BULLETIN DE LA S. M. F.

P. PAINLEVÉ

Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 201-261

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__201_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DONT L'INTÉGRALE GÉNÉRALE EST UNIFORME;

Par M. P. Painlevé.

1. La détermination des transcendantes uniformes définies par les équations différentielles algébriques est un problème qui se trouve posé en fait depuis les travaux d'Abel et de Jacobi sur l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

C'est l'étude de cette équation qui a engendré la théorie des fonctions elliptiques, et (par extension) celle des fonctions uniformes. Cette dernière théorie une fois fondée, il s'agissait moins de construire artificiellement des transcendantes nouvelles que de découvrir, dans l'immense famille des transcendantes uniformes, celles qui peuvent servir à intégrer les équations différentielles. La fonction *exponentielle,* les fonctions *elliptiques* étaient les premiers types de telles fonctions : on ne tarda pas à en découvrir d'autres, à savoir : les fonctions *abéliennes*, puis les intégrales uniformes des équations différentielles *linéaires;* enfin, les fonctions *fuchsiennes* ou *automorphes, hyperfuchsiennes,* etc.

Mais l'étude de ces nouvelles transcendantes, si importante qu'elle fût, ne permettait en aucune manière d'épuiser le problème qui se posait dès lors naturellement :

Déterminer toutes les équations différentielles algébriques du premier ordre, puis du second ordre, puis du troisième ordre, etc., dont l'intégrale générale est uniforme.

Ce problème, abordé dès 1856, dans des cas particuliers, par Briot et Bouquet, Méray, Weierstrass, a suscité, dans le cours de ces vingt dernières années, les efforts de nombreux géomètres, parmi lesquels il suffit de citer MM. Fuchs, Poincaré, Picard, Mittag-Leffler, Fransen, Wallenberg, Forsyth. Pour les équations du premier ordre, la question peut être regardée comme élucidée [1]; mais dès qu'on passe du premier ordre au second, des difficultés d'une nature toute nouvelle interviennent, sur lesquelles je crois utile d'insister.

2. Considérons une équation du second ordre

$$y'' = \frac{P(x, y, y')}{Q(x, y, y')},$$

où P et Q sont des polynomes en x, y, y'; et soient x_0, y_0, y'_0 des valeurs qui n'annulent pas à la fois P et Q. On sait étudier, dans le voisinage de x_0, l'intégrale $y(x)$ définie par les conditions initiales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Quand x_0, y_0, y'_0 annulent à la fois P et Q, le point x_0, est, en général, une singularité transcendante des intégrales $y(x)$ définies par ces conditions initiales, et c'est seulement dans des cas particuliers que les méthodes de M. Poincaré (en dépit de perfectionnements récents) permettent d'étudier ces intégrales; on conçoit cependant qu'il soit possible d'étendre ces méthodes à des cas de plus en plus généraux. Mais quand on poursuit l'étude d'une intégrale $y(x)$ le long d'un chemin quelconque du plan des x, il arrive qu'on rencontre des points singuliers $x = a$ d'une nature toute différente : à savoir des points $x = a$ tels que y ou y' ne tende vers aucune limite (finie ou non) quand x tend vers a.

Considérons, par exemple, l'équation

$$y'' = \frac{y'^2(1+i)}{y},$$

dont l'intégrale générale est

$$y = (Ax + B)^i, \qquad \text{(A, B constantes arbitraires).}$$

Quand x tend vers le point d'affixe $-\frac{B}{A}$ sur une direction quelconque [2], $y(x)$ est indéterminé. Une infinité de valeurs de y se permutent, d'ailleurs, autour de ce point qui est à la fois point essentiel et point critique de $y(x)$.

---

(1) Les transcendantes uniformes introduites par les équations du premier ordre sont, d'ailleurs, réductibles aux transcendantes classiques, comme M. Poincaré l'a montré le premier.

(2) Il est facile de former des exemples où $y(x)$ est indéterminé quand x tend vers a sur un chemin l, quel que soit le chemin adopté (*voir* le n° 18).

On conçoit immédiatement la profondeur de la difficulté que crée l'existence possible de telles singularités, variables avec les constantes d'intégration et que rien ne met en évidence sur l'équation différentielle. Comment étudier l'intégrale $y(x)$ dans le voisinage d'un de ces points où la valeur de $y(x)$ est indéterminée? Comment exprimer notamment qu'un tel point n'est pas critique, c'est-à-dire ne donne pas lieu à des branchements de l'intégrale? *Comment surtout décider si de telles singularités existent ou non?* A toutes ces questions, les méthodes dérivées de la doctrine de Cauchy semblaient incapables de répondre. Un tel obstacle pouvait donc, à bon droit, être regardé comme insurmontable. C'est l'opinion qu'exprimait M. Picard dans le dernier travail qu'il ait consacré à ce genre de problèmes. Après avoir insisté sur l'existence des singularités essentielles mobiles, l'illustre géomètre aboutissait à cette conclusion que, seule, l'intégration d'une équation différentielle (j'entends sa réduction aux quadratures et aux équations linéaires) permettait d'affirmer l'uniformité de son intégrale. « Ces réflexions, ajoutait-il, ne sont pas, en définitive, très encourageantes. Il est peu probable que les équations d'ordre supérieur, à points critiques fixes, puissent conduire à l'étude de transcendantes nouvelles. » (*Acta mathematica*, t. XVII; 1893.)

3. C'est cette difficulté dont je suis parvenu à triompher dans le cours de ces deux dernières années. J'ai pu, en particulier, résoudre *explicitement* le problème suivant :

Parmi les équations

$$y'' = R(x, y, y'), \tag{E}$$

où R *est rationnel en y', et algébrique en y, x, déterminer toutes celles dont l'intégrale générale est uniforme* [1].

Ces équations se laissent répartir en quinze classes, parmi lesquelles *trois classes définissent des transcendantes méromorphes essentiellement nouvelles.* Je citerai seulement *les deux pre-*

---

[1] Aucune autre hypothèse que l'uniformité n'est faite sur l'intégrale $y(x)$; elle peut, *a priori*, présenter des singularités essentielles mobiles de nature quelconque.

mières. Ces deux classes sont réductibles [par une transformation algébrique $y = f(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, $x = \varphi(\mathrm{X})$] à un des types

$$\text{(I)} \qquad y'' = \alpha y^2 + \beta x + \gamma,$$

$$\text{(II)} \qquad y'' = \alpha y^3 + (\beta x + \gamma) y + \delta,$$

α, β, γ, δ désignant des constantes numériques. Si $\beta = 0$, l'équation (I) définit les fonctions elliptiques, et, si $\alpha = 0$, des polynomes; d'autre part, si $\alpha\beta \neq 0$, la transformation $y = \lambda \mathrm{Y}$, $x = \mu \mathrm{X} + \nu$ permet de donner à α la valeur 6, à β la valeur 1, à γ la valeur zéro. De même, dans l'équation (II), il est loisible de supposer $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$. Bornons-nous donc à considérer les équations

$$(1) \qquad y'' = 6y^2 + x,$$

$$(2) \qquad y'' = 2y^3 + xy + \delta.$$

Les intégrales de ces deux équations sont des fonctions méromorphes essentiellement nouvelles.

Puisqu'elles sont méromorphes, il est évident qu'elles sont représentables par le quotient de deux fonctions *entières;* mais, ce qu'il importe de remarquer, c'est qu'on peut choisir ces fonctions entières de manière qu'elles vérifient une équation différentielle très simple du troisième ordre.

Pour l'équation (1), il suffit de poser

$$z = \frac{y'^2}{2} - 2y^3 - xy, \qquad u = e^{\int z\,dx};$$

la fonction $u(x)$ est une fonction ENTIÈRE *qui vérifie l'équation*

$$(3) \qquad \frac{z''^2}{2} + 2z'^3 + xz' - z = 0, \qquad \text{où} \qquad \frac{u'}{u} = z,$$

et l'on a

$$y = \frac{u'^2 - uu''}{u^2}.$$

Pour l'équation (2), si l'on pose

$$z = y'^2 - y^4 - xy^2 - 2\delta y, \qquad u = e^{\int z\,dx}, \qquad v = uy,$$

les fonctions u, v sont des fonctions ENTIÈRES qui *vérifient le* *système du troisième ordre*

$$(4) \quad uu'' - u'^2 + v^2 = 0, \qquad (u'v - vu')^2 = v^4 + xv^2u^2 + (2\delta v + u')u^3,$$

et l'on a

$$y = \frac{v}{u}.$$

De plus, soient

$$2z_1 = z - y, \qquad 2z_2 = z + y;$$

les fonctions $u_1 = e^{\int z_1 dx}$, $u_2 = e^{\int z_2 dx}$ sont deux fonctions *entières* qui vérifient respectivement une équation du troisième ordre facile à former, et l'on a

$$u = u_1 u_2, \qquad v = u'_2 u_1 - u'_1 u_2, \qquad y = \frac{u'_2}{u_2} - \frac{u'_1}{u_1}.$$

Les fonctions entières u, v définies par les équations (3) ou (4) sont des transcendantes *entières essentiellement nouvelles.*

4. Les équations (1) et (2) doivent être regardées comme *intégrées* au sens moderne du mot, exactement comme l'équation

$$y'^2 = (1 - y^2)(1 - k^2y^2)$$

est intégrée par le quotient de deux fonctions θ. Si l'on définit l'intégrale $y(x)$ de (1) ou de (2) par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0, la fonction $y(x)$ est représentée par le quotient de deux séries entières en $(x - x_0)$, séries qui convergent dans tout le plan des x et dont les coefficients se calculent par des dérivations successives. Ces coefficients sont des polynomes en x_0, y_0, y'_0.

C'est là un résultat dont le caractère me semble entièrement nouveau. Depuis la fondation du Calcul intégral, toutes les équations qu'on a réussi à intégrer (au sens le plus large de ce terme) sont réductibles à des combinaisons *d'équations linéaires et de quadratures.* D'une façon générale, c'est parce qu'on connaît la manière dont les constantes figurent dans l'intégrale qu'on sait étudier cette intégrale. Même les équations qui définissent les fonctions fuchsiennes n'échappent pas à cette remarque. *Les équations* (1) *et* (2) *constituent donc le premier exemple connu d'équations qui se trouvent intégrées à l'aide des principes de la théorie des fonctions, sans être réductibles à aucune combinaison d'équations linéaires, de quadratures et même d'équations du premier ordre.*

J'ajoute que le caractère précis des types canoniques (1) et (2 ne doit pas faire méconnaître le degré de généralité des équations différentielles qu'intègrent les nouvelles transcendantes. C'est ainsi que, parmi les équations de la forme

$$(5) \qquad y'' = a(x)y' + b(x)y^2 + c(x)y + d(x),$$

celles qui sont réductibles algébriquement à la forme (1) ont leurs coefficients a, b, c, d assujettis à une condition *unique;* elles dépendent de *trois* fonctions arbitraires de x, et constituent une classe qui a la même généralité que celle des équations linéaires (non homogènes) du second ordre.

5. Pour parvenir aux résultats que je viens de résumer, il m'a fallu constituer une double méthode qui répondît à ce double objet : 1° former des conditions *nécessaires* (nouvelles) pour qu'une équation ait ses points critiques fixes; 2° décider si ces conditions sont ou non *suffisantes.*

Cette double méthode permet aussi bien de résoudre le problème suivant (un peu plus général que celui que j'ai énoneé au début du n° 3) :

Parmi les équations (E) *où* R *est rationnel en y', algébrique en y, analytique en x, déterminer explicitement toutes celles qui ont leurs points critiques fixes* [1].

Ce n'est pas le souci d'une généralisation facile qui m'a conduit à cette extension du premier problème; c'est la marche même de la solution qui me l'a imposée. Pour exprimer que l'intégrale générale d'une équation différentielle est uniforme, il faut exprimer d'abord qu'elle n'admet pas de points critiques *mobiles;* et pour simplifier les conditions ainsi obtenues il est indispensable d'employer certaines transformations, algébriques par rapport à la fonction, mais où la variable indépendante peut figurer sous forme transcendante. Ces transformations introduisent des points critiques fixes et ne conservent pas à l'équation son caractère algébrique par rapport à x.

La même méthode s'applique d'ailleurs sans modification à

[1] Le nom de points *critiques* est réservé exclusivement aux points singuliers (isolés ou non) autour desquels deux branches au moins de $y(x)$ se permutent. Les points critiques sont dits *mobiles* ou *fixes* suivant qu'ils varient ou non avec les constantes d'intégration.

tous les systèmes différentiels algébriques du second ordre. C'est ainsi qu'elle permet de déterminer toutes les équations à points critiques fixes de la forme

$$P(y'', y', y, x) = 0, \tag{6}$$

où P est un polynome en y'', y', du second degré en y'', algébrique en y, x.

Quand l'ordre différentiel du système s'élève, il y a lieu de distinguer entre les deux parties de la double méthode : la première partie (recherche des conditions *nécessaires* pour que les points critiques soient fixes) s'étend d'elle-même aux équations différentielles d'ordre quelconque et fournit, presque sans calculs, des conditions très précises ; la seconde partie (discussion des conditions *suffisantes*) entraîne au contraire des complications qui croissent avec l'ordre différentiel du système.

Ces résultats, et beaucoup d'autres qui s'y rattachent, ont été exposés succinctement dans une suite de Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris (1898, 1899, 1900). Ils feront l'objet de plusieurs Mémoires étendus, dont le premier va paraître dans les *Acta mathematica*. Mais comme la méthode employée s'applique à une foule de problèmes (problèmes de Mécanique, problème de Mme Kowalevski et analogues, inversion des différentielles totales, etc.), j'ai cru utile de détacher de ces Mémoires un exposé complet de la méthode dans le cas le plus simple.

Ce travail renferme en particulier :

1° La détermination explicite de toutes les équations à points critiques fixes qui rentrent dans la classe

$$y'' = a(x)y' + b(x)y^2 + c(x)y + d(x); \tag{$\mathcal{C}$}$$

2° La démonstration des propriétés fondamentales de l'équation

$$y'' = 6y^2 + x; \tag{F}$$

3° Une première étude des conditions que doit vérifier une équation du troisième ordre (ou d'ordre supérieur) pour que ses points critiques soient fixes. Cette étude met en évidence le rôle considérable que sont appelés à jouer, dans l'étude systématique des équations différentielles à intégrale uniforme, les travaux de M. Poincaré sur les fonctions automorphes (fuchsiennes et kleinéennes).

D'une manière générale, considérons un système différentiel (algébrique) quelconque, dont l'intégrale ne dépend que d'un nombre *fini* de constantes, et proposons-nous d'étudier son intégrale au point de vue de la théorie des fonctions : par exemple, de rechercher si cette intégrale est uniforme, ou ne possède qu'un nombre fini de branches, ou est dénuée de singularités transcendantes, etc. C'est à la double méthode que j'expose ici qu'il conviendra d'avoir recours. Lors même qu'on se restreint au domaine *réel*, la méthode ne perd rien de son importance. Si, par exemple, on sait montrer que les intégrales réelles d'un système différentiel réel sont dépourvues de singularités transcendantes (en même temps que de points singuliers algébriques autres que des pôles), l'intégration *quantitative* du système est effectuée; j'entends par là qu'on peut former des séries convergentes qui représentent les intégrales réelles *dans tout le champ réel*.

RECHERCHE DES CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR QU'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE AIT SES POINTS CRITIQUES FIXES.

6. *Principe de la méthode.* — Considérons une équation différentielle ou un système d'équations différentielles algébriques [1] : soit, pour fixer les idées, le système

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \mathrm{H}(x, y, z), \\[2mm] \dfrac{dz}{dx} = \mathrm{K}(x, y, z), \end{cases}$$

où H et K sont des fractions rationnelles en x, y, z. Pour exprimer que le système (S) a ses points critiques fixes, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

LEMME. — *Supposons que* H *et* K *dépendent analytiquement d'un paramètre* α *et soient holomorphes pour* $\alpha = 0$ [2] ;

---

[1] La méthode s'applique aussi bien à tout système d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale générale ne dépend que d'un nombre fini de constantes.

[2] Les valeurs x, y, z étant prises au hasard et non d'une façon particulière.

si l'intégrale générale du système (S) *est uniforme quel que soit* α (*sauf peut-être pour* $\alpha = 0$), *elle est uniforme encore pour* $\alpha = 0$, *et les développements de* $y(x)$, $z(x)$ *suivant les puissances de* α *ont comme coefficients des fonctions uniformes de* x.

Ce lemme bien intuitif est une conséquence immédiate d'un théorème aujourd'hui classique de M. Poincaré. Représentons, en effet, par (S_0) le système (S) où l'on a fait $\alpha = 0$, par $y(x)$, $z(x)$ la solution de (S) que définissent les conditions initiales x_0, y_0, z_0, par $Y(x), Z(x)$ la solution analogue de (S_0). Soit enfin L un chemin fermé (partant de x_0 et y revenant), le long duquel $Y(x)$ et $Z(x)$ sont holomorphes [ainsi que $H(x, y, z)$, $K(x, y, z)$ pour $|y - Y|$, $|z - Z|$ et $|\alpha|$ petits]. Développons $y(x)$ et $z(x)$ suivant les puissances de α

$$y = Y(x) + \alpha y_1(x) + \alpha^2 y_2(x) + \ldots,$$
$$z = Z(x) + \alpha z_1(x) + \alpha^2 z_2(x) + \ldots;$$

ces développements convergent sur L pour $|\alpha|$ inférieur à une certaine quantité positive r. Supposons qu'un des coefficients $Y(x), y_1(x), \ldots, Z(x), z_1(x), \ldots$ [$y_i(x)$ par exemple] ne soit pas uniforme : il est loisible de choisir le contour L de façon à revenir au point x_0 avec une valeur de $y_i(x)$ différente de la valeur initiale; dans ces conditions, la fonction $y(x)$ ne saurait reprendre non plus sa valeur initiale et ne serait pas uniforme.

C. Q. F. D.

On montre de la même manière que, si le système (S) a ses points critiques fixes pour $|\alpha| < \rho$ (sauf peut-être pour $\alpha = 0$), les fonctions $Y(x), y_1(x), \ldots, Z(x), z_1(x), \ldots$ ont, elles aussi, leurs points critiques fixes (indépendants de x_0, y_0, z_0).

7. Ce lemme établi, la méthode consiste à introduire, dans le système différentiel donné, un paramètre α tel que le nouveau système ait sûrement ses points critiques fixes en même temps que le premier, et qu'il soit *intégrable* pour $\alpha = 0$. Les fonctions $Y(x)$, $y_1(x), \ldots, Z(x)$, $z_1(x), \ldots$ sont alors déterminées par des quadratures [1], et, en exprimant qu'elles ont leurs points

[1] Rappelons les principes bien connus qui permettent d'effectuer le déve-

critiques fixes, on obtient explicitement des conditions *nécessaires*. Le système différentiel une fois simplifié par ces premières conditions, on lui applique à nouveau le même procédé, et ainsi de suite, jusqu'à ce que le procédé ne donne plus de conditions nouvelles.

Précisons sur le système (S). Soit $z = g(x_0, y_0)$ un pôle des fonctions $H(x_0, y_0, z)$, $K(x_0, y_0, z)$. En remplaçant $z - g(x,y)$ par Z, il est loisible de supposer $g(x,y) \equiv 0$, et d'écrire (S) sous la forme

$$(7) \qquad z^m \frac{dy}{dx} = H_0(x,y) + z H_1(x,y) + \ldots, \qquad z^n \frac{dz}{dx} = K_0(x,y) + z K_1(x,y) + \ldots,$$

---

loppement de $y(x)$, $z(x)$ suivant les puissances de α. Soit

$$(\Sigma) \qquad y = F(x, h, k, \alpha), \qquad z = G(x, h, k, \alpha)$$

l'intégrale générale de (S), où h, k désignent les constantes arbitraires (par exemple les valeurs de y, z pour $x = x_0$).

Les fonctions $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ les plus générales qui représentent l'intégrale de (S) s'obtiennent en remplaçant, dans (Σ), h et k par des fonctions arbitraires de α, soient

$$h = h_0 + \alpha \frac{h'_0}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} h''_0 + \ldots, \qquad k = k_0 + \alpha \frac{k'_0}{1} + \frac{\alpha^2}{2!} k''_0 + \ldots$$

Développons F et G suivant les puissances de α, en posant (pour simplifier)

$$F(x, h_0, k_0, 0) = \varphi(x, h_0, k_0), \qquad \left[\frac{\partial F}{\partial \alpha}(x, h_0, k_0, \alpha)\right]_{\alpha=0} = \varphi_1(x, h_0, k_0), \ldots,$$

$$G(x, h_0, k_0, 0) = \psi(x, h_0, k_0), \qquad \left[\frac{\partial G}{\partial \alpha}(x, h_0, k_0, \alpha)\right]_{\alpha=0} = \psi_1(x, h_0, k_0), \ldots;$$

il vient

$$\begin{aligned}
F(x, h, k, \alpha) &= \varphi + \alpha\left(\frac{\partial \varphi}{\partial h_0} h'_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial k_0} k'_0 + \varphi_1\right) \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{1.2}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial h_0}\frac{h''_0}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial k_0}\frac{k''_0}{2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial h_0} h'_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial k_0} k'_0\right)_2 \right. \\
&\quad \left. + 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial h_0} h'_0 + 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial k_0} k'_0 + \varphi_2\right] + \ldots \\
&\equiv \varphi + \alpha \Phi_1 + \alpha^2 \Phi_2 + \ldots, \\
G(x, h, k, \alpha) &\equiv \psi + \alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial h_0} h'_0 + \frac{\partial \psi}{\partial k_0} k'_0 + \psi_1\right) \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{1.2}\left[\frac{\partial \psi}{\partial h_0}\frac{h''_0}{2} + \frac{\partial \psi}{\partial k_0}\frac{k''_0}{2} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial h_0} h'_0 + \frac{\partial \psi}{\partial k_0} k'_0\right)_2 \right. \\
&\quad \left. + 2\frac{\partial \psi_1}{\partial h_0} h'_0 + 2\frac{\partial \psi_1}{\partial k_0} k'_0 + \psi_2\right] + \ldots \\
&= \psi + \alpha \Psi_1 + \alpha^2 \Psi_2 + \ldots.
\end{aligned}$$

On voit que les couples successifs de coefficients (Φ_1, Ψ_1), (Φ_2, Ψ_2), ... renferment chacun (et sous forme linéaire) deux nouvelles constantes (h'_0, k'_0), (h''_0, k''_0), ..., les seconds membres étant holomorphes et différents de zéro pour $z = 0$, et l'un au moins des entiers m, n étant positif [1].

Je dis d'abord que, *si* $m < n+1$, *le système* (S) *a des points critiques mobiles* [2]. Posons, en effet,

$$(8) \qquad x = x_0 + \alpha^{n+1} X, \qquad y = y_0 + \alpha^{n+1-m} Y, \qquad z = \alpha Z;$$

le système (S) devient [3]

$$(S') \quad z^m \frac{dy}{dx} = H_0(x_0, y_0) + \alpha(\ldots), \qquad z^n \frac{dz}{dx} = K_0(x_0, y_0) + \alpha(\ldots).$$

En vertu de la transformation (8), (S′) a ses points critiques fixes en même temps que (S) (sauf peut-être pour $\alpha = 0$); pour $\alpha = 0$, le système (S′) se réduit au suivant :

$$z^m \frac{dy}{dx} = \eta_0, \qquad z^n \frac{dz}{dx} = \varkappa_0 \qquad [\eta_0 = H_0(x_0, y_0), \quad \varkappa_0 = K_0(x_0, y_0)],$$

système dont l'intégrale $z = [(n+1)k_0 x + \text{const.}]^{\frac{1}{n+1}}$ a un point critique mobile (n étant positif). En vertu du lemme, (S) ne saurait avoir ses points critiques fixes.

---

et vérifient, par suite, un système de deux équations linéaires

$$(\sigma_i) \quad \frac{d\Phi_i}{dt} + p(x)\Phi_i + q(x)\Psi_i = u_i(x), \qquad \frac{d\Psi_i}{dx} + r(x)\Phi_i + s(x)\Psi_i = v_i(x)$$
$$(i = 1, 2, 3, \ldots),$$

où les fonctions p, q, r, s sont indépendantes de l'indice i, tandis que les seconds membres u_i, v_i s'expriment à l'aide des fonctions Φ, Ψ, d'indice inférieur à i. L'intégrale du système linéaire sans seconds membres est

$$\Phi_i = \frac{\partial\varphi}{\partial h_0} a + \frac{\partial\varphi}{\partial k_0} b, \qquad \Psi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial h_0} a + \frac{\partial\psi}{\partial k_0} b, \qquad (a, b \text{ const. arbitraires}),$$

et l'intégrale du système (σ_i) s'obtient par quadratures, d'après la méthode de la variation des constantes Pour former explicitement chaque système (σ_i), il suffit de remplacer y par $\varphi + \alpha\Phi_1 + \ldots$, z par $\psi + \alpha\Psi_1 + \ldots$ dans (S), et d'égaler les coefficients des mêmes puissances de α dans les deux membres.

[1] D'une manière systématique et pour ne pas compliquer les notations, une fois le changement de variable effectué, nous supposons qu'on écrit, dans le nouveau système, x, y, z à la place e X, Y, Z.

[2] Cette proposition est bien facile à établir directement (*voir*, par exemple, mes *Leçons de Stockholm*, p. 421-427).

[3] Je représente par le symbole $\alpha(\ldots)$ une fonction de α, x, y, z, x_0, y_0 qui, pour $\alpha = 0$ (et pour x, y, z, x_0, y_0 *pris au hasard*) est holomorphe et nulle. Pour $\alpha = 0$ et pour des valeurs *exceptionnelles* de x_0, y_0, , cette fonction peut être ici de la forme $\frac{0}{0}$.

Soit donc $m \geqq n+1$. On peut supposer $n=m-1$, à condition d'admettre que, dans les équations (7), $K_0(x, y)$ peut être identiquement nul. La transformation

$$(9) \qquad x = x_0 + \alpha^m X, \qquad z = \alpha Z$$

substitue à (S) le système

$$(S'') \quad z^m \frac{dy}{dx} = H_0(x_0, y) + \alpha(\ldots), \qquad z^{m-1}\frac{dz}{dx} = K_0(x_0, y) + \alpha(\ldots);$$

pour $\alpha = 0$, ce système se réduit au système *intégrable*

$$z^m \frac{dy}{dx} = \eta(y), \qquad z^{m-1}\frac{dz}{dx} = \varkappa(y), \qquad [\eta = H_0(x_0, y), \quad \varkappa = K_0(x_0, y)],$$

système qui peut s'écrire :

$$z = e^{\int \frac{\varkappa(y)}{\eta(y)} dy}, \qquad x = \int \frac{z^m dy}{\eta(y)}.$$

Ce système doit avoir son intégrale uniforme. Plus généralement, si l'on développe l'intégrale $y(x)$, $z(x)$ de (S″) suivant les puissances de α, les coefficients sont des fonctions de x données par des *quadratures;* il faut que ces fonctions aient leurs points critiques fixes.

Ces conditions doivent être appliquées à tous les pôles $z = g(y, x)$ [ou $y = h(x)$] des coefficients différentiels de (S), ainsi qu'aux valeurs $z = \infty$ (ou $y = \infty$) à l'aide de la transformation $z = \frac{1}{Z}$ $\left(\text{ou } y = \frac{1}{Y}\right)$.

8. Ces premières conditions obtenues, on considère les valeurs $y = g(x)$, $z = h(x)$ qui donnent aux coefficients différentiels la forme $\frac{0}{0}$, valeurs qu'on peut toujours supposer finies et identiquement nulles. On pose alors

$$x = x_0 + \alpha^i X, \qquad y = \alpha^j Y, \qquad z = \alpha^l Z,$$

en choisissant les entiers positifs i, j, l de façon que les nouveaux coefficients différentiels soient holomorphes pour $\alpha = 0$. Pour $\alpha = 0$, le système (S‴) ainsi obtenu est *intégrable;* car il ne change pas quand on lui applique la transformation précédente où x_0 et α sont arbitraires : si donc un des entiers j, l est nul, soit j, la fonction $x(y)$ est donnée par les quadratures $x=\int dy\, e^{\int\rho(y)dy}$ où ρ est connu algébriquement; si ni j ni l ne sont nuls, on pose $u=\frac{y^l}{z^j}$, et $x(u)$ est donné par les quadratures $x(u)=\int du\, e^{\int\rho(u)du}$. Il faut exprimer que, dans le développement de l'intégrale de (S''') suivant les puissances de α, les coefficients (qui sont donnés par des quadratures) ont leurs points critiques fixes.

Quand les coefficients différentiels H et K de (S) sont non plus rationnels mais *algébriques* en x, y, z, les mêmes procédés doivent être étendus aux singularités algébriques de H, K.

APPLICATION DE LA MÉTHODE AUX ÉQUATIONS $y''=R(x, y, y')$.

9. Appliquons la méthode précédente aux équations

$$y''=R(x, y, y')\equiv\frac{P(x, y, y')}{Q(x, y, y')} \tag{1}$$

où $R\equiv\frac{P}{Q}$ désigne une fraction rationnelle irréductible en y, y'; x figure analytiquement.

Pour que l'équation (1) ait ses points critiques fixes, il faut d'abord (comme il est bien connu) que R soit un polynome en y' du second degré au plus [1]; soit donc

$$y''=L(x, y)y'^2+M(x, y)y'+N(x, y), \tag{E}$$

où L, M, N sont des fractions rationnelles de y analytiques en x.

Ce point admis, posons $x=x_0+\alpha X$; l'équation devient

$$y''=L(x_0, y)y'^2+\alpha(\ldots). \tag{E'}$$

Pour que l'équation (E) ait ses points critiques fixes, *il faut donc que l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2}=l(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2, \qquad [l(y)\equiv L(x_0, y)] \tag{e}$$

ait son intégrale générale uniforme.

---

[1] *Voir*, par exemple, mes *Leçons de Stockholm* (p. 396-409).

Ces premiers résultats rentrent au fond dans ceux du n° 7. Tout d'abord, pour voir que R est un polynome en y', il suffit d'écrire l'équation (1) sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = \mathrm{R}(x, y, z)$$

et d'appliquer la condition $n \leqq m - 1$ aux pôles $z = g(x, y)$ de R; m étant nul ici, cette condition ne peut être vérifiée si ces pôles existent; R est donc un polynome en y'.

Pour voir ensuite que ce polynome est du second degré au plus, il suffit d'écrire l'équation (1) sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}, \qquad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z^{q-2}}[\mathrm{L}(x, y) + z(\ldots)],$$

q désignant le degré de R en y'. Appliquons encore la condition $n \leqq m - 1$; ici, $m = 1$, $n = q - 2$; donc q est égal ou inférieur à 2. De plus, la transformation (9) du n° 7 est ici

$$x = x_0 + \alpha \mathrm{X}, \qquad z = \alpha \mathrm{Z},$$

et le système auquel elle conduit se réduit, pour $\alpha = 0$, au système

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{z}, \qquad \frac{dz}{dx} = \mathrm{L}(x_0, y)$$

qui équivaut à l'équation (e).

Un problème préliminaire s'impose donc : *Déterminer toutes les équations* (e) *dont l'intégrale est uniforme.*

10. *Détermination de toutes les équations* $y'' = y'^2 l(y)$, *dont l'intégrale générale est uniforme.*

Il est facile de résoudre ce problème en le ramenant à la détermination de groupes *fuchsiens* particulièrement simples; il suffit de remarquer que l'intégrale générale d'une équation (e) est de la forme $y = \mathrm{F}(\mathrm{C}x + \mathrm{C}_1)$, C et C_1 désignant deux constantes arbitraires. Mais nous n'aurons recours ici qu'aux principes de la méthode développée au n° 7.

Je montrerai d'abord que *la fonction* $l(y)$ *n'a que des pôles simples.*

Soit, en effet, $y = h$ un pôle d'ordre i de $l(y)$. Il est loisible, en augmentant y de h, de supposer $h = 0$. Écrivons l'équation (e) ainsi :

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{y^i}[k + y(\ldots)], \qquad (i > 1);$$

la transformation

$$y = \alpha Y, \qquad z = \alpha^i Z$$

substitue à ce système le suivant

$$(e') \qquad \frac{dy}{dx} = \alpha^{(i-1)} z, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{y^i}[k + \alpha(\ldots)].$$

Ordonnons l'intégrale $y(x)$, $z(x)$ de ce dernier système suivant les puissances de α; il vient

$$y = y_0 - \frac{\alpha^{(i-1)}}{k} y_0^i \log\left(\frac{x + C}{x_0 + C}\right) + \ldots,$$

$$z = \frac{-y_0^i}{k(x + C)} + \alpha(\ldots), \qquad \left(C = -x_0 - \frac{y_0^i}{z_0 k}\right).$$

L'équation (e) ne peut donc avoir ses points critiques fixes si i est plus grand que 1. C. Q. F. D.

Si $i = 1$, le système (e') se réduit, pour $\alpha = 0$, au système

$$\frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = k\frac{z^2}{y},$$

qui s'intègre aussitôt et dont l'intégrale générale peut s'écrire

$$y = (Cx + C')^{\frac{1}{1-k}} \quad (\text{si } k \neq 1) \qquad \text{et} \qquad y = e^{Cx + C'} \quad (\text{si } k = 1).$$

Pour que la fonction $y(x)$ ainsi définie soit uniforme, *il faut donc que k soit égal à* 1 *ou* $1 + \frac{1}{n}$ (n désignant un entier positif ou négatif).

Ceci posé, remarquons que l'équation (e) équivaut à l'égalité

$$\frac{dx}{dy} = C e^{-\int l(y) dy};$$

d'après ce qui précède, la fonction $l(y)$ ne peut avoir que des pôles simples à résidus commensurables; soit ν le plus petit dénominateur commun de ces résidus : la fonction $e^{-\int l(y) dy}$ est la racine

$\nu^{\text{ième}}$ d'une fonction méromorphe $\Phi(y)$. D'autre part, la transformation $y = \frac{1}{Y}$, appliquée à l'équation (e), montre aussitôt que la fonction $-\frac{1}{Y^2}\Phi\left(\frac{1}{Y}\right)$, donc aussi $\Phi\left(\frac{1}{Y}\right)$, est méromorphe pour $Y = 0$. Il suit de là que $\Phi(y)$ est une fonction rationnelle de y, et l'on est ramené ainsi au problème suivant :

Déterminer toutes les équations

$$y'^{\nu} = \rho(y) \tag{10}$$

(*où* ρ *est rationnel en* y) *dont l'intégrale est uniforme.*

Or ce problème a été résolu explicitement par Briot et Bouquet. Si l'on connaît une telle équation (10), son intégrale reste uniforme quand on multiplie $\rho(y)$ par une constante quelconque (car cela revient à multiplier x par une constante) : en prenant la dérivée logarithmique des deux membres de (10), on obtient une équation (e) à intégrale uniforme, à savoir l'équation

$$\nu y'' = y'^2 \frac{\rho'(y)}{\rho(y)}.$$

Il suffit donc d'épuiser tous les types énumérés par Briot et Bouquet pour obtenir toutes les équations (e) cherchées. On trouve ainsi que $l(y)$ coïncide nécessairement avec une des expressions suivantes ([1]) :

$$(\mathrm{T})\quad \left\{\begin{array}{l}
0, \quad \dfrac{2a}{ay+b}, \quad \dfrac{a\left(1+\frac{1}{n}\right)}{ay+b} + \dfrac{c\left(1-\frac{1}{n}\right)}{cy+d}, \quad (n \text{ entier} > 1),\\[2ex]
\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d},\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d}\right) + \dfrac{e}{ey+f},\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f} + \dfrac{g}{gy+h}\right),\\[2ex]
\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f}\right),\\[2ex]
\dfrac{1}{2}\,\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{e}{ey+f}\right),\\[2ex]
\dfrac{5}{6}\,\dfrac{a}{ay+b} + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{c}{cy+d} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{e}{ey+f};
\end{array}\right.$$

([1]) Le même procédé permet de résoudre aussi aisément la question en suppoles a, b, ..., h sont des quantités quelconques qui peuvent être nulles.

Il suit de là que *si une équation*

$$(\mathrm{E}) \qquad y'' = \mathrm{L}(x,y)y'^2 + \mathrm{M}(x,y)y' + \mathrm{N}(x,y)$$

a ses points critiques fixes, L *coïncide nécessairement avec une des expressions du Tableau* (T), *où les* a, b, ..., h *sont des fonctions de* x.

11. *Étude de l'équation* (E) *dans le voisinage d'un pôle* $y = h(x)$ *de* L, M, N.

Je vais établir maintenant que *les pôles* $y = h(x)$ *des fonctions* M *et* N *de* y *coïncident nécessairement avec ceux de* L *et sont tous simples.*

Supposons, en effet, que $y = h(x)$ soit pôle d'ordre i pour L ($i = 1$ ou 0), d'ordre j pour M, d'ordre k pour N, un au moins des entiers j, k étant plus grand que i. En augmentant y de h, il est loisible de supposer $h \equiv 0$, et (dans le voisinage du pôle considéré) d'écrire l'équation sous la forme

$$(\mathrm{E}_1)\ y'' = \frac{y'^2}{y}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)+y(\ldots)\right]+\frac{y'}{y^j}[\mathrm{M}(x,0)+y(\ldots)]+\frac{1}{y^k}[\mathrm{N}(x,0)+y(\ldots)];$$

n désigne un entier positif ou négatif, qui peut être infini, mais non nul; n est égal à 1, si i est nul.

Posons

$$y = \alpha \mathrm{Y}, \qquad x = x_0 + \alpha^j \mathrm{X}, \qquad \text{si} \qquad k \leqq 2j-1,$$

et

$$y = \alpha \mathrm{Y}, \qquad x = x_0 + \alpha^{\frac{1+k}{2}} \mathrm{X}, \qquad \text{si} \qquad k \geqq 2j-1;$$

les deux transformations se confondent si $k = 2j-1$.

L'équation (E_1) devient :

$$(11)\quad y'' = \frac{y'^2}{y}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \mathrm{M}_0\frac{y'}{y^j} + \alpha(\ldots), \qquad \text{si } k < 2j-1,$$

$$(12)\quad y'' = \frac{y'^2}{y}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{\mathrm{N}_0}{yk} + \alpha^{\frac{1}{2}}(\ldots), \qquad \text{si } k > 2j-1,$$

---

sant $l(y)$ non plus *rationnel,* mais *algébrique* en y. Ce problème a été résolu explicitement par M. Picard, avec la restriction que $e^{\int l(y)dy}$ ne présente pas de singularités *transcendantes* (*Journal de Liouville,* 1889, 4ᵉ série, t. V, p. 300-319; *American Journal,* 1894, t. XVI, p. 111-122; *Traité d'Analyse,* t. III, p. 66-80).

et

$$(13)\quad y''=\frac{y'^2}{y}\left(1-\frac{1}{n}\right)+M_0\frac{y'}{y^j}+\frac{N_0}{y^{2j-1}}+\alpha(\ldots),\quad \text{si } k=2j-1,$$
$$[M_0=M(x_0,0),\quad N_0=N(x_0,0)].$$

Pour $\alpha=0$, l'équation (13) comprend les deux précédentes à condition d'admettre que, si M_0 est nul, j n'est pas nécessairement un entier, mais que $2j$ est un entier $\geqq 2$. Il me suffit donc de montrer que *l'équation*

$$(14)\qquad y''=\frac{y'^2}{y}\left(1-\frac{1}{n}\right)+M_0\frac{y'}{y^j}+\frac{N_0}{y^{2j-1}}$$

[où une au moins des quantités M_0, N_0 n'est pas nulle] *n'a son intégrale uniforme que si l'on a* $j=1$, *avec* $n\neq 1$.

Remarquons d'abord que la transformation

$$y=\alpha Y,\qquad x=x_0+\alpha^j X,$$

conserve l'équation (14) (*voir* le n° 8); dans cette transformation, on a

$$\frac{dx}{dy}y^{1-j}\equiv\frac{dX}{dY}Y^{1-j}.$$

Si l'on pose $u=\frac{dx}{dy}y^{1-j}$, toutes les fonctions $u(y)$ définies par (14) seront de la forme $u_1(Cy)$, c'est-à-dire que $u(y)$ est donné par une équation de la forme

$$\varphi(u)\,du=\frac{dy}{y}.$$

C'est ce que vérifie aussitôt un calcul élémentaire : l'équation (14) équivaut au système

$$(15)\qquad \frac{du}{u\left[j-\frac{1}{n}+M_0u+N_0u^2\right]}=-\frac{dy}{y},$$

$$(16)\qquad \frac{dx}{dy}=uy^{j-1}.$$

Cela étant, *soit d'abord* $j>1$. L'équation (15) $\left[\text{où } j \text{ est différent de } \frac{1}{n}\right]$ admet au moins une solution $u=C$, où la constante C n'est pas nulle; la fonction $y(x)$, définie par $dx=Cy^{j-1}\,dy$, n'est pas uniforme; l'intégrale générale de (14), *a fortiori*, n'est pas uniforme.

Soit maintenant $j=1$, avec $n=1$. Écrivons l'équation (14) ainsi :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}, \qquad \frac{du}{dx}=-\frac{u(M_0+N_0u)}{y},$$

et faisons le changement de variables

$$u=\alpha U, \qquad x=\alpha X;$$

le système considéré devient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{u}, \qquad \frac{du}{dx}=-\frac{\alpha u(M_0+N_0\alpha u)}{y},$$

et si l'on développe l'intégrale $y(x)$, $u(x)$ de ce nouveau système suivant les puissances de α, on trouve

$$y=y_0+\frac{x-x_0}{u_0}+\alpha(\ldots)$$

avec

$$u=u_0-\alpha M_0u_0^2\log\left(y_0+\frac{x-x_0}{u_0}\right)+\ldots, \qquad \text{si} \qquad M_0\neq 0,$$

ou

$$u=u_0-\alpha^2N_0u_0^3\log\left(y_0+\frac{x-x_0}{u_0}\right), \qquad \text{si} \qquad M_0=0.$$

L'intégrale de (14) n'est donc pas uniforme.

J'ai bien établi ainsi que l'intégrale de (14) n'est uniforme que si l'on a $j=1$, $n\neq 1$. Autrement dit, tout pôle $y=h$ de M ou de N est nécessairement du premier ordre et coïncide avec un pôle de L. C. Q. F. D.

12. Ce résultat est d'une extrême importance : CAR IL LIMITE LE DEGRÉ DE M ET DE N EN y. En effet, si D est le dénominateur de L, on a

$$M=\frac{\mu}{D}, \qquad N=\frac{\nu}{D},$$

μ et ν étant des polynomes en y. D'autre part, posons $y=\frac{1}{Y}$; l'équation (E) devient

$$Y''=\frac{Y'^2}{Y}\left[2-\frac{L\left(x,\frac{1}{Y}\right)}{Y}\right]+Y'M\left(x,\frac{1}{Y}\right)-Y^2N\left(x,\frac{1}{Y}\right).$$

Deux cas sont à distinguer : Si L est identiquement nul, ou si L coïncide avec une des expressions (T) pour lesquelles une des quantités a, c, e, g est nulle, le coefficient de Y'^2 admet le pôle simple $Y = 0$; les degrés de $\mu(x, y)$ et $\nu(x, y)$ peuvent alors surpasser le premier d'une unité, le second de trois unités, le degré q de D. Si, au contraire, L coïncide avec une expression (T) où les quantités a, c, b, g sont différentes de zéro, $Y = 0$ n'est pas un pôle du coefficient de Y'^2, et les degrés de μ et de ν sont au plus égaux le premier à q, le second à $q + 2$. De la discussion des n^{os} 10 et 11, il suit donc que *les degrés de* D, *de* μ *et de* ν *en* y *sont au plus égaux respectivement à* 4, 4 *et* 6.

Mais les conditions fournies par l'étude de l'équation (E) dans le voisinage d'un pôle $y = h(x)$ du coefficient différentiel, sont loin d'être épuisées.

Considérons, en effet, l'équation (13) où $j = k = 1$ (avec $n \neq 1$), à savoir l'équation

$$y'' = \frac{y'^2}{y}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + M_0 \frac{y'}{y} + \frac{N_0}{y} + \alpha(\ldots) \qquad (n \neq 1);$$

cette équation est intégrable pour $\alpha = 0$, et si l'on développe $y(x)$ suivant les puissances de α, les coefficients du développement sont donnés par des *quadratures*. Ces coefficients doivent être des fonctions de x à points critiques fixes.

Les conditions ainsi obtenues doivent être appliquées à tous les pôles $y = h(x)$ de L $\left[\text{le point } y = \infty \text{ compris, grâce à la transformation } y = \frac{1}{Y}\right]$.

13. Explicitons ces conditions dans le cas où L coïncide avec la plus simple des expressions (T), à savoir $L \equiv 0$. Alors l'équation (E) est nécessairement de la forme

$$(17) \quad y'' = y'[a(x)y + b(x)] + A(x)y^3 + B(x)y^2 + C(x)y + D(x).$$

Observons aussitôt que la transformation $y = \frac{Y}{\sqrt{-A}}$ donne à A la valeur -1 (si $A \neq 0$), et que la transformation $y = \frac{-2}{a}Y$ donne à $a(x)$ la valeur -2 (si $a \neq 0$) [1].

---

[1] Ces valeurs numériques sont choisies pour apporter quelques simplifications dans des calculs ultérieurs.

Au lieu d'employer la transformation $y = \frac{1}{Y}$, posons directement

$$y = \frac{Y}{\alpha}, \qquad x = x_0 + \alpha X;$$

l'équation (17) prend la forme

$$y'' = a(x_0)yy' + A(x_0)y^3 + \alpha(\ldots),$$

équation qui, pour $\alpha = 0$, devient

$$y'' = a_0 yy' + A_0 y^3 \qquad a_0 = a(x_0),\ A_0 = A(x_0)];$$

cette dernière équation équivaut au système

$$\text{(18)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{u}, \qquad \frac{du}{dx} = (2 - a_0 u - A_0 u^2)y.$$

Tout d'abord, si A_0 est nul, l'équation $y'' = a_0 yy'$, qui entraîne l'égalité $2y' = a_0 y^2 +$ const., a son intégrale uniforme.

Soit maintenant $A_0 \neq 0$. Il est loisible de supposer $A_0 = -1$. Le système (18) peut s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{u}, \qquad \frac{du}{dx} = (u-h)(u-k)y, \qquad [hk = 2].$$

Posons $u = h + \alpha v$; il vient

$$\text{(19)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{h + \alpha v}, \qquad \frac{dv}{dx} = v[h - k + \alpha v]y.$$

Si $h \neq k$, le système (pour $\alpha = 0$) s'intègre ainsi

$$y = \frac{-h}{x+c}, \qquad v = c_1(x+c)^{-h(h-k)} = c_1(x+c)^{2-h^2}$$

(c et c_1 constantes arbitraires);

pour que cette intégrale soit uniforme, il faut que $(2 - h^2)$ soit un entier n positif ou négatif, mais différent de zéro $\left[\text{car } (2-h^2) = \frac{k-h}{h} \text{ ne peut être nul si } h \neq k\right]$. On doit avoir, de même, $k^2 = 2 - n'$, et par suite

$$4 = k^2 h^2 = (2-n)(2-n') \qquad [n,\ n' \neq 0].$$

Cette égalité entraîne

$$\text{soit}\ \begin{cases} 2-n=1, \\ 2-n'=4, \end{cases} \qquad \text{soit}\ \begin{cases} 2-n=-1, \\ 2-n'=-4, \end{cases} \qquad \text{soit}\ \begin{cases} 2-n=-2, \\ 2-n'=-2. \end{cases}$$

De là résultent, pour h et $a_0 \equiv h + \frac{2}{h}$, les valeurs

$$\begin{aligned} h &= \pm 1, & a_0 &= \pm 3; \\ h &= \pm i, & a_0 &= \mp i; \\ h &= i\sqrt{2}, & a_0 &= 0. \end{aligned}$$

La transformation $y = -\mathrm{Y}$ ramène le cas de $a_0 = +3$ au cas de $a_0 = -3$; si $a_0 = \pm i$, la transformation $y = \pm i\mathrm{Y}$ donne à a_0 la valeur -1 et à A_0 la valeur $+1$; si donc A est différent de zéro, il est loisible de se borner aux cas où A et a ont les valeurs suivantes

$$\mathrm{A} = -1, \quad a = -3; \qquad \mathrm{A} = +1, \quad a = -1; \qquad \mathrm{A} = -1, \quad a = 0.$$

Nous avons toutefois laissé de côté l'hypothèse *où h et k seraient égaux*. Le système (19) s'écrit alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{h + \alpha v}, \qquad \frac{dv}{dx} = \alpha v^2 y.$$

Développons $y(x)$ et $v(x)$ suivant les puissances de α; on trouve

$$y = \frac{-h}{x+c} + \alpha(\ldots), \qquad v = c_1 - \alpha c_1^2 h \log(x+c) + \ldots$$

(c, c_1 constantes arbitraires).

L'intégrale de (19) n'est donc pas uniforme : l'hypothèse est à rejeter.

En définitive, moyennant une transformation $y = \lambda(x)\mathrm{Y}$ (où λ est connu algébriquement à l'aide des coefficients a, A), on peut faire coïncider les coefficients a, A avec un des systèmes suivants

$$\begin{aligned} a &= 0, & \mathrm{A} &= 0, \\ a &= -2, & \mathrm{A} &= 0, \\ a &= -3, & \mathrm{A} &= -1, \\ a &= -1, & \mathrm{A} &= +1, \\ a &= 0, & \mathrm{A} &= -1. \end{aligned}$$

Parmi les équations que nous sommes amenés ainsi à considérer, la classe la plus simple est donc de la forme

$$(\mathcal{E}) \qquad y'' = b(x)y' + B(x)y^2 + C(x)y + D(x).$$

Je me bornerai, dans ce Mémoire, à épuiser l'étude de cette classe d'équations. La méthode qui s'applique à toutes les autres classes ne diffère d'ailleurs de celle que je vais suivre que par des complications de calculs.

14. *Détermination de toutes les équations* ($\mathcal{E}$) *à points critiques fixes.* — Je remarque d'abord qu'une équation ($\mathcal{E}$) garde sa forme dans le changement de variables :

$$(20) \qquad y = \lambda(x)Y + \mu(x), \qquad X = \varphi(x);$$

l'équation devient

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{dY}{dX}\frac{1}{\varphi'}\left[b - \frac{2\lambda'}{\lambda} - \frac{\varphi''}{\varphi'}\right] + Y^2\frac{B\lambda}{\varphi'^2} + \frac{Y}{\varphi'^2}\left[C + 2B\mu + \frac{b\lambda'}{\lambda} - \frac{\lambda''}{\lambda}\right]$$
$$+ \frac{1}{\lambda\varphi'^2}[D + C\mu + B\mu^2 + b\mu' - \mu''],$$

où x doit être remplacé en fonction de X.

Si $B \neq 0$, on peut disposer de λ, μ, φ de façon que le coefficient de Y^2, dans la nouvelle équation, soit numérique, égal à 6 par exemple ([1]), et que, de plus, les coefficients de Y' et de Y soient nuls. Ces conditions se traduisent par les égalités

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{2\lambda'}{\lambda} = b, \qquad \frac{B\lambda}{\varphi'^2} = 6, \qquad \mu = \frac{1}{2B}\left[\frac{\lambda''}{\lambda} - \frac{b\lambda'}{\lambda} - C\right],$$

c'est-à-dire

$$(21) \qquad \left\{\begin{aligned} \lambda &= B^{-\frac{1}{5}}e^{\frac{2}{5}\int b(x)\,dx} \\ X &= \frac{1}{\sqrt{6}}\int B^{\frac{1}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}\,dx, \\ 2B\mu &= -C + \frac{1}{5}\left[2b' - \frac{B''}{B} + \frac{6}{5}\left(\frac{B'^2}{B^2} - b^2\right) + \frac{1}{5}\frac{bB'}{B}\right]. \end{aligned}\right.$$

Si $B \equiv 0$, l'équation ($\mathcal{E}$) est *linéaire* et se laisse ramener par

---

([1]) Le choix de ce coefficient numérique a pour effet de simplifier quelques calculs ultérieurs.

une transformation (20) à la forme

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 0.$$

En définitive, la transformation (20) permet de substituer à l'équation ($\mathcal{E}$) une des deux équations

$$y'' = 6y^2 + S(x), \qquad y'' = 0,$$

15. Je vais montrer maintenant que *l'équation*

$$(\mathcal{E}') \qquad y'' = 6y^2 + S(x),$$

ne peut avoir ses points critiques fixes que si $S(x)$ *est linéaire en* x.

A cet effet, j'introduis la transformation

$$(22) \qquad y = \frac{Y}{\alpha^2}, \qquad x = a + \alpha X,$$

qui substitue à ($\mathcal{E}'$) l'équation

$$(e') \qquad y'' = 6y^2 + \alpha^4 S(a) + \alpha^5 x S'(a) + \alpha^6 x^2 \frac{S''(a)}{1.2} + \ldots,$$

et je développe l'intégrale de (e') suivant les puissances de α.

Appliquons, pour cela, le méthode classique rappelée au nº **7**. On trouve aussitôt

$$y = \varphi + \alpha^4\psi + \alpha^5\chi + \alpha^6\tau + \ldots$$

avec

$$\varphi'' = 6\varphi^2 \qquad \psi'' - 12\varphi\psi = S(a), \qquad \chi'' - 12\varphi\chi = xS'(a),$$
$$\tau'' - 12\varphi\tau = \frac{x^2}{2} S''(a) + \ldots.$$

L'intégrale générale de l'équation

$$\varphi'' = 6\varphi^2$$

vérifie l'égalité

$$\varphi'^2 = 4\varphi^3 - h,$$

et peut s'écrire

$$\varphi = p(x + k, 0, h), \qquad (k \text{ et } h \text{ constantes arbitraires}).$$

L'intégrale de l'équation

$$\psi'' - 12p(x + k, 0, h)\psi = 0$$

est, nous le savons (*voir* p. 210, note 1),

$$C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial h} + C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial k} \equiv C_1(x\wp' + 2\wp) + C_2 \wp' \qquad \left[\wp' = \frac{\partial \wp}{\partial x}\right].$$

Calculons immédiatement le coefficient τ défini par l'équation

$$\tau'' - 12\, \wp(x + k, 0, h)\, \tau = x^2 \frac{S''(a)}{2};$$

la méthode de la variation des constantes donne

$$\tau = C_1(x\wp' + 2\wp) + C_2 \wp',$$

avec

$$C'_1(x\wp' + 2\wp) + C'_2 \wp' = 0,$$
$$C'_1(x\wp'' + 3\wp') + C'_2 \wp'' = x^2 \frac{S''(a)}{2};$$

d'où l'on tire aussitôt

$$12\, C'_1 = \frac{S''(a)}{2} x^2 \wp', \qquad 12\, C'_2 = \frac{S''(a)}{2} x^2 (x\wp' + 2\wp).$$

Les fonctions $x^2 \wp'$, $x^2(x\wp' + \wp)$ admettent comme pôle le point $x = -k$, et le résidu de ce pôle est égal à -2 pour la première, à $+2k$ pour la seconde; on a donc

$$C_1 = \frac{S''(a)}{12} \log(x + k) + \ldots, \qquad C_2 = \frac{S''(a)}{12} k \log(x + k) + \ldots,$$
$$\tau = \frac{S''(a)}{12} \log(x + k)\, [(k - x)\, \wp' - 2\wp] + \ldots,$$

les termes non écrits étant méromorphes dans le domaine de $x = -k$. Pour que τ soit lui-même méromorphe, il faut que $S''(a)$ soit nul, et comme ceci doit avoir lieu quel que soit a, *il faut que* $S(x)$ *soit égal à* $px + q$, p *et* q *étant des constantes numériques.* C. Q. F. D.

16. Toutes les équations $(\mathcal{E}')$ à points critiques fixes se laissent donc ramener, par une transformation (20), à l'une des deux formes

$$y'' = 0, \qquad y'' = 6y^2 + px + q.$$

La transformation (22) permet d'ailleurs de donner à q la valeur 0 et à p la valeur 1 (si $p \neq 0$), ou à q la valeur $\frac{1}{2}$ si $p = 0$, mais si $q \neq 0$. Les équations à étudier se réduisent ainsi aux suivantes :

(23) $\quad y'' = 0, \qquad y'' = 6y^2, \qquad y'' = 6y^2 + \frac{1}{2}, \qquad y'' = 6y^2 + x.$

Les trois premières s'intègrent aussitôt et donnent pour y les fonctions uniformes

$$y = hx + k, \qquad y = p(x+k, 0, h), \qquad y = p(x+k, 1, h);$$

il reste à étudier l'équation

$$y'' = 6y^2 + x.$$

Auparavant, je ferai une remarque au sujet de la réduction d'une équation donnée ($\mathcal{E}$) à une des formes (23). On peut toujours reconnaître, *à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques* [1], si une équation donnée ($\mathcal{E}$) se laisse ramener par un changement de variables (20) à un des types (23). Tout d'abord, si l'équation (E_1) correspond au type $Y''_{X^2} = 0$, elle est linéaire. Pour qu'elle corresponde à un des trois types

$$Y''_{X^2} = 6Y^2 + S \quad [S \equiv 0, \text{ ou } \tfrac{1}{2}, \text{ ou } X],$$

il faut et il suffit que les équations (21) soient compatibles avec la condition

(24) $$D + C\mu + B\mu^2 + b\mu' - \mu'' = S\lambda\left(\frac{dX}{dx}\right)^2 \quad [S \equiv 0, \text{ ou } \tfrac{1}{2}, \text{ ou } X],$$

ce qu'on sait vérifier et ce qui se traduit par une relation algébrique entre b, B, C, D et leurs dérivées. Mais quand ces conditions sont compatibles, trois circonstances se présentent, suivant que S coïncide avec 0, 1 ou X. La transformation de passage la plus générale qui vérifie les équations (21) se déduit de l'une d'elles en changeant λ en $m^2\lambda$ et X en $mX + n$ (m et n désignant des constantes arbitraires), c'est-à-dire en changeant Y en $\frac{1}{m^2}$ Y et X en $mX + n$ dans l'équation

$$Y'' = 6y^2 + S.$$

Or, cette transformation conserve l'équation quand $S \equiv 0$; quand $S \equiv 1$, l'équation n'est conservée que si $m^5 = 1$, et quand $S \equiv X$, que si $m^5 = 1$, $n = 0$.

[1] J'entends par là que les conditions à vérifier sont algébriques par rapport aux coefficients de ($\mathcal{E}$) et à leurs dérivées.

Si donc les équations (21) et (24) sont compatibles, λ, μ, X sont connus *algébriquement* à l'aide des coefficients de $(\mathcal{E})$ (et de leurs dérivées) dans l'hypothèse $S \equiv X$; λ et μ sont connus algébriquement et X *par une quadrature* dans l'hypothèse $S \equiv \frac{1}{2}$; μ est connu algébriquement, λ et X par *les deux quadratures* (21) dans l'hypothèse $S \equiv 0$ [1]. L'intégrale générale de $(\mathcal{E})$ peut s'écrire

$$y = \lambda \wp(X + k, 1, h) + \mu, \quad \text{si} \quad S \equiv \tfrac{1}{2},$$
$$y = \lambda \wp(X + k, 0, h) + \mu, \quad \text{si} \quad S \equiv 0.$$

En particulier, *quand l'équation* $(\mathcal{E})$ *ne renferme pas x explicitement,* le cas de $S \equiv X$ ne peut se présenter, et l'intégrale générale de $(\mathcal{E})$ est (si $b \not\equiv 0$) de la forme

$$y = B^{-\frac{1}{5}} e^{\frac{2bx}{5}} \wp[X + k, 0, h] - \frac{C}{2B} - \frac{3b^2}{25B},$$

avec

$$X = \frac{5}{\sqrt{6}} \frac{B^{\frac{2}{5}}}{b} e^{\frac{bx}{5}};$$

si $b = 0$, elle est donnée par l'équation elliptique

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{B}{3} y^3 + \frac{C}{2} y^2 + D y + h.$$

Je vais montrer maintenant que l'intégrale générale de l'équation

$$\text{(F)} \qquad y'' = 6y^2 + x$$

est méromorphe dans tout le plan.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION $y'' = 6y^2 + x$.

17. J'établirai d'abord que l'intégrale de l'équation (F) n'admet pas de *points critiques algébriques, mais admet des pôles mobiles.*

Soit, en effet, x_0 un point singulier algébrique d'une inté-

---

(1) C'est ce que vérifie un calcul tout élémentaire que j'omets pour abréger et qui donne explicitement les expressions de λ, μ, X.

grale $y(x)$, et soient y_0, y'_0 les valeurs (finies ou non) de y, y' pour $x = x_0$. Tout d'abord, y_0 et y'_0 ne peuvent être finies toutes deux; sinon $y(x)$ serait holomorphe pour $x = x_0$. Si y'_0 est infini, il en est de même *a fortiori* de y''_0 et, par suite, de y_0 d'après (F).

Soit donc

$$y = \frac{h}{(x - x_0)^r}(1 + \varepsilon),$$

r désignant un nombre réel, positif et rationnel. Pour que y'' et y^2 aient même partie principale, il faut que $r = 2$ et $h = 1$. Posons alors

$$y = \frac{1}{(x - x_0)^2}[1 + k(x - x_0)^s + \ldots],$$

s étant réel, positif et rationnel; la substitution de cette valeur de y dans l'équation (F) montre que s doit être égal à 4 et k égal à $-\frac{x_0}{10}$. En poursuivant le calcul, on trouve que, si une intégrale $y(x)$ admet le point $x = x_0$ comme point singulier algébrique (pôle ou point critique), son développement, dans le voisinage de ce point, est de la forme

$$(25)\quad y = \frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{x_0}{10}(x-x_0)^2 - \frac{1}{6}(x-x_0)^3 + h(x-x_0)^4 + \frac{x_0^2}{18}(x-x_0)^6 + \ldots;$$

h désigne une constante arbitraire.

Il existe effectivement des intégrales qui admettent un tel développement, et ces intégrales sont méromorphes dans le domaine du point $x = x_0$. Pour l'établir (1) écrivons le développement (25) ainsi :

$$y = \frac{1}{(x - x_0)^2} - \frac{x}{10}(x - x_0)^2 - \frac{(x - x_0)^3}{15} + h(x - x_0)^4 + \frac{x^2}{18}(x - x_0)^6 + \ldots,$$

(1) Il est bien facile de voir que, si l'on poursuit le développement (25), toutes les puissances successives de $(x - x_0)$ sont *entières*, ce qui montre que $y(x)$ est dénuée de points critiques algébriques. D'autre part, une fois h choisi, tous les coefficients du développement (25) sont déterminés, et l'on prouve aisément que ce développement converge en le comparant à une série *majorante*. Mais le mode de démonstration que nous employons dans le texte nous sera utile par la suite.

d'où

$$y' = -\frac{2}{(x-x_0)^3} - \frac{x(x-x_0)}{5} - \frac{3}{10}(x-x_0)^2$$
$$+ 4h(x-x_0)^3 + \frac{x^2}{3}(x-x_0)^5 + \ldots.$$

Éliminons $(x - x_0)$ entre ces deux développements; il vient, en posant $y = \frac{1}{z^2}$,

$$(26) \qquad y' = -\frac{2}{\varepsilon z^3} - \frac{x\varepsilon z}{2} - \frac{z^2}{2} + 7h\varepsilon z^3 + \ldots \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Ceci posé, j'effectue, dans l'équation (F), la transformation

$$(27) \qquad y = \frac{1}{z^2}, \qquad y' = -\frac{2}{z^3} - \frac{xz}{2} - \frac{z^2}{2} + uz^3;$$

les fonctions $z(x)$, $u(x)$ vérifient un système qu'on forme immédiatement, à savoir (¹) :

$$(28) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 1 + xz^4 + \dfrac{z^5}{4} - \dfrac{u}{2}z^6, \\[2mm] \dfrac{du}{dx} = \dfrac{x^2 z}{8} + \dfrac{3xz^2}{8} + z^3\left(\dfrac{1}{4} - ux\right) - \dfrac{5uz^4}{4} - \dfrac{3u^2}{2}z^5. \end{cases}$$

Ce système admet une solution $z(x)$, $u(x)$, et une seule, qui répond aux conditions initiales x_0, $z_0 = 0$, u_0, et cette solution est *holomorphe* pour $x = x_0$; la solution $y(x)$ correspondante admet $x = x_0$ comme pôle, et h est égal à $+\frac{u_0}{7}$.

(¹) La transformation (27) est choisie précisément de façon que le nouveau système différentiel *soit régulier pour* $z = 0$.

Il est évident, en effet, que le système est de la forme

$$z^m z' = P(x, z, u), \qquad z^m u' = Q(x, z, u)$$
$$(P, Q \text{ polynomes en } x, z, u;\ P \text{ ou } Q \not\equiv 0 \text{ pour } z = 0);$$

d'autre part, si l'on essaie une solution de la forme

$$z = (x - x_0)(1 + \ldots), \qquad u = u_0 + (x - x_0)(l + \ldots),$$

les premières égalités à écrire

$$1 + \ldots = \frac{P(x_0, 0, u_0) + \ldots}{(x - x_0)^m (1 + \ldots)}, \qquad l + \ldots = \frac{Q(x_0, 0, u_0) + \ldots}{(x - x_0)^m (1 + \ldots)}$$

doivent, d'après (26), être admissibles pour x_0, u_0 quelconques, ce qui exige $m = 0$.

Remarquons que rien n'est changé [si ce n'est le signe de z dans (28)], quand on emploie, au lieu de la transformation (27), la transformation

$$(29) \qquad y = \frac{1}{z^2}, \qquad y' = \frac{2}{z^3} + \frac{xz}{2} - \frac{z^2}{2} - uz^3.$$

L'intégrale générale $y(x)$ de l'équation (F) n'admet donc pas de points critiques algébriques, mais elle admet des pôles et, dans le voisinage de ces pôles, le développement de $y(x)$ est de la forme (25) (1).

18. *Mais l'intégrale $y(x)$ de* (F) *ne présente-t-elle pas de singularités transcendantes?* C'est ce qui n'est nullement démontré.

Pour bien faire comprendre la nature de cette difficulté, considérons un exemple plus caractéristique que l'exemple cité plus haut (n° **2**), à savoir l'exemple de l'équation

$$y'' = y'^2 \left[\frac{y[2k^2y^2 - (1+k^2)]}{(1-y^2)(1-k^2y^2)} + \frac{1}{\lambda\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \right]$$

(λ, k^2, constantes numériques).

On voit aisément que l'intégrale $y(x)$ de cette équation ne présente pas de points singuliers algébriques autres que des pôles; une discussion plus approfondie montre même que toute inté-

---

(1) Étant donnée une équation ($\mathcal{E}$) qu'on peut supposer ramenée à la forme

$$(\mathcal{E}') \qquad y'' - 6y^2 - S(x) = 0,$$

cherchons les conditions pour que $y(x)$ admette des pôles mobiles; si l'on remplace, dans ($\mathcal{E}'$), $y(x)$ par un développement polaire, on voit que ce développement doit être de la forme

$$y = \frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{x_0}{10}(x-x_0)^2 - \frac{1}{6}(x-x_0)^3 + h(x-x_0)^{i+3} + \ldots, \qquad (i > 0);$$

mais quand on veut déterminer le terme $h(x-x_0)^{i+3}$, on trouve que les termes en $(x-x_0)^2$ [dans l'égalité ($\mathcal{E}'$)] se réduisent au terme unique $\frac{S''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$. Ce terme ne peut disparaître (pour x_0 quelconque) que si $S(x)$ est linéaire en x. C'est précisément la condition que nous avons trouvée au n° 15, en exprimant que l'équation ($\mathcal{E}'$) a ses points critiques fixes. Cette coïncidence n'est pas fortuite, mais résulte d'un théorème général qui sera exposé dans les Mémoires des *Acta*.

grale $y(x)$ qui *tend* vers une valeur déterminée (finie ou non) quand x tend vers x_0 sur un certain chemin (d'ailleurs quelconque), est holomorphe ou méromorphe pour $x = x_0$. Ce serait cependant commettre une erreur grossière que d'en conclure que l'intégrale $y(x)$ est méromorphe dans tout le plan. L'intégrale de l'équation peut en effet s'écrire

$$y = \mathrm{sn}_{k^2}[\lambda \log(\mathrm{A}x + \mathrm{B})], \qquad \text{A, B constantes arbitraires.}$$

Le point $x = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ est donc un point d'indétermination complète de $y(x)$; quand x tend vers $-\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$ sur un chemin donné, $y(x)$ ne tend vers aucune limite (finie ou non); de plus, une infinité de valeurs de $y(x)$ se permutent autour de ce point (à moins que $2i\pi\lambda$ ne soit une période ou une partie aliquote d'une période de sn_{k^2}).

Il n'est donc nullement absurde, *a priori*, de supposer que l'intégrale $y(x)$ de l'équation (F) présente des singularités transcendantes. Ces points singuliers peuvent être à la fois points essentiels et points critiques transcendants, être isolés ou former (comme dans le cas du troisième ordre) des lignes, des ensembles parfaits, etc. Pour démontrer que les singularités transcendantes de $y(x)$ n'existent pas, *nous n'avons le droit d'introduire aucune restriction :* une discussion qui écarterait d'avance certaines singularités comme invraisemblables serait *inexistante*.

C'est cet obstacle, comme je l'ai dit, qui a arrêté longtemps les efforts des géomètres. Les deux premières méthodes qui m'ont permis de le surmonter étaient, la première surtout, d'une complication extrême. J'ai trouvé récemment une troisième méthode beaucoup plus simple, méthode synthétique qui non seulement s'applique d'elle-même aux équations du second ordre, mais s'étend aux équations d'ordre supérieur. C'est cette méthode que je vais exposer ici sur l'équation (F).

19. *Démonstration de la non-existence des singularités transcendantes de l'équation* (F).

Soit $y(x)$ une intégrale particulière de (F), définie par les valeurs initiales (finies) x_0, y_0, y'_0 de x, y, y'. La fonction $y(x)$

est holomorphe, et, *a fortiori*, méromorphe dans le voisinage de x_0. Soit Γ le plus grand cercle de centre x_0 où $y(x)$ reste méromorphe. Si Γ embrasse tout le plan, le théorème est démontré. Sinon, il existe sur la circonférence de Γ au moins un point singulier non algébrique, $x = a$, de la fonction $y(x)$. Je vais montrer que cette hypothèse est absurde.

Faisons tendre x vers le point $\bar{a}$ sur le rayon $\overline{x_0 a}$ ou l, et soit $M(x)$ le module maximum des deux quantités $y(x)$, $y'(x)$. Si $M(x)$ *ne tend pas vers l'infini* quand x tend vers $\bar{a}$ sur l, il est clair que $y(x)$ est holomorphe pour $x = a$. En effet, il existe alors sur le rayon l *des* points x_1, aussi voisins de a qu'on veut, pour lesquels y et y' prennent des valeurs y_1, y'_1 de module inférieur à une certaine quantité numérique A. D'après le théorème fondamental de Cauchy, l'intégrale $y(x)$ de (F) définie par les conditions initiales.

$$x_1,\ y_1,\ y'_1, \qquad \text{avec} \qquad |x_1 - a| < A, \quad |y_1| < A, \quad |y'_1| < A,$$

est holomorphe dans un cercle de centre x_1 et de rayon supérieur à une certaine quantité positive B; par suite, cette intégrale est holomorphe pour $x = a$. Il faut donc admettre que $M(x)$ tend vers l'infini quand x tend vers $\bar{a}$ sur l.

On connaît une infinité d'intégrales de (F) pour lesquelles $M(x)$ tend vers l'infini avec $\frac{1}{x-a}$: ce sont les intégrales qui admettent $x = a$ comme pôles; pour ces intégrales, l'expression u définie par l'égalité (27),

$$u = y^{\frac{3}{2}}\left[y' + \frac{1}{2y}\right] + 2y^3 + \frac{x}{2}y$$

(où l'on donne à $y^{\frac{3}{2}}$ un signe convenable), tend vers une valeur arbitraire finie $7h$. Inversement, supposons qu'une intégrale $y(x)$ satisfasse à la condition suivante : il existe (sur le rayon l) *des points* x_1, *aussi voisins de* $\bar{a}$ *qu'on veut*, tels que $|y(x_1)|$ dépasse toute limite donnée et que (pour un signe convenable de $y^{\frac{3}{2}}$) $|u(x_1)|$ reste inférieur à une certaine quantité A. Je dis que *cette intégrale $y(x)$ est méromorphe pour $x = a$.*

Posons, en effet, comme plus haut, $y = \frac{1}{z^2}$. Une des expressions

$$\frac{1}{z^3}\left[y'+\frac{2}{z^3}+\frac{xz}{2}+\frac{z^2}{2}\right], \qquad \frac{-1}{z^3}\left[y'-\frac{2}{z^3}-\frac{xz}{2}+\frac{z^2}{2}\right]$$

garde, pour $x=x_1$, un module inférieur à A, soit la première. Effectuons la transformation (27)

$$y=\frac{1}{z^2}, \qquad y'=-\frac{2}{z^3}-\frac{xz}{2}-\frac{z^2}{2}+uz^3.$$

L'intégrale $z(x)$, $u(x)$ du système (28), définie par les conditions initiales

$$x_1,\quad z_1,\quad u_1, \qquad \text{avec} \qquad |x_1-a|<A,\quad |z_1|<A,\quad |u_1|<A,$$

est holomorphe dans un cercle de centre de x_1 et de rayon supérieur à une quantité numérique B; elle est donc holomorphe pour $x=a$. Par suite, $y(x)$ est méromorphe pour $x=a$.

Cette remarque va nous servir à démontrer que $x=a$ ne peut être un point transcendant de l'intégrale considérée $y(x)$.

20. L'expression u, introduite plus haut, jouit de la propriété que, si l'on remplace y et y' par le développement polaire d'une intégrale, une des deux valeurs de u reste finie et prend au pôle une valeur arbitraire. Il est facile de former une infinité d'expressions

$$U=\rho(x,y,y') \tag{30}$$

qui jouissent de cette propriété, et de les choisir, notamment, *rationnelles en* x, y, y'. Le procédé le plus simple consiste à multiplier les deux égalités

$$y'+\frac{1}{2y}-y^{\frac{3}{2}}\left[2+\frac{x}{2y^2}-\frac{u}{y^3}\right]=0,$$
$$y'+\frac{1}{2y}+y^{\frac{3}{2}}\left[2+\frac{x}{2y^2}-\frac{u}{y^3}\right]=0;$$

il vient

$$y'^2-4y^3-2xy+\frac{y'}{y}+4u+\frac{1}{y}[\ldots]=0.$$

Posons

$$U=y'^2-4y^3-2xy+\frac{y'}{y};$$

quand, dans U, on remplace y par un développement polaire (25),

$U(x)$ est (dans le voisinage du pôle $x = x_0$) de la forme

$$U(x) = -28h + (x - x_0)^2[\ldots].$$

Pour éviter (ce qui nous sera utile plus loin) que $U'(x_0)$ ne soit nul, il suffit de remplacer U par $v = U + x$; soit donc

$$v = y'^2 - 4y^3 - 2xy + \frac{y'}{y} + x; \tag{31}$$

dans le voisinage d'un pôle $x = x_0$ de $y(x)$, on a

$$v(x) = -28h + x_0 + (x - x_0)^2[\ldots] = -4u(x) + x + \frac{1}{y}[\ldots];$$

$u(x)$ désigne celle des deux valeurs de u qui reste finie au pôle $x = x_0$ de $y(x)$.

Donnons à v et à x des valeurs finies, à y une valeur très grande, et soit y' une quelconque des deux racines de l'équation (31); une des deux valeurs de l'expression u qui correspondent à ces valeurs de x, y, y' est de la forme

$$u = \frac{x - v}{4} + \frac{1}{y}[\ldots],$$

et est, par conséquent, finie [1].

Considérons, d'après cela, une intégrale $y(x)$ de (F), et supposons qu'il existe (sur le rayon l) *des* points x_1, tendant vers $\overline{a}$,

---

[1] Remarquons que le succès de la méthode tient essentiellement à ce fait que v est du second degré en y'. Si l'on résout l'équation (31) par rapport à y', on trouve [pour x, v finis et $|y|$ très grand]

$$y' = \frac{-1}{2y} + y^{\frac{3}{2}}\left[2 + \frac{x}{2y^2} - \frac{x - v}{4y^3} + \ldots\right],$$

d'où (pour une des deux valeurs de u),

$$u = \frac{x - v}{4} + \frac{1}{y}(\ldots).$$

Substituons, au contraire, à v une expression $U = \rho(x, y, y')$ rationnelle en x, y, y', mais de degré $j > 2$ en y', et qui prenne, en un pôle x_0, une valeur arbitraire. Pour x, y, U donnés (x, U finis, y très grand), l'égalité $U = \rho$ définit j valeurs de y', dont deux au moins laissent finie une valeur de u; mais, pour chacune des $(j - 2)$ autres valeurs de y', les deux valeurs de u peuvent être très grandes. Si donc, pour *des* valeurs x_1 qui tendent vers $\overline{a}$, $|y(x)|$ croît indéfiniment, tandis que $U(x)$ reste fini, on n'en saurait conclure que $y(x)$ est méromorphe pour $x = a$.

tels que $|y(x_1)|$ puisse dépasser toute limite, tandis que $v(x_1)$ reste fini [soit $|v(x_1)| < A$]; cette intégrale est méromorphe pour $x = a$, car une des deux valeurs de $u(x_1)$ reste finie.

21. Nous introduirons ici une restriction que nous lèverons dans un instant. Nous admettrons que l'intégrale considérée $y(x)$ (pour laquelle $x = a$ est un point transcendant) conserve sur le rayon l un module supérieur ou égal à une certaine quantité ρ.

Dans ces conditions, il est impossible que $v(x)$ tende vers une valeur finie quand x tend vers $\bar{a}$ sur l. En effet, si v et y restent finis (en même temps que $|y|$ reste supérieur à ρ), y' reste également fini [d'après l'égalité (31)], et l'intégrale $y(x)$ est holomorphe pour $x = a$. Si v reste fini en même temps que $|y|$ dépasse toute limite, $y(x)$, nous venons de le voir, est méromorphe pour $x = a$. Il faut donc que, pour *des* valeurs de x qui tendent vers $\bar{a}$, le module de $v(x)$ croisse indéfiniment.

Nous allons en déduire que, pour d'autres valeurs x_1 de x, voisines de $\bar{a}$, le module de $v(x)$ est très petit et, par suite, en vertu de la remarque finale du n° 20, que $y(x)$ est méromorphe pour $x = a$.

Considérons pour cela l'expression

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{v'(x)}{v(x)} &= \frac{2y'y'' - 12y^2y' - 2xy' - 2y + \dfrac{y''}{y} - \dfrac{y'^2}{y^2} + 1}{y'^2 - 4y^3 - 2xy + \dfrac{y'}{y} + x} \\ &= \frac{4y^3 - y'^2 + y^2 + xy}{y(yy'^2 - 4y^4 - 2xy^2 + y' + xy)} = w. \end{aligned}\right.$$

Il faut que cette expression $w(x)$ croisse (en module) indéfiniment pour *des* points x_1 de l voisins de $\bar{a}$: autrement, $v = v_0 e^{\int_{x_0}^{x} w\,dx}$ resterait fini quand x décrit le rayon l. De plus, la valeur de $y(x)$ en ces points x_1 dépasse toute limite; car si $|y(x_1)|$ reste fini (mais supérieur à ρ), $y'(x_1)$ est très grand, et la valeur $w(x_1)$ se réduit sensiblement à la valeur finie $-\dfrac{1}{y^2(x_1)}$.

D'autre part, si, entre les expressions $v(x, y, y')$ et $w(x, y, y')$, on élimine y', les deux valeurs de $w(x, y, v)$ sont (pour y très grand) de la forme

$$w = \frac{1}{v} + \frac{1}{\sqrt{y}}[\ldots].$$

Si donc, pour x_1 voisin de $\bar{a}$ (sur l), $y(x)$ est très grand ainsi que $w(x)$, la fonction $v(x)$ est très petite, et l'intégrale $y(x)$ est méromorphe pour $x = a$.

Il est donc impossible que $x = a$ soit un point transcendant de l'intégrale considérée $y(x)$. C. Q. F. D.

22. Nous avons toutefois introduit au numéro précédent une restriction : nous avons admis que $|y(x)|$ restait supérieur à une quantité positive ρ quand x tendait vers $\bar{a}$ sur l. Il importe de lever cette restriction.

Je remarque d'abord que, sans modifier en rien la méthode précédente, il est loisible, dans l'expression v, de remplacer le terme $\frac{y'}{y}$ par $\frac{y'}{y-g}$, g désignant une constante. La démonstration n'est donc en défaut que si, sur l, la fonction $y(x)$ s'approche autant qu'on le veut de toute valeur g donnée à l'avance.

Cette remarque permet d'écarter immédiatement le cas où $y(x)$ *tendrait* constamment vers zéro quand x tend vers $\bar{a}$ sur l. On pourra donc toujours choisir la quantité positive ρ de façon que, pour des points de l (aussi voisins de $\bar{a}$ qu'on veut), $|y(x)|$ soit supérieur à ρ ; pour d'autres points $x = x_1$ de l (aussi voisins de $\bar{a}$ qu'on veut), $|y(x)|$ sera inférieur à ρ. Telle est l'hypothèse où nous nous plaçons.

Il est évident que rien n'est changé dans le raisonnement des n^{os} 21, 22, si l'on substitue au rayon l un autre chemin λ de *longueur finie* (1), aboutissant au point $\bar{a}$, et le long duquel $y(x)$ est *méromorphe* [l'extrémité $\bar{a}$ étant supposée un point transcendant de la branche de fonction $y(x)$].

---

(1) Il est essentiel de supposer λ de longueur finie; autrement la partie réelle de

$$\int_\lambda \frac{v'(x)}{v(x)}\,dx = \int_\lambda w(x)\,dx$$

pourrait croître indéfiniment, lors même que $|w|$ resterait inférieur à un nombre donné.

Ceci posé, je marque sur le rayon l la suite indéfinie de segments $\overline{x_1 x_2}$, $\overline{x_3 x_4}$, ... sur lesquels $|y(x)|$ est moindre que ρ : j'appelle c_{12}, c_{34}, ... leurs longueurs. Je vais montrer qu'on peut remplacer chaque segment $\overline{x_1 x_2}$ par un chemin de longueur comparable à c_{12}, sur lequel $|y(x)|$ est égal à ρ, et tel qu'entre ce chemin et le segment $\overline{x_1 x_2}$, la fonction $y(x)$ soit holomorphe.

A cet effet, je prends x comme fonction, y comme variable; l'équation (F) devient

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 [6y^2 + x]. \tag{33}$$

Soit $x(y)$ l'intégrale de (33) définie par les conditions initiales : $x(y_0) = x_0$, $x'(y_0) = x'_0$. Pour $x'_0 = 0$, l'intégrale se réduit à $x \equiv x_0$, $x' \equiv 0$. Si y, y_0, x_0, x'_0 satisfont aux inégalités

$$|y| \leqq \rho, \qquad |y_0| \leqq \rho, \qquad |x_0 - a| \leqq \rho, \qquad |x'_0| \leqq \tau \tag{34}$$

(τ désignant une quantité positive suffisamment petite), on peut écrire, en vertu des théorèmes bien connus de M. Poincaré,

$$x' = x'_0 [1 + \varepsilon(y, x_0, y_0, x'_0)], \qquad |\varepsilon| < \eta;$$

ε représente une fonction holomorphe de y, x_0, y_0, x'_0 dans le domaine (34), et η une quantité choisie à l'avance aussi petite qu'on veut : il nous suffit ici de prendre η inférieur à $\frac{1}{2}$ par exemple.

Soit maintenant C le chemin que décrit y quand x varie (sur l) de x_1 à x_2; le chemin C ne sort pas du cercle γ décrit dans le plan des y, de l'origine comme centre, avec un rayon égal à ρ; les deux extrémités y_1, y_2 de λ sont sur la circonférence de γ. Appelons s l'arc de C compté à partir de y_1, et S la longueur totale de C. Appelons enfin α l'angle que fait le rayon l avec l'axe réel du plan des x, et posons $x = a + r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$; la quantité $\frac{dx}{ds}$ ou $x'(y)\frac{dy}{ds}$ est égale à $e^{i\alpha}\frac{dr}{ds}$. Remarquons de plus que si le point x_1 est pris suffisamment voisin de a, $y'(x_1)$, $y'(x_3)$, ... sont très grands et leur module dépasse $\frac{1}{\tau}$.

L'égalité

$$x_2 - x_1 = (\mathrm{C})\int_{y_1}^{y_2} x'(y)\,dy = \int_0^{\mathrm{S}} x'(y)\frac{dy}{ds}\,ds = e^{i\alpha}\int_0^{\mathrm{S}} \frac{dr}{ds}\,ds$$

nous montre que

$$c_{12} = \int_0^S |x'(y)|\, ds = |x'_1| \int_0^S [1 + \varepsilon_1(s)]\, ds, \qquad |\varepsilon_1| < \eta < \frac{1}{2},$$

d'où

$$c_{12} \geqq |x'_1| \frac{S}{2}.$$

D'autre part, faisons décrire à y le plus petit arc de la circonférence γ compris entre y_1 et y_2; et soient σ la longueur de cet arc, L le chemin correspondant décrit par x, chemin qui part de x_1 pour aboutir en x_2. On a

$$\operatorname{arc} L \leqq |x'_1| \int_0^\sigma [1 + \varepsilon_2(\sigma)]\, d\sigma \leqq |x'_1| \frac{3\sigma}{2}, \qquad |\varepsilon_2| < \eta < \frac{1}{2}.$$

Comme S est au moins égal à la corde qui joint les points y_1, y_2, l'arc σ est au plus égal à $\frac{\pi}{2} S$; d'où

$$\operatorname{arc} L \leqq |x'_1| \frac{3\pi}{4} S \leqq \frac{3\pi}{2} c_{12}.$$

Enfin, comme $x'(y)$ est holomorphe et différent de zéro dans le cercle et sur la circonférence γ, la fonction $y(x)$ est holomorphe entre L et le segment $\overline{x_1 x_2}$: autrement dit, on peut déformer L d'une façon continue (les extrémités x_1, x_2 ne variant pas) et le réduire au segment $\overline{x_1 x_2}$, sans rencontrer de points singuliers de $y(x)$.

Remplaçons donc chaque segment $\overline{x_1 x_2}$, $\overline{x_3 x_4}$, ... par le chemin L correspondant. Nous formons ainsi un chemin λ, composé d'arcs analytiques réguliers dont le nombre croît indéfiniment mais dont la longueur totale est inférieure à $\frac{3\pi}{2} l$ (si l désigne la longueur du rayon l). Le long de λ, la fonction $y(x)$ est méromorphe, son module est au moins égal à ρ et elle doit admettre l'extrémité $\bar{a}$ de λ comme point singulier transcendant. Le raisonnement des nos 20 et 21 montre dès lors que cette hypothèse est absurde.

23. *Propriétés de la transcendante méromorphe $y(x)$ définie par l'équation* (F). — Chaque intégrale $y(x)$ de l'équation (F) est donc une fonction méromorphe dans tout le plan. Elle n'admet comme pôles que des pôles doubles, et dans le voisi-

nage d'un de ces pôles $y(x)$ est de la forme

$$(25) \qquad y = \frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{x_0}{10}(x-x_0)^2 + \ldots.$$

On sait qu'une fonction méromorphe peut toujours (et d'une infinité de manières) être représentée par le quotient de deux fonctions *entières*. Mais ce qu'il importe de démontrer c'est qu'on peut choisir ici ces fonctions entières de manière qu'elles soient définies par une équation différentielle très simple *du troisième ordre*.

Tout d'abord, si l'on pose

$$= -\int y(x)\,dx, \qquad \zeta = e^{\int \eta(x)\,dx},$$

on a

$$y = -\frac{d^2}{dx^2}\log\zeta = \frac{\zeta'^2 - \zeta\zeta''}{\zeta^2},$$

et ζ vérifie une équation différentielle du quatrième ordre qu'on peut écrire ainsi

$$\frac{\zeta}{\zeta} = \eta, \qquad \eta''' + 6\eta'^2 + x = 0.$$

Mais la dernière équation, multipliée par η'', s'intègre immédiatement et donne

$$\frac{\eta''^2}{2} + 2\eta^3 + x\eta' - \eta = \text{const.}$$

La fonction $y(x)$ se laisse donc définir par l'égalité

$$y = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\zeta'}{\zeta}\right),$$

où ζ est une fonction entière qui vérifie le système du troisième ordre

$$(35) \qquad \frac{\zeta'}{\zeta} = \eta, \qquad \frac{\eta''^2}{2} + 2\eta'^3 + x\eta' - \eta = 0.$$

On serait arrivé au même résultat par un procédé systématique qui a une portée générale. Le procédé consiste, dans ce cas particulier, à substituer à $y(x)$ une combinaison $P(x, y, y')$ qui n'ait que des pôles simples de résidu égal à 1. Prenons pour P un polynome et remplaçons-y $y(x)$ et $y'(x)$ par un développement (25) et le développement dérivé. Pour que les termes de plus haut degré en $\frac{1}{x-x_0}$ se détruisent, il faut que P soit au moins du deuxième degré en y' et du troisième en y. Considérons donc l'expression

$$a(x)y'^2+y'[b(x)y+c(x)]+d(x)y^3+e(x)y^2+f(x)y,$$

et cherchons à disposer de $a, \ldots, f$ de manière que $x=x_0$, au lieu d'être un pôle du sixième ordre de cette expression, soit pôle seulement du premier ordre et ait comme résidu l'unité. Les six équations linéaires et non homogènes en $a, b, \ldots, f$ qu'on obtient ainsi conduisent immédiatement à l'expression

$$\eta=\frac{y'^2}{2}-2y^3-xy; \qquad \text{d'où l'on déduit :} \qquad \eta'=-y;$$

la fonction $\zeta=e^{\int\eta dx}$ est une fonction entière.

24. *De l'intégrale $y(x)$ considérée comme fonction des constantes.* — Quand une équation

$$y''=R(y', y, x) \tag{36}$$

(où R est rationnel en y', y, x) a ses points critiques fixes, l'intégrale $y(x)$, définie par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0, est une fonction *uniforme* des deux constantes arbitraires y_0, y'_0, (x_0 a reçu une valeur numérique); mais trois cas peuvent se présenter (¹):

Premier cas. — $y(x)$ est une fonction *rationnelle* de y_0, y'_0. Dans ce cas, ou bien l'intégrale s'exprime algébriquement en fonction de x et de z, z', z'', la fonction $z(x)$ représentant l'intégrale d'une équation linéaire et homogène du troisième ordre, à coefficients algébriques; ou bien l'équation admet une intégrale première

$$H(x, y, y')=\text{const.} \tag{37}$$

où H est une fonction rationnelle de y', y, dont les coefficients s'expriment algébriquement en x et u (u désignant l'intégrale d'une équation de Riccati à coefficients algébriques) (²).

Deuxième cas. — $y(x)$ est une fonction transcendante de y_0, y'_0, mais on peut substituer à y_0, y'_0 d'autres constantes telles qu'une (et une seule) d'entre elles figure *algébriquement* dans y.

(¹) *Voir*, par exemple, mes *Leçons de Stockholm*, p. 465-466.
(²) *Loc. cit.*, p. 360-383.

On dit alors que $y(x)$ est une fonction *semi-transcendante* des deux constantes. L'équation admet alors une intégrale première (37) ([1]).

Troisième cas. — $y(x)$ est une fonction transcendante des deux constantes, de quelque façon qu'on les choisisse. On dit alors que l'intégrale est une *fonction essentiellement transcendante* DES DEUX *constantes*.

25. Nous allons voir que l'intégrale $y(x)$ de l'équation (F) rentre dans ce dernier cas.

Tout d'abord, l'intégrale $y(x)$ de (24) ne peut renfermer rationnellement les deux constantes. Autrement, il en serait de même pour l'intégrale de l'équation

$$(38) \qquad y'' = 6y^2 + \alpha^5 x,$$

qui se déduit de (24) en changeant x en αx et y en $\frac{y}{\alpha^2}$; la chose ayant lieu pour α quelconque, aurait lieu pour $\alpha = 0$, résultat absurde, puisque l'intégrale $y = \mathfrak{p}(x + k, 0, h)$ de l'équation $y'' = 6y^2$ est une fonction *semi-transcendante* des constantes.

Admettons maintenant que l'intégrale $y(x)$ de (24) soit une fonction semi-transcendante des constantes. Il existe alors une intégrale première de la forme (37), et, par suite, *des équations intégrales*

$$(39) \qquad P(y', y, x) = 0,$$

où P *est un polynome en* y', y. Je vais montrer que cela est impossible.

L'équation du premier ordre (39) ayant son intégrale uniforme, le coefficient de la plus haute puissance de y', soit y'^m, est indépendant de y et peut être supposé égal à l'unité. Le polynome P est de la forme

$$P \equiv y'^m + Q_2(y, x)y'^{m-1} + \ldots + Q_{2m-2}(y, x)y' + Q_{2m}(y, x) = 0,$$

Q_{2i} désignant un polynome en y de degré $2i$ au plus.

Si, dans P, on remplace y par $\frac{y}{\alpha^2}$, y' par $\frac{y'}{\alpha^3}$, x par $x_0 + \alpha x$, le

([1]) *Leçons de Stockholm*, p. 466-482.

polynome P prend la forme

$$\frac{1}{\alpha^k}[P_0(y', y) + \alpha P_1(y', y, x) + \ldots], \qquad k \geqq 3m.$$

P_0 est une fonction homogène de $y'^{\frac{1}{3}}$, $y^{\frac{1}{2}}$, et l'égalité $P_0 = 0$ est une équation intégrale de l'équation (38) où α est nul. Il suit de là aussitôt que P_0 est nécessairement de la forme

$$P_0 \equiv \lambda(y'^2 - 4y^3)^j \qquad (\lambda \text{ facteur constant}).$$

Cela exige que $k = 3m = 6j$: autrement, dans P_0, le coefficient de la plus haute puissance de y' serait un polynome en y dont le degré serait égal à $\frac{k - 3m}{2}$. Le polynome Q_{2m} en y est, par suite, de degré $\frac{3m}{2}$.

Mais on peut aller plus loin : l'intégrale de l'équation (39) admet des pôles mobiles $x = x_0$; dans le voisinage d'un de ces pôles, $y(x)$ vérifie [*voir* n° 17, éq. (26)] une relation de la forme

$$(40) \qquad y' = 2y^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{2y^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2y} - \frac{7h_1}{y^{\frac{3}{2}}} + \ldots \qquad (h_1 \text{ valeur numérique}).$$

Toute racine de l'équation (39) en y' doit donc (dans le domaine de $y = \infty$) être représentée par un développement (40); ceci revient à dire qu'on a identiquement

$$\begin{aligned} P(y', y, x) &\equiv \prod_{i=1}^{i=j}\left[\left(y' + \frac{1}{2y} + \ldots\right)^2 - y^3\left(2 + \frac{x}{2y^2} + \frac{l_i}{y^3} + \ldots\right)^2\right] \\ &\equiv y'^{2j} + \frac{jy'^{2j-1}}{y} + \ldots, \end{aligned}$$

identité impossible puisque, dans le dernier membre, le terme fractionnaire $\frac{y'^{2j-1}}{y}$ n'est détruit par aucun autre.

L'intégrale $y(x)$ *de* (F) *renferme donc les deux constantes sous forme transcendante de quelque façon qu'on les choisisse.*

C. Q. F. D.

26. *De l'irréductibilité de l'équation* (F). — Le résultat que nous venons d'obtenir entraîne d'importantes conséquences relatives à *l'irréductibilité* de l'équation (F).

Je rappelle d'abord la définition précise de l'irréductibilité d'une équation du second ordre [1] telle qu'il convient de l'introduire quand on étudie les équations différentielles comme sources de transcendantes nouvelles.

Définissons d'abord les transcendantes *du premier ordre :* toute fonction d'une ou de plusieurs variables qui vérifie un système différentiel *algébrique* dont l'intégrale générale ne dépend que d'une constante est une transcendante du premier ordre. Plus généralement, considérons un système différentiel du premier ordre algébrique par rapport aux fonctions et à leurs dérivées, mais dont les coefficients (fonctions des variables indépendantes) sont des transcendantes du premier ordre : les fonctions engendrées par un tel système seront dites encore *du premier ordre,* et ainsi de suite [2]. Les fonctions ainsi définies comprennent les fonctions qu'on obtient en remplaçant, dans une transcendante du premier ordre, les variables par d'autres transcendantes du premier ordre.

Introduisons maintenant les transcendantes *classiques.* Soit S un système différentiel dont l'intégrale générale ne dépend que d'un nombre fini de constantes : ce système sera dit *classique* s'il est *linéaire* ou *abélien* [3]. Tout système (S) dont l'intégrale générale renferme *algébriquement* ses constantes (convenablement choisies), est réductible *algébriquement* [4] à un tel système, et sera, par suite, regardé comme classique. D'après cette définition, tout système classique renferme algébriquement les fonctions et leurs dérivées : si les variables figurent aussi algébriquement, les transcendantes engendrées par S seront dites *transcendantes classiques.* Si les coefficients de (S) ne sont plus

---

(1) *Voir* mes *Leçons de Stockholm*, p. 487-501.

(2) C'est à un point de vue analogue que se sont placés M. Picard et M. Vessiot dans leur étude de la réductibilité des équations différentielles linéaires, par exemple dans la recherche des cas où l'équation s'intègre par quadratures.

(3) Un système est dit *abélien* si son intégrale générale est représentée par des fonctions abéliennes de paramètres u, v, ..., lesquels sont donnés en fonction de chaque variable x par une quadrature : $u(x) = \int h(x)\,dx + \text{const.}$

(4) Par le mot *algébriquement* j'entends que les fonctions définies par (S) s'expriment algébriquement à l'aide des coefficients de (S), de leurs dérivées, et des intégrales d'un système linéaire ou abélien; les coefficients de ce dernier système sont algébriques par rapport aux coefficients de (S) et à leurs dérivées.

algébriques, mais sont des transcendantes classiques, les nouvelles transcendantes ainsi engendrées seront dites encore *classiques,* etc.

D'après cette définition, les *combinaisons* de fonctions classiques (j'entends les fonctions obtenues en remplaçant dans une transcendante abélienne, par exemple, les arguments par des fonctions abéliennes de nouveaux arguments, etc.) sont encore des fonctions classiques.

Plus généralement, appelons *transcendantes* T_1 toute transcendante classique ou du premier ordre, *transcendantes* T_{i+1} toute transcendante engendrée, soit par un système classique, soit par un système différentiel du premier ordre, algébrique par rapport aux fonctions et à leurs dérivées, mais dont les coefficients sont des fonctions T_i; soit enfin T l'ensemble de toutes les transcendantes ainsi obtenues.

J'ai établi (*loc. cit.*) ce théorème :

Si une équation différentielle algébrique du second ordre a ses points critiques fixes, la condition nécessaire et suffisante pour que son intégrale générale $y(x)$ soit distincte des transcendantes (T), *c'est que $y(x)$ soit une fonction essentiellement transcendante* DES DEUX *constantes.*

L'intégrale générale $y(x)$ de l'équation (F) est donc une transcendante irréductible aux transcendantes classiques, aux transcendantes du premier ordre, et à leurs combinaisons. *C'est une fonction méromorphe* (*du second ordre*) *essentiellement nouvelle.*

27. On pourrait penser que certaines intégrales *particulières* de l'équation (F) sont algébriques ou réductibles à des transcendantes connues. Il n'en est rien.

Tout d'abord, si une intégrale $y(x)$ est algébrique, elle est rationnelle et peut se développer, dans le domaine de $x = \infty$, sous la forme

$$y = a_i x^i + a_{i-1} x^{i-1} + a_{i-2} x^{i-2} + \ldots, \qquad (i > 0 \text{ ou } < 0 \text{ ou } = 0).$$

Si i est négatif ou nul, y'' et y^2 sont finis pour x très grand, et l'égalité (F) ne saurait être vérifiée. Si i est égal ou supérieur à 1, le terme en x^{2i} qu'introduit y^2 dans l'équation (F) ne peut être détruit par aucun autre. Toute intégrale $y(x)$ de (F) est donc transcendante.

Admettons maintenant qu'une intégrale $y(x)$ de (24) vérifie une équation différentielle algébrique, soit (f), qui ne soit pas conséquence de (F). Les solutions $y(x)$ communes à (F) et à (f) ne peuvent dépendre que d'une constante (et dépendent effectivement d'une constante, puisque autrement ces solutions seraient algébriques). Il est donc possible, à l'aide d'éliminations algébriques, de remplacer (f) par une équation algébrique du premier ordre, soit

$$P(y', y, x) = 0,$$

où P est un polynome. Cette équation doit être une *équation intégrale* de (F) : or nous savons (n° 25) que la chose est impossible.

Toute intégrale particulière $y(x)$ *de* (24) *est donc une transcendante nouvelle.*

28. *Remarque sur la définition de l'irréductibilité.* — La définition précise que nous avons donnée plus haut de l'irréductibilité d'une équation différentielle s'impose dans les questions qui nous occupent, où les variables qui doivent jouer le rôle de *fonctions* sont indiquées ainsi que celles qui doivent être prises comme *variables indépendantes.*

Dans les problèmes où toutes les variables jouent un rôle symétrique, on peut adopter une définition de la *réductibilité* plus générale que la précédente.

Un exemple le fera nettement comprendre : Si l'on étend au troisième ordre la définition que nous avons adoptée pour le deuxième ordre, on arrive à cette conclusion que les transcendantes fuchsiennes $y(x)$ sont des transcendantes vraiment nouvelles, j'entends *irréductibles* aux transcendantes du premier ordre et classiques. Néanmoins, *si l'on prend x comme fonction et y comme variable,* l'équation différentielle qui définit une fonction fuchsienne équivaut à une équation de Riccati ; mais, pour opérer cette réduction, il a fallu permuter les rôles de la fonction et de la variable. La différence qui sépare l'étude de la fonction fuchsienne et celle de l'équation de Riccati correspondante est de même nature que celle qui sépare les travaux d'Abel et de Jacobi sur l'intégrale elliptique et ceux de Legendre.

Parmi toutes les définitions qu'on a proposées de la réductibilité de l'intégrale *générale* d'une équation différentielle, la plus large et la plus rationnelle à la fois me semble être celle de M. Drach [1], que je rappelle brièvement en me limitant à une équation du deuxième ordre

$$\text{(E)} \qquad \frac{dy}{dx} = z, \qquad \frac{dz}{dx} = \mathrm{R}(x, y, z),$$

où R est rationnel en x, y, z.

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles

$$\text{(S)} \qquad \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} z + \frac{\partial f_1}{\partial z} \mathrm{R} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} z + \frac{\partial f_2}{\partial z} \mathrm{R} = 0.$$

Supposons qu'il existe au moins une relation algébrique entre x, y, z, f_1, f_2, et leurs dérivées successives jusqu'à un certain ordre, relation qui, sans être une conséquence des équations S, soit compatible [2] avec ces équations : dans ce cas (et dans ce cas seulement), l'intégrale générale de l'équation (E) est dite *réductible*.

Quand on adopte cette définition, toute équation (E) dont on connaît un *multiplicateur*, par conséquent toute équation où R est indépendant de z, est *réductible*. En particulier, l'équation $y'' = 6y^2 + x$ est réductible.

J'ai insisté sur ce point pour éviter tout malentendu. Mais ce qu'il importe de retenir, c'est qu'*on ne connaît aucun moyen de remplacer l'équation* (F) *par une équation plus simple* (*ou par une combinaison de telles équations*).

29. *Des correspondances biuniformes définies par l'intégrale $y(x)$ de l'équation* (F). — Soit $y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0)$ l'intégrale de l'équation (F) définie par les conditions initiales x_0, y_0, y'_0. La fonction $y(x)$, étant méromorphe dans tout le plan des x, est également une fonction *méromorphe* de x_0, y_0, y'_0 dans tout le plan de chacune de ces variables, mais $x_0 = \infty$,

---

(1) *Thèse*. Paris, 1898.

(2) J'entends par là qu'un système au moins de deux fonctions f_1, f_2 *indépendantes* vérifie à la fois (S) et la relation considérée.

$y_0 = \infty$, $y'_0 = \infty$ sont des singularités essentielles de

$$\varphi(x, x_0, y_0, y'_0).$$

Les égalités

$$(41) \qquad y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0), \qquad y' = \varphi'(x, x_0, y_0, y'_0),$$

peuvent aussi s'écrire

$$(42) \qquad y_0 = \varphi(x_0, x, y, y'), \qquad y'_0 = \varphi'(x_0, x, y, y').$$

Si nous donnons à x et à x_0 des valeurs numériques, les égalités (41) et (42) définissent une correspondance *biuniforme* (mais non birationnelle) entre les couples (y, y') et (y_0, y'_0).

Considérons, d'une manière générale, une correspondance biuniforme entre deux plans yOz et $y_0 O z_0$; soit la correspondance

$$\begin{aligned} y &= f(y_0, z_0), & y_0 &= f_0(y, z), \\ z &= \varphi(y_0, z_0), & z_0 &= \varphi_0(y, z), \end{aligned}$$

où f et φ, f_0 et φ_0 sont des fonctions *méromorphes* des deux variables. J'ai pu obtenir, au sujet de telles correspondances, quelques résultats généraux [1]. J'ai montré notamment qu'elles se divisent en deux classes, suivant qu'il existe ou non une famille de courbes algébriques du plan yOz qui reste algébrique dans la transformation. Je conviens de dire que les correspondances de la première classe sont *semi-transcendantes,* au lieu que celles de la seconde classe sont *essentiellement biuniformes* [2].

---

(1) *Voir* mes *Leçons de Stockholm* (p. 482-485 et p. 501-509) et les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* avril 1896.

(2) La correspondance biuniforme

$$\begin{aligned} y &= y_0, & y_0 &= y_0, \\ z &= z_0 e^{y_0}, & z_0 &= z e^{-y}, \end{aligned}$$

est semi-transcendante. La combinaison des deux transformations

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0, & y &= y_1 e^{z_1}, \\ z_1 &= z_0 e^{y_0}, & z &= z_1, \end{aligned}$$

conduit à la transformation essentiellement biuniforme

$$\begin{aligned} y &= y_0 e^{(z_0 e^{y_0})}, & y_0 &= y e^{-z}, \\ z &= z_0 e^{y_0}, & z_0 &= z e^{-(y e^{-z})}. \end{aligned}$$

Il existe d'ailleurs, ainsi que je l'ai montré, des correspondances biuniformes qui ne résultent pas de la combinaison de transformations semi-transcendantes.

La correspondance (41), (42) *est essentiellement biuniforme.* En effet, donnons à x et x_0 des valeurs arbitraires, et admettons que la correspondance soit semi-transcendante.

J'ai établi (*loc. cit.*) qu'il existe alors deux fonctions *algébriques* $\rho(y, y')$ et $R(y_0, y'_0)$ telles qu'on ait

$$\rho(y, y') = R(y_0, y'_0).$$

Les variables x, x_0 figurent analytiquement dans R et ρ. Donnons à x_0 une valeur *numérique,* laissons x arbitraire, et considérons l'égalité

$$\rho(x, y, y') = R(x, y_0, y'_0) \equiv u(x, y_0, y'_0).$$

Deux hypothèses sont possibles : ou bien $u(x)$ dépend de deux constantes distinctes, et y s'exprime algébriquement en u, u' (x figurant analytiquement); puisque $u(x)$ renferme algébriquement ses deux constantes, il en est de même de $y(x)$. Ou bien, $u(x)$ ne dépend que d'une constante, soit C, et $y(x)$ vérifie l'équation

$$\rho(y', y, x) = u(x, C).$$

Cette équation ayant ses points critiques fixes, $y(x)$ renferme algébriquement la deuxième constante. Ces deux hypothèses étant à rejeter, on voit que la correspondance (41), (42) est essentiellement biuniforme.

30. Si nous développons $y(x)$ suivant les puissances de $(x - x_0)$, les valeurs successives de $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$, ... sont des polynomes en x_0, y_0, y'_0. On a donc

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y'_0\left(\frac{x - x_0}{1}\right) + (6y_0^2 + x_0)\left(\frac{x - x_0}{1.2}\right)^3 + \ldots \\ &= \Sigma P_n(x, x_0, y_0, y'_0), \end{aligned}$$

P_n désignant un polynome en x, x_0, y_0, y'_0.

La fonction [*voir* n° 23]

$$\eta = \frac{y'^2}{2} - 2y^3 - xy = \frac{y_0'^2}{2} - 2y_0^3 - x_0 y_0 - \int_{x_0}^{x} y(x)\,dx,$$

se laisse développer de la même manière, et, par suite, la fonction

$$\zeta = \zeta_0 e^{\int_{x_0}^{x} \eta(x)\,dx}$$

La fonction entière $\zeta(x)$ est donc représentable *par une série de polynomes en* x, x_0, y_0, y'_0

$$\zeta(x) = \Sigma Q_n(x, x_0, y_0, y'_0), \tag{43}$$

cette série converge *dans tout le plan de chaque variable* x, x_0, y_0, y'_0, et ses termes Q_n se calculent à l'aide de *dérivations successives*.

Les fonctions y, y' de x, x_0, y_0, y'_0 se laissent, par suite, mettre sous la forme de quotients de développements tels que (43), soit

$$y = \frac{\Sigma R_n(x, x_0, y_0, y'_0)}{\Sigma T_n(x, x_0, y_0, y'_0)}, \qquad y' = \frac{\Sigma S_n(x, x_0, y_0, y'_0)}{\Sigma U_n(x, x_0, y_0, y'_0)}.$$

Il n'existe d'ailleurs aucun système de valeurs x, x_0, y_0, y'_0 donnant à y et y' la forme $\frac{0}{0}$. C'est ce qui résulte aussitôt des égalités

$$y = -\frac{d}{dx}\frac{\zeta'}{\zeta}, \qquad y' = \frac{dy}{dx},$$

et de cette remarque que toute intégrale $\zeta(x)$ de (35) n'a que des zéros simples [*voir* n° 23]. La correspondance biuniforme (41), (42) ne possède donc (à distance finie) aucun *point-base* dans le champ des (y_0, y'_0), mais les valeurs $y_0 = \infty$, $y'_0 = \infty$ sont des singularités essentielles des fonctions $y(y_0, y'_0)$, $y'(y_0, y'_0)$.

31. Au développement (43), on peut substituer un développement plus convergent en considérant l'équation

$$y'' = 6y^2 + \alpha x,$$

et en développant $y(x)$ suivant les puissances de α. Le développement correspondant de $\zeta(x)$ est de la forme

$$\zeta(x) = A_0(x, x_0, y_0, y'_0) + \ldots + \alpha^j A_j(x, x_0, y_0, y'_0) + \ldots;$$

les coefficients A_j désignent des fonctions *entières* de x qui se déduisent de la fonction $\sigma(x, o, h)$ par des intégrations successives; les A_j sont également des fonctions entières de x_0, y_0, y'_0.

On peut de même, pour étudier l'intégrale $y(x)$ dans le voisinage de $x = a$, considérer l'équation

$$y'' = 6y^2 + a + \alpha x.$$

et développer $\zeta(x)$ suivant les puissances de α. Ces développements sont fort utiles dans l'étude approfondie de la transcendante $y(x)$; je me borne ici à les signaler.

32. *Résumé des résultats obtenus sur les équations*

$$(\mathcal{E}) \qquad y'' = b(x)y' + B(x)y^2 + C(x)y + D(x).$$

Les résultats auxquels nous sommes parvenus se résument ainsi :

Si une équation $(\mathcal{E})$ (où b, B, C, D sont algébriques en x) a ses points critiques fixes, elle est réductible, par une transformation

$$(44) \qquad y = \lambda(x)Y + \mu(x), \qquad x = \varphi(X),$$

à la forme

$$(\varepsilon) \qquad y'' = \alpha y^2 + \beta x + \gamma \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes numériques}).$$

Inversement, toute équation (ε) *a son intégrale générale méromorphe dans tout le plan des* x.

On sait reconnaître, à l'aide d'un nombre fini d'opérations algébriques, si une équation donnée $(\mathcal{E})$ a ses points critiques fixes : pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'une certaine condition algébrique (*unique*) entre b, B, C, D et leurs dérivées soit remplie. Les équations $(\mathcal{E})$ qui répondent à cette condition se partagent en quatre classes, dont la première est constituée par les équations *linéaires* (*non homogènes*) *du second ordre,* et dont les trois autres présentent le même degré de généralité que la première, et par suite dépendent aussi de TROIS *fonctions arbitraires de* x.

Les équations de ces quatre classes sont réductibles respectivement [par une transformation (44)] à un des quatre types :

$$y'' = 0, \qquad y'' = 6y^2, \qquad y'' = 6y^2 + \tfrac{1}{2}, \qquad y'' = 6y^2 + x.$$

Laissons de côté la première classe (équations linéaires). L'intégrale générale d'une équation de la seconde classe est de la forme

$$(45) \qquad y = \lambda(x)p(X, 0, h) + \mu(x),$$

avec

$$\lambda = e^{\int \psi(x)\,dx}, \qquad X = \int \chi(x)\,\lambda^{\frac{1}{2}}(x)\,dx,$$

μ, ψ et χ étant algébriques en x. Si l'équation est de la troisième classe, son intégrale est encore de la forme (45), mais λ et μ sont algébriques en x, et X est donné par une quadrature. Enfin, si l'équation est de la quatrième classe, elle est réductible, par une transformation algébrique (44), à l'équation

$$\text{(F)} \qquad y'' = 6y^2 + x.$$

L'intégrale de cette dernière équation est une transcendante méromorphe essentiellement nouvelle : cette transcendante se laisse mettre sous la forme

$$y = \frac{\zeta'^2 - \zeta\zeta''}{\zeta^2},$$

où $\zeta(x)$ est une fonction ENTIÈRE *essentiellement nouvelle définie par le système du troisième ordre*

$$\frac{\zeta'}{\zeta} = \eta, \qquad \frac{\eta''^2}{2} + 2\eta'^3 + x\eta' - \eta = 0.$$

La fonction $y(x)$ est, par suite, représentable par le quotient de deux fonctions *entières en x, x_0, y_0, y'_0, dont le développement peut être poursuivi indéfiniment à l'aide de simples dérivations.*

L'expression de y, y' en y_0 y'_0 définit une correspondance *essentiellement biuniforme* entre les couples de variables (y, y') et (y_0, y'_0).

Il resterait à approfondir l'étude des transcendantes nouvelles $y(x)$ et $\zeta(x)$ au point de vue du genre, de la croissance pour $x = \infty$, de la distribution des zéros, etc.

Cette étude, où les travaux bien connus de M. Hadamard et de M. Borel doivent jouer un rôle important, sera développée dans la Monographie que je consacrerai à chacun des trois types nouveaux de transcendantes méromorphes qu'engendrent les équations (E) (*voir* le n° 3). Je me borne ici à signaler cette proposition :

Si $y(x)$ est une intégrale particulière de (F), *l'équation $y(x) = A$ possède une infinité de racines quelle que soit la valeur (finie ou infinie) de* A. *La fréquence des racines pour $x = \infty$ est la même quel que soit* A.

33. Les développements qui précèdent suffisent à faire comprendre nettement la double méthode que j'emploie pour déterminer les équations différentielles à points critiques fixes. Cette double méthode [recherche des conditions nécessaires pour que les points critiques soient fixes (n^{os} **6-16**), discussion de la suffisance des conditions (n^{os} **17-23**)], je l'ai exposée ici en détail en me restreignant aux équations ($\mathcal{E}$); mais elle s'applique d'elle-même à toutes les équations du second ordre.

Quand on passe aux équations d'ordre supérieur, la première partie de la méthode (recherche des conditions nécessaires) s'étend bien aisément, au lieu que la seconde partie soulève des difficultés croissantes. Pour montrer combien est facile et fécond l'emploi de la première méthode, je terminerai ce Mémoire par une application aux équations du troisième ordre.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TROISIÈME ORDRE.

34. Considérons une équation différentielle

$$y''' = R(x, y, y', y''), \tag{46}$$

où R est *rationnel* en y'', y', *algébrique* en y, x, et cherchons à former des conditions nécessaires pour que cette équation ait ses points critiques fixes.

Tout d'abord les premières conditions du n° **7** montrent que R doit être un polynome en y'' du second degré au plus [1]. Il suffit, pour le voir, de poser $y' = z$, $z' = u$ et d'étudier l'équation (46) dans le voisinage d'un pôle $u = g(x, y, z)$ de R; puis de poser $y'' = \frac{1}{v}$, et d'étudier l'équation dans le domaine de $v = 0$.

Soit donc

$$y''' = y''^2 L(y', y, x) + y'' M(y', y, x) + N(y', y, x). \tag{47}$$

---

[1] Ce résultat est bien connu. *Voir*, par exemple, mes *Leçons de Stockholm*, p. 430-432.

Pour poursuivre l'étude de l'équation dans le domaine de $y''=\infty$, je pose

$$x = x_0 + \alpha X, \qquad y = y_0 + \alpha Y.$$

L'équation (47) devient

$$y''' = y''^2 L(y', y_0, x_0) + \alpha(\ldots).$$

Il faut donc que l'équation

$$z'' = z'^2 L(z, y_0, x_0)$$

ait son intégrale uniforme, ce qui exige que $L(z)$ coïncide avec une des expressions du Tableau T (n° 10) où l'on a remplacé y par z et où les lettres a, b, ... représentent des fonctions de x, y. Il faut ensuite que $z(x)$ soit la dérivée d'une fonction uniforme et, en conséquence, n'ait que des pôles multiples. Cette condition, comme on le voit aussitôt, n'est remplie que par les expressions suivantes du Tableau (T) :

$$(\mathrm{T}_1)\quad \left\{\begin{array}{ll}
0,\ \dfrac{1}{y'+a},\ \dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{y'+a} & (n \text{ entier positif ou négatif, mais } \neq \pm 1). \\[2mm]
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y'+a}+\dfrac{1}{y'+b}\right), & \dfrac{1}{y'+a}+\dfrac{1}{2(y'+b)}, \\[2mm]
\dfrac{1}{2(y'+a)}+\dfrac{2}{3(y'+b)}, & \dfrac{1}{2(y'+a)}+\dfrac{3}{4(y'+b)}, \\[2mm]
\dfrac{1}{2(y'+a)}+\dfrac{5}{6(y'+b)}, & \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{y'+a}+\dfrac{1}{y'+b}\right), \\[2mm]
\dfrac{2}{3(y'+a)}+\dfrac{5}{6(y'+b)}, & \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{y'+a}+\dfrac{1}{y'+b}\right), \\[2mm]
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y'+a}+\dfrac{1}{y'+b}+\dfrac{1}{y'+c}\right) & \\
\end{array}\right.$$

$(a,\ b,\ c$ fonctions de $y,\ x)$.

La fonction $L(y', y, x)$ *doit donc coïncider avec une des expressions* (T_1).

35. Je dis maintenant que *tout pôle* $y' = g(y, x)$ *des fractions rationnelles* M *et* N *en* y' *est pôle d'ordre* 1 *au plus et coïncide avec un des pôles de* L.

Substituons, en effet, à l'équation (47) le système

$$(48)\qquad \frac{dy}{dx} = z + g(y, x), \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = L_1 z'^2 + M_1 z' + N_1;$$

si $y' = g$ est un pôle de L, M, N, la valeur $z = 0$ est un pôle de L_1, M_1, N_1 et nous pouvons écrire

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = [a(y, x) + z(\ldots)] \frac{z'^2}{z} + [b(y, x) + z(\ldots)] \frac{z'}{z^j} + \frac{c(y, x) + z(\ldots)}{z^k},$$
$$[bc \neq 0];$$

la quantité a est égale, d'après ce qui précède, soit à zéro, soit à 1, soit à $1 - \frac{1}{n}$; les entiers j, k peuvent être nuls ou négatifs; mais si j et $k \leqq 0$, la quantité a est différente de zéro.

Le changement de variables

$$x = x_0 + \alpha^r X, \qquad y = y_0 + \alpha^r Y, \qquad z = \alpha Z$$
$$\left(r = \text{la plus grande des deux quantités } j \text{ et } \frac{1+k}{2}\right)$$

donne au système (48) la forme

$$(49)\quad \frac{dy}{dx} = -g_0 + \alpha(\ldots), \quad \frac{d^2 z}{dx^2} \begin{cases} = a_0 \dfrac{z'^2}{z} + b_0 \dfrac{z'}{z^j} + \alpha(\ldots), & \text{si } j > \dfrac{1+k}{2}, \\ = a_0 \dfrac{z'^2}{z} + \dfrac{c_0}{z^k} + \alpha^{\frac{1}{2}}(\ldots), & \text{si } j < \dfrac{1+k}{2}, \\ = a_0 \dfrac{z'^2}{z} + \dfrac{b_0 z'}{z^j} + \dfrac{c_0}{z^{2j-1}} + \alpha(\ldots), & \text{si } j = \dfrac{1+k}{2} \end{cases}$$

$$[g_0 \equiv g(y_0, x_0), \qquad a_0 \equiv a, \qquad b_0 = b(y_0, x_0), \qquad c_0 = c(y_0, x_0)].$$

Pour $\alpha = 0$, la seconde équation doit avoir son intégrale uniforme. Mais d'après la discussion du n° **11**, cela n'est possible que si l'on a

$$r \leqq 1, \qquad a_0 \neq 0.$$

Si l'on revient aux fonctions L, M, N, il est dès lors évident que tout pôle $y' = g$ de ces fonctions est simple et pôle de L.

C. Q. F. D.

36. Je dis de plus que, *pour* $y' = \infty$, *les expressions* $\frac{M}{y'}$, $\frac{N}{y'^2}$ *restent finies*.

Tout d'abord, pour $y' = \infty$, L est de la forme

$$\frac{1}{y'}[a + \ldots] \qquad \left(a = 0 \quad \text{ou } 1 \quad \text{ou } 1 - \frac{1}{n}\right).$$

Soient maintenant p et q les ordres d'infinitude de M et N pour $y'=\infty$ (p et q peuvent être nuls ou négatifs).

Posons

$$y'=\frac{1}{z};$$

l'équation (47) devient

$$(50)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{dy}{dx}=\frac{1}{z},\\&\frac{d^2z}{dx^2}=(2-a)\frac{z'^2}{z}[1+z(\ldots)]+\frac{b(y,x)+z(\ldots)}{z^p}z'+\frac{c(y,z)+z(\ldots)}{z^{q-2}}.\end{aligned}\right.$$

Posons

$$x=x_0+\alpha^r X,\qquad y=y_0+\alpha^{r-1}Y,\qquad z=\alpha Z$$

$$\left(r=\text{la plus grande des quantités } p,\ \frac{q-1}{2}\right);$$

il vient

$$(51)\quad \frac{dv}{dx}=\frac{1}{z},\quad \frac{d^2z}{dx^2}\left\{\begin{aligned}&=(2-a_0)\frac{z'^2}{z}+b_0\frac{z'}{z^p}+\alpha(\ldots), &&\text{si}\quad p>\frac{q-1}{2},\\&=(2-a_0)\frac{z'^2}{z}+\frac{c_0}{z^{q-2}}+\alpha^{\frac{1}{2}}(\ldots), &&\text{si}\quad p<\frac{q-1}{2},\\&=(2-a_0)\frac{z'^2}{z}+\frac{b_0z'}{z^p}+\frac{c_0}{z^{(2p-1)}}+\alpha(\ldots), &&\text{si}\quad p=\frac{q-1}{2}.\end{aligned}\right.$$

Mais la seconde équation (51) ne peut avoir son intégrale uniforme (pour $\alpha=0$), que si l'on a

$$r\leqq 1,$$

c'est-à-dire

$$p\leqq 1,\qquad q\leqq 3. \qquad\qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Les deux théorèmes qui précèdent LIMITENT LE DEGRÉ DE L, M, N EN y'. Si l'on pose

$$L=\frac{\lambda}{D},\qquad M=\frac{\mu}{D},\qquad N=\frac{\nu}{D},$$

λ, μ, ν, D désignant des polynomes en y' sans facteurs communs, toutes les formes possibles de $\frac{\lambda}{D}$ en y' sont connues; le degré de D en y' est au plus égal à 3, et les degrés de μ, ν dépassent d'une et de trois unités respectivement le degré de D. Cette limitation est entièrement analogue à la limitation, dans le cas du second ordre, du degré de l'équation en y (*voir* n° 12).

37. Mais les conditions nécessaires que fournit la méthode sont bien loin d'être épuisées. Il faut notamment que, pour $\alpha = 0$, les équations (49) et les équations (51) (où l'entier r est égal à 1) aient leur intégrale uniforme. J'insisterai seulement sur cette dernière condition.

Écrivons l'équation (47) sous la forme

$$y''' = \frac{y''^2}{y'}[a(y, x) + \varepsilon] + y''y'[b(y, x) + \varepsilon_1] + y'^3[c(y, x) + \varepsilon_2],$$

ε, ε_1, ε_2 tendant vers zéro avec $\frac{1}{y'}$, et faisons le changement de variables : $x = x_0 + \alpha X$. L'équation devient

$$y''' = \frac{y''^2}{y'} a(y, x_0) + y''y' b(y, x_0) + y'^3 c(y, x_0) + \alpha(\ldots).$$

Convenons d'appeler SIMPLIFIÉE de l'équation (47), l'équation

$$(52) \qquad y''' = \frac{y''^2}{y'} a(y, x_0) + y''y' b(y, x_0) + y'^3 c(y, x_0)$$

(x_0 désignant une valeur numérique quelconque). Cette équation [qui équivaut au système (51) où l'on annule α], doit avoir son intégrale uniforme.

Cette équation (52) ne change pas dans la transformation

$$x = \alpha X + \beta.$$

Il suit de là que l'expression $v = \dfrac{\left(\dfrac{d^2x}{dy^2}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)}$ doit vérifier une équation du premier ordre, qu'on forme aussitôt. On trouve

$$\frac{dv}{dy} = v^2(2 - a) + vb - c.$$

La quantité a est égale à $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, n désignant un entier positif, négatif ou infini, mais différent de -1. En remplaçant v par

$-\frac{n}{n+1}w$, on ramène l'équation de Riccati à la forme

$$\frac{dw}{dy} + w^2 - wb - \frac{n+1}{n} c = 0.$$

En définitive, l'équation (52) équivaut au système

$$(53) \qquad \frac{dx}{dy} = u^{\frac{-n}{n+1}}, \qquad \frac{d^2 u}{dy^2} = b(y)\frac{du}{dy} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) c(y) u.$$

Un problème préliminaire s'impose donc :

Déterminer tous les cas où les fonctions $y(x)$ définies par le système (53) *sont uniformes.*

Pour $n = -2$ et $b = 0$, les fonctions uniformes $y(x)$ définies par le système (53) constituent la classe des fonctions *automorphes* (*fuchsiennes et kleinéennes*).

La résolution du problème préliminaire que je viens d'énoncer n'est pas sans présenter des difficultés assez sérieuses. Je me borne ici à énoncer le résultat général auquel je suis parvenu : *Quand les fonctions $y(x)$ définies par un système* (53) *sont uniformes, ce sont ou des fonctions automorphes ou des combinaisons de dégénérescence de fonctions automorphes* (*combinaisons telles que $y = e^{e^x}$, etc.*).

38. Le seul exemple des équations fuchsiennes [équations (53) où $n = -2$ et $b = 0$] suffit à montrer qu'à l'inverse de ce qui se passe pour le second ordre, les équations (47) à points critiques fixes ne sont pas réductibles à un nombre fini de types dépendant d'un nombre fini de fonctions et de constantes. De plus, l'intégrale d'une équation (47) peut être une transcendante uniforme nouvelle *non méromorphe :* elle peut présenter des singularités essentielles mobiles [c'est ce qui aura lieu sûrement si l'intégrale $y(x)$ de la *simplifiée* (52) n'est pas méromorphe] ; ces singularités peuvent former des ensembles parfaits (et notamment des lignes) ; et cette circonstance se présentera sûrement si elle se présente pour la *simplifiée* (52).

Sans avoir approfondi encore dans tous leurs détails les relations qui existent entre une équation (47) à points critiques fixes et sa simplifiée (52), j'ai pu constater que, plus les singularités de l'équation (52) sont compliquées, plus l'intégrale de (47) se déduit aisément de l'intégrale de (52). Quand l'intégrale de (52) présente des ensembles parfaits de singularités, il me paraît vraisemblable que l'intégrale de (47) se déduit *par quadratures* de l'intégrale de (52). Comme je viens de le dire, il est évident que, dans ce cas, l'intégrale de (47) présente aussi des ensembles parfaits de singularités; mais il y a lieu de présumer que la réciproque est vraie.

Je n'insisterai pas davantage sur ces derniers résultats dont je ne possède pas encore de démonstration rigoureuse. Les résultats acquis suffisent à montrer qu'une partie au moins des plus grosses difficultés qu'entraîne l'élévation de l'ordre différentiel se trouvent dès maintenant surmontées par les travaux de M. Poincaré sur les fonctions automorphes.

39. *Équations différentielles d'ordre quelconque.* — Toutes les propositions qui précèdent ont leurs analogues dans l'étude des équations différentielles algébriques du troisième ordre ou d'ordre plus élevé. Bornons-nous, pour terminer, à considérer les équations d'ordre q

$$\frac{d^q y}{dx^q} = R\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}}, \frac{d^{q-1}y}{dx^{q-1}}\right) \tag{54}$$

où R est une fraction *rationnelle* en $\frac{d^{q-1}y}{dx^{q-1}}, \frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}}$, *algébrique* en $\frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}}, \ldots, \frac{dy}{dx}, y, x$.

Cherchons à mettre en évidence les conditions les plus simples qui sont nécessairement remplies quand l'équation (54) a ses points critiques fixes.

Écrivons l'équation ainsi :

$$\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} = u, \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} = R(x, y, y', \ldots, y^{(q-3)}, u, u'). \tag{55}$$

1° R *doit être un polynome en* u' *du second degré au plus,* résultat connu qu'on retrouve comme plus haut. Soit donc

$$R \equiv L u'^2 + M u' + N$$

(L, M, N rationnels en u, algébriques en $y^{(q-3)}, \ldots, y', y, x$).

2° L *doit coïncider avec une des expressions*

$$\frac{1-\frac{1}{n}}{u+a},\quad \frac{1}{u+a},\quad \frac{1}{2}\left(\frac{2}{u+a}+\frac{1}{u+b}\right)\qquad (n \text{ entier} + \text{ou} < 2-q),$$

expressions auxquelles il faut joindre

$$\frac{1}{2(u+a)}+\frac{2}{3}\,\frac{1}{u+b}\qquad \text{pour } q \leqq 7,$$

$$\frac{1}{2(u+a)}+\frac{3}{4(u+b)}\qquad \text{pour } q \leqq 5,$$

$$\frac{1}{2(u+a)}+\frac{5}{6(u+b)},\quad \frac{2}{3}\left(\frac{1}{u+a}+\frac{1}{u+b}\right)\qquad \text{pour } q=4$$

(a, b fonctions algébriques de $y_{q-3}, \ldots, y_1, y, x$).

Il suffit, pour le démontrer, de raisonner comme au n° 34, et d'effectuer, dans l'équation (54), la transformation

$$x = x_0 + \alpha X,\quad y = y_0 + \frac{y'_0}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{y_0^{(q-3)}}{(q-3)!}(x-x_0)^{q-3} + \alpha^{q-2} Y.$$

En faisant $\alpha = 0$, on voit que le système

$$\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} = u,\qquad \frac{d^2 u}{dx^2} = u'^2 L(u, y_0^{(q-3)}, \ldots, y'_0, y_0, x_0)$$

doit avoir son intégrale uniforme. Ce qui exige que L coïncide avec une des expressions énumérées.

3° *Tout pôle* $u = g(y^{(q-3)}, \ldots, y', y, x)$ *de* L, M, N *est pôle du premier ordre au plus, et sûrement pôle de* L. *De plus, les expressions* $\frac{M}{u}$, $\frac{N}{u^3}$ *sont finies pour* $u = \infty$.

On le voit en raisonnant comme aux n^{os} 35 et 36.

On substitue à l'équation (54) le système

$$\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} = z + g,\qquad z'' = \frac{z'^2}{z}[a + z(\ldots)] + \frac{z'}{z^j}[b + z(\ldots)] + \frac{c + z(\ldots)}{z^k}\quad (^1).$$

---

(1) Pour $u = \infty$, on remplace la première équation par

$$\frac{d^{q-2}y}{dx^{q-2}} = \frac{1}{z}.$$

et l'on emploie la transformation

$$x = x_0 + \alpha X, \qquad z = \alpha^{\frac{1}{r}} Z,$$

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{y_0^{(q-3)}}{(q-3)!}(x - x_0)^{q-3} + \alpha^{q-2} Y,$$

r désignant le plus grand des deux nombres j, $\frac{1+k}{2}$ [1].

Le degré de L, M, N en u se trouve dès lors limité.

4° Écrivons l'équation (54) ainsi :

$$(56) \qquad \frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}} = t, \qquad \frac{d^3 t}{dx^3} = \frac{t''^2}{t'}[a(t)+\varepsilon] + t''t'[b(t)+\varepsilon_1] + t'^3[c(t)+\varepsilon_2],$$

a, b, c étant indépendants de t'', t', algébriques en t et en $y^{(q-4)}$, ..., y', y, x, et les quantités ε, ε_1, ε_2 (indépendantes de t'') tendant vers zéro avec $\frac{1}{t'}$. Représentons par $a_0(t)$, $b_0(t)$, $c_0(t)$ ce que deviennent a, b, c, quand on y donne à $y^{(q-4)}$, ..., y'; y, x des valeurs numériques. Convenons enfin d'appeler SIMPLIFIÉE de (54) l'équation

$$(57) \qquad t''' = a_0(t)\frac{t''^2}{t'} + b_0(t)t''t' + c_0(t)t'^3, \quad \text{où} \quad t = \frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}}.$$

Si l'équation (54) *a ses points critiques fixes, la simplifiée* (57) *a son intégrale uniforme*. On le voit (comme au n° 37) en introduisant dans (54) la transformation

$$x = x_0 + \alpha X, \quad y = y_0 + \frac{y'_0}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{y_0^{(q-4)}}{(q-4)!}(x - x_0)^4 + \alpha^{q-3} Y,$$

puis en faisant $\alpha = 0$.

L'équation (57) équivaut à un système (53), à savoir le système

$$(58) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = v^{-\frac{n}{n+1}}, \qquad \dfrac{d^2 v}{dt^2} = b_0(t)\dfrac{dv}{dt} + \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) c_0(t) v \\ \qquad (n = \text{entier} + \text{ou} < 2 - q \text{ ou } n = \infty), \end{array} \right.$$

---

[1] Pour $u = x$, on remplace, dans la dernière égalité, $\alpha^{q-2}Y$ par $\alpha^{q-2-\frac{1}{r}}Y$.

suivi des quadratures définies par l'égalité

$$\frac{d^{q-3}y}{dx^{q-3}} = t(x).$$

Il faut d'abord que chaque fonction $t(x)$ définie par (58) soit uniforme; il faut de plus qu'elle soit la dérivée $(q - 3)^{\text{ième}}$ d'une fonction uniforme.

Ce ne sont là que les premières et les plus simples des conditions nécessaires qui découlent de la méthode. Mais, sans qu'il soit nécessaire de les pousser plus loin, elles mettent en évidence l'importance primordiale que présente, dans l'étude systématique des équations différentielles à intégrale générale uniforme, la théorie des transcendantes uniformes $t(x)$ engendrées par un système (58) et par conséquent des transcendantes fuchsiennes.