BULLETIN DE LA S. M. F.

PAPELIER

Applications du calcul des quaternions à l'étude des surfaces du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 182-204

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__182_1>

Applications du calcul des quaternions à l'étude des surfaces du second ordre; par M. Papelier.

(Séance du 25 janvier 1889.)

Hamilton, l'illustre inventeur du calcul des quaternions, dans le but de montrer la fécondité de ce calcul, en a fait de nombreuses applications géométriques et physiques. Il a étudié et retrouvé d'une façon fort élégante les principales propriétés des surfaces du second ordre, des courbes gauches et des surfaces quelconques. Malheureusement, bien que très intéressante, cette étude n'est pas faite d'une façon bien méthodique, ni conforme à nos habitudes françaises; peut-être faut-il voir là la cause du peu de faveur dont jouit en France le calcul des quaternions.

Ainsi, dans l'étude des quadriques, Hamilton se borne au cas des surfaces à centre unique. Les auteurs qui l'ont suivi, MM. Tait [1]

---

[1] *An elementary Treatise of quaternions.* Oxford, 1873. Ouvrage traduit récemment par M. Plarr. (Gauthier-Villars.)

et Laisant ([1]), dont le but, d'ailleurs, était de faire un Ouvrage élémentaire, n'ont également considéré que les surfaces de première classe. Il était donc naturel de se demander si le calcul des quaternions se prêtait aisément à l'étude des quadriques en général; s'il permettait, comme la Géométrie analytique à trois dimensions, de classer les surfaces du second ordre. Telle est la question que je crois avoir résolue dans le Mémoire qui va suivre.

Je m'appuierai pour cela sur la résolution de l'équation vectorielle linéaire. Hamilton a démontré que cette équation avait en général une solution, quand la constante appelée m était différente de o. C'est de la discussion de cette équation que résultera la classification des surfaces du second ordre.

Je ferai usage des notations françaises de Hoüel, si claires et si simples, et qui rendent si facile la lecture de tous les calculs.

I.

Résolution et discussion de l'équation vectorielle linéaire.

La fonction vectorielle linéaire, que nous représenterons par Φx, est du premier degré en x et représente un vecteur. Elle jouit des propriétés suivantes

$$\Phi(x+y) = \Phi x + \Phi y,$$
$$\Phi a x = a \Phi x,$$

a étant une quantité algébrique ordinaire.

L'équation

$$\Phi x = D,$$

où D est un vecteur quelconque, est ce qu'on appelle l'*équation vectorielle linéaire*.

Pour résoudre cette équation, nous commencerons par mettre Φx sous la forme trinôme donnée par Hamilton. Choisissons pour cela trois vecteurs quelconques non coplanaires A, B, C; on a alors pour tout vecteur x

$$x = \frac{1}{\mathfrak{S}ABC}(\mathfrak{V}BC.\mathfrak{S}AX + \mathfrak{V}CA.\mathfrak{S}BX + \mathfrak{V}AB.\mathfrak{S}CX);$$

([1]) *Introduction à la méthode des quaternions.* (Gauthier-Villars; 1881.)

par suite,

$$\Phi X = A_1 \mathfrak{S} AX + B_1 \mathfrak{S} BX + C_1 \mathfrak{S} CX,$$

en posant

$$A_1 = \Phi \frac{\mathfrak{V} BC}{\mathfrak{S} ABC},$$

$$B_1 = \Phi \frac{\mathfrak{V} CA}{\mathfrak{S} ABC},$$

$$C_1 = \Phi \frac{\mathfrak{V} AB}{\mathfrak{S} ABC}.$$

Telle est la forme trinôme sous laquelle nous étudierons la fonction Φ. Nous remarquerons que A, B, C sont entièrement arbitraires, mais jamais coplanaires, tandis que A_1, B_1, C_1 dépendent de A, B, C et de la fonction Φ.

L'équation vectorielle peut alors s'écrire

$$A_1 \mathfrak{S} AX + B_1 \mathfrak{S} BX + C_1 \mathfrak{S} CX = D.$$

Pour résoudre cette équation, nous distinguerons différents cas :

Premier cas. — Les vecteurs A_1, B_1, C_1 ne sont pas dans un même plan.

Je décompose le vecteur D suivant les trois directions de A_1, B_1, C_1

$$D = \frac{1}{\mathfrak{S} A_1 B_1 C_1}(A_1 \mathfrak{S} B_1 C_1 D + B_1 \mathfrak{S} C_1 A_1 D + C_1 \mathfrak{S} A_1 B_1 D).$$

L'équation peut alors s'écrire

$$A_1 \mathfrak{S} AX + B_1 \mathfrak{S} BX + C_1 \mathfrak{S} CX$$
$$= \frac{1}{\mathfrak{S} A_1 B_1 C_1}(A_1 \mathfrak{S} B_1 C_1 D + B_1 \mathfrak{S} C_1 A_1 D + C_1 \mathfrak{S} A_1 B_1 D);$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{S} AX = \frac{\mathfrak{S} B_1 C_1 D}{\mathfrak{S} A_1 B_1 C_1},$$

$$\mathfrak{S} BX = \frac{\mathfrak{S} C_1 A_1 D}{\mathfrak{S} A_1 B_1 C_1},$$

$$\mathfrak{S} CX = \frac{\mathfrak{S} A_1 B_1 D}{\mathfrak{S} A_1 B_1 C_1}.$$

On peut considérer ces équations comme les équations de trois plans. On en déduit, d'après une formule connue (les trois plans n'étant pas parallèles),

$$\mathrm{X} = \frac{\mathfrak{S}\mathrm{B_1C_1D}.\mathfrak{V}\mathrm{BC} + \mathfrak{S}\mathrm{C_1A_1D}.\mathfrak{V}\mathrm{CA} + \mathfrak{S}\mathrm{A_1B_1D}.\mathfrak{V}\mathrm{AB}}{\mathfrak{S}\mathrm{ABC}.\mathfrak{S}\mathrm{A_1B_1C_1}}.$$

L'équation, dans ce cas, admet donc toujours une solution et une seule.

On voit aussi que, si $\mathrm{D} = 0$, $\mathrm{X} = 0$; en conséquence, la fonction $\Phi\mathrm{X}$ ne peut être nulle que pour $\mathrm{X} = 0$, et il existe une valeur, et une seule, de X qui rend le vecteur $\Phi\mathrm{X}$ égal à un vecteur quelconque.

Appelons, en général, fonction inverse de $\Phi\mathrm{X}$ et représentons par $\Phi^{-1}\mathrm{X}$ une fonction telle qu'en opérant sur elle par l'opérateur Φ, on retrouve le vecteur X. Puisque l'équation précédente

$$\Phi\mathrm{X} = \mathrm{D}$$

admet une solution et une seule, on peut écrire cette solution

$$\mathrm{X} = \Phi^{-1}\mathrm{D},$$

ce qui donne la fonction inverse de la fonction Φ.

Ainsi, si l'on a

$$\Phi\mathrm{X} = \mathrm{A_1}\mathfrak{S}\mathrm{AX} + \mathrm{B_1}\mathfrak{S}\mathrm{BX} + \mathrm{C_1}\mathfrak{S}\mathrm{CX},$$

on a

$$\Phi^{-1}\mathrm{X} = \frac{1}{\mathfrak{S}\mathrm{ABC}.\mathfrak{S}\mathrm{A_1B_1C_1}}(\mathfrak{V}\mathrm{BC}.\mathfrak{S}\mathrm{B_1C_1X} + \mathfrak{V}\mathrm{CA}.\mathfrak{S}\mathrm{C_1A_1X} + \mathfrak{V}\mathrm{AB}.\mathfrak{S}\mathrm{A_1B_1X}).$$

Cette nouvelle fonction est encore vectorielle linéaire.

Deuxième cas. — Les vecteurs $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{C_1}$ sont dans un même plan.

Dans ces conditions, si $\mathrm{A_1}$ et $\mathrm{B_1}$ ne sont pas parallèles, il existe deux nombres algébriques, a et b, tels que

$$\mathrm{C_1} = a\mathrm{A_1} + b\mathrm{B_1};$$

on a alors

$$\begin{aligned}\Phi\mathrm{X} &= \mathrm{A_1}\mathfrak{S}\mathrm{AX} + \mathrm{B_1}\mathfrak{S}\mathrm{BX} + (a\mathrm{A_1} + b\mathrm{B_1})\mathfrak{S}\mathrm{CX}\\ &= \mathrm{A_1}\mathfrak{S}(\mathrm{A} + a\mathrm{C})\mathrm{X} + \mathrm{B_1}\mathfrak{S}(\mathrm{B} + b\mathrm{C})\mathrm{X}\end{aligned}$$

et l'on a à résoudre l'équation

$$\mathrm{A_1}\mathfrak{S}(\mathrm{A} + a\mathrm{C})\mathrm{X} + \mathrm{B_1}\mathfrak{S}(\mathrm{B} + b\mathrm{C})\mathrm{X} = \mathrm{D}.$$

Remarquons alors que, quel que soit X, le premier membre est un vecteur du plan A_1, B_1. Il en résulte les conséquences suivantes :

1° Si D n'est pas dans le plan des trois vecteurs A_1, B_1, C_1, l'équation n'admet pas de solution.

2° Si D est dans le plan des deux vecteurs A_1, B_1, il existe deux nombres, c et d, tels que

$$D = cA_1 + dB_1;$$

on aura alors

$$A_1 \mathfrak{S}(A + aC)X + B_1 \mathfrak{S}(B + bC)X = cA_1 + dB_1;$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{S}(A + aC)X = c,$$
$$\mathfrak{S}(B + bC)X = d,$$

équations qui représentent deux plans non parallèles, qui se coupent suivant une droite, et tous les points de cette droite sont les extrémités des vecteurs qui satisfont à l'équation. Il y a donc une infinité de solutions, les vecteurs correspondants étant tous dans un même plan.

Dans la première hypothèse de ce deuxième cas, la fonction $\Phi^{-1}X$ n'existe pas; dans la seconde, elle n'est pas déterminée.

Si $D = 0$, on a à résoudre les équations

$$\mathfrak{S}(A + aC)X = 0,$$
$$\mathfrak{S}(B + bC)X = 0;$$

on en tire

$$X = \lambda \mathfrak{V}(A + aC)(B + bC),$$

infinité de vecteurs qui ont même direction.

On voit aussi que, quel que soit X, ΦX représente un vecteur situé dans le plan des deux vecteurs A_1 et B_1.

Remarquons enfin que, dans l'expression de ΦX, A, B, C étant arbitraires, il en est de même des vecteurs $A + aC$ et $B + bC$.

Troisième cas. — Les vecteurs A_1, B_1, C_1 sont parallèles.

On a alors

$$B_1 = bA_1,$$
$$C_1 = cA_1;$$

d'où

$$\Phi X = A_1 \mathfrak{S}(A + bB + cC)X;$$

d'où l'équation

$$A_1 \mathfrak{S}(A + bB + cC)X = D.$$

1° Si D n'est pas parallèle à A_1, il n'y a pas de solution ;
2° Si D est parallèle à A_1, on a

$$D = dA_1$$

et l'on a à résoudre

$$\mathfrak{S}(A + bB + cC)X = d,$$

équation d'un plan dont tous les points sont les extrémités de vecteurs qui satisfont à l'équation.

Si $D = 0$, ce plan passe par l'origine commune des vecteurs.

Quel que soit X, ΦX a toujours la même direction.

Exemple. — Considérons l'équation d'une droite

$$\mathfrak{V}B(X - A) = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\mathfrak{V}BX = \mathfrak{V}BA$$

ou

$$\Phi X = \mathfrak{V}BA,$$

en posant

$$\Phi X = \mathfrak{V}BX.$$

Il est aisé de reconnaître que nous rentrons dans le deuxième cas de la discussion qui précède, attendu que ΦX est perpendiculaire à B, quel que soit X, et, par suite, représente un vecteur situé dans un plan perpendiculaire à B. Dès lors l'équation

$$\Phi X = D$$

n'aura pas de solution si D n'est pas perpendiculaire à B. Si D est perpendiculaire à B, elle en aura une infinité ; c'est le cas de l'équation précédente, où

$$D = \mathfrak{V}BA.$$

On peut d'ailleurs mettre ΦX sous la forme précédente. Choisissons, en effet, deux vecteurs, A' et B', tels que

$$B = \mathfrak{V}A'B';$$

alors

$$\Phi X = \mathfrak{V}\mathfrak{V}A'B'.X = A'\mathfrak{S}B'X - B'\mathfrak{S}A'X.$$

II.

Directions principales.

On appelle *directions principales d'une fonction vectorielle linéaire* les directions de vecteurs tels que, si l'on effectue sur ces vecteurs l'opération Φ, le nouveau vecteur obtenu soit parallèle au vecteur primitif.

Ainsi, le vecteur x a une direction principale si l'on a

$$\Phi x = gx,$$

g étant une quantité algébrique.

Hamilton a déterminé les directions principales en se servant de son équation cubique symbolique et en se bornant au cas où $m \neq 0$.

Je préfère le procédé suivant, qui rend la discussion plus facile.

Soit

$$\Phi x = a_1 \mathfrak{S} a x + b_1 \mathfrak{S} b x + c_1 \mathfrak{S} c x\,;$$

il faut déterminer x et g, en sorte que

$$a_1 \mathfrak{S} a x + b_1 \mathfrak{S} b x + c_1 \mathfrak{S} c x = g x$$

ou, en décomposant x suivant les directions a_1, b_1, c_1,

$$a_1 \mathfrak{S} a x + b_1 \mathfrak{S} b x + c_1 \mathfrak{S} c x = g\left(a_1 \frac{\mathfrak{S} b_1 c_1 x}{\mathfrak{S} a_1 b_1 c_1} + b_1 \frac{\mathfrak{S} c_1 a_1 x}{\mathfrak{S} a_1 b_1 c_1} + c_1 \frac{\mathfrak{S} a_1 b_1 x}{\mathfrak{S} a_1 b_1 c_1}\right).$$

Pour que l'égalité ait lieu, il faut que

$$\mathfrak{S} a x = g \frac{\mathfrak{S} b_1 c_1 x}{\mathfrak{S} a_1 b_1 c_1},$$
$$\mathfrak{S} b x = g \frac{\mathfrak{S} c_1 a_1 x}{\mathfrak{S} a_1 b_1 c_1},$$
$$\mathfrak{S} c x = g \frac{\mathfrak{S} a_1 b_1 x}{\mathfrak{S} a_1 b_1 c_1}$$

ou

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{S}\left(a - g \frac{\mathfrak{V} b_1 c_1}{\mathfrak{S} a_1 b_1 c_1}\right) x = 0, \\ &\mathfrak{S}\left(b - g \frac{\mathfrak{V} c_1 a_1}{\mathfrak{S} a_1 b_1 c_1}\right) x = 0, \\ &\mathfrak{S}\left(c - g \frac{\mathfrak{V} a_1 b_1}{\mathfrak{S} a_1 b_1 c_1}\right) x = 0. \end{aligned}\right.$$

Or, si les trois vecteurs

$$\mathrm{A} - g\frac{\mathfrak{V}\,\mathrm{B_1C_1}}{\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B_1C_1}}, \quad \mathrm{B} - g\frac{\mathfrak{V}\,\mathrm{C_1A_1}}{\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B_1C_1}}, \quad \mathrm{C} - g\frac{\mathfrak{V}\,\mathrm{A_1B_1}}{\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B_1C_1}}$$

ne sont pas coplanaires, on ne peut satisfaire aux équations précédentes que par $x = 0$, ce qui ne donne aucune direction principale.

Il faut donc que les vecteurs précédents soient coplanaires, c'est-à-dire que l'on ait

$$\mathfrak{S}\left(\mathrm{A} - g\frac{\mathfrak{V}\,\mathrm{B_1C_1}}{\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B_1C_1}}\right)\left(\mathrm{B} - g\frac{\mathfrak{V}\,\mathrm{C_1A_1}}{\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B_1C_1}}\right)\left(\mathrm{C} - g\frac{\mathfrak{V}\,\mathrm{A_1B_1}}{\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B_1C_1}}\right) = 0,$$

équation du troisième degré en g.

Nous pouvons l'obtenir sous une autre forme plus simple. Décomposons les vecteurs A, B, C selon les directions $\mathfrak{V}\,\mathrm{B_1C_1}$, $\mathfrak{V}\,\mathrm{C_1A_1}$, $\mathfrak{V}\,\mathrm{A_1B_1}$, nous aurons

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B_1C_1}}(\mathfrak{V}\,\mathrm{B_1C_1}.\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1A} + \mathfrak{V}\,\mathrm{C_1A_1}.\mathfrak{S}\,\mathrm{B_1A} + \mathfrak{V}\,\mathrm{A_1B_1}.\mathfrak{S}\,\mathrm{C_1A}),$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B_1C_1}}(\mathfrak{V}\,\mathrm{B_1C_1}.\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B} + \mathfrak{V}\,\mathrm{C_1A_1}.\mathfrak{S}\,\mathrm{B_1B} + \mathfrak{V}\,\mathrm{A_1B_1}.\mathfrak{S}\,\mathrm{C_1B}),$$

$$\mathrm{C} = \frac{1}{\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B_1C_1}}(\mathfrak{V}\,\mathrm{B_1C_1}.\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1C} + \mathfrak{V}\,\mathrm{C_1A_1}.\mathfrak{S}\,\mathrm{B_1C} + \mathfrak{V}\,\mathrm{A_1B_1}.\mathfrak{S}\,\mathrm{C_1C}),$$

et tout revient à écrire que les vecteurs

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1A} - g).\mathfrak{V}\,\mathrm{B_1C_1} + \mathfrak{S}\,\mathrm{B_1A}.\mathfrak{V}\,\mathrm{C_1A_1} + \mathfrak{S}\,\mathrm{C_1A}.\mathfrak{V}\,\mathrm{A_1B_1}, \\ \mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B}.\mathfrak{V}\,\mathrm{B_1C_1} + (\mathfrak{S}\,\mathrm{B_1B} - g).\mathfrak{V}\,\mathrm{C_1A_1} + \mathfrak{S}\,\mathrm{C_1B}.\mathfrak{V}\,\mathrm{A_1B_1}, \\ \mathfrak{S}\,\mathrm{A_1C}.\mathfrak{V}\,\mathrm{B_1C_1} + \mathfrak{S}\,\mathrm{B_1C}.\mathfrak{V}\,\mathrm{C_1A_1} + (\mathfrak{S}\,\mathrm{C_1C} - g).\mathfrak{V}\,\mathrm{A_1B_1} \end{array}\right.$$

sont coplanaires. Il faut et il suffit que l'on ait

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{S}\,\mathrm{A_1A} - g & \mathfrak{S}\,\mathrm{B_1A} & \mathfrak{S}\,\mathrm{C_1A} \\ \mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B} & \mathfrak{S}\,\mathrm{B_1B} - g & \mathfrak{S}\,\mathrm{C_1B} \\ \mathfrak{S}\,\mathrm{A_1C} & \mathfrak{S}\,\mathrm{B_1C} & \mathfrak{S}\,\mathrm{C_1C} - g \end{vmatrix} = 0.$$

Soit g' une racine réelle de cette équation; si cette racine n'annule pas tous les mineurs du déterminant, les trois vecteurs précédents sont dans un même plan sans avoir la même direction; alors les plans (1) passent par une même droite, qui est une direction principale.

Si la racine g' annule tous les mineurs du déterminant, les vecteurs (2) ont la même direction, les plans (1) sont confondus;

nous avons une infinité de directions principales dans un même plan.

Dans tout ce qui précède, nous avons supposé les vecteurs A_1, B_1, C_1 non coplanaires. Nous examinerons plus loin le cas où ces vecteurs sont dans un même plan.

III.

Fonction conjuguée.

Hamilton a appelé fonction conjuguée de la fonction vectorielle linéaire Φx une fonction vectorielle $\Phi' x$, telle que

$$\mathfrak{S} L \Phi M = \mathfrak{S} M \Phi' L,$$

quels que soient L et M.

La fonction Φ' est bien déterminée par cette égalité, car

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} L \Phi M &= \mathfrak{S} A_1 L . \mathfrak{S} A M + \mathfrak{S} B_1 L . \mathfrak{S} B M + \mathfrak{S} C_1 L . \mathfrak{S} C M \\ &= \mathfrak{S} M (A \mathfrak{S} A_1 L + B \mathfrak{S} B_1 L + C \mathfrak{S} C_1 L), \end{aligned}$$

d'où

$$\Phi' X = A \mathfrak{S} A_1 X + B \mathfrak{S} B_1 X + C \mathfrak{S} C_1 X.$$

Si $\Phi' x = \Phi x$, on dit que la fonction Φ est conjuguée d'elle-même. Cherchons la condition pour que la fonction Φ soit conjuguée d'elle-même.

$$\begin{aligned} \Phi X - \Phi' X &= A_1 \mathfrak{S} A X - A \mathfrak{S} A_1 X + B_1 \mathfrak{S} B X - B \mathfrak{S} B_1 X + C_1 \mathfrak{S} C X - C \mathfrak{S} C_1 X \\ &= \mathfrak{V} X \mathfrak{V} A A_1 + \mathfrak{V} X \mathfrak{V} B B_1 + \mathfrak{V} X \mathfrak{V} C C_1 \\ &= \mathfrak{V} X [\mathfrak{V}(A A_1 + B B_1 + C C_1)]. \end{aligned}$$

Pour que cette expression soit nulle, quel que soit x, il faut que

$$\mathfrak{V}(A A_1 + B B_1 + C C_1) = 0.$$

Ceci a lieu quels que soient les vecteurs A, B, C, A_1, B_1, C_1, quelques-uns d'entre eux pouvant d'ailleurs être nuls.

Nous supposerons, dorénavant, la fonction Φ conjuguée d'elle-même, ce cas seul étant intéressant dans l'étude des quadriques, et nous allons reprendre, avec cette hypothèse, la discussion des directions principales.

Nous allons établir que l'équation (3) a toujours ses racines réelles. Hamilton s'est appuyé sur une étude approfondie de la fonction Φ et d'autres fonctions dérivées. MM. Tait et Laisant ont suivi une méthode par l'absurde, analogue à la méthode de Lagrange, pour démontrer la réalité des racines de l'équation en S. Elle a l'inconvénient d'introduire ce qu'on a appelé des bivecteurs de la forme $A + B\sqrt{-1}$. Je propose la démonstration suivante, qui a l'avantage de ramener l'équation en g à l'équation en S du troisième degré, et nous verrons plus tard que l'analogie est plus complète en étudiant les axes des quadriques.

Nous avons vu que, dans l'expression trinôme de la fonction Φ, on pouvait choisir arbitrairement les trois vecteurs A, B, C. Nous les prendrons unitaires et rectangulaires, en sorte que nous aurons

$$A^2 = B^2 = C^2 = -1,$$
$$BC = A, \qquad CA = B, \qquad AB = C,$$
$$\mathfrak{S}ABC = -1,$$

alors

$$A_1 = -(A\mathfrak{S}AA_1 + B\mathfrak{S}BA_1 + C\mathfrak{S}CA_1),$$
$$B_1 = -(A\mathfrak{S}AB_1 + B\mathfrak{S}BB_1 + C\mathfrak{S}CB_1),$$
$$C_1 = -(A\mathfrak{S}AC_1 + B\mathfrak{S}BC_1 + C\mathfrak{S}CC_1).$$

Écrivons que la fonction est conjuguée d'elle-même.

$$\mathfrak{V}(AA_1 + BB_1 + CC_1) = 0,$$
$$A(B\mathfrak{S}BA_1 + C\mathfrak{S}CA_1) + B(A\mathfrak{S}AB_1 + C\mathfrak{S}CB_1) + C(A\mathfrak{S}AC_1 + B\mathfrak{S}BC_1) = 0,$$
$$A(\ \mathfrak{S}BC_1 - \mathfrak{S}CB_1) + B(\ \mathfrak{S}CA_1 - \mathfrak{S}AC_1) + C(\ \mathfrak{S}AB_1 - \mathfrak{S}BA_1) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\mathfrak{S}BC_1 = \mathfrak{S}CB_1,$$
$$\mathfrak{S}CA_1 = \mathfrak{S}AC_1,$$
$$\mathfrak{S}AB_1 = \mathfrak{S}BA_1,$$

ce qui montre que l'équation (3) est une véritable équation en S. Elle a donc ses racines réelles.

Si g' est une racine simple, à cette racine correspond une direction principale, car cette racine n'annule pas tous les mineurs du déterminant;

Si g' est une racine double, à cette racine correspond un plan de directions principales;

Si g' est une racine triple, les vecteurs (2) sont nuls; par suite, toute direction est direction principale : on a

$$\Phi X = g'X.$$

Remarquons de plus que l'équation (3) ne peut avoir de racines nulles, car le terme constant de l'équation est

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{ABC}.\mathfrak{S}\,\mathrm{A_1B_1C_1},$$

qui est différent de zéro.

Démontrons enfin qu'à deux racines différentes de l'équation en g correspondent deux directions principales rectangulaires.

Soient g_1 et g_2 les deux racines différentes, x_1 et x_2 les directions principales.

On a

$$\Phi\mathrm{x}_1 = g_1\mathrm{x}_1,$$
$$\Phi\mathrm{x}_2 = g_2\mathrm{x}_2,$$

d'où

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_2\Phi\mathrm{x}_1 = g_1\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_2\mathrm{x}_1,$$
$$\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_1\Phi\mathrm{x}_2 = g_2\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2;$$

retranchons, en remarquant que les premiers membres sont égaux, puisque la fonction Φ est conjuguée d'elle-même, il vient

$$0 = (g_1 - g_2)\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$$

et, comme $g_1 \neq g_2$,

$$\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 = 0.$$

En résumé, si les trois racines de l'équation (3) sont distinctes, on a trois directions principales rectangulaires deux à deux; si l'équation a une racine double et une racine simple, on a un plan de directions principales et une autre direction principale perpendiculaire à ce plan ; si l'équation a une racine triple, toutes les directions de l'espace sont directions principales.

Désignons par x_1, x_2, x_3 trois vecteurs unitaires dirigés suivant trois directions principales rectangulaires deux à deux, en sorte que

$$\mathrm{x}_1^2 = \mathrm{x}_2^2 = \mathrm{x}_3^2 = -1,$$
$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2\mathrm{x}_3, \qquad \mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_3\mathrm{x}_1, \qquad \mathrm{x}_3 = \mathrm{x}_1\mathrm{x}_2.$$

Choisissons les vecteurs x_1, x_2, x_3 à la place des vecteurs A, B, C, on aura

$$\Phi\mathrm{x} = \mathrm{L}_1\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_1\mathrm{x} + \mathrm{L}_2\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_2\mathrm{x} + \mathrm{L}_3\mathfrak{S}\,\mathrm{x}_3\mathrm{x}.$$

Écrivons que

$$\Phi\mathrm{x}_1 = g_1\mathrm{x}_1,$$
$$\Phi\mathrm{x}_2 = g_2\mathrm{x}_2,$$
$$\Phi\mathrm{x}_3 = g_3\mathrm{x}_3.$$

il vient

$$L_1 = -g_1 X_1,$$
$$L_2 = -g_2 X_2,$$
$$L_3 = -g_3 X_3,$$

d'où

$$\Phi X = -(g_1 X_1 S X_1 X + g_2 X_2 S X_2 X + g_3 X_3 S X_3 X).$$

La fonction ΦX est alors exprimée à l'aide des racines de l'équation (3) et des directions principales. Cette expression subsiste quand même deux racines sont égales, par exemple $g_1 = g_2$. X_1 et X_2 sont alors choisis arbitrairement dans un plan, mais ils sont toujours unitaires et rectangulaires.

Nous avons supposé jusqu'ici que, dans l'expression de la fonction ΦX

$$\Phi X = A_1 S A X + B_1 S B X + C_1 S C X,$$

les trois vecteurs A_1, B_1, C_1 étaient non coplanaires.

Je vais supposer maintenant que ces vecteurs sont dans un même plan, c'est-à-dire que ΦX peut se mettre sous la forme

$$\Phi X = A_1 S(A + aC) + B_1 S(B + bC).$$

La fonction étant conjuguée d'elle-même, on a

$$V[A_1(A + aC) + B_1(B + bC)] = 0,$$

ce qui montre que les vecteurs $A + aC$, $B + bC$ sont dans le plan de A_1 et B_1. Dans ce qui suivra, nous désignerons ce plan par Π. En sorte que si A et B sont deux vecteurs quelconques choisis dans le plan Π, ΦX pourra se mettre sous la forme

$$\Phi X = A_1 S A X + B_1 S B X,$$

et l'on aura

$$V(A A_1 + B B_1) = 0.$$

Cherchons les directions principales.

On doit avoir

$$\Phi X = g X,$$
$$A_1 S A X + B_1 S B X = g X,$$

X doit se trouver dans le plan Π ; on aura donc

$$X = x A_1 + y B_1,$$

en remplaçant

$$A_1 \mathfrak{S} A(xA_1 + yB_1) + B_1 \mathfrak{S} B(xA_1 + yB_1) = g(xA_1 + yB_1)$$

ou

$$A_1(x\mathfrak{S}AA_1 + y\mathfrak{S}AB_1) + B_1(x\mathfrak{S}BA_1 + y\mathfrak{S}BB_1) = gxA_1 + gyB_1,$$

d'où l'on tire

$$x\mathfrak{S}AA_1 + y\mathfrak{S}AB_1 = gx,$$
$$x\mathfrak{S}BA_1 + y\mathfrak{S}BB_1 = gy$$

ou

$$x(\mathfrak{S}AA_1 - g) + y\mathfrak{S}AB_1 = 0,$$
$$x\mathfrak{S}BA_1 + y(\mathfrak{S}BB_1 - g) = 0.$$

Pour que ces équations soient compatibles, il faut que l'on ait

$$(\mathfrak{S}AA_1 - g)(\mathfrak{S}BB_1 - y) - \mathfrak{S}AB_1 . \mathfrak{S}BA_1 = 0.$$

Je dis que cette équation a toujours ses racines réelles.

En effet,

$$A_1 = aA + bB,$$
$$B_1 = cA + dB,$$

d'où

$$0 = \mathfrak{V}(AA_1 + BB_1) = b\mathfrak{V}AB + c\mathfrak{V}BA = (b - c)\mathfrak{V}AB;$$

d'où

$$b = c.$$

Si nous choisissons A et B rectangulaires et unitaires,

$$\mathfrak{S}A_1B = -b,$$
$$\mathfrak{S}AB_1 = -c,$$

donc

$$\mathfrak{S}A_1B = \mathfrak{S}AB_1,$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$(\mathfrak{S}AA_1 - g)(\mathfrak{S}BB_1 - g) - (\mathfrak{S}AB_1)^2 = 0,$$

et sous cette forme on reconnaît sans peine qu'elle a ses racines réelles, distinctes ou égales.

A une racine simple correspond une direction principale ; à une racine double, un plan de directions principales. A deux racines distinctes correspondent deux directions principales rectangulaires, qui sont dans le plan Π.

Soient g_1, g_2 les deux racines, x_1, x_2 les directions principales correspondantes, unitaires et rectangulaires.

On aura, comme tout à l'heure,

$$\Phi x = -(g_1 x_1 S x_1 x + g_2 x_2 S x_2 x).$$

Enfin, si, dans l'expression générale de Φx, les trois vecteurs A_1, B_1, C_1 sont parallèles, on peut écrire

$$\Phi x = A_1 S A x,$$

et si, Φx est conjuguée d'elle-même,

$$V A_1 A = o;$$

par suite,

$$A_1 = a A,$$
$$\Phi x = a A S A x :$$

ce qui montre qu'il n'y a qu'une direction principale, c'est la direction A.

IV.

Surfaces du second ordre.

Toute équation scalar en x, c'est-à-dire toute équation dont les membres se composent de parties algébriques de quaternions fonctions de x, est l'équation d'une surface.

Pour avoir le degré de cette surface, on la coupe par une droite quelconque passant par l'origine

$$x = x A;$$

on obtient une équation algébrique en x, dont le degré est égal au degré de la surface.

Ainsi l'équation générale des surfaces du premier degré est

$$\Sigma S A x + a = o,$$

A étant un quaternion, ou

$$S \Sigma A . x + a = o.$$

Soient

$$V \Sigma A = A,$$
$$S A x + a = o,$$

on retombe sur l'équation générale du plan.

Formons maintenant l'équation générale du deuxième degré

$$\Sigma \mathfrak{S} A \mathrm{x} B \mathrm{x} C + \Sigma \mathfrak{S} D \mathrm{x} + a = 0.$$

Considérons l'ensemble des termes du deuxième degré, prenons-en un terme

$$\mathfrak{S} A \mathrm{x} B \mathrm{x} C = \mathfrak{S} C A \mathrm{x} B \mathrm{x} = \mathfrak{S} A' \mathrm{x} B \mathrm{x},$$

en posant $CA = \mathrm{A}'$,

$$\mathfrak{S} A' \mathrm{x} B \mathrm{x} = \mathfrak{S}(A' . \mathfrak{S} \mathrm{x} B \mathrm{x}) + \mathfrak{S}(A' . \mathfrak{V} \mathrm{x} B \mathrm{x}) = b \mathrm{x}^2 + \mathfrak{S}(\mathrm{A} . \mathfrak{V} \mathrm{x} \mathrm{B} \mathrm{x}),$$

en posant

$$b = \mathfrak{S} A' . \mathfrak{S} B, \qquad \mathrm{A} = \mathfrak{V} A', \qquad \mathrm{B} = \mathfrak{V} \mathrm{B}',$$

$$\mathfrak{S} A' \mathrm{x} B \mathrm{x} = b \mathrm{x}^2 + \mathfrak{S} \mathrm{A}[2 \mathrm{x} \mathfrak{S} \mathrm{B} \mathrm{x} - \mathrm{B} \mathrm{x}^2] = c \mathrm{x}^2 + 2 \mathfrak{S} \mathrm{A} \mathrm{x} . \mathfrak{S} \mathrm{B} \mathrm{x},$$

$$c = b - \mathfrak{S} . \mathrm{A} \mathrm{B}.$$

L'ensemble des termes du deuxième degré peut se mettre sous la forme

$$l \mathrm{x}^2 + 2 \Sigma \mathfrak{S} \mathrm{A} \mathrm{x} \mathfrak{S} \mathrm{B} \mathrm{x}$$

ou

$$\mathfrak{S} \mathrm{x} [l \mathrm{x} + \Sigma(\mathrm{A} \mathfrak{S} \mathrm{B} \mathrm{x} + \mathrm{B} \mathfrak{S} \mathrm{A} \mathrm{x})]$$

ou

$$\mathfrak{S} \mathrm{x} \Phi \mathrm{x},$$

en posant

$$\Phi \mathrm{x} = l \mathrm{x} + \Sigma(\mathrm{A} \mathfrak{S} \mathrm{B} \mathrm{x} + \mathrm{B} \mathfrak{S} \mathrm{A} \mathrm{x}),$$

$\Phi \mathrm{x}$ étant une fonction vectorielle linéaire, conjuguée d'elle-même. L'ensemble des termes du premier degré peut se ramener à la forme $2 \mathfrak{S} \mathrm{A} \mathrm{x}$, en sorte que l'équation générale des surfaces du second ordre peut s'écrire

$$\mathfrak{S} \mathrm{x} \Phi \mathrm{x} + 2 \mathfrak{S} \mathrm{A} \mathrm{x} + a = 0. \tag{1}$$

V.

Théorie des centres.

Pour que l'origine soit centre, il faut que l'équation ne change pas en changeant x en — x, c'est-à-dire que $\mathrm{A} = 0$. Supposons $\mathrm{A} \neq 0$, et cherchons si l'on peut déterminer un point C de vecteur c, tel qu'en transportant l'origine en ce point, l'équation ne renferme plus de termes du premier degré en x. Pour transporter l'origine au point C, il suffit de remplacer x par x + c,

$$\mathfrak{S}(\mathrm{x}+\mathrm{c})(\Phi\mathrm{x}+\Phi\mathrm{c})+2\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{x}+\mathrm{c})+a=0,$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{x}+2\mathfrak{S}\mathrm{x}(\Phi\mathrm{c}+\mathrm{A})+\mathfrak{S}\mathrm{c}\Phi\mathrm{c}+2\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{c}+a=0.$$

Pour que le point C soit centre, il faut que l'on ait

$$\Phi\mathrm{c}+\mathrm{A}=0. \tag{2}$$

On est ramené à résoudre une équation vectorielle linéaire.

Premier cas. — $\Phi\mathrm{x}$ peut prendre toutes les directions de l'espace.

L'équation (2) a une solution et une seule,

$$\mathrm{c}=-\Phi^{-1}\mathrm{A};$$

la surface a un centre unique; elle est dite *de première classe.*

Deuxième cas. — $\Phi\mathrm{x}$ ne peut prendre que les directions d'un plan Π.

1° Si A n'est pas dans le plan Π, la surface n'a pas de centre; elle est dite *de deuxième classe;* nous verrons plus loin que c'est un paraboloïde.

2° Si A est dans le plan Π, l'équation (2) a une infinité de solutions, les extrémités des vecteurs-solutions sont en ligne droite; la surface a donc une infinité de centres en ligne droite, elle est dite *de troisième classe;* nous verrons que c'est un cylindre elliptique ou hyperbolique.

Troisième cas. — $\Phi\mathrm{x}$ ne peut prendre qu'une seule direction Δ.

1° Si A n'est pas parallèle à Δ, la surface n'a pas de centre; elle est dite *de quatrième classe;* c'est un cylindre parabolique.

2° Si A est parallèle à Δ, la surface a une infinité de centres dans un plan; elle est dite *de cinquième classe,* et il est aisé de voir qu'elle se compose de deux plans parallèles. En effet, $\Phi\mathrm{x}$ se met sous la forme $g\mathrm{A}\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x}$; par suite, l'équation de la surface devient

$$g[\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x}]^2+2\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x}+a=0$$

ou

$$g(\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x}-a')(\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x}-a'')=0,$$

ces deux plans étant d'ailleurs réels, imaginaires ou confondus.

Nous obtenons de cette façon cinq classes de surfaces. Nous diviserons plus tard ces classes en genres et variétés, par l'étude des directions d'axes.

Remarquons que si c_0 est une solution de l'équation (2), le point correspondant est centre de la surface; si ce point est l'origine, l'équation de la surface s'écrit

$$\mathfrak{S}x\Phi x + \mathfrak{S}c_0\Phi c_0 + 2\mathfrak{S}Ac_0 + a = 0,$$

et comme

$$\Phi c_0 + A = 0,$$

il vient

$$\mathfrak{S}x\Phi x + \mathfrak{S}Ac_0 + a = 0,$$

qu'on peut écrire

$$\mathfrak{S}x\Phi x = 1,$$

en divisant les vecteurs de Φx par un nombre convenable.

VI.

Théorie des plans diamétraux.

Le plan diamétral conjugué d'une direction est le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles à la direction donnée.

Soient D un vecteur parallèle à la direction donnée, et x_0 un point du lieu. Par ce point, je mène une parallèle à la direction D

$$x = x_0 + xD.$$

Je cherche les points de rencontre avec la surface, et j'écris que ces points sont symétriques par rapport au point x_0. Il suffit d'écrire que l'équation du deuxième degré en x a ses racines égales et de signe contraire.

On a

$$\mathfrak{S}(x_0 + xD)\Phi(x_0 + xD) + 2\mathfrak{S}A(x_0 + xD) + a = 0,$$
$$x^2\mathfrak{S}D\Phi D + 2x(\mathfrak{S}x_0\Phi D + \mathfrak{S}AD) + \mathfrak{S}x_0\Phi x_0 + 2\mathfrak{S}Ax_0 + a = 0.$$

On doit donc avoir

$$\mathfrak{S}x_0\Phi D + \mathfrak{S}AD = 0.$$

L'équation du plan diamétral est donc

$$\mathfrak{S}x\Phi D + \mathfrak{S}AD = 0\ :$$

c'est un plan perpendiculaire au vecteur ΦD.

Nous remarquons en outre que ce plan n'existe que si ΦD n'est pas nul.

Étudions maintenant la position des plans diamétraux.

1° *Surfaces de première classe.* — ΦD n'est jamais nul, le plan diamétral existe toujours, il passe par le centre, car l'équation peut s'écrire

$$S D\Phi X + S AD = 0,$$
$$S D(\Phi X + A) = 0,$$

qui est évidemment satisfaite par le vecteur du centre.

Réciproquement, tout plan passant par le centre est un plan diamétral. Soit C_0 le vecteur du centre.

Soit

$$S L(X - C_0) = 0$$

un plan passant par le centre.

On peut déterminer un vecteur D tel que

$$\Phi D = L:$$

en outre,

$$C_0 = -\Phi^{-1} A.$$
$$-S LC_0 = S L\Phi^{-1} A = S \Phi D . \Phi^{-1} A = S AD.$$

L'équation peut s'écrire

$$S X\Phi D + S AD = 0 :$$

c'est bien l'équation d'un plan diamétral.

2° *Surfaces de deuxième classe.* — Le plan diamétral n'existe pas toujours, car ΦD est nul pour une direction qui est perpendiculaire au plan Π. Les plans diamétraux sont perpendiculaires à ΦD, qui est parallèle au plan Π; donc tous les plans diamétraux sont parallèles à une même droite, perpendiculaire au plan Π; c'est ce que nous appellerons la *direction de l'axe*.

Réciproquement, tout plan parallèle à l'axe est un plan diamétral.

Soit

$$S LX + l = 0$$

un plan parallèle à l'axe. Nous pourrons déterminer un vecteur D

tel que

$$\Phi D = L,$$
$$S AD = l.$$

Cela revient à l'intersection d'une droite et d'un plan non parallèle.

3° *Surfaces de troisième classe.* — Les plans diamétraux passent par la ligne des centres, car leur équation peut s'écrire

$$S D(\Phi X + A) = 0.$$

La réciproque est vraie, tout plan passant par la ligne des centres est un plan diamétral; car, soit le plan

$$S LX + l = 0,$$

les équations

$$\Phi D = L,$$
$$S AD = l$$

représenteront la première une droite, la seconde un plan, et le plan contiendra la droite (on suppose que D est le vecteur courant). Le plan donné sera le plan diamétral d'une infinité de directions, toutes situées dans le plan

$$S AX = l.$$

4° *Surfaces de quatrième classe.* — Les plans diamétraux sont parallèles, car ils sont perpendiculaires à ΦD, qui a une direction fixe; et la réciproque est vraie, tout plan perpendiculaire à la direction de ΦX est un plan diamétral; car, soit

$$S LX + l = 0$$

un tel plan, les équations

$$\Phi D = L,$$
$$S AD = l$$

représentent deux plans qui se coupent et donnent une infinité de directions dont le plan donné est le plan diamétral conjugué.

5° *Surfaces de cinquième classe.* — On a dans ce cas

$$\Phi X = g A S AX.$$

L'équation du plan diamétral conjugué de la direction D pourra s'écrire

$$g\mathfrak{S}\mathrm{AX}\mathfrak{S}\mathrm{AD} + \mathfrak{S}\mathrm{AD} = 0$$

ou

$$g\mathfrak{S}\mathrm{AX} + 1 = 0:$$

c'est le plan des centres.

VII.

Théorie des diamètres.

On appelle *diamètre conjugué* d'une direction de plan le lieu des centres des sections planes parallèles à ce plan.

Soit B un vecteur perpendiculaire à la direction de plan donnée, et soit X_0 un point du lieu; il faut écrire que si par ce point je mène une droite perpendiculaire à B, elle rencontre la surface en deux points symétriques par rapport au point de vecteur X_0.

Soit D une direction quelconque perpendiculaire à B, telle que

$$(1) \qquad \mathfrak{S}\mathrm{BD} = 0,$$

on devra avoir

$$\mathfrak{S}\mathrm{X}_0\Phi\mathrm{D} + \mathrm{S}\mathrm{AD} = 0$$

ou

$$(2) \qquad \mathfrak{S}\mathrm{D}(\Phi\mathrm{X}_0 + \mathrm{A}) = 0.$$

La relation (2) doit avoir lieu pour toutes les valeurs de D satisfaisant à (1); cela exige que B et $\Phi\mathrm{X}_0 + \mathrm{A}$ aient même direction

$$\mathfrak{V}\mathrm{B}(\Phi\mathrm{X}_0 + \mathrm{A}) = 0;$$

donc l'équation du diamètre peut s'écrire

$$\mathfrak{V}\mathrm{B}(\Phi\mathrm{X} + \mathrm{A}) = 0;$$

On pourrait discuter complètement cette équation, comme nous avons fait tout à l'heure. Nous nous bornerons ici à l'étude des surfaces de première classe.

L'équation peut s'écrire

$$\Phi\mathrm{X} + \mathrm{A} = x\mathrm{B},$$

$$\Phi\mathrm{X} = -\mathrm{A} + x\mathrm{B},$$

$$\mathrm{X} = -\Phi^{-1}\mathrm{A} + x\Phi^{-1}\mathrm{B}.$$

Cette équation représente une droite passant par le point $-\Phi^{-1}\text{A}$ qui est le centre, et parallèle à la direction $\Phi^{-1}\text{B}$ qui est la direction des cordes conjuguées du plan diamétral perpendiculaire à B.

VIII.

Plans principaux et axes.

On appelle *plan principal* un plan diamétral perpendiculaire à la direction des cordes conjuguées; ces cordes sont dites *cordes principales*.

Soit D un vecteur parallèle à une corde principale, le plan diamétral conjugué est

$$\mathfrak{S}\text{X}\Phi\text{D} + \mathfrak{S}\text{AD} = \text{o};$$

pour qu'il soit perpendiculaire à D, il faut que

$$\Phi\text{D} = g\text{D},$$

ce qui montre que les cordes principales sont parallèles aux directions principales de la fonction ΦX. De l'étude faite précédemment résultent les conséquences suivantes :

1° *Surfaces de première classe.* — Nous avons trois directions principales correspondant aux trois racines g_1, g_2, g_3 de l'équation en g. Soient X_1, X_2, X_3 les directions supposées unitaires, on a

$$\Phi\text{X} = -(g_1\text{X}_1\mathfrak{S}\text{X}_1\text{X} + g_2\text{X}_2\mathfrak{S}\text{X}_2\text{X} + g_3\text{X}_3\mathfrak{S}\text{X}_3\text{X})$$

ou

$$\mathfrak{S}\text{X}\Phi\text{X} = -g_1(\mathfrak{S}\text{X}_1\text{X})^2 - g_2(\mathfrak{S}\text{X}_2\text{X})^2 - g_3(\mathfrak{S}\text{X}_3\text{X})^2.$$

Si l'on prend comme origine le centre de la surface, l'équation sera de la forme

$$g_1(\mathfrak{S}\text{X}_1\text{X})^2 + g_2(\mathfrak{S}\text{X}_2\text{X})^2 + g_3(\mathfrak{S}\text{X}_3\text{X})^2 + h = \text{o};$$

nous aurons les différents genres, selon les signes de g_1, g_2, g_3. Les plans principaux seront les trois plans

$$\mathfrak{S}\text{X}_1\text{X} = \text{o},$$
$$\mathfrak{S}\text{X}_2\text{X} = \text{o},$$
$$\mathfrak{S}\text{X}_3\text{X} = \text{o}.$$

Si x_1, x_2, x_3 sont les distances du point X à ces trois plans, l'équation de la surface peut s'écrire

$$g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + g_3 x_3^2 + h = 0,$$

qui est l'équation réduite en coordonnées cartésiennes.

2° *Surfaces de deuxième et de troisième classe.* — Nous avons deux directions principales dans le plan Π. Soient x_1, x_2 ces directions supposées unitaires,

$$\Phi\mathrm{x} = -g_1\mathrm{x}_1 \mathfrak{S}\mathrm{x}_1\mathrm{x} - g_2\mathrm{x}_2\mathfrak{S}\mathrm{x}_2\mathrm{x},$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{x} = -g_1(\mathfrak{S}\mathrm{x}_1\mathrm{x})^2 - g_2(\mathfrak{S}\mathrm{x}_2\mathrm{x})^2.$$

Nous voyons tout de suite que si l'on prend comme origine un point de la ligne des centres d'une surface de troisième classe, l'équation de cette surface s'écrit

$$g_1(\mathfrak{S}\mathrm{x}_1\mathrm{x})^2 + g_2(\mathfrak{S}\mathrm{x}_2\mathrm{x})^2 + h = 0,$$

où l'on reconnaît les cylindres elliptique et hyperbolique.

Supposons la surface de deuxième classe,

$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{x} + 2\mathfrak{S}\mathrm{A}\mathrm{x} + a = 0,$$

et transportons l'origine en un point de vecteur B appartenant à la surface

$$\mathfrak{S}(\mathrm{x}+\mathrm{B})\Phi(\mathrm{x}+\mathrm{B}) + 2\mathfrak{S}\mathrm{A}(\mathrm{x}+\mathrm{B}) + a = 0,$$
$$\mathfrak{S}\mathrm{x}\Phi\mathrm{x} + 2\mathfrak{S}\mathrm{x}(\Phi\mathrm{B}+\mathrm{A}) = 0.$$

Déterminons B en sorte que $\Phi\mathrm{B}+\mathrm{A}$ soit perpendiculaire à x_1 et x_2, c'est-à-dire que

$$\Phi\mathrm{B} + \mathrm{A} = x\mathfrak{V}\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2$$

ou

$$\Phi\mathrm{B} = x\mathfrak{V}\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 - \mathrm{A},$$

on peut déterminer x en sorte que le second membre soit parallèle au plan Π ; les vecteurs B, satisfaisant à cette équation, seront sur une droite perpendiculaire à Π, ne rencontrant la surface qu'en un point : c'est l'axe du paraboloïde.

Si l'on pose

$$\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2 = \mathrm{x}_3,$$

l'équation pourra s'écrire

$$g_1(\mathfrak{S}\mathrm{x}_1\mathrm{x})^2 + g_2(\mathfrak{S}\mathrm{x}_2\mathrm{x})^2 + h\mathfrak{S}\mathrm{x}_3\mathrm{x} = 0.$$

3° *Surfaces de quatrième et de cinquième classe.* — Il n'y a qu'une seule direction principale, c'est celle de Φx. On a

$$\Phi x = g x_1 \mathfrak{S} x_1 x,$$
$$\mathfrak{S} x \Phi x = g(\mathfrak{S} x_1 x)^2.$$

Les surfaces de cinquième classe, en prenant l'origine en un centre, auront pour équation

$$g(\mathfrak{S} x_1 x)^2 + h = 0:$$

ce sont bien des plans parallèles.

Si la surface est de quatrième classe, nous transportons l'origine en un point de la surface, de vecteur B,

$$\mathfrak{S} x \Phi x + 2 \mathfrak{S} x(\Phi B + A) = 0.$$

Comme A n'est pas parallèle à ΦB, je pourrai déterminer B en sorte que $\Phi B + A$ soit perpendiculaire à Φx; l'équation deviendra alors

$$g(\mathfrak{S} x_1 x)^2 + h \mathfrak{S} x_2 x = 0,$$

x_2 étant un vecteur unitaire perpendiculaire à x_1. C'est l'équation d'un cylindre parabolique.

Je bornerai là cette étude des quadriques par la méthode des quaternions. On pourrait aisément retrouver les propriétés des pôles et plans polaires, des plans tangents, etc. Il n'y a évidemment rien de nouveau quant aux résultats, mais les méthodes sont certainement fort intéressantes, et souvent plus élégantes que celles données par la Géométrie cartésienne.

Dans un prochain Mémoire, nous montrerons qu'on peut également appliquer le calcul des quaternions à l'étude des propriétés des courbes et des surfaces.