surface F *par les relations*

$$12\,P_2 = 12\,p\Pi_2 + (13\,p^2 - 54\,p + 53)\alpha - (p^2 - 1)\beta,\ \ldots,$$
$$12\,P_i = 12\,p\Pi_i + [(p-1)(p-5) + 6\,i(i-1)(p-2)^2]\alpha - (p_2 - 1)\beta,\ \ldots.$$