BULLETIN DE LA S. M. F.

V. SCHLEGEL

Quelques théorèmes de géométrie à n dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 172-207
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__172_1>

Quelques théorèmes de Géométrie à n dimensions;

par M. V. Schlegel.

(Séance du 7 juillet 1882.)

Introduction. — Parmi les notions de Géométrie susceptibles d'être étendues à n dimensions se trouve aussi celle de la figure complètement limitée..Quant aux figures régulières (polygones et polyèdres), on sait qu'il y a dans l'espace à quatre dimensions six figures de cette espèce, et, en général, qu'il y a trois séries de figures régulières, dont les premiers termes sont : 1° le triangle et le tétraèdre ; 2° le carré et le cube ; 3° le carré et l'octaèdre ([1]).

Mais il n'est pas nécessaire de se restreindre aux figures régu-

([1]) Stringham, *Regular figures in n dimensional space* (*Americ. Journal of Math.,* Vol. III, p. 1.)

lières. Dans un Mémoire intitulé : *Théorie des figures composées homogènement,* qui va paraître bientôt dans les *Nova Acta Academiæ Leopold. Carol.,* vol. XLIV, j'ai établi la notion des figures limitées homogènement. Je dis qu'une figure à n dimensions est limitée homogènement si : 1° à chaque sommet se rencontrent le même nombre d'arêtes, de plans, de corps, etc. ; 2° suivant chaque arête se rencontrent le même nombre de plans, de corps, etc., etc. En disant, pour abréger, « homogène » pour « limité homogènement », on voit que tous les polygones plans sont homogènes. On peut démontrer que, dans l'espace à trois dimensions, il n'y a que cinq espèces de polyèdres homogènes, dont les cas spéciaux (les polyèdres réguliers) naissent par la supposition que les figures limitantes soient régulières. Également, il y a six figures homogènes dans l'espace à quatre dimensions et trois dans tout autre espace.

Dans ce qui va suivre, je vais démontrer qu'on peut étendre quelques théorèmes de Géométrie à l'espace à n dimensions. A cet effet, il sera nécessaire d'examiner les trois séries de figures l'une après l'autre.

Quant à la méthode de recherche, il n'y en a qu'une seule qu'on puisse employer, si l'on veut obtenir les résultats géométriques par des calculs simples : c'est la méthode de M. Grassmann. Pour comprendre les recherches suivantes, il suffira de savoir que, si e_1 et e_2 sont deux points d'une droite, chaque point x de la droite peut être représenté par l'équation

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\, x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$

où α_1 et α_2 sont deux nombres réels, dont la somme peut être posée égale à 1. On tire de cette équation

$$\frac{e_1 - x}{x - e_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Cette équation dit que le rapport des distances $e_1 x$ et $x e_2$ est égal à $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$. Il faut encore savoir que le « produit extérieur » de deux points A et B est la longueur de la droite entre A et B ; que

$$(\mathrm{AB}) = -(\mathrm{BA}),$$

d'où il suit que

$$(\mathrm{AA}) = 0.$$

(La *distance* A — B et la *partie linéaire* AB sont deux notions différentes. Deux distances de même longueur A — B et $A_1 — B_1$ sont égales, si elles sont situées sur la même droite ou sur deux parallèles; au contraire, deux parties linéaires AB et $A_1 B_1$ seulement, si elles se trouvent sur la même droite.)

Également on peut dériver un point x, situé dans le plan, de trois points e_1, e_2, e_3, au moyen des nombres α_1, α_2, α_3, par l'équation

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1);$$

et ainsi de suite.

I. — Figures de la première série ([1]).

Triangle. — Soient e_1, e_2, e_3 les sommets d'un triangle. Les centres des arêtes (x_1, x_2, x_3) sont déterminés par les équations

$$(1) \qquad x_1 = \frac{e_2 + e_3}{2}, \quad x_2 = \frac{e_3 + e_1}{2}, \quad x_3 = \frac{e_1 + e_2}{2},$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 2x_1 + e_1 = 2x_2 + e_2 = 2x_3 + e_3.$$

Ces équations disent que les droites $x_1 e_1$, $x_2 e_2$, $x_3 e_3$ passent par un point (x) qui est donné par l'équation

$$(3) \qquad 3x = e_1 + e_2 + e_3;$$

par conséquent, x est le centre de gravité du triangle.

Si l'on remplace dans l'équation (3) $e_2 + e_3$ par sa valeur $2x_1$, on obtient

$$3x = e_1 + 2x_1$$

et, en retranchant $3e_1$,

$$3(x - e_1) = 2(x_1 - e_1)$$

ou

$$\frac{x - e_1}{x_1 - e_1} = \frac{2}{3},$$

ce qui exprime la propriété connue des transversales.

([1]) La première figure de cette série est, à proprement parler, la partie d'une droite comprise entre deux points, mais elle n'offre pas de qualités remarquables pour notre but.

Tétraèdre. — Soient e_1, e_2, e_3, e_4 les sommets d'un tétraèdre. Alors les centres des arêtes sont

$$x_{rs} = \frac{e_r + e_s}{2}$$

et les centres des faces

$$x_u = \frac{e_r + e_s + e_t}{3} \quad (r,\ s,\ t,\ u = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Soient y_1 et y_2 des points quelconques donnés sur les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$; on a

$$y_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 x_1 \quad (\alpha_1 + \beta_1 = 1),$$
$$y_2 = \alpha_2 e_2 + \beta_2 x_2 \quad (\alpha_2 + \beta_2 = 1)$$

ou

$$y_1 = \alpha_1 e_1 + \frac{\beta_1}{3} e_2 + \frac{\beta_1}{3} e_3 + \frac{\beta_1}{3} e_4,$$

$$y_2 = \frac{\beta_2}{3} e_1 + \alpha_2 e_2 + \frac{\beta_2}{3} e_3 + \frac{\beta_2}{3} e_4.$$

Pour que les deux points y_1 et y_2 coïncident en un point x, il faut que les coefficients des points e_1, e_2, ... soient égaux deux à deux, parce qu'un point ne peut être dérivé de quatre autres points que d'une seule manière. On a donc les conditions

$$\alpha_1 = \frac{\beta_2}{3}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_1}{3}, \quad \beta_1 = \beta_2$$

ou

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\beta_1}{3} = \frac{\beta_2}{3}.$$

En ajoutant la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

on obtient

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{4}, \quad \beta_1 = \tfrac{3}{4},$$

et les valeurs de y_1 et y_2 deviennent

$$x = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4}{4};$$

donc les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$ passent par le centre de gravité du tétraèdre. En changeant les indices, on voit que les droites $x_3 e_3$ et $x_4 e_4$ ont la même propriété. On a donc le théorème connu :

Les quatre droites qui joignent les sommets d'un tétraèdre *avec les centres de gravité des faces opposées passent par le centre de gravité du tétraèdre.*

En remplaçant dans la formule

$$4x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

$e_2 + e_3 + e_4$ par la valeur $3x_1$, on obtient

$$4x = e_1 + 3x_1$$

et, en retranchant $4e_1$ des deux côtés,

$$4(x - e_1) = 3(x_1 - e_1)$$

ou

$$\frac{x - e_1}{x_1 - e_1} = \frac{3}{4},$$

ce qui exprime la propriété connue des transversales du tétraèdre.

En remplaçant, d'autre part, $e_1 + e_2$ par $2x_{12}$ et $e_3 + e_4$ par $2x_{34}$, il vient

$$4x = 2x_{12} + 2x_{34}$$

ou

$$x = \frac{x_{12} + x_{34}}{2}.$$

De même

$$x = \frac{x_{13} + x_{24}}{2} = \frac{x_{14} + x_{23}}{2}.$$

On a donc le théorème :

Le centre de gravité d'un tétraèdre est au milieu de la droite qui joint les centres de deux arêtes opposées quelconques.

Pour le triangle $x_{34}e_1e_2$, les résultats obtenus donnent encore le théorème :

Les droites qui joignent deux sommets d'un triangle (e_1, e_2) *au milieu de la troisième transversale* $(x_{34}x_{12})$ *divisent les arêtes* $(x_{34}e_1, x_{34}e_2)$ *dans la proportion* 1 : 2, *et se divisent entre elles dans la proportion* 1 : 3.

La projection d'un tétraèdre sur le plan est un quadrilatère avec ses deux diagonales (il y a deux formes de cette figure, selon qu'un sommet est situé dans le triangle formé par les trois autres ou non). Les théorèmes énoncés ci-dessus sur le tétraèdre deviennent pour la projection les suivants :

Si l'on joint chaque sommet d'un quadrilatère avec le centre de gravité du triangle formé par les trois autres sommets, ces quatre droites passent par le même point et se divisent entre elles suivant la proportion 1 : 3. *Passent aussi par le même point les trois droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées et ceux des diagonales du quadrilatère. Ces droites se divisent en parties égales.*

Pentaédroïde. — Nous appelons ainsi (suivant M. Stringham) la figure à quatre dimensions qui est limitée par cinq tétraèdres, dont quatre ont chaque fois un sommet commun.

Soient $e_1, e_2, \ldots, e_5$ les sommets de cette figure. Alors les centres des dix arêtes sont

$$x_{rs} = \frac{e_r + e_s}{2},$$

les centres des dix faces

$$x_{rst} = \frac{e_r + e_s + e_t}{3}$$

et les centres des cinq corps limitants

$$x_v = \frac{e_r + e_s + e_t + e_u}{4} \quad (r,\ s,\ t,\ u,\ v = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

Soient y_1 et y_2 des points quelconques donnés sur les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$; on a

$$y_1 = \alpha_1 e_1 + \beta_1 x_1 \quad (\alpha_1 + \beta_1 = 1),$$
$$y_2 = \alpha_2 e_2 + \beta_2 x_2 \quad (\alpha_2 + \beta_2 = 1)$$

ou

$$y_1 = \alpha_1 e_1 + \frac{\beta_1}{4} e_2 + \frac{\beta_1}{4} e_3 + \frac{\beta_1}{4} e_4 + \frac{\beta_1}{4} e_5,$$
$$y_2 = \frac{\beta_2}{4} e_1 + \alpha_2 e_2 + \frac{\beta_2}{4} e_3 + \frac{\beta_2}{4} e_4 + \frac{\beta_2}{4} e_5.$$

Pour que les deux points y_1 et y_2 coïncident en un point x, il faut que les coefficients des points $e_1, e_2, \ldots$ soient égaux deux à deux (comme ci-dessus). On a donc les conditions

$$\alpha_1 = \frac{\beta_2}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{\beta_1}{4}, \quad \beta_1 = \beta_2$$

ou

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\beta_1}{4} = \frac{\beta_2}{4}.$$

En ajoutant la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

on obtient

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{5}, \quad \beta_1 = \tfrac{4}{5},$$

et les valeurs de y_1 et y_2 deviennent

$$x = \frac{e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5}{5}.$$

Donc les droites $x_1 e_1$ et $x_2 e_2$ passent par un point qu'on peut appeler, par analogie, « centre » du pentaédroïde. En changeant les indices, on voit que les droites $x_3 e_3$, $x_4 e_4$, $x_5 e_5$ ont la même propriété. On a donc le théorème :

Les cinq droites qui joignent les sommets d'un pentaédroïde avec les centres des corps opposés passent par le centre du pentaédroïde.

En remplaçant dans la formule

$$5x = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5$$

$e_2 + e_3 + e_4 + e_5$ par la valeur $4x_1$, on obtient

$$5x = e_1 + 4x_1,$$

et, en retranchant $5e_1$ des deux côtés,

$$5(x - e_1) = 4(x_1 - e_1)$$

ou

$$\frac{x - e_1}{x_1 - e_1} = \frac{4}{5}.$$

Donc : *Les cinq droites ci-dessus mentionnées se divisent entre elles suivant la proportion de* 1 : 4.

En remplaçant, d'autre part, $e_1 + e_2$ par $2x_{12}$ et $e_3 + e_4 + e_5$ par $3x_{345}$, il vient

$$5x = 2x_{12} + 3x_{345}$$

ou

$$5(x - x_{12}) = 3(x_{345} - x_{12}),$$

ou

$$\frac{x - x_{12}}{x_{345} - x_{12}} = \frac{3}{5};$$

c'est-à-dire que : *Les dix droites qui joignent le milieu de chaque arête avec le centre de la face opposée passent par le centre du pentaédroïde et se divisent entre elles suivant la proportion de* 2 : 3.

La projection d'un pentaédroïde dans l'espace est un corps qui affecte deux formes, selon qu'un sommet est situé dans le tétraèdre formé par les quatre autres ou non. On obtient les deux formes en joignant un point (5) situé dans un tétraèdre, ou en dehors, avec les quatre sommets (1, 2, 3, 4). Alors les cinq tétraèdres sont 1234, 1235, 1345, 1245, 2345. On voit aussi facilement qu'aucune des arêtes et des faces du pentaédroïde n'a disparu par la projection.

Les théorèmes énoncés ci-dessus sur le pentaédroïde, appliqués à sa projection, deviennent les suivants :

Si l'on joint un point avec les sommets d'un tétraèdre et chacun de ces cinq points avec le centre du tétraèdre formé par les quatre autres, ces cinq droites passent par le même point et se divisent entre elles dans la proportion de 1 : 4. *Passent aussi par le même point les dix droites qui joignent deux à deux les milieux des arêtes avec les centres des faces opposées. Ces droites se divisent dans la proportion de* 2 : 3.

Figure à n dimensions. — Sur la figure à n dimensions se trouvent des figures limitantes à $0, 1, 2, \ldots (n-1)$ dimensions, c'est-à-dire des sommets, arêtes, faces (triangles), corps (tétraèdres), etc. Alors le nombre des figures limitantes à k dimensions est (¹)

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{1.2.3\ldots(k+1)} = (n+1)^{(k+1)}.$$

(¹) *Voir* Stringham, *loc. cit.*, p. 2. — Pour $k = n - 1$, on obtient $(n+1)^{(n)}$ ou $n+1$.

Par conséquent, il y a

$$\begin{array}{l}(n+1) \text{ sommets,}\\ (n+1)^2 \text{ arêtes,}\\ (n+1)^3 \text{ faces, etc.}\end{array}$$

Soient $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ les sommets de la figure. Alors les centres des arêtes sont

$$\frac{e_{r_1}+e_{r_2}}{2},$$

les centres des faces

$$\frac{e_{r_1}+e_{r_2}+e_{r_3}}{3},$$

et, en général, les centres des figures limitantes à k dimensions

$$\frac{e_{r_1}+e_{r_2}+\ldots+e_{r_{k+1}}}{k+1} \qquad (r=1, 2, 3, \ldots n+1).$$

Chaque figure à k dimensions est située vis-à-vis d'une autre à $(n-k-1)$ dimensions. Le nombre des unes est aussi grand que celui des autres, à cause de l'identité

$$(n+1)^{(k+1)}=(n+1)^{(n-k-1+1)}.$$

Soient

$$x_1^k=\frac{e_2+e_3+\ldots+e_{k+2}}{k+1}, \quad x_2^k=\frac{e_1+e_3+\ldots+e_{k+2}}{k+1}$$

les centres de deux figures limitantes à k dimensions,

$$x_1^{n-k-1}=\frac{e_{k+3}+e_{k+4}+\ldots+e_{n+1}+e_1}{n-k},$$

$$x_2^{n-k-1}=\frac{e_{k+3}+e_{k+4}+\ldots+e_{n+1}+e_2}{n-k}$$

les centres des figures situées vis-à-vis des premières.

En outre,

$$y_1=\alpha_1 x_1^k+\beta_1 x_1^{n-k-1} \quad (\alpha_1+\beta_1=1),$$

$$y_2=\alpha_2 x_2^k+\beta_2 x_2^{n-k-1} \quad (\alpha_2+\beta_2=1)$$

deux points quelconques donnés sur les droites $x_1^k x_1^{n-k-1}$ et $x_2^k x_2^{n-k-1}$. En remplaçant les points x par leurs valeurs, on obtiendra

$$y_1 = \frac{\beta_1 e_1}{n-k} + \frac{\alpha_1 e_2}{k+1} + \frac{\alpha_1 e_3}{k+1} + \ldots + \frac{\alpha_1 e_{k+2}}{k+1}$$
$$+ \frac{\beta_1 e_{k+3}}{n-k} + \frac{\beta_1 e_{k+4}}{n-k} + \ldots + \frac{\beta_1 e_{n+1}}{n-k},$$
$$y_2 = \frac{\alpha_2 e_1}{k+1} + \frac{\beta_2 e_2}{n-k} + \frac{\alpha_2 e_3}{k+1} + \ldots + \frac{\alpha_2 e_{k+2}}{k+1}$$
$$+ \frac{\beta_2 e_{k+3}}{n-k} + \frac{\beta_2 e_{k+4}}{n-k} + \ldots + \frac{\beta_2 e_{n+1}}{n-k}.$$

Pour que les deux points y_1 et y_2 coïncident en un point x, il faut avoir

$$\frac{\beta_1}{n-k} = \frac{\alpha_2}{k+1}, \quad \frac{\alpha_1}{k+1} = \frac{\beta_2}{n-k}, \quad \alpha_1 = \alpha_2,$$

et, par conséquent,

$$\beta_1 = \beta_2,$$

ce qu'on peut écrire ainsi :

$$\frac{\alpha_1}{k+1} = \frac{\alpha_2}{k+1} = \frac{\beta_1}{n-k} = \frac{\beta_2}{n-k}.$$

En ajoutant la condition

$$\alpha_1 + \beta_1 = 1,$$

on obtient

$$\alpha_1 = \frac{k+1}{n+1}, \quad \beta_1 = \frac{n-k}{n+1},$$

et les valeurs de y_1 et y_2 deviennent

$$x = \frac{e_1 + e_2 + \ldots + e_{n+1}}{n+1},$$

ce qui est le centre de la figure donnée à n dimensions.

On a donc le théorème général :

Dans une figure de la première série et à n dimensions, les $(n+1)^{(k+1)}$ droites, qui joignent les centres de toutes les figures limitantes à k dimensions avec les centres des figures opposées à $(n-k-1)$ dimensions, passent par le centre de la figure donnée et se divisent entre elles suivant la proportion de $(k+1):(n-k)$.

Ce théorème ne change pas si les $n+1$ sommets de la figure donnée sont situés dans une étendue à moindre nombre de dimensions. On a, en particulier, si les points sont situés dans l'espace ou dans un plan :

1° Pour $k=0$:

Étant donnés $n+1$ points, les droites qui joignent chacun d'eux avec le centre de gravité des n autres passent par le centre de gravité des $(n+1)$ points et se divisent entre elles suivant la proportion de $1:n$.

2° Pour $k=1$:

Si l'on joint les $(n+1)$ points donnés deux à deux par des droites, et le point milieu de chaque droite avec le centre de gravité des $(n-1)$ autres points, ces dernières $(n+1)^{(2)}$ droites passent par le centre de gravité des $(n+1)$ points donnés et se divisent entre elles suivant la proportion de $2:(n-1)$, etc.

Il est enfin aisé de voir qu'il y a encore d'autres propriétés du triangle, susceptibles d'être étendues à la figure à n dimensions. Mais il arrive quelquefois que ce n'est pas la figure générale qui a la propriété dont il s'agit, mais une forme spéciale. Nous verrons la même chose dans ce qui suit.

II. — Figures de la deuxième série.

Nous nous proposons maintenant d'étendre les propriétés du quadrilatère complet aux autres figures de cette série; mais il faudra auparavant rechercher la figure analogue située sur la droite. C'est, comme dans le premier cas, la partie comprise entre deux points (e_1, e_2), complétée par deux points harmoniques.

Points harmoniques. — Si deux points x_1 et x_2 sont harmoniques par rapport à e_1 et e_2, on a

$$(\alpha_1+\alpha_2)\,x_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$
$$(\alpha_1-\alpha_2)\,x_2 = \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2;$$

car il suit de ces équations

$$\alpha_1(x_1-e_1) = \alpha_2(e_2-x_1),$$
$$\alpha_1(x_2-e_1) = \alpha_2(x_2-e_2)$$

ou

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{x_1 - e_1}{e_2 - x_1} = \frac{x_2 - e_1}{x_2 - e_2},$$

ce qui est la relation connue entre les points harmoniques. En outre, on voit que, x_1 étant choisi à volonté, x_2 est complètement déterminé à l'aide des nombres α_1 et α_2.

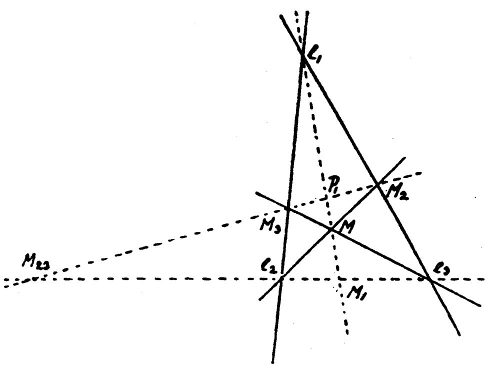
Avec les points A, B, C, on peut former les couples (A,B), (B,C), (C, A). Alors on peut déterminer trois points C_1, A_1, B_1, de façon que les couples

$$(A, B), (C, C_1), \quad (B, C), (A, A_1), \quad (C, A), (B, B_1)$$

soient harmoniques. On peut facilement établir les équations qui expriment ce fait connu.

Quadrilatère complet (*fig.* 1). — Soit donné (*fig.* 1) un

Fig. 1.



point M dans le plan d'un triangle $e_1 e_2 e_3$ par l'équation

$$\text{(1)} \qquad M = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \text{ (1)}.$$

Alors les points d'intersection des droites Me_1, Me_2, Me_3 avec les arêtes du triangle sont :

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} M_1 = M - \alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \\ M_2 = M - \alpha_2 e_2 = \alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1, \\ M_3 = M - \alpha_3 e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2. \end{cases}$$

---

(1) Nous omettrons, pour abréger, le facteur numérique à gauche, qui est toujours égal à la somme des facteurs à droite.

On a maintenant trois quadrilatères, $MM_2e_1M_3$, $MM_3e_2M_1$, $MM_1e_3M_2$, dont les troisièmes diagonales sont respectivement e_2e_3, e_3e_1, e_1e_2.

Nous nous bornerons à étudier la première de ces figures, $MM_2e_1M_3$. Les diagonales sont M_2M_3, Me_1, e_2e_3. Les points d'intersection de ces droites sont donnés par les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} P_1 = M_2 + M_3 = M + \alpha_1 e_1, \\ M_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 = M - \alpha_1 e_1, \\ M_{23} = M_2 - M_3 = \alpha_3 e_3 - \alpha_2 e_2. \end{cases}$$

On voit par ces équations que les couples

$$(P_1M_1, Me_1), \quad (M_1M_{23}, e_2e_3), \quad (M_{23}P_1, M_2M_3)$$

sont harmoniques.

En permutant les indices circulairement, on obtient les mêmes résultats pour les deux autres quadrilatères.

Comme

$$M_{12} + M_{23} + M_{31} = (M_1 - M_2) + (M_2 - M_3) + (M_3 - M_1) = 0,$$

on voit que les points M_{12}, M_{23}, M_{31} sont situés sur la même droite.

Les centres des diagonales M_2M_3 et Me_1 (multipliés par 2) sont

$$(a)\qquad (M_2 + M_3) = \frac{\alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1}{\alpha_3 + \alpha_1} + \frac{\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

$$(b)\qquad (e_1 + M) = (1 + \alpha_1)e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3.$$

On tire de (a)

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(M_2 + M_3) = \alpha_1[\alpha_3 e_3 + \alpha_2 e_2 + (1 + \alpha_1)e_1] + \alpha_2\alpha_3(e_2 + e_3),$$

ou, à l'aide de (b),

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(M_2 + M_3) = \alpha_1(e_1 + M) + \alpha_2\alpha_3(e_2 + e_3).$$

Cette équation dit qu'il existe une relation numérique entre les centres $[\frac{1}{2}(M_2 + M_3),\ \frac{1}{2}(e_1 + M),\ \frac{1}{2}(e_2 + e_3)]$ des diagonales du quadrilatère complet, ou que ces centres sont situés sur la même droite.

Tous ces résultats sont bien connus, mais il fallait les démontrer ici, eu égard à l'analogie des figures à plus de deux dimensions et pour mieux préparer le lecteur aux calculs dont nous allons faire usage.

Ainsi nous allons démontrer l'analogie entre le quadrilatère complet et la figure de quatre points harmoniques sur une droite :

1° Si l'on multiplie extérieurement les équations des points harmoniques

$$(\alpha_1 + \alpha_2)x_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$
$$(\alpha_1 - \alpha_2)x_2 = \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2$$

par e_1 et par e_2, on obtient (comme $e_1 e_1 = e_2 e_2 = 0$)

$$\begin{aligned}(\alpha_1+\alpha_2)(x_1 e_1) &= \alpha_2(e_2 e_1), & (\alpha_1+\alpha_2)(e_2 x_1) &= \alpha_1(e_2 e_1),\\ (\alpha_1-\alpha_2)(x_2 e_1) &= -\alpha_2(e_2 e_1), & (\alpha_1-\alpha_2)(x_2 e_2) &= \alpha_1(e_1 e_2).\\ &= \alpha_2(e_1 e_2). & & \end{aligned}$$

Donc, par division,

$$\frac{(x_1 e_1)}{(e_2 x_1)} = \frac{(x_2 e_1)}{(x_2 e_2)}.$$

En remplaçant $(e_2 x_1)$ par $-(x_1 e_2)$, on peut donner à cette équation la forme

$$\frac{(x_1 e_1)}{(x_1 e_2)} \frac{(x_2 e_2)}{(x_2 e_1)} = -1.$$

Multiplions alors extérieurement les équations du quadrilatère complet $MM_2 e_1 M_3$,

$$(2) \qquad \begin{cases} M_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 & \text{par} \quad (e_1 e_2) \text{ et } (e_3 e_1),\\ M_2 = \alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1 & \text{par} \quad (e_2 e_3) \text{ et } (e_1 e_2),\\ M_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 & \text{par} \quad (e_3 e_1) \text{ et } (e_2 e_3). \end{cases}$$

En ajoutant à gauche les facteurs omis, nous obtiendrons

$$(3) \qquad \begin{cases} (M_1 e_1 e_2) = \alpha_3(e_3 e_1 e_2), & (M_1 e_3 e_1) = \alpha_2(e_2 e_3 e_1),\\ (M_2 e_2 e_3) = \alpha_1(e_1 e_2 e_3), & (M_2 e_1 e_2) = \alpha_3(e_3 e_1 e_2),\\ (M_3 e_3 e_1) = \alpha_2(e_2 e_3 e_1), & (M_3 e_2 e_3) = \alpha_1(e_1 e_2 e_3). \end{cases}$$

Or on a

$$(e_1 e_2 e_3) = (e_2 e_3 e_1) = (e_3 e_1 e_2),$$

parce qu'un produit extérieur reste invariable par deux permutations de facteurs voisins.

Donc, par division,

$$(3^a) \qquad \frac{(M_1 e_1 e_2)}{(M_1 e_3 e_1)} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \quad \frac{(M_3 e_3 e_1)}{(M_3 e_2 e_3)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \frac{(M_2 e_2 e_3)}{(M_2 e_1 e_2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3},$$

par conséquent

$$(4)\qquad \frac{(M_1 e_1 e_2)}{(M_1 e_3 e_1)}\,\frac{(M_3 e_3 e_1)}{(M_3 e_2 e_3)}\,\frac{(M_2 e_2 e_3)}{(M_2 e_1 e_2)} = +1.$$

Comme un produit extérieur de trois points A, B, C représente la double aire du triangle ABC, on voit que la dernière équation établit, entre les triangles du quadrilatère complet, une relation tout à fait analogue à celle qui existe entre les distances des points harmoniques.

Au surplus, on peut vérifier le dernier résultat par une simple réflexion géométrique. On a évidemment

$$\frac{(M_1 e_1 e_2)}{(M_1 e_3 e_1)} = \frac{(M_1 e_2)}{(e_3 M_1)} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2},$$

et de même les deux autres équations (3^a).

A cause de la relation (4), on peut dire que le groupe des points M_1, M_2, M_3 est harmonique par rapport à e_1, e_2, e_3, d'où résulte le théorème :

Il y a dans le plan un nombre infini de groupes de trois points, qui sont harmoniques par rapport à un groupe donné. Avec ce groupe (e_1, e_2, e_3), *chaque quatrième point* (M) *détermine trois autres points* (M_1, M_2, M_3) *harmoniques par rapport à* (e_1, e_2, e_3).

2° Si l'on résout les équations des points harmoniques

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\,x_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$
$$(\alpha_1 - \alpha_2)\,x_2 = \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2,$$

par rapport à e_1 et e_2, en posant

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\beta_2,$$

on aura

$$(\beta_1 + \beta_2)\,e_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$
$$(\beta_1 - \beta_2)\,e_2 = \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2,$$

ce qui exprime ce théorème connu :

Si le couple x_1, x_2 *est harmonique par rapport à* (e_1, e_2), (e_1, e_2) *est aussi harmonique par rapport à* x_1, x_2.

De même, en regardant les équations du quadrilatère complet

$$M = \alpha_1 e_1 + (\alpha_2 + \alpha_3) M_1,$$
$$M = \alpha_2 e_2 + (\alpha_3 + \alpha_1) M_2,$$
$$M = \alpha_3 e_3 + (\alpha_1 + \alpha_2) M_3,$$

on voit que les groupes (e_1, e_2, e_3), (M_1, M_2, M_3) dépendent l'un de l'autre par des équations analogues. Par conséquent, on peut dire :

Si le groupe (M_1, M_2, M_3) *est harmonique par rapport à* (e_1, e_2, e_3), (e_1, e_2, e_3) *est aussi harmonique par rapport à* (M_1, M_2, M_3).

Néanmoins, il faut remarquer que la réciprocité entre les groupes (M_1, M_2, M_3) et (e_1, e_2, e_3) n'est pas aussi complète que celle entre les couples harmoniques (x_1, x_2) et (e_1, e_2).

On voit, par exemple, que deux points e sont en ligne droite avec un point M, mais non *vice versa*. Il fallait s'attendre à cette circonstance, parce qu'il y a réciprocité sur la droite entre deux points, sur le plan entre un point et une droite; par conséquent, il faut que la relation réciproque à celle de points soit une relation de droites. En effet, soit

$$(e_1 e_2) = \varepsilon_3, \quad (e_2 e_3) = \varepsilon_1, \quad (e_3 e_1) = \varepsilon_2,$$
$$(M_1 M_2) = \mu_3, \quad (M_2 M_3) = \mu_1, \quad (M_3 M_1) = \mu_2;$$

alors on voit que deux droites μ passent par le même point avec une droite ε, ce qui est la relation réciproque à la susdite.

Donc on appellera exactement harmoniques entre eux les couples (e_1, e_2, e_3), (μ_1, μ_2, μ_3) et (M_1, M_2, M_3), $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

3° Si l'on pose

$$\alpha_3 = 0$$

dans les équations du quadrilatère complet (1), (2), (3), on voit d'abord que le point e_3 est à l'infini; puis on aura

$$M = M_3, \quad M_2 = e_1, \quad M_1 = e_2,$$

et les équations restantes sont

$$\alpha_2 e_2 = M_3 - \alpha_1 e_1,$$
$$P_1 = M_3 + \alpha_1 e_1,$$

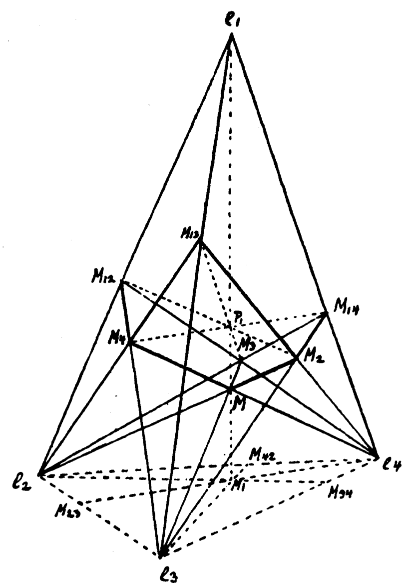
c'est-à-dire que les neuf points du quadrilatère complet se sont transformés en quatre points harmoniques. Donc la dernière figure est un cas particulier de la précédente, et l'on a le théorème :

Soient donnés deux groupes de trois points harmoniques (M_1, M_2, M_3), (e_1, e_2, e_3). *Si un point* (e_3) *est supposé à l'infini, les autres points coïncident en trois points* (e_1, M_3, e_2) *d'une droite, et la figure du quadrilatère complet, dont* P_1 *est le point d'intersection des diagonales* M_2M_3 *et* M_1e_1, *se transforme en la figure des couples harmoniques* (M_3, e_1), (e_2, P_1).

Hexaèdre complet (*fig.* 2). — Soit donné un point M dans un tétraèdre $e_1\, e_2\, e_3\, e_4$ par l'équation

$$M = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4. \tag{1}$$

Fig. 2.



Alors les points d'intersection des droites Me_1, Me_2, Me_3, Me_4 avec les faces du tétraèdre sont

$$\left\{\begin{aligned} M_1 &= M - \alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4, \\ M_2 &= M - \alpha_2 e_2 = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1, \\ M_3 &= M - \alpha_3 e_3 = \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\ M_4 &= M - \alpha_4 e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Soit rst une permutation quelconque des nombres 2, 3, 4. Alors les six droites $e_r M_s$ coupent les arêtes $e_1 e_t$ suivant les *trois* points M_{1t}; car on a

$$(3)\quad \begin{cases} M_{12} = M_3 - \alpha_4 e_4 = M_4 - \alpha_3 e_3 = M - \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \\ M_{13} = M_4 - \alpha_2 e_2 = M_2 - \alpha_4 e_4 = M - \alpha_4 e_4 - \alpha_2 e_2 = \alpha_1 e_1 + \alpha_3 e_3, \\ M_{14} = M_2 - \alpha_3 e_3 = M_3 - \alpha_2 e_2 = M - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 = \alpha_1 e_1 + \alpha_4 e_4. \end{cases}$$

Or les droites $e_1 M$, $M_{12}M_2$, $M_{13}M_3$, $M_{14}M_4$ sont les axes diagonaux d'un hexaèdre qui est une partie du tétraèdre donné. Il y a encore trois autres hexaèdres qui en dérivent. Pour les obtenir, il faut changer trois fois circulairement les indices des axes du premier. En étudiant le premier hexaèdre, nous verrons immédiatement que ces corps, contrairement à ce qu'il fallait attendre, ne représentent pas le cas général d'un hexaèdre.

D'après les équations (2) et (3), les droites MM_2, $e_1 M_{12}$, $M_4 M_{13}$, $M_3 M_{14}$ passent par le point e_2; car on a

$$M_2 = M - \alpha_2 e_2, \quad M_{12} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$
$$M_{13} = M_4 - \alpha_2 e_2, \quad M_{14} = M_3 - \alpha_2 e_2,$$

d'où l'on tire

$$\alpha_2 e_2 = M - M_2 = M_{12} - \alpha_1 e_1 = M_4 - M_{13} = M_3 - M_{14}.$$

De même

$$\alpha_3 e_3 = M - M_3 = M_{13} - \alpha_1 e_1 = M_2 - M_{14} = M_4 - M_{12},$$
$$\alpha_4 e_4 = M - M_4 = M_{14} - \alpha_1 e_1 = M_3 - M_{12} = M_2 - M_{13}.$$

Or la troisième série est une conséquence des deux précédentes, ce qu'on voit en regardant les équations

$$M - M_2 = M_4 - M_{13}, \quad M - M_3 = M_4 - M_{12}, \quad M_{13} - \alpha_1 e_1 = M_2 M_{14}.$$

On a donc ce théorème :

Soient aa', bb', cc' six plans formant un hexaèdre, deux à deux opposés. Si les quatre plans bb', cc' passent par le même point (e_2) et les plans aa', cc' par le même point (e_3), les plans aa', bb' passent aussi par le même point (e_4).

En d'autres termes : *Si les sommets d'un hexaèdre sont situés deux à deux sur les droites de deux faisceaux de quatre rayons, il existe encore un troisième faisceau qui a la même propriété.*

En outre, il suit des équations (1), (2), (3), si nous posons

$$P_1 = 2\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4,$$

$$(4) \qquad P_1 = M + \alpha_1 e_1 = M_2 + M_{12} = M_3 + M_{13} = M_4 + M_{14},$$

c'est-à-dire que *les axes de cet hexaèdre passent par le même point* (P_1).

Si nous posons, en particulier,

$$(a) \qquad \alpha_1 = 1, \quad \text{d'où} \quad \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

l'axe Me_1 est divisé en parties égales par le point P_1. De même, l'axe $M_2 M_{12}$ si

$$(b) \qquad \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$$

(car, en ce cas, les coefficients des points M_2 et M_{12} sont égaux entre eux). Des deux conditions (a) et (b), il suit

$$(c) \qquad \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

c'est-à-dire que le point e_2 est à l'infini.

L'axe $M_3 M_{13}$ est divisé de même si

$$(d) \qquad \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4.$$

On tire de (c) et (d)

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0,$$

c'est-à-dire que, dans ce cas, e_3 et e_4 sont aussi à l'infini, et l'axe $M_4 M_{14}$ est divisé comme les autres. On a donc ce théorème :

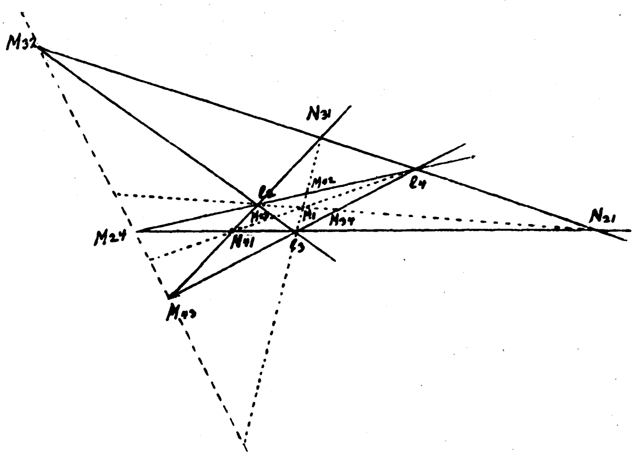
Si les axes d'un hexaèdre passent par le même point et si trois axes se divisent entre eux en parties égales, il en est de même du quatrième, et l'hexaèdre est un parallélépipède.

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que du *simple* hexaèdre. Les six faces de ce corps, étendues jusqu'à leurs points d'intersection (e_2, e_3, e_4), forment un *hexaèdre complet,* dont chaque face est un quadrilatère complet. Les troisièmes diagonales de ces six quadrilatères, deux à deux coïncidentes, sont les droites $e_2 e_3$, $e_3 e_4$, $e_4 e_2$. Nous appellerons les points e_2, e_3, e_4 *sommets secondaires,* les droites $e_2 e_3$, $e_3 e_4$, $e_4 e_2$ *axes secondaires,* le plan $e_2 e_3 e_4$ *plan diagonal secondaire* (7^e) de l'hexaèdre complet.

Si l'on construit les diagonales principales des faces de l'hexaèdre, chaque plan diagonal principal est aussi un quadrilatère complet avec ses trois diagonales.

Les diagonales principales des six faces rencontrent les troi-

Fig. 3.



sièmes diagonales, suivant les points (*fig.* 3)

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} M_{34} &= M_2 - \alpha_1 e_1 = M - M_{12} = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4,\\ M_{42} &= M_3 - \alpha_1 e_1 = M - M_{13} = \alpha_4 e_4 + \alpha_2 e_2,\\ M_{23} &= M_4 - \alpha_1 e_1 = M - M_{14} = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} M_{43} &= M_{14} - M_{13} = M_3 - M_4 = \alpha_4 e_4 - \alpha_3 e_3,\\ M_{24} &= M_{12} - M_{14} = M_4 - M_2 = \alpha_2 e_2 - \alpha_4 e_4,\\ M_{32} &= M_{13} - M_{12} = M_2 - M_3 = \alpha_3 e_3 - \alpha_2 e_2.\end{aligned}\right.$$

Comme

$$M_{43} + M_{24} + M_{32} = 0,$$

il en résulte que ces trois points sont situés sur la même droite.

On a, en outre,

$$(6^a)\qquad \left\{\begin{aligned} -M_{32} \quad &= M_{24} + M_{43},\\ M_1 - 3\alpha_4 e_4 &= M_{24} - M_{43},\end{aligned}\right.$$

et deux autres couples d'équations par le changement des indices 2, 3, 4, d'où résulte que les droites $M_1 e_2$, $M_1 e_3$, $M_1 e_4$ rencontrent la droite des points M_{43}, M_{24}, M_{32}, suivant les quatrièmes points harmoniques conjugués à M_{43}, M_{24}, M_{32}.

Posons

$$
(7)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{N}_{21} &= \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 - \alpha_2 e_2 = \mathrm{M}_{32} + \alpha_4 e_4 = \alpha_3 e_3 - \mathrm{M}_{24},\\
\mathrm{N}_{31} &= \alpha_4 e_4 + \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 = \mathrm{M}_{43} + \alpha_2 e_2 = \alpha_4 e_2 - \mathrm{M}_{32},\\
\mathrm{N}_{41} &= \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 = \mathrm{M}_{24} + \alpha_3 e_3 = \alpha_2 e_2 - \mathrm{M}_{43}.
\end{aligned}\right.
$$

On voit, par ces équations, que les droites $\mathrm{M}_{43} e_2$, $\mathrm{M}_{24} e_3$, $\mathrm{M}_{32} e_4$ forment un triangle dont les sommets sont les points N_{21}, N_{31}, N_{41}, et qu'il y a les couples harmoniques

$$(\mathrm{M}_{43} e_2, \mathrm{N}_{31} \mathrm{N}_{41}),\quad (\mathrm{M}_{24} e_3, \mathrm{N}_{41} \mathrm{N}_{21}),\quad (\mathrm{M}_{32} e_4, \mathrm{N}_{21} \mathrm{N}_{31}).$$

Le triangle $\mathrm{N}_{21} \mathrm{N}_{31} \mathrm{N}_{41}$ est circonscrit à $e_2 e_3 e_4$; le triangle $\mathrm{M}_{23} \mathrm{M}_{34} \mathrm{M}_{42}$ est inscrit; d'où résultent des quadrilatères trois fois complets.

Les trois plans diagonaux passant par le sommet e_1 rencontrent le plan diagonal secondaire suivant les droites $e_2 \mathrm{M}_{34}$, $e_3 \mathrm{M}_{42}$, $e_4 \mathrm{M}_{23}$; les trois autres plans diagonaux rencontrent le même plan suivant les droites $e_2 \mathrm{M}_{43}$, $e_3 \mathrm{M}_{24}$, $e_4 \mathrm{M}_{32}$ (1).

Nous avions remarqué qu'il y a des points harmoniques sur toutes les arêtes et diagonales du quadrilatère complet. De même il y a des quadrilatères complets sur toutes les faces et plans diagonaux de l'hexaèdre complet. Le septième plan diagonal (secon-

---

(1) Pour démontrer ces propositions, posons

$$(e_1 e_2 e_3 e_4) = 1.$$

Alors (1) un des plans passant par e_1 est

$$(e_1 e_2 \mathrm{M}_1) = \alpha_3 (e_1 e_2 e_3) + \alpha_4 (e_1 e_2 e_4),$$

et le plan diagonal secondaire est

$$(e_2 e_3 e_4).$$

Multipliant ces deux expressions et omettant le facteur

$$(e_1 e_2 e_3 e_4),$$

on obtient

$$\alpha_3 (e_2 e_3) + \alpha_4 (e_2 e_4),$$

ce qui est égal à

$$(e_2 \mathrm{M}_{34}).$$

Donc cette ligne est la ligne d'intersection des deux plans. (2) Un des autres plans est

$$(\mathrm{M}_{12} \mathrm{M}_{13} e_4) = \alpha_1 \alpha_3 (e_1 e_3 e_4) + \alpha_2 \alpha_1 e_2 e_{,} e_4 + \alpha_2 \alpha_3 e_2 e_3 e_4.$$

En opérant comme ci-dessus on obtient

$$\alpha_1 \alpha_3 (e_3 e_4) - \alpha_2 \alpha_1 (e_2 e_4) = \alpha_1 e_4 \mathrm{M}_{32},$$

ce qu'il fallait démontrer.

daire) correspond à la troisième diagonale. Pour compléter cette analogie, nous répétons les réflexions faites sur le quadrilatère :

1° Si l'on multiplie extérieurement les équations de l'hexaèdre complet

$$(1)\qquad M_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 \quad \text{par} \quad (e_1 e_2 e_3) \text{ et } (e_4 e_1 e_2),$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{lll} M_2 = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1 & \text{par} & (e_2 e_3 e_4) \text{ et } (e_1 e_2 e_3), \\ M_3 = \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 & \text{par} & (e_3 e_4 e_1) \text{ et } (e_2 e_3 e_4), \\ M_4 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 & \text{par} & (e_4 e_1 e_2) \text{ et } (e_3 e_4 e_1), \end{array}\right.$$

on obtient

$$\begin{array}{ll} (M_1 e_1 e_2 e_3) = \alpha_4 (e_4 e_1 e_2 e_3), & (M_1 e_4 e_1 e_2) = \alpha_3 (e_3 e_4 e_1 e_2), \\ (M_2 e_2 e_3 e_4) = \alpha_1 (e_1 e_2 e_3 e_4), & (M_2 e_1 e_2 e_3) = \alpha_4 (e_4 e_1 e_2 e_3), \\ (M_3 e_3 e_4 e_1) = \alpha_2 (e_2 e_3 e_4 e_1), & (M_3 e_2 e_3 e_4) = \alpha_1 (e_1 e_2 e_3 e_4), \\ (M_4 e_4 e_1 e_2) = \alpha_3 (e_3 e_4 e_1 e_2), & (M_4 e_3 e_4 e_1) = \alpha_2 (e_2 e_3 e_4 e_1), \end{array}$$

et, par les mêmes opérations que plus haut, il vient

$$(8)\qquad \frac{(M_1 e_1 e_2 e_3)}{(M_1 e_4 e_1 e_2)} \frac{(M_4 e_4 e_1 e_2)}{(M_4 e_3 e_4 e_1)} \frac{(M_3 e_3 e_4 e_1)}{(M_3 e_2 e_3 e_4)} \frac{(M_2 e_2 e_3 e_4)}{(M_2 e_1 e_2 e_3)} = 1.$$

Comme un produit extérieur de quatre points A, B, C, D représente le triple volume du tétraèdre ABCD, on voit que la dernière équation établit entre les tétraèdres de l'hexaèdre complet une relation analogue aux précédentes. On peut aussi, d'une façon analogue, vérifier cette relation par des considérations géométriques.

A cause de la relation (8), on dira que le groupe des points M_1, M_2, M_3, M_4 est harmonique par rapport à e_1, e_2, e_3, e_4 ; alors on a ce théorème :

Il y a dans l'espace un nombre infini de groupes de quatre points, qui sont harmoniques par rapport à un groupe donné. Avec ce groupe (e_1, e_2, e_3, e_4), *chaque cinquième point* (M) *détermine quatre autres points* (M_1, M_2, M_3, M_4) *harmoniques par rapport à* (e_1, e_2, e_3, e_4).

2° Des équations (2), il résulte que les groupes (e_1, e_2, e_3, e_4), (M_1, M_2, M_3, M_4) dépendent l'un de l'autre par des équations analogues. Par conséquent, on peut dire :

Si le groupe (M_1, M_2, M_3, M_4) *est harmonique par rapport à* (e_1, e_2, e_3, e_4), (e_1, e_2, e_3, e_4) *est aussi harmonique par rapport à* (M_1, M_2, M_3, M_4).

Si nous posons

$$(e_r e_s e_t) = \varepsilon_u, \quad (M_r M_s M_t) = \mu_u,$$

rstu étant une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, il y a une complète réciprocité : 1° entre les points e et les plans μ ; 2° entre les points M et les plans ε.

3° Si l'on pose

$$\alpha_4 = 0$$

dans les équations de l'hexaèdre complet (1), (2), (3), (4), (5), le point e_4 est à l'infini ; on aura ensuite

$$\begin{gathered} M = M_4, \\ M_2 = M_{13}, \quad M_{42} = e_2, \\ M_3 = M_{12}, \quad M_{34} = e_3, \\ M_1 = M_{23}, \quad M_{14} = e_1, \end{gathered}$$

et les équations restantes sont

$$\begin{aligned} M_4 &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, & M_{23} &= \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \\ P_1 &= M_4 + \alpha_1 e_1, & M_{13} &= \alpha_3 e_3 + \alpha_1 e_1, \\ & & M_{12} &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \end{aligned}$$

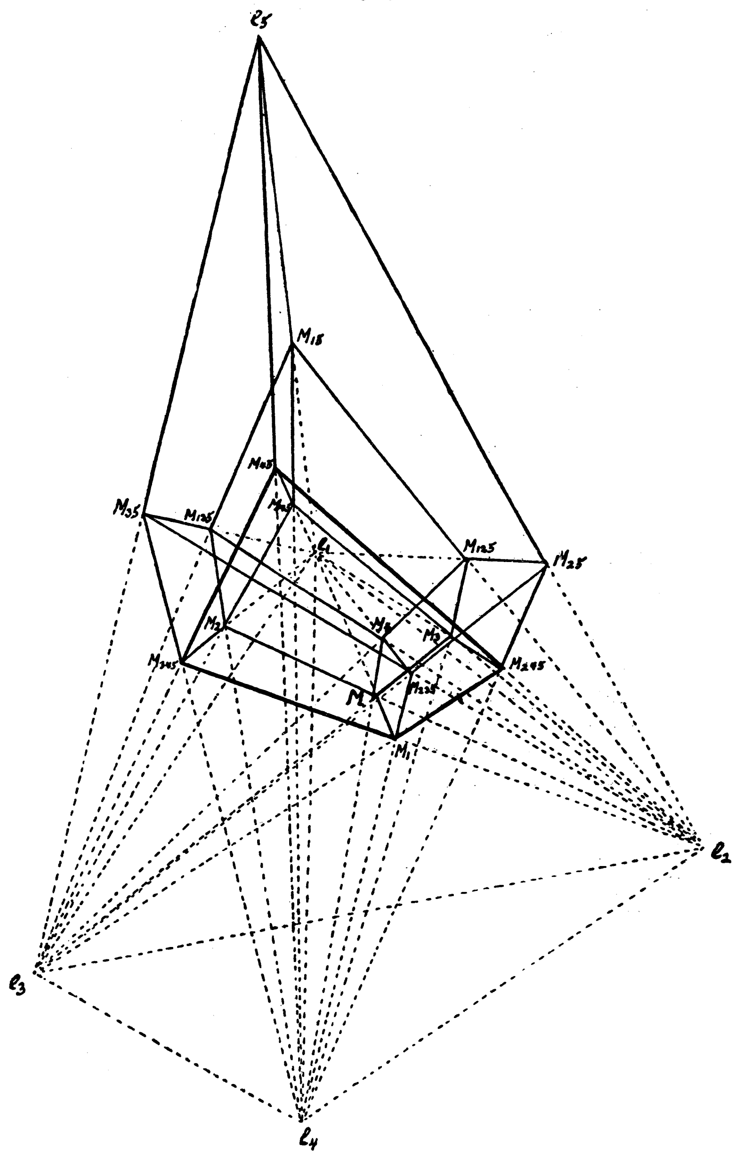
c'est-à-dire que les seize points de l'hexaèdre complet se sont transformés en huit points qui deviennent les neuf points d'un quadrilatère complet, si on leur ajoute le point M_{32} (6). Donc la dernière figure est un cas particulier de la précédente, et l'on a ce théorème :

Soient donnés deux groupes de quatre points harmoniques (M_1, M_2, M_3, M_4), (e_1, e_2, e_3, e_4). *Si un point* (e_4) *est supposé à l'infini, les autres forment deux groupes de trois points harmoniques avec le point* M, *et la figure de l'hexaèdre complet, dont* e_1 $M_2 M_3 M_4$ *sont quatre sommets, se transforme en la figure d'un quadrilatère complet.*

Octaédroïde complet (*fig.* 4). — Nous appelons *octaédroïde* la figure à quatre dimensions qui est limitée par huit hexaèdres dont chaque fois quatre ont un sommet commun. Cette figure a seize sommets, trente-deux arêtes, vingt-quatre faces.

La projection d'un octaédroïde dans l'espace peut être effectuée de plusieurs manières. La plus commode est la suivante : on construit un hexaèdre au dedans d'un autre, de sorte que les faces de l'un soient situées vis-à-vis de celles de l'autre, et l'on joint par

Fig. 4.



des droites les sommets des deux corps deux à deux opposés.

Nous avons vu que les figures complètes du quadrilatère et de l'hexaèdre tirent leur origine du triangle et du tétraèdre. Ainsi de chacune des figures de la première série résulte une figure complète de la deuxième série, et nous allons voir que l'on passe du pentaédroïde à la figure de l'octaédroïde complet par des constructions tout à fait analogues aux précédentes.

Quoiqu'il soit impossible de se faire une idée de ces figures, on peut aisément effectuer ces constructions en opérant sur les projections des figures dans l'espace, ou même sur les projections sur le plan.

On remarque aussi que l'existence (idéale) des figures de la première série entraîne celle des figures de la deuxième série.

Pour construire l'octaédroïde complet, soit donné un point M dans un pentaédroïde $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$ par l'équation

$$M = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_5 e_5. \tag{1}$$

Alors les cinq points d'intersection des droites Me_1, Me_2, ..., Me_5 avec les tétraèdres limitants $e_2 e_3 e_4 e_5$, $e_1 e_3 e_4 e_5$, ..., $e_1 e_2 e_3 e_4$, qui sont situés vis-à-vis des points e_1, e_2, ..., e_5, sont

$$M_1 = M - \alpha_1 e_1 = \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5, \ \ldots . \tag{2}$$

Comme le point M_1 est situé dans le tétraèdre $e_2 e_3 e_4 e_5$, on peut construire les droites $M_1 e_2$, $M_1 e_3$, $M_1 e_4$, $M_1 e_5$, qui rencontrent les faces opposées aux quatre points

$$M_{345} = M_1 - \alpha_2 e_2 = M - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 = M_2 - \alpha_1 e_1, \ldots . \tag{3}$$

Comme dans les formules (3) on peut remplacer le point M_1 par M_2, ... M_5, le système (3) comprend vingt formules; mais les points représentés par ces formules coïncident deux à deux, de sorte qu'il n'y a que dix points M_{pqr}, ce qu'on voit aussi immédiatement, comme il n'y a que $5^{(3)} = 10$ combinaisons de cinq nombres trois à trois.

Enfin, on construit dans la face $e_3 e_4 e_5$ les droites $M_{345} e_3$, $M_{345} e_4$, $M_{345} e_5$, qui rencontrent les arêtes opposées aux trois points

$$\left\{ \begin{aligned} M_{45} &= M_{345} - \alpha_3 e_3 = M_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 = M - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 \\ &= \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 = M_{245} - \alpha_2 e_2 = M_{145} - \alpha_1 e_1, \ \ldots . \end{aligned} \right. \tag{4}$$

Comme dans les formules (4), on peut remplacer le point M_{345} par les neuf autres points M_{pqr}; le système (4) comprend trente formules, mais les points représentés coïncident trois à trois, de sorte qu'il n'y a que dix points M_{pq}.

Alors le pentaédroïde est décomposé en cinq octaédroïdes. Les constructions précédentes se simplifient, si l'on veut construire seulement un octaédroïde. Alors, par exemple, on omettra le point M_5 et les constructions faites sur le tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$ et ses faces; donc on n'a que les points

(2) $\quad M_1,\ M_2,\ M_3,\ M_4;$

(3) $\quad M_{125},\ M_{135},\ M_{235},\ M_{145},\ M_{245},\ M_{345};$

(4) $\quad M_{15},\ M_{25},\ M_{35},\ M_{45},$

qui font ensemble, avec les points M, e_5 les seize sommets de l'octaédroïde

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{llllllll} e_5 & M_{35} & M_{345} & M_{45} & M_{235} & M_{25} & M_{245} & M_1 \\ M & M_3 & M_{125} & M_4 & M_{145} & M_2 & M_{135} & M_{15}. \end{array}\right.$$

Si l'on construit la projection de l'octaédroïde de la manière susdite, la première ligne de (5) donne les sommets de l'hexaèdre extérieur; la seconde, les sommets de l'intérieur. Les points symétriques de la même ligne sont les sommets opposés de l'hexaèdre; les points symétriques de lignes différentes sont les sommets des hexaèdres qu'il faut joindre pour obtenir la figure de l'octaédroïde. Enfin deux points situés l'un sous l'autre sont des sommets opposés de l'octaédroïde.

D'après les équations (2), (3), (4), les quatre couples de droites

1.	2.	3.	4.
$M\ M_2,$	$M_{345}M_1,$	$M_{145}M_3,$	$M_{135}M_4,$
$M_{125}M_{15},$	$M_{245}M_{45},$	$M_{235}M_{35},$	$e_5\ M_{25}$

ou les six faisceaux de rayons 12, 13, 14, 23, 24, 34 passent par le point e_2. On peut aussi dire que le point e_2 est commun aux six corps (espaces) limitant l'octaédroïde, qui contiennent les six faisceaux susdits, ou que ces corps (espaces) limitants passent par le point e_2.

Cette relation est représentée par les équations

$$\begin{aligned} \alpha_2 e_2 &= M - M_2 = M_1 - M_{345} = M_3 - M_{145} = M_4 - M_{135} \\ &= M_{125} - M_{15} = M_{245} - M_{45} = M_{235} = M_{35} = M_{25} - \alpha_5 e_5. \end{aligned}$$

On a de même

$$\begin{aligned}
\alpha_3 e_3 &= M - M_3 = M_2 - M_{415} = M_4 - M_{215} = M_1 - M_{245} \\
&= M_{235} - M_{25} = M_{315} - M_{15} = M_{345} - M_{45} = M_{35} - \alpha_5 e_5, \\
\alpha_4 e_4 &= M - M_4 = M_3 - M_{125} = M_1 - M_{325} = M_2 - M_{315} \\
&= M_{345} - M_{35} = M_{425} - M_{25} = M_{415} - M_{15} = M_{45} - \alpha_5 e_5, \\
\alpha_5 e_5 &= M - M_5 = M_4 - M_{235} = M_2 - M_{435} = M_3 - M_{425} \\
&= M_{415} = M_{45} = M_{135} - M_{35} = M_{125} - M_{25} = M_{15} - \alpha_5 e_5.
\end{aligned}$$

Or le dernier groupe d'équations est une conséquence des précédents ; donc on a le théorème :

Soient aa', bb', cc', dd' huit espaces, formant un octaédroïde, deux à deux opposés. Si les six espaces aa', bb', cc' passent par le même point (e_3), les six espaces aa', bb', cc' par le même point (e_4) et les six espaces aa', cc', dd' par le même point (e_3), les espaces bb', cc', dd' passent aussi par le même point (e_5).

En d'autres termes : *Si les seize sommets d'un octaédroïde sont situés deux à deux sur trois faisceaux de huit rayons, il existe encore un quatrième faisceau qui a la même propriété.*

Ce théorème ne change pas, si l'on remplace l'octaédroïde par ses projections dans l'espace ou dans le plan. Alors on peut dire :

Si, dans l'espace ou dans le plan, trois faisceaux de huit rayons passent par les mêmes seize points, il existe encore un quatrième faisceau qui a la même propriété.

En outre, il suit des équations (1), (2), (3), (4), si nous posons

$$P_5 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + 2\alpha_5 e_5,$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} P_5 &= M + \alpha_5 e_5 = M_3 + M_{35} = M_{125} + M_{345} = M_4 + M_{45} \\ &= M_{235} + M_{145} = M_2 + M_{25} = M_{245} + M_{135} = M_1 + M_{15}, \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire que *les axes de cet octaédroïde passent par le même point (p_5).*

Si nous posons, en particulier,

$$(a) \qquad \alpha_5 = 1 \quad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0),$$

l'axe Me_5 est divisé en parties égales par le point e_5. De même l'axe $M_1 M_{15}$, si

$$(b) \qquad \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

De (a) et (b), il suit

$$(c) \qquad \alpha_1 = 0 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,$$

c'est-à-dire que le point e_1 est à l'infini. L'axe M_2M_{25} est divisé de même, si

$$(d) \qquad \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4.$$

De (c) et (d), il suit

$$(e) \qquad \alpha_2 = 0 = \alpha_3 + \alpha_4;$$

donc e_2 est à l'infini. Enfin l'axe M_3M_{35} est divisé en parties égales, si

$$(f) \qquad \alpha_3 = \alpha_4,$$

d'où il suit que

$$\alpha_3 = 0 = \alpha_4.$$

En ce cas, e_3 et e_4 sont à l'infini, et l'on a ce théorème :

Si les axes d'un octaédroïde passent par le même point et si quatre axes se divisent entre eux en parties égales, il en est de même des autres quatre axes.

Dans l'étendue à quatre dimensions, deux espaces ou « se coupent » suivant un plan, ou sont « parallèles », c'est-à-dire qu'ils n'ont pas de points communs. Donc on peut ajouter, au dernier théorème, que les espaces opposés de notre octaédroïde sont parallèles deux à deux.

Les huit axes de l'octaédroïde sont situés deux à deux dans un plan. Le nombre de ces plans (quadrilatères) est $8^{(2)} = 28$. De ces quadrilatères, *seize* sont formés par deux arêtes de l'octaédroïde et deux axes d'un hexaèdre limitant, *douze* par quatre diagonales des quadrilatères limitants. Nous appellerons les seize plans de la première espèce *plans diagonaux* de l'octaédroïde.

Ensuite les huit axes de l'octaédroïde sont situés trois à trois dans un espace. Le nombre de ces espaces (hexaèdres) est $8^{(3)} = 56$. De ces hexaèdres, *douze* sont formés par deux faces de l'octaédroïde et quatre plans diagonaux des hexaèdres limitants. Nous les appellerons *espaces* (corps) *diagonaux* de l'octaédroïde. Mais en chacun de ces douze hexaèdres coïncident quatre des cinquante-six corps susdits, puisque chaque fois quatre axes sont réunis dans le même espace. On a donc, outre les corps diagonaux, encore $56 - 4.12 = 8$ autres hexaèdres, qui coïncident en deux, formés par les douze plans susdits.

Chacun des huit corps limitant l'octaédroïde est un hexaèdre dont les axes passent par un point et qui devient complet par les constructions qui produisent les trois autres octaédroïdes. Deux hexaèdres opposés ont chaque fois les mêmes trois sommets secondaires, savoir

$$e_1 e_2 e_3, \quad e_2 e_3 e_4, \quad e_3 e_4 e_1, \quad e_4 e_1 e_2.$$

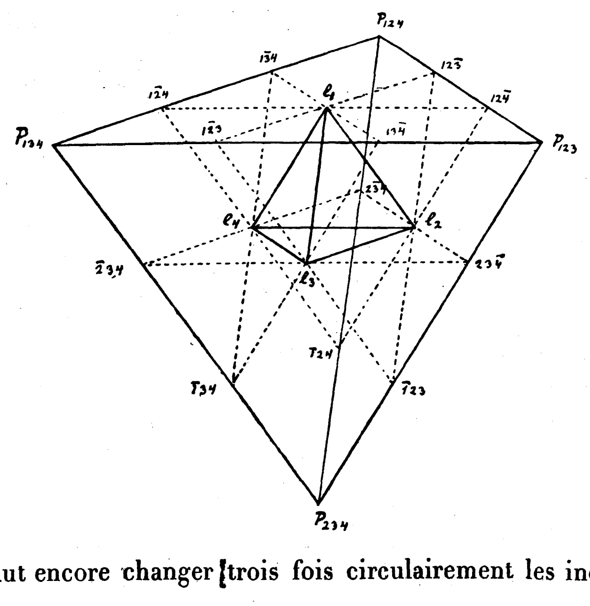
Donc les quatre plans déterminés par ces points sont les plans diagonaux secondaires des huit hexaèdres, et le tétraèdre $e_1\, e_2\, e_3\, e_4$ est le *corps diagonal secondaire* (13[e]) de l'octaédroïde.

Les axes des huit hexaèdres rencontrent les septièmes plans diagonaux dans les points (*fig.* 5)

$$\mathrm{M}_{341} = \mathrm{M} - \mathrm{M}_{25} = \mathrm{M}_2 - \alpha_5 e_5 = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1; \tag{7}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{M}_{\bar{3}41} &= \mathrm{M}_3 - \mathrm{M}_{235} = \mathrm{M}_{145} - \mathrm{M}_{35} = -\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1, \\ \mathrm{M}_{3\bar{4}1} &= \mathrm{M}_4 - \mathrm{M}_{245} = \mathrm{M}_{135} - \mathrm{M}_{45} = \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 + \alpha_1 e_1, \\ \mathrm{M}_{34\bar{1}} &= \mathrm{M}_1 - \mathrm{M}_{215} = \mathrm{M}_{345} - \mathrm{M}_{15} = \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 - \alpha_1 e_1, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Fig. 5.



où il faut encore changer trois fois circulairement les indices 1, 2, 3, 4.

De ces équations, on tire

$$M_{341} - M_{34\bar{1}} = M_{\bar{3}41} + M_{3\bar{4}1} = 2\alpha_1 e_1$$

et deux équations analogues. Donc les droites qui joignent les sommets du triangle $M_{\bar{3}41}\, M_{3\bar{4}1}\, M_{34\bar{1}}$ avec le point M_{341} rencontrent les arêtes opposées suivant les points e_1, e_3, e_4. Tous ces points donnent lieu à un quadrilatère trois fois complet.

Puis on a

$$M_{\bar{3}41} + M_{\bar{4}21} + M_{\bar{2}31} = 3\alpha_1 e_1,$$
$$M_{3\bar{4}1} + M_{4\bar{2}1} + M_{2\bar{3}1} = 3\alpha_1 e_1,$$

d'où il suit que ces sept points sont situés dans le même plan. Il y a, en tout, quatre plans de cette sorte, qui forment un tétraèdre circonscrit au tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$. Les deux tétraèdres donnent lieu à un hexaèdre quatre fois complet. Les quatre couples de faces correspondantes de ces tétraèdres déterminent quatre droites situées dans un plan et formant un quadrilatère correspondant au tétraèdre $e_1 e_2 e_3 e_4$.

Les points M_{123}, M_{124}, M_{234}, M_{341} forment un tétraèdre inscrit à $e_1 e_2 e_3 e_4$, et les quatre droites qui joignent deux sommets correspondants de ces tétraèdres passent par le point M_5.

Les sommets du tétraèdre circonscrit à $e_1 . e_2 e_3 e_4$ sont déterminés par l'équation

$$(9)\quad P_{124} = 2M_{1\bar{3}4} - M_{1\bar{2}4} = 2M_{12\bar{3}} - M_{12\bar{4}} = 2M_{\bar{3}24} - M_{\bar{1}24} = M_5 - 3\alpha_3 e_3$$

et trois autres qui en naissent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, 4.

Six faces de l'octaédroïde passent par le point e_5 ; donc l'axe passant par e_5 est situé dans six espaces diagonaux, c'est-à-dirc dans $M e_5 M_{5r} M_{5s}$, où rs est une des six combinaisons des nombres 1, 2, 3, 4. (Les six autres corps diagonaux sont

$$M_{15} M_1 M_{1r5} M_{1s5},$$
$$M_{r5} M_r M_{rs5} M_{rt5},$$

où $r, s, t = 2, 3, 4$.)

Si l'on multiplie les espaces $(M e_5 M_{53} M_{54})$ et $(e_1 e_2 e_3 e_4)$, en posant

$$(e_1 e_2 e_3 e_4 e_5) = 1,$$

on obtient

$$\alpha_3 \alpha_4 (e_3 e_4 M_{12}).$$

Donc *les six espaces diagonaux passant par* e_5 *rencontrent le treizième espace diagonal suivant les six plans* $(e_r e_s \mathrm{M}_{tu})$, *où* $r, s, t, u = 1, 2, 3, 4$. Ces plans coïncident avec les plans $(\mathrm{M}_{rs}\mathrm{M}_{rst}\mathrm{M}_{rsu})$, ce qui se voit, si l'on remplace M_{rs}, M_{rst}, M_{rsu} par leurs valeurs et que l'on effectue la multiplication. En outre, ces plans passent par le point M_5.

Si l'on multiplie, d'autre part, $(\mathrm{M}_{15}\mathrm{M}_1\mathrm{M}_{135}\mathrm{M}_{145})$ et $(e_1 e_2 e_3 e_4)$, on obtient

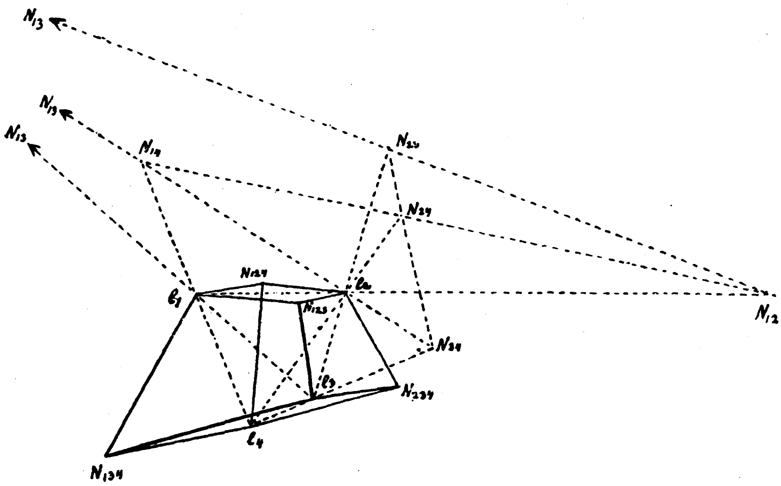
$$\alpha_3\alpha_4(\alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2)\,e_3 e_4.$$

Donc, en posant

$$\text{(10)} \qquad \mathrm{N}_{rs} = \alpha_r e_r - \alpha_s e_s \text{ [1]},$$

les six autres espaces diagonaux rencontrent le treizième espace diagonal suivant les six plans $(\mathrm{N}_{rs} e_t e_u)$, *où* $r, s, t, u = 1, 2, 3, 4$.

Fig. 6.



Ces plans, passant comme les précédents par les arêtes du tétraèdre 1234, forment un hexaèdre circonscrit à $e_1 e_2 e_3 e_4$ (*fig.* 6).

---

[1] On a

$$\mathrm{N}_{rs} + \mathrm{N}_{st} + \mathrm{N}_{tr} = 0,$$
$$\mathrm{N}_{rs} + \mathrm{N}_{st} + \mathrm{N}_{tu} + \mathrm{N}_{ur} = 0;$$

donc chaque fois trois points sont situés sur une droite et quatre dans un plan. Par conséquent les six points N_{rs} forment un quadrilatère complet.

Les quatre autres sommets de cet hexaèdre sont déterminés par l'équation

(11) $$N_{123} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4$$

et trois autres qui s'en déduisent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3, 4. Les axes de cet hexaèdre se rencontrent au point M_5.

On remarque que les points M_{rs} et N_{rs} sont harmoniques par rapport à $e_t e_u$, et que les droites $e_1 M_{23\bar{4}}$, $e_2 M_{13\bar{4}}$, $e_3 M_{12\bar{4}}$, $e_4 M_{123}$, $M_{12}N_{34}$, $M_{13}N_{24}$, $M_{23}N_{14}$ passent par le point N_{123}; car on peut, par exemple, écrire

$$N_{123} = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) + (\alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4) = M_{12} + N_{34}.$$

Enfin on peut démontrer, par des calculs analogues aux précédents, l'analogie qui existe entre l'octaédroïde et l'hexaèdre complet.

En permutant partout les indices 1, 2, 3, 4, 5, on obtient les quatre autres octaédroïdes qui se déduisent du pentaédroïde donné. Chaque octaédroïde a pour treizième corps diagonal un des tétraèdres limitant le pentaédroïde.

Les corps limitant les deux pentaédroïdes $e_1 \ldots e_5$, $M_1 \ldots M_5$ sont deux à deux opposés et se rencontrent en cinq plans, dont l'un est

$$(M_1 M_2 M_3 M_4)(e_1 e_2 e_3 e_4)$$

ou, les coefficients omis,

$$e_1 e_2 e_3 + e_2 e_3 e_4 + e_3 e_4 e_1 + e_4 e_1 e_2.$$

Ces cinq plans sont situés dans le même espace et forment un corps correspondant au pentaédroïde donné.

Figure à n dimensions. — Dans une figure à n dimensions se trouvent des sommets, arêtes, faces (quadrilatères), corps (hexaèdres), etc. Le nombre des figures limitantes à k dimensions est

$$2^{n-k} n^{(k)}.$$

Par conséquent, il y a

2^n sommets,
$2^{n-1} n$ arêtes,
$2^{n-2} n^{(2)}$ faces, etc. [1].

---

[1] Pour $k = n - 1$ on obtient $2n$ en accord avec Stringham (*loc. cit.*, p. 14).

Le nombre des figures diagonales à $(k+1)$ dimensions est

$$2^{n-k-1}\,n^{(k)}.$$

La figure complète se réalise par des constructions tout à fait analogues aux précédentes. Nous ajoutons encore ce théorème :

Si les 2^n *sommets d'une figure à* n *dimensions (deuxième série) sont situés deux à deux sur* $(n-1)$ *faisceaux de* 2^{n-1} *rayons, il existe encore un* $n^{ième}$ *faisceau qui a la même propriété. Les axes de cette figure passent par le même point.*

Ce théorème subsiste encore si les 2^n points sont situés dans le même plan ou dans l'espace.

III. — Figures de la troisième série.

Les figures de cette série s'obtiennent par des constructions précisément réciproques à celles de la précédente [1] :

1° Dans le plan, le point est réciproque à la droite; donc la figure réciproque au quadrilatère est également un quadrilatère;

2° Dans l'espace, le point est réciproque au plan et la droite à elle-même; donc la figure réciproque à l'hexaèdre est l'octaèdre. De ce que le tétraèdre est réciproque à lui-même, on peut déduire l'octaèdre du tétraèdre par les constructions réciproques à celles qui s'employaient pour en déduire l'hexaèdre.

A cet effet, soient (*fig.* 7)

$$\varepsilon_1=(e_2e_3e_4),\quad \varepsilon_2=(e_3e_4e_1),$$
$$\varepsilon_3=(e_4e_1e_2),\quad \varepsilon_4=(e_1e_2e_3)$$

les quatre faces d'un tétraèdre et

$$\nu_1=(M_{12}M_{13}M_{14})$$

un plan qui rencontre les plans ε_2, ε_3, ε_4 suivant les droites $M_{13}M_{14}$, $M_{14}M_{12}$, $M_{12}M_{13}$ et le plan ε_1 suivant une quatrième

---

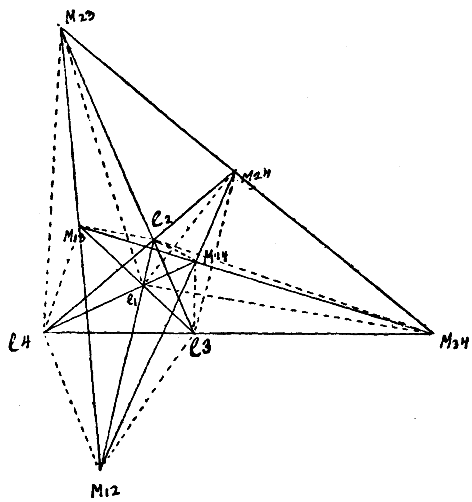
[1] On remarque que les figures réciproques à celles de la première série sont les mêmes figures, et que le nombre des sommets $(n+1)$ est égal à celui des figures limitantes à $(n-1)$ dimensions.

droite m, et construisons les plans

$$\mu_2 = M_{13} M_{14} e_2, \qquad \mu_3 = M_{14} M_{12} e_3, \qquad \mu_4 = M_{12} M_{13} e_4, \qquad \mu_1 = m e_1.$$

Le plan μ_r rencontre les trois faces du tétraèdre passant par e_r suivant trois droites ($e_r M_{1s}$, $e_r M_{1t}$ et une troisième). Chacune de ces trois droites détermine avec la ligne d'intersection des deux

Fig. 7.



autres faces ($e_r e_s$, $e_r e_t$ et une troisième) un plan (ε_{ut}, ε_{us} et un troisième). Alors ν_1 et ε_u sont deux faces opposées de quatre octaèdres, dont les sommets sont les points

$$e_2 e_3 e_4 M_{12} M_{13} M_{14},$$
$$e_3 e_4 e_1 M_{23} M_{24} M_{21},$$
$$e_4 e_1 e_2 M_{34} M_{31} M_{32},$$
$$e_1 e_2 e_3 M_{41} M_{42} M_{43}$$

(les six points M_{rs} forment un quadrilatère complet).

L'un de ces octaèdres a pour couples de faces opposées

$$\varepsilon_1 \nu_1, \quad \varepsilon_{12} \mu_2, \quad \varepsilon_{13} \mu_3, \quad \varepsilon_{14} \mu_4$$

ou

$$(e_2 e_3 e_4)(M_{12} M_{13} M_{14}), \quad (M_{12} e_3 e_4)(e_2 M_3\ M_{14}),$$
$$(M_{13} e_2 e_4)(e_3 M_{12} M_{14}), \quad (M_{14} e_2 e_3)(e_4 M_{12} M_{13}).$$

Cet octaèdre a, comme les autres, la propriété que les quatre droites d'intersection des faces opposées sont situées dans le même plan.

En outre, comme les trois axes passent évidemment par le même point e_1, on conclura réciproquement :

Si les quatre axes d'un hexaèdre passent par le même point, les trois droites d'intersection des faces opposées sont situées dans le même plan.

Pour le parallélépipède, ce plan est le plan infiniment éloigné de l'espace.

Puis on peut établir le théorème :

Soient AA′, BB′, CC′ *les sommets d'un octaèdre, deux à deux opposés. Si les quatre points* BB′, CC′ *sont situés dans le même plan* (ε_2) *et les points* AA′, CC′ *dans le même plan* (ε_3), *les points* AA′, BB′ *sont aussi situés dans le même plan* (ε_4).

En d'autres termes :

Si les huit faces d'un octaèdre passent deux à deux par les arêtes de deux plans quadrilatères, il existe encore un troisième quadrilatère qui a la même propriété.

Le corps réciproque du parallélépipède est un octaèdre dont les axes se divisent entre eux en parties égales.

On établira, par des considérations réciproques aux précédentes, les notions des « plans harmoniques » et de l' « octaèdre complet ».

3° Dans l'étendue à quatre dimensions, la figure réciproque à l'octaédroïde est l'hexadécaédroïde, limité par seize tétraèdres, dont chaque fois huit ont un sommet commun. Cette figure a huit sommets, vingt-quatre arêtes, trente-deux faces. La projection d'un hexadécaédroïde dans l'espace peut être construite de la manière suivante : On construit un tétraèdre à l'intérieur d'un autre, de façon que les sommets de l'un soient situés vis-à-vis des faces de l'autre, et l'on joint, par droites, chaque sommet de l'extérieur avec les trois sommets de la face opposée de l'intérieur.

En considérant que, dans l'étendue à quatre dimensions, point et espace, droite et plan sont réciproques entre eux, on peut aisément établir les théorèmes concernant l'hexadécaédroïde.

4° Quant à la figure à n dimensions, il suffit de considérer que le nombre des figures limitantes à k dimensions est égal au nombre des figures limitantes à $n - k - 1$ dimensions de la figure réciproque. Donc, si l'on remplace k par $n - k - 1$ dans l'expression $2^{n-k} n^{(k)}$, on trouve que le nombre des figures limitantes à k dimensions pour une figure de la troisième série est

$$2^{k+1} n^{(n-k-1)} \quad \text{ou} \quad 2^{k+1} n^{(k+1)};$$

Par conséquent, il y a

$2n$ sommets,
$4n^{(2)}$ arêtes,
$8n^{(3)}$ faces, etc. (1).

D'après les recherches précédentes, il est possible d'étendre les théorèmes concernant le triangle, quadrilatère, tétraèdre, hexaèdre, octaèdre, à l'étendue à n dimensions. Mais il n'en est pas de même des autres polygones, ni du dodécaèdre et icosaèdre, dont les figures analogues n'existent pas dans les étendues à plus de trois dimensions, excepté la quatrième dimension où il y a encore trois figures, limitées par vingt-quatre octaèdres, cent vingt dodécaèdres, six cents tétraèdres, dont on ne connaît pas encore les relations avec les figures à deux et trois dimensions.

---

(1) Pour $k = n - 1$ on obtient 2^n, en accord avec Stringham (*loc. cit.*, p. 14.)

(2) En publiant l'étude de M. Gascheau, la Rédaction déclare qu'elle laisse à l'auteur toute la responsabilité de l'opinion qui y est soutenue, et elle ne ga-