BULLETIN DE LA S. M. F.

E. PICARD

Sur certaines expressions quadruplement périodiques

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 131-142
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__131_1>

Sur certaines expressions quadruplement périodiques;
par M. Émile Picard.

On sait combien il est facile de former des séries représentant des fonctions doublement périodiques. Prend-on, par exemple, une fonction rationnelle de e^x, soit $f(e^x)$, la série

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} f(e^{x+m\omega}),$$

si elle est convergente, représentera une fonction doublement périodique aux périodes $2\pi i$ et ω.

La généralisation se présente d'elle-même quand on passe au cas de deux variables. Soit $f(e^x, e^y)$ une fonction rationnelle de e^x et e^y; on forme la série double

$$(\mathrm{S}) \qquad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(e^{x+m\alpha+n\beta}, e^{y+m\alpha'+n\beta'}).$$

Si elle est convergente, on aura une fonction quadruplement périodique de x et y. Mais on n'a jamais, que je sache, donné d'exemples effectifs de séries de cette forme, ni cherché à se rendre compte de la nature des fonctions ainsi représentées. J'ai été tout naturellement conduit à l'étude de ces séries, qui ne sont qu'un cas particulier des fonctions que j'ai désignées sous le nom de *fonctions hyperabéliennes* (*Journal de Mathématiques*, 1885). Je commence donc par rappeler quelques généralités sur ces fonctions, et je suis ainsi conduit à une série $\varphi(x, y)$ du type (S), qui joue le rôle essentiel dans cette théorie. Cette série d'ailleurs peut être formée *a priori*, et son étude se fait indépendamment des considérations par lesquelles on y a été amené. Signalons seulement, en ce moment, la formation des expressions quadruplement périodiques de seconde espèce, et la forme remarquable du développement en série trigonométrique de l'expression fondamentale φ. Les résultats qui suivent ont été succinctement indiqués dans les *Comptes rendus* (18 mars et 1er avril 1889).

1. Comme je viens de le dire, c'est en étudiant un cas particulier des fonctions hyperabéliennes que nous avons été conduit à certaines expressions quadruplement périodiques. Il nous faut donc rappeler brièvement la formation des séries qui se rencontrent dans la théorie de ces fonctions. Un groupe hyperabélien est un groupe discontinu relatif à deux variables u et v dont les substitutions sont de l'une ou l'autre forme

$$\left(u,\quad v,\quad \frac{au+b}{cu+d},\ \frac{a'v+b'}{c'v+d'}\right),$$
$$\left(u,\quad v,\quad \frac{av+b}{cv+d},\ \frac{a'u+b'}{c'u+d'}\right),$$

les coefficients des diverses substitutions étant réels.

Nous considérons particulièrement le domaine des variables u et v, pour lesquels le coefficient de i est positif; on peut commencer par remplacer ces deux demi-plans par deux cercles C et C' ayant l'unité pour centre; il suffira de poser

$$\xi = \frac{u-i}{u+i}, \qquad \eta = \frac{v-i}{v+i},$$

et l'on aura alors des substitutions de même forme relatives aux variables ξ et η; seulement les coefficients de ces substitutions ne seront plus réels, et nous pouvons admettre d'ailleurs que chacun des déterminants $ad - bc$, ... est égal à l'unité. Écrivons donc de nouveau le type des substitutions relatives cette fois à ξ et η, en mettant encore les mêmes lettres a, b, ... qui ne sont pas, bien entendu, les mêmes que plus haut, et supposons, comme cela se rencontrera plus bas, qu'il n'y a que des substitutions du premier type, soit

$$\left(\xi,\ \eta,\ \frac{a\xi + b}{c\xi + d},\ \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right).$$

On peut supposer

$$ad - bc = a'd' - b'c' = 1.$$

Dans ces conditions la série

$$\sum \frac{1}{(c\xi + d)^{2\mu}(c'\eta + d')^{2\mu}}, \tag{1}$$

étendue à toutes les substitutions du groupe, représente une fonction qui est certainement holomorphe à l'intérieur des cercles C et C', l'entier μ étant supérieur à l'unité.

2. Ces résultats rappelés, cherchons ce qu'ils vont nous donner dans le cas particulier, où le groupe initial est formé, des deux substitutions fondamentales suivantes

$$(u,\ v,\ au,\ a'v),\quad (u,\ v,\ bu,\ b'v),$$

a, b, a' et b' étant des quantités positives quelconques. Ce groupe est évidemment discontinu, car toute substitution est de la forme

$$(u,\ v,\ a^m b^n u,\ a'^m b'^n v),$$

m et n désignant des entiers positifs ou négatifs; or on ne peut pas choisir les entiers m et n de telle sorte que

$$a^m b^n \quad \text{et} \quad a'^m b'^n$$

soient aussi voisins que l'on voudra de l'unité, sauf dans un cas particulier que l'on aperçoit de suite.

Appliquons donc à ce cas particulier les remarques générales du paragraphe précédent. Après quelques calculs de transformation, qui ne présentent aucune difficulté, on arrive pour la série (1) à l'expression

$$\sum \frac{a^{m\mu} b^{n\nu}}{[\xi(a^m b^n - 1) + a^m b^n + 1]^{2\mu}} \frac{a'^{m\mu} b'^{n\mu}}{[\xi(a'^m b'^n - 1) + a'^m b'^n + 1]^{2\mu}},$$

et, en revenant aux variables initiales u et v, on a

$$\sum\sum \frac{a^{m\mu} b^{n\nu} a'^{m\mu} b'^{n\mu}}{(ua^m b^n + i)^{2\mu} (va^m b^n + i)^{2\mu}},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières positives et négatives de m et n.

3. Ce résultat obtenu, nous allons étudier directement la somme précédente donnée *a priori;* nous allons même y faire $\mu = 1$, ce qui n'empêchera pas la convergence. Prenons donc la série

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{a^m b^n}{(ua^m b^n + i)^2} \frac{a'^m b'^n}{(va'^m b'^n + i)^2},$$

ou, en remplaçant u et v par iu et iv, la série

(2) $$\sum\sum \frac{a^m b^n}{(ua^m b^n + 1)^2} \frac{a'^m b'^n}{(va'^m b'^n + 1)^2}.$$

Je dis qu'elle est convergente pour toute valeur de u et v, à l'exception des valeurs réelles et négatives.

Considérons d'abord la série pour $u = v = 1$. Nous avons

$$\sum \frac{a^m b^n}{(1 + a^m b^n)^2} \frac{a'^m b'^n}{(1 + a'^m b'^n)^2};$$

c'est une série à termes positifs, montrons qu'elle est convergente.

Posons

$$a = e^\alpha, \qquad b = e^\beta, \qquad a' = e^{\alpha'}, \qquad b' = e^{\beta'},$$

les α et β étant réels.

Je considère le quotient

$$\frac{e^x}{(1 + e^x)^2};$$

cette expression ne change pas quand on change x en $-x$; on a donc, x étant positif,

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} < e^{-x};$$

donc, pour x de signe quelconque, nous pouvons écrire

$$\frac{e^x}{(1+e^x)^2} < e^{-|x|},$$

$|x|$ désignant la valeur absolue de x. Nous aurons donc

$$\frac{a^m b^n}{(1+a^m b^n)^2} \frac{a'^m b'^n}{(1+a'^m b'^n)^2} < e^{-|m\alpha+n\beta|-|m\alpha'+n\beta'|};$$

mais, si x et y désignent deux nombres positifs, on a

$$e^{-x-y} < e^{-\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Comme, d'autre part, pour x positif et suffisamment grand,

$$e^{-x} < \frac{1}{x^\mu}.$$

μ étant un entier positif quelconque, il en résulte que

$$e^{-x-y} < \frac{1}{(x^2+y^2)^\mu}$$

et, par suite, le terme général de notre série est moindre que

$$\frac{1}{[(m\alpha+n\beta)^2+(m\alpha'+n\beta')^2]^\mu},$$

μ étant un entier positif quelconque. La série (2) est donc absolument convergente pour $u=1$, $v=1$.

Donnons maintenant à (u, v) une valeur quelconque, en supposant seulement que u et v ne prennent pas des valeurs réelles négatives. Nous pouvons écrire le terme général de notre série sous la forme

$$\frac{a^m b^n}{(1+a^m b^n)^2} \frac{a'^m b'^n}{(1+a'^m b'^n)^2} \left(\frac{1+a^m b^n}{u+a^m b^n}\right)^2 \left(\frac{1+a'^m b'^n}{u+a'^m b'^n}\right)^2;$$

or le module du quotient $\frac{1+a^m b^n}{u+a^m b^n}$ représente le rapport des distances des points 1 et u au point $-a^m b^n$, c'est-à-dire à un point situé sur la partie négative de l'axe réel. Ce rapport restera donc compris entre deux limites finies déterminées; il en sera de même pour $\frac{1+a'^m b'^n}{u+a'^m b'^n}$. Par suite, la série (2) sera absolument convergente, sauf pour les valeurs indiquées de u et v. Posons maintenant

$$f(u,v)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{ua^m b^n}{(1+ua^m b^n)^2}\,\frac{v.a'^m b'^n}{(1+v.a'^m b'^n)^2};$$

on aura évidemment

$$f(au,a'v)=f(bu,b'v)=f(u,v).$$

4. La série précédente permet d'en former une infinité d'autres jouissant des mêmes propriétés.

Prenons, en effet, deux fonctions rationnelles $R(u)$ et $R_1(v)$ dont tous les pôles soient situés sur la partie négative de l'axe des quantités réelles, et qui restent finies respectivement pour $u=0$, $u=\infty$ et pour $v=0$, $v=\infty$.

La série

$$F(u,v)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}R(a^m b^n u)R_1(a'^m b'^n v)\,\frac{ua^m b^n}{(1+ua^m b^n)^2}\,\frac{va'^m b'^n}{(1+va'^m b'^n)^2}$$

sera convergente comme la série $f(u,v)$. En effet, le module de

$$R(a^m b^n u)$$

reste moindre qu'une quantité déterminée, puisque $a^m b^n u$ reste sur la droite joignant l'origine au point u. Il en est de même du second facteur $R_1(a'^m b'^n v)$.

On a d'ailleurs évidemment

$$F(au,a'v)=F(bu,b'v)=F(u,v)$$

5. Posons maintenant

$$u=e^x,\quad v=e^y,\quad a=e^\alpha,\quad b=e^\beta,\quad a'=e^{\alpha'},\quad b'=e^{\beta'}.$$

Notre fonction $f(u,v)$ devient une fonction de x et y,

$$\varphi(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{e^{x+m\alpha+n\beta}}{(1+e^{x+m\alpha+n\beta})^2}\,\frac{e^{y+m\alpha'+n\beta'}}{(1+e^{y+m\alpha'+n\beta'})^2}.$$

Cette *expression* admettra quatre couples de périodes, dont le Tableau est évidemment

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 2\pi i & 0 \\ 0 & 2\pi i \\ \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{array} \right.$$

Mais cette *expression* ne représente pas une fonction quadruplement périodique, se comportant pour toute valeur finie de x et y comme une fonction rationnelle. Le fait, *a priori,* est impossible, car une fonction quadruplement périodique de x et y, et méromorphe pour toute valeur finie de ces variables, ne peut admettre le système (S) de périodes, où les α et β sont des quantités réelles *arbitraires*.

D'ailleurs, en nous reportant au paragraphe précédent, nous voyons que la fonction $\varphi(x, y)$ ne sera pas définie pour les valeurs de x et y, rendant e^x et e^y réels et négatifs, c'est-à-dire en posant

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy''$$

pour les valeurs de x et y correspondant

$$\text{soit à } x'' = (2k+1)\pi, \qquad \text{soit à } y'' = (2h+1)\pi,$$

h et k étant des entiers quelconques positifs ou négatifs.

Nous avons donc ainsi une expression $\varphi(x, y)$, *quadruplement périodique, avec le tableau* S *de périodes, et avec des surfaces de singularités essentielles* qui empêchent le prolongement analytique de l'expression.

6. Revenons un moment aux variables u et v et au groupe considéré dans les paragraphes (2) et (3). De même que nous avons formé des expressions restant invariables pour les substitutions de ce groupe, nous pouvons pareillement, et en suivant toujours les indications de la théorie générale, obtenir des expressions se reproduisant à des facteurs constants près A et B.

Formons, en effet, la série dont le terme général est

$$\mathrm{A}^{-m}\mathrm{B}^{-n}\frac{a^{m\mu}b^{n\mu}}{(1+a^m b^n u)^{2\mu}}\,\frac{a'^{m\mu}b'^{n\mu}}{(1+a'^m b'^n u)^{2\mu}}.$$

μ est un entier positif fixe; m et n, comme plus haut, varient de $-\infty$ à $+\infty$. Il est bien aisé de voir que cette série est convergente si μ est choisi suffisamment grand; en effet, si nous faisons, comme plus haut, $u=\sqrt{-1}$ et si nous remplaçons le troisième et le quatrième facteur par leur limite supérieure, nous aurons, en posant

$$\mathrm{A}=e^{\mathrm{P}+i\mathrm{Q}},\qquad \mathrm{B}=e^{\mathrm{R}+i\mathrm{S}},$$

à considérer la série dont le terme général est

$$e^{-\mu\{|m\alpha+n\beta|+|m\alpha'+n\beta'|\}-m\mathrm{P}-n\mathrm{Q}},$$

et qui, quels que soient les signes de P et Q, est manifestement convergente si l'entier positif μ est pris suffisamment grand.

Si nous posons alors

$$f_1(u,v)=\sum_{m=-\infty}^{n=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\mathrm{A}^{-m}\mathrm{B}^{-n}\frac{u^{\mu}a^{m\mu}b^{n\mu}}{(1+a^m b^n u)^{2\mu}}\,\frac{v^{\mu}a'^{m\mu}b'^{n\mu}}{(1+a'^m b'^n v)^{2\mu}},$$

on aura

$$f_1(au,a'v)=\mathrm{A}f_1(u,v),$$
$$f_1(bu,b'v)=\mathrm{B}f_1(u,v).$$

C'est une expression de seconde espèce. Si nous revenons alors aux variables x et y, *nous aurons des expressions de seconde espèce quadruplement périodiques,* et possédant les mêmes singularités que plus haut.

7. Je reviens maintenant à la fonction $\varphi(x,y)$ du nº 5, en changeant seulement un peu les notations. Écrivons la série

$$\mathfrak{F}(x,y)=\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\frac{e^{\alpha(x+m\omega)+\beta(y+n\omega')}}{[1+e^{\alpha(x+m\omega)+\beta(y+n\omega')}]^2}\,\frac{e^{\alpha'(x+m\omega)+\beta'(y+n\omega')}}{[1+e^{\alpha'(x+m\omega)+\beta'(y+n\omega')}]^2},$$

ω, ω', α, α', β et β' étant réels et $\alpha\beta'-\beta\alpha'$ différant de zéro. Il est clair que cette expression ne diffère de celle que nous avons considérée plus haut qu'en ce qu'une substitution linéaire a été effectuée sur les variables.

Le tableau des périodes est pour l'expression précédente

x	y
ω	0
0	ω'
Gi	$G'i$
Hi	$H'i$

G, G′, H et H′ sont définies par les deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{l|l} \alpha G + \beta G' = 2\pi & \alpha H + \beta H' = 0 \\ \alpha' G + \beta' G' = 0 & \alpha' H + \beta' H' = 2\pi \end{array}$$

Les singularités essentielles correspondent, d'une part, à

$$\alpha x'' + \beta y'' = (2k+1)\pi;$$

d'autre part, à

$$\alpha' x'' + \beta' y'' = (2h+1)\pi,$$

en posant toujours

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy''.$$

La fonction $\mathfrak{F}(x, y)$ est donc périodique par rapport à x et par rapport à y. Nous pouvons donc, pour x et y réels, la développer en série trigonométrique; ce sont les coefficients de ce développement que nous allons chercher.

Avant de prendre le cas de deux variables, je traiterai le cas d'une seule variable, c'est-à-dire d'une série doublement périodique. Soit

$$\mathfrak{F}(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{x+m\omega}}{(1+e^{x+m\omega})^2},$$

où nous supposerons ω réel. La fonction précédente est doublement périodique avec les deux périodes ω et $2\pi i$; développons-la, pour x réel, en série trigonométrique. La fonction étant paire, nous aurons

$$\mathfrak{F}(x) = \sum A_p \cos \frac{2p\pi x}{\omega}.$$

Il faut calculer les coefficients A_p. On aura

$$A_p = \frac{2}{\omega} \int_0^{\omega} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{x+m\omega}}{(1+e^{x+m\omega})^2} \cos \frac{2p\pi x}{\omega}\, dx$$

que l'on transforme de suite en

$$\mathrm{A}_p = \frac{2}{\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos\frac{2p\pi x}{\omega}\,dx = \frac{4}{\omega}\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos\frac{2p\pi x}{\omega}\,dx.$$

On peut calculer sans peine l'intégrale définie qui précède.

Posons $\frac{2p\pi}{\omega} = a$. Nous avons à calculer l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos ax\,dx;$$

or, en intégrant par parties, cette intégrale peut s'écrire

$$\frac{1}{2} - a\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{1+e^x}\,dx;$$

mais

$$\frac{1}{1+e^x} = e^{-x} - e^{-2x} + \ldots + (-1)^n e^{-(n+1)x} + \ldots$$

et, comme

$$\int_0^{\infty} \sin ax . e^{-(n+1)x}\,dx = \frac{a}{(n+1)^2 + a^2},$$

nous aurons

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos ax\,dx = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \frac{a^2}{n^2+a^2}.$$

Or on a l'identité

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n a^2}{a^2+n^2} = \frac{\pi a i}{2\sin\pi a i},$$

par suite

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \cos ax\,dx = \frac{\pi a i}{2\sin\pi a i};$$

nous avons donc

$$\mathrm{A}_p = \frac{4\pi a}{\omega(e^{\pi a} - e^{-\pi a})}.$$

Le développement cherché est alors

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{2}{\omega} + \frac{4\pi}{\omega}\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{a}{e^{\pi a} - e^{-\pi a}} \cos ax,$$

où l'on a posé

$$a = \frac{2p\pi}{\omega}.$$

8. Revenons maintenant à la fonction de deux variables $\mathfrak{F}(x,y)$ pour la développer en série trigonométrique. La fonction satisfaisant à la relation

$$\mathfrak{F}(x,y)=\mathfrak{F}(-x,-y),$$

son développement sera évidemment de la forme

$$\sum\sum \mathrm{A}_{p,q}\cos\frac{2p\pi x}{\omega}\cos\frac{2q\pi y}{\omega'}+\mathrm{B}_{p,q}\sin\frac{2p\pi x}{\omega}\sin\frac{2q\pi y}{\omega'}.$$

Calculons d'abord $\mathrm{A}_{p,q}$. On a

$$\mathrm{A}_{p,q}=\frac{4}{\omega\omega'}\int_0^{\omega}\int_0^{\omega'}\mathfrak{F}(x,y)\cos\frac{2p\pi x}{\omega}\cos\frac{2q\pi y}{\omega'}\,dx\,dy,$$

qui se transforme de suite en

$$\mathrm{A}_{p,q}=\frac{4}{\omega\omega'}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x+\beta y}}{(1+e^{\alpha x+\beta y})^2}\,\frac{e^{\alpha' x+\beta' y}}{(1+e^{\alpha' x+\beta' y})^2}\cos\frac{2p\pi x}{\omega}\cos\frac{2q\pi y}{\omega'}\,dx\,dy.$$

Posons

$$\begin{aligned}\alpha x+\beta y&=u,\\ \alpha' x+\beta' y&=v,\end{aligned}$$

d'où se tirent

$$\begin{aligned}x&=\lambda u+\mu v,\\ y&=\lambda' u+\mu' v;\end{aligned}$$

en posant

$$\lambda=\frac{\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\qquad \lambda'=\frac{-\alpha'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},$$

$$\mu=\frac{-\beta'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},\qquad \mu'=\frac{\alpha}{\alpha\beta'-\alpha'\beta},$$

on aura

$$\mathrm{A}_{p,q}=\frac{4(\lambda\mu'-\lambda'\mu)}{\omega\omega'}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{u}}{(1+e^{u})^2}\,\frac{e^{v}}{(1+e^{v})^2}\cos a(\lambda u+\mu v)\cos b(\lambda' u+\mu' v)\,du\,dv,$$

où

$$a=\frac{2p\pi}{\omega},\qquad b=\frac{2q\pi}{\omega'}.$$

Remplaçons maintenant

$$2\cos a(\lambda u+\mu v)\cos b(\lambda' u+\mu' v)$$

par

$$\begin{aligned}&\cos(a\lambda+b\lambda')u.\cos(a\mu+b\mu')v-\sin(a\lambda+b\lambda')u.\sin(a\mu+b\mu')v\\ &+\cos(a\lambda-b\lambda')u.\cos(a\mu-b\mu')v-\sin(a\lambda-b\lambda')u.\sin(a\mu-b\mu')v.\end{aligned}$$

La partie relative aux sinus disparaît dans l'intégration. Il reste une somme de deux intégrales doubles : chacune d'elles est un produit de deux intégrales simples rentrant dans le type correspondant à une seule variable. Toute réduction faite, on aura

$$A_{p,q} = \frac{8}{\omega\omega'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \left(\frac{A}{e^{A} - e^{-A}} \frac{B}{e^{B} - e^{-B}} + \frac{A'}{e^{A'} - e^{-A'}} \frac{B'}{e^{B'} - e^{-B'}} \right),$$

en posant

$$A = \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \left(\frac{p\beta'}{\omega} - \frac{q\alpha'}{\omega'} \right), \qquad B = \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \left(-\frac{p\beta}{\omega} + \frac{q\alpha}{\omega'} \right),$$

$$A' = \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \left(\frac{p\beta'}{\omega} + \frac{q\alpha'}{\omega'} \right), \qquad B' = \frac{2\pi^2}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \left(-\frac{p\beta}{\omega} - \frac{q\alpha}{\omega'} \right).$$

Le second coefficient $B_{p,q}$ s'obtient par un calcul tout semblable : on a seulement entre parenthèses une différence au lieu d'une somme. On trouve ainsi

$$B_{p,q} = \frac{8}{\omega\omega'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \left(- \frac{A}{e^{A} - e^{-A}} \frac{B}{e^{B} - e^{-B}} + \frac{A'}{e^{A'} - e^{-A'}} \frac{B'}{e^{B'} - e^{-B'}} \right).$$

Nous obtenons donc des séries trigonométriques dépendant de deux variables complexes *et présentant une grande analogie avec les séries trigonométriques d'une variable que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques.* La forme des coefficients, qui est fort simple, me paraît digne d'être remarquée. Quant à la fonction $\mathfrak{F}(x, y)$ et aux expressions analogues, il est très vraisemblable qu'elles satisfont à des relations différentielles rappelant de loin celles de la théorie des fonctions elliptiques ou abéliennes, mais c'est une étude qui exige de longs calculs, et que je n'ai pas encore achevée.