

# BULLETIN DE LA S. M. F.

WEILL

## **Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 10 (1882), p. 137-139

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1882\\_\\_10\\_\\_137\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__137_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1882, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur le centre des moyennes distances des points d'une courbe unicursale; par M. WEILL.*

(Séance du 5 mai 1882.)

Considérons une courbe unicursale d'ordre  $\rho$  définie par les équations

$$x = \frac{f(t)}{(t-\alpha)(t-\beta)\dots(t-\zeta)}, \quad y = \frac{f_1(t)}{(t-\alpha)(t-\beta)\dots}$$

Soit un système de courbes de degré  $m$  dont l'équation contient un paramètre variable  $\lambda$  au degré  $k$ . Nous nous proposons de trouver le lieu du centre des moyennes distances des sommets du polygone formé par les points communs à la courbe variable et à la courbe fixe.

L'équation de la courbe variable étant

$$(1) \quad \lambda^k S_m + \lambda^{k-1} S_{1m} + \dots + S_m = 0,$$

les valeurs du paramètre  $t$  correspondant aux points considérés satisferont à l'équation obtenue en remplaçant dans l'équation (1),  $x$  et  $y$  par leurs valeurs en fonction de  $t$ , équation qui sera de la forme

$$(2) \quad \lambda^k \Phi_{m\rho}(t) + \dots = 0.$$

Les abscisses des points communs seront données par les relations

$$\begin{aligned} x_1 &= A + \frac{B}{t_1 - \alpha} + \frac{C}{t_1 - \beta} + \dots + \frac{L}{t_1 - \gamma_2}, \\ x_2 &= A + \frac{B}{t_2 - \alpha} + \dots, \\ &\dots\dots\dots, \\ x_{m_\rho} &= A + \frac{B}{t_{m_\rho} - \alpha} + \dots \end{aligned}$$

Si donc on désigne par X l'abscisse du centre des moyennes distances, on aura

$$m_\rho X = m_\rho A + B \sum_1^{m_\rho} \frac{1}{t - \alpha} + C \sum_1^{m_\rho} \frac{1}{t - \beta} + \dots,$$

ou bien

$$m_\rho X = A + B \frac{\lambda^k \varphi'_{m_\rho}(\alpha) + \dots}{\lambda^k \varphi_{m_\rho}(\alpha) + \dots} + C \frac{\lambda^k \varphi'_{m_\rho}(\beta) + \dots}{\lambda^k \varphi_{m_\rho}(\beta) + \dots} + \dots$$

On trouve pour Y une expression analogue, et l'on conclut de là que le centre des moyennes distances décrit une courbe unicursale de degré  $\rho k$ ; soit  $\lambda_1$  une racine de l'équation

$$\lambda^k \varphi_{m_\rho}(\alpha) + \dots = 0.$$

Pour  $\lambda = \lambda_1$ , X et Y deviennent infinis, et le rapport  $\frac{Y}{X}$  est égal à  $\frac{B_1}{B}$ : donc les asymptotes de la courbe sont parallèles à celles de la courbe unicursale donnée, et chaque direction asymptotique de la courbe unicursale est une direction asymptotique multiple d'ordre  $k$  du lieu cherché.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME:** — *Le lieu du centre des moyennes distances des points communs à une courbe unicursale fixe d'ordre  $\rho$  et à un système de courbes d'ordre  $m$ , dont l'équation contient un paramètre variable au degré  $k$ , est une courbe unicursale d'ordre  $\rho k$ , ayant pour directions asymptotiques multiples d'ordre  $k$  les directions asymptotiques de la courbe unicursale.*

Il faut remarquer que le degré du lieu ne dépend pas de  $m$ . Le théorème précédent donne lieu à un grand nombre de résultats par-

ticuliers ; l'un des plus intéressants est celui où l'on a  $k = 1$  : alors le système des courbes variables forme un faisceau, et le lieu  $\lambda$  est une courbe d'ordre  $\rho$ , ayant mêmes directions asymptotiques que la courbe unicursale.

En particulier, considérons une conique fixe et un polygone variable inscrit dans cette conique et circonscrit à une autre conique fixe. Si l'on appelle  $t$  le paramètre définissant un sommet du polygone, nous avons établi que les  $m$  valeurs de  $t$  correspondant à l'un des polygones satisfaisaient à une équation de degré  $m$  dont les coefficients sont des fonctions linéaires d'un paramètre  $\lambda$ , la variation de ce paramètre correspondant au déplacement continu de ce polygone ; dès lors les calculs et les résultats sont applicables, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Le lieu des centres des moyennes distances des sommets d'un polygone inscrit et circonscrit à deux coniques fixe est une conique homothétique à celle dans laquelle le polygone est inscrit.*

On en conclut, en particulier, que si un polygone se déplace en restant inscrit à un cercle et circonscrit à une conique, le centre des moyennes distances des sommets décrit un cercle ; ce cercle se réduit à un point lorsque la conique à laquelle le polygone est circonscrit a l'un de ses foyers au centre du cercle dans lequel le polygone est inscrit.

---