BULLETIN DE LA S. M. F.

WOLFGANG BERTRAM

Un théorème de Liouville pour les algèbres de Jordan

Bulletin de la S. M. F., tome 124, n^{o} 2 (1996), p. 299-327

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_2_299_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 299–327.

UN THÉORÈME DE LIOUVILLE POUR LES ALGÈBRES DE JORDAN

PAR

WOLFGANG BERTRAM (*)

RÉSUMÉ. — Un théorème classique de Liouville décrit les transformations conformes d'un espace vectoriel euclidien. Nous généralisons ce théorème aux algèbres de Jordan simples (et non isomorphes à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). La première partie de la preuve est purement algébrique. Nous y montrons que l'algèbre de Lie du groupe de structure d'une algèbre de Jordan simple est de type fini et d'ordre 2. Dans la deuxième partie de la preuve nous en déduisons la description des transformations d'une algèbre de Jordan simple qui sont conformes par rapport au groupe de structure de l'algèbre de Jordan. Elles forment une groupe de Lie de transformations birationnelles qui est connu comme *groupe de Kantor-Koecher-Tits*, et nous pouvons caractériser ce groupe comme le groupe des transformations conformes de la complétion conforme de l'algèbre de Jordan.

ABSTRACT. — We give a generalization for Jordan algebras of the classical Liouville theorem describing the conformal transformations of a euclidean vector space. In a first step we establish an infinitesimal version which is purely algebraic; namely, we show that the structure Lie algebra of a simple Jordan algebra (not isomorphic to $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$) is of finite order 2. In a second step, using only elementary calculus and Lie theory, we deduce the global version describing the transformations of a simple Jordan algebra which are conformal with respect to the structure group of the Jordan algebra. It turns out that these transformations form a Lie group of birational transformations, also known as the *Kantor-Koecher-Tits group*, and we can caracterize this group as the group of conformal transformations of the conformal closure of the Jordan algebra.

0. Introduction

0.1. Le théorème classique de Liouville.

Une *transformation conforme* de l'espace euclidien $V = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire standard est un difféomorphisme $\phi : V_1 \to V_2$ d'un

(*) Texte recu le 31 janvier 1995, révisé le 27 septembre 1995, accepté le 26 novembre 1995.
W. BERTRAM, Institut de Mathématiques, UMR 9994 du CNRS, Université Paris VI, 4, place Jussieu, 75252 Paris CEDEX 05 (France).
Classification AMS : 17B70, 17C30, 34A26, 53A30, 53C10.

domaine V_1 de V sur un autre V_2 tel que pour tout $x \in V_1$, la différentielle $D\phi(x)$ de ϕ au point x soit un multiple d'une transformation orthogonale :

$$\forall x \in V_1,\ \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : \quad D\phi(x) \circ {}^t D\phi(x) = \lambda \, \mathrm{id}_V \, .$$

En d'autres termes, pour tout $x \in V_1$, $D\phi(x)$ appartient au sous-groupe G de $\mathrm{Gl}(V)$ engendré par $\mathrm{O}(3)$ et les multiples non-nuls de l'identité. Il est évident que les translations par les vecteurs de V et les éléments de G sont des transformations conformes. Un calcul élémentaire montre que la transformation

$$j : V_1 = V - \{0\} \longrightarrow V_1, \quad x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2},$$

est conforme. Un théorème de Liouville [L1850] affirme que toute transformation conforme de classe $\mathcal{C}^4$ est une composée des précédentes. Ce théorème a été généralisé par S. Lie aux espaces vectoriels $V = \mathbb{R}^n$ pour $n > 2$, munis d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée, voir [DNF79, p. 140]. De plus, les transformations conformes forment un groupe de Lie d'applications birationnelles de V. Dans le cas classique, ce groupe est isomorphe à $\mathrm{O}(4,1)$, voir [DNF79]. Remarquons le caractère exceptionel des cas où la dimension de V est égale à 1 ou 2 : dans ces cas, tout difféomorphisme (resp., toute application biholomorphe) est conforme, et les transformations conformes ne constituent pas un groupe de Lie de dimension finie. Nous allons généraliser ces résultats dans un cadre naturel qui est celui des *algèbres de Jordan simples*, et qui est en correspondance biunivoque avec celui des *espaces préhomogènes symétriques irréductibles.*

0.2. Transformations conformes généralisées et espaces préhomogènes symétriques.

Soient V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et G un sous-groupe fermé de $\mathrm{Gl}_{\mathbb{K}}(V)$. Appelons *transformation G-conforme* un difféomorphisme $\varphi : V_1 \to V_2$ d'un ouvert connexe V_1 de V sur un autre V_2, tel que pour tout $x \in V_1$, la différentielle $D\varphi(x)$ appartienne au groupe G. Par exemple, le sous-groupe P du groupe affine engendré par G et les translations par les éléments de V est un groupe de transformations G-conformes. La composée de deux transformations G-conformes, restreinte à un domaine où elle est définie, est encore une transformation G-conforme. L'ensemble $\mathrm{Co}(G)$ des transformations G-conformes n'est en général pas un groupe, mais un *pseudogroupe de difféomorphismes* (voir la définition p. 34 dans [Ko72] ; nous n'utiliserons pas ce concept dans ce travail).

Pour définir la généralisation de l'inversion j considérée ci-dessus, nous introduisons le concept d'*espace préhomogène symétrique* :

DÉFINITION 0.2.1. — Un *espace préhomogène symétrique* (G, σ, V, e) est la donnée d'un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d'un sous-groupe fermé G de $\mathrm{Gl}(V)$, d'un point $e \in V$ tel que l'orbite $\Omega := G \cdot e$ soit ouverte dans V (*i.e.*, (G, V) est un espace préhomogène) et tel que $\Omega \cong G/H$ soit un espace symétrique; c'est-à-dire, que le stabilisateur H de e dans G est compris entre le groupe G^σ des points fixes d'une involution non-triviale $\sigma : G \to G$ et sa composante neutre G^σ_0. Nous dirons que cet espace est *irréductible* (resp. *complètement réductible*) si V est un G-module irréductible (resp. complètement réductible).

Les exemples mentionnés dans la section précédente sont de tels espaces : si V est muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée B, nous choisissons $e \in V$ tel que $B(e, e) = 1$. Définissons un automorphisme J de V par $J(e) = e$ et $J_{|e^\perp} = -\mathrm{id}_{e^\perp}$ et une involution σ du groupe $G = \mathrm{SO}(B) \times \mathbb{K}^* \mathrm{id}_V$ par

$$\sigma(g, \lambda \,\mathrm{id}_V) := (JgJ, \lambda^{-1} \mathrm{id}_V).$$

Il est un fait élémentaire que l'orbite $\Omega = G \cdot e$ est ouverte dans V, et (G, σ, V, e) est alors un espace préhomogène symétrique irréductible. Pour tout espace préhomogène symétrique (G, σ, V, e) notons

$$\sigma_e : \Omega \longrightarrow \Omega, \quad ge \longmapsto \sigma(g)e,$$

la symétrie de l'orbite ouverte $\Omega \cong G/H$ par rapport au point de base e. Alors $-\sigma_e$ est une transformation G-conforme. En effet, soit $x = ge \in \Omega$. Nous avons

$$\begin{aligned}\big(D(-\sigma_e)\big)(x) = -(D\sigma_e)(ge) &= -D(\sigma_e \circ g)(e) \circ g^{-1} \\ &= -D\big(\sigma(g) \circ \sigma_e\big)(e) \circ g^{-1} \\ &= -\sigma(g) \circ (D\sigma_e)(e) \circ g^{-1} \\ &= \sigma(g) g^{-1},\end{aligned}$$

ce qui appartient bien à G. Remarquons que σ_e n'a que des points fixes isolés dans Ω, contrairement à l'involution j de l'exemple précédent. En effet, celle-ci est la composée de σ_e et de la réflexion J.

0.3. Le théorème généralisé et les algèbres de Jordan.

Le théorème suivant (th. 2.3.1) généralise le théorème de Liouville :

THÉORÈME. — *Soit (G, σ, V, e) un espace préhomogène symétrique irréductible qui n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors toute transformation*

G-conforme de classe C^4 est une composée de translations par des éléments de V, d'éléments de G et de $-\sigma_e$, où σ_e est la symétrie de l'orbite ouverte symétrique Ω.

La démonstration de ce théorème se divise nettement en deux parties indépendantes : dans la première partie, qui est purement algébrique, nous montrons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ du groupe G est *de type fini*; *i.e.* l'espace $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ des *champs de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes sur V* (ce sont les champs de vecteurs ξ vérifiant $D\xi(x) \in \mathfrak{g}$ pour x appartenant à un ouvert de V) est de dimension finie (voir définition dans la section 1.1).

Plus précisément, nous montrons que $\mathfrak{g}$ est d'ordre 2 (on dit que $\mathfrak{g}$ est *de type fini d'ordre k* si $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de champs de vecteurs polynomiaux de degré au plus k ; voir lemme 1.1.2). Ceci peut être regardé comme une version infinitésimale du théorème envisagé (th. 1.3.2). Dans la deuxième partie, nous en déduisons la version globale (th. 2.3.1). En fait, nous établissons un résultat plus général (th. 2.1.4 et 2.2.1) :

THÉORÈME. — *Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ une algèbre de Lie de type fini qui est égale à son normalisateur dans $\mathfrak{gl}(V)$ et telle que* $\mathrm{id}_V \in \mathfrak{g}$, *et soit G le normalisateur de $\mathfrak{g}$ dans* $\mathrm{Gl}(V)$. *Alors toute transformation G-conforme est birationelle, et ces applications birationelles de V forment un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes.*

Ce résultat peut être considéré comme un raffinement pour certains cas d'un théorème dû à Sternberg [St64, p. 348] affirmant que *le groupe des automorphismes d'une G-structure de type fini est un groupe de Lie.* Cependant, notre démonstration est tout à fait élémentaire et n'utilise pas la théorie des *G-structures.* En fait, il s'agit ici d'une G-structure plate sur un espace vectoriel, et dans ce cas, quelques lemmes de calcul différentiel (annexe (A1)–(A4)) peuvent servir à remplacer la théorie des G-structures.

Plus précisément, si $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est de type fini k, nous montrons que toute transformation G-conforme induit un automorphisme ϕ_* de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes; nous en déduisons que ϕ est rationelle et déterminée par son k-jet en un point p de son domaine de définition. Nous décrivons ces k-jets et ainsi l'ensemble $\mathrm{Co}(G)$ des transformations G-conformes (th. 2.1.4). Cet ensemble n'est pas toujours un groupe car le prolongement rationel d'une transformation G-conforme ne doit pas être G-conforme. Cependant, cette propriété est vérifiée sous l'hypothèse d'auto-normalisation de G exprimée ci-dessus.

La division en deux parties du raisonnement met en évidence que la partie, où la géométrie des espaces préhomogènes symétriques entre de manière essentielle, est la partie algébrique. C'est ici qu'intervient la relation entre espaces préhomogènes symétriques et algèbres de Jordan.

Plus précisément, on peut associer de manière fonctorielle à tout espace préhomogène symétrique (G, σ, V, e) une structure d'algèbre

$$A_e : V \otimes V \longrightarrow V$$

avec élément neutre e qui n'est en général pas de Jordan [Be94]. Elle est de Jordan si et seulement si nous avons le phénomène de *mutation* qui est bien connu dans la théorie des algèbres de Jordan : la structure d'algèbre A_e engendre un G-module W dans $\mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$ qui est isomorphe à V comme espace vectoriel, muni de l'action de G par $g \cdot v := \sigma(g)(v)$ [Be94, th. 4.4.4]. Si (G, σ, V, e) est complètement réductible, alors A_e est de Jordan (et toute algèbre de Jordan semi-simple s'obtient de cette manière ; voir [Shi75]), et nous montrons que le sous-espace $W \subset \mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$ est égal au *premier prolongement de* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ (prop. 1.2.1). Ensuite nous montrons que les prolongements d'ordre supérieur à un sont reduits à zéro si l'algèbre de Jordan V est simple et non isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (prop 1.3.2).

Cette restriction correspond au caractère exceptionnel des cas $n = 1$ et $n = 2$ mentionnés ci-dessus, et elle est une conséquence du fait très simple qu'un opérateur de rang inférieur ou égal à un qui est un même temps un multiple de l'identité, doit être égal à zéro — sauf dans le cas de la dimension 1. Le cas de la dimension 2 sur $\mathbb{R}$ se réduit au cas de la dimension 1 sur $\mathbb{C}$. C'est seulement ici où intervient la structure particulière du corps de base ; dans toute la théorie générale que nous développons, nous pouvons traiter les cas des corps des nombres réels et complexes de manière unifiée, et les méthodes peuvent être adaptées au cas d'autres corps complets.

0.4. La complétion conforme.

Pour définir la complétion conforme, nous devons généraliser la notion de G-conformité introduite ci-dessus. Soit M une variété différentiable munie d'un *champ de groupes* $(G_p)_{p \in M}$; c'est la donnée, pour tout $p \in M$, d'un sous-groupe fermé $G_p \subset \mathrm{Gl}(T_pM)$, dépendant de façon différentiable de p. Nous dirons qu'un difféomorphisme $\phi : M \to M'$ de variétés munies de champs de groupes (G_p) et (G'_p) est *conforme* si pour tout $p \in M$,

$$(T_p\phi)_* G_p \subset G'_{\phi(p)}.$$

Ici, $(T_p\phi)_*$ est l'isomophisme entre $\mathrm{End}(T_pM)$ et $\mathrm{End}(T_{\phi(p)}M')$ induit par l'application tangente $T_p\phi$. Par exemple, tout espace homogène sous l'action d'un groupe de Lie L est muni d'un champ de groupes, donné par

$G_p = \{T_p h \mid h \in L_p\}$, la représentation linéaire du stabilisateur L_p de p, tel que L soit un groupe de transformations conformes. (Remarquons que la notion de *champ de groupes* est plus générale que celle de *G-structure*; par exemple, une structure riemannienne équivaut à la donnée d'une $\mathrm{O}(n)$-structure, mais elle n'est pas complètement déterminée par le champ de groupes orthogonaux associé.)

Nous montrons que, sous les hypothèses du théorème 2.2.1 ci-dessus, l'espace vectoriel V peut être conformément plongé comme ouvert dense dans un espace homogène $M = \mathrm{Co}_*(G)/P$ qui est *conformément complet* dans le sens que toute transformation conforme de M est un élément de $\mathrm{Co}_*(G)$ (th. 2.4.1). Dans le cadre du théorème de Liouville généralisé (th. 2.3.1), c'est-à-dire, dans le cas d'une algèbre de Jordan, il est connu que l'espace M est compact, et on peut l'appeler la *compactification conforme de* V (voir [KS93] où l'on trouve une classification en annexe A.2). Nous ne savons pas si M est compact dans le cadre plus général du théorème 2.2.1. A présent, nous ne connaissons pas d'exemple qui ne rentre pas dans le cadre des algèbres de Jordan; en d'autres termes, nous ne connaissons pas d'exemple d'une algèbre de Lie linéaire qui soit de type fini d'un ordre $k > 2$. Nous nous demandons si les *espaces préhomogènes de type parabolique* introduits par H. Rubenthaler (voir [Ru92]) sont liés à de telles algèbres. Dans ce cas, on aurait un théorème de Liouville pour une classe d'espaces beaucoup plus grande que celle des algèbres de Jordan simples.

Je tiens à remercier Jacques Faraut qui m'a suggéré le sujet de ce travail et dont l'interêt constant et critique me fut indispensable pour le mener à terme.

1. Partie algébrique

1.1. Champs de vecteurs conformes.

Soit G un sous-groupe fermé du groupe linéaire $\mathrm{Gl}(V)$ d'un espace vectoriel V de dimension finie sur le corps $\mathbb{K} = R$ ou $\mathbb{C}$. Considérons un groupe local à un paramètre ϕ_t, $(t \in I \subset \mathbb{R})$ de transformations G-conformes. Il définit un champ de vecteurs

$$\xi(x) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} \phi_t(x).$$

(Nous considérons un champ de vecteurs ξ sur V_1 comme application différentiable $\xi : V_1 \to V$.) Comme

$$\alpha : I \longrightarrow G, \quad t \longmapsto (D\phi_t)(x)$$

est une courbe différentiable définie dans un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$, telle que $\alpha(0) = \mathrm{id}_V$, la différentielle $\dot{\alpha}(0)$ appartient à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G qui s'identifie à l'espace tangent $T_{\mathrm{id}}G$. Par conséquent, ξ définit *un champ de vecteurs* $\mathfrak{g}$*-conforme* sur V_1, c'est-à-dire un champ de vecteurs tel que, pour tout $x \in V_1$, la différentielle $(D\xi)(x)$ appartienne à $\mathfrak{g}$. Ainsi $D\xi$ est une application différentiable

$$D\xi : V_1 \longrightarrow \mathfrak{g} \subset \mathrm{Hom}(V, V),$$

et la différentielle de cette application prend ses valeurs dans

$$\mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g}) \subset \mathrm{Hom}\big(V, \mathrm{Hom}(V, V)\big) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes V, V).$$

Puisque la différentielle deuxième $(D^2\xi)(u, v) = \partial_u \partial_v \xi$ est symétrique en u et v, elle peut être considérée comme application

$$D^2\xi = D(D\xi) : V_1 \longrightarrow \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g}) \cap \mathrm{Hom}(S^2V, V),$$

où $S^2V \subset V \otimes V$ est l'espace des tenseurs symétriques. De la même manière, nous constatons que la différentielle $D^{k+1}\xi$ d'ordre $k+1$ de ξ prend ses valeurs dans

$$\mathrm{Hom}_s(S^kV, \mathfrak{g}) := \mathrm{Hom}(S^{k+1}V, V) \cap \mathrm{Hom}(S^kV, \mathfrak{g}).$$

Cet espace est appellé le *k-ième prolongement* de la sous-algèbre $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{gl}(V)$; il est souvent noté $\mathfrak{g}^{(k)}$ (voir par exemple [St64]). Le *prolongement d'ordre zéro* de $\mathfrak{g}$ est par définition $\mathfrak{g}$ elle-même.

L'ensemble $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ des champs de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes n'est en général pas une algèbre de Lie, car les champs $\mathfrak{g}$-conformes ne sont pas toujours globalement définis. Mais $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie localement définie dans le sens suivant :

LEMME 1.1.1. — *L'ensemble $\mathfrak{co}(\mathfrak{g}; U)$ des champs de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes définis sur un ouvert U de V est une algèbre de Lie.*

Démonstration. — Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs ξ et η, considérés comme applications différentiables $U \to V$, est donné par

$$[\xi, \eta](x) = D\eta(x) \cdot \xi(x) - D\xi(x) \cdot \eta(x).$$

Par conséquent, si ξ et η sont $\mathfrak{g}$-conformes,

$$\begin{aligned}\big(D[\xi,\eta]\big)(x) &= \big(D(D\eta \cdot \xi - D\xi \cdot \eta)\big)(x)\\ &= \big(D^2\eta \cdot \xi + D\eta \circ D\xi - D\xi \circ D\eta - D^2\xi \cdot \eta\big)(x)\\ &= (D^2\eta \cdot \xi - D^2\xi \cdot \eta)(x) + \big[D\eta(x), D\xi(x)\big]\end{aligned}$$

appartient bien à $\mathfrak{g}$ d'après les remarques précédentes sur la différentielle deuxième. $\square$

Nous dirons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ est *de type fini* s'il existe un nombre fini k tel que le k-ième prolongement $\mathrm{Hom}_s(S^k V, \mathfrak{g})$ soit réduit à zéro. Alors tout les prolongements d'ordre supérieur à k sont également réduits à zéro. Le plus petit entier k qui possède cette propriété est appelé l'*ordre de* $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$.

LEMME 1.1.2.

(i) *L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est de type fini k si et seulement si l'ensemble $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ des champs de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes (de classe $\mathcal{C}^{k+1}$) est une algèbre de Lie de dimension finie, donnée par des champs de vecteurs polynomiaux ξ de degré au plus k*

$$\xi(x) = \xi(0) + D\xi(0)x + \frac{1}{2}D^2\xi(0)(x \otimes x) + \cdots + \frac{1}{k!}D^k\xi(0)(x \otimes \cdots \otimes x),$$

où $D^j\xi(0)$ parcourt $\mathrm{Hom}_s(S^{j-1}V, \mathfrak{g})$ *pour $j = 2, \ldots, k$ et $\xi(0)$ parcourt V.*

(ii) *Si $\mathfrak{g}$ est de type fini k, alors $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Lie graduée,*

$$\mathfrak{co}(\mathfrak{g}) = V \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{n},$$

où $\mathfrak{n} = \bigoplus_{j=2}^{k} \mathfrak{n}_j$ est une algèbre de Lie nilpotente avec $[\mathfrak{n}_j, \mathfrak{n}_i] \subset \mathfrak{n}_{j+i-1}$. Comme espace vectoriel, $\mathfrak{n}_j$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_s(S^{j-1}V, \mathfrak{g})$.

Démonstration.

(i) Si on se donne arbitrairement $D^j\xi(0)$ dans $\mathrm{Hom}_s(S^j V, \mathfrak{g})$, la formule ci-dessus définit un champ de vecteurs $\mathfrak{g}$-conforme car

$$D\xi(x) = D\xi(0) + D^2\xi(0)(x) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}D^k\xi(0)(x \otimes \cdots \otimes x)$$

appartient à $\mathfrak{g}$ par définition des prolongements. Par conséquent, $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ est de dimension infinie si $\mathfrak{g}$ n'est pas de type fini. Si $\mathfrak{g}$ est de type fini k, alors la différentielle $(k+1)$-ième $D^{k+1}\xi$ d'un champ de vecteurs $\mathfrak{g}$-conforme ξ (classe $\mathcal{C}^{k+1}$) est égale à zéro car $D^{k+1}\xi(p)$ appartient à $\mathrm{Hom}_s(S^k V, \mathfrak{g})$ pour tout $p \in V_1$. Ainsi $D^k\xi$ est une fonction constante sur V_1 que l'on prolongera en une fonction constante sur V à valeur $D^k\xi(0) \in \mathrm{Hom}_s(S^{k-1}V, \mathfrak{g})$. Le champ

$$\xi_1(x) := \xi(x) - \frac{1}{k!}D^k\xi(0)(x \otimes \cdots \otimes x)$$

est $\mathfrak{g}$-conforme sur V_1 et $D^k\xi_1 = 0$. Nous pouvons remplacer ξ par ξ_1, réduisant ainsi le degré de ξ d'une unité et, après avoir itéré k fois ce processus, nous obtenons la formule énoncée pour ξ. Ceci montre que ξ admet un prolongement polynomial sur V et que celui-ci définit un champ de vecteurs qui est $\mathfrak{g}$-conforme sur V entier.

(ii) La graduation de $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ est celle en polynômes homogènes et l'assertion est une conséquence immédiate du fait que le commutateur de deux champs homogènes de degré i (resp. j) est homogène de degré $(i+j-1)$. $\square$

LEMME 1.1.3. — *Si $\mathfrak{g}$ est de type fini k et si le champ de vecteurs $I(x) = x$ appartient à $\mathfrak{g}$, alors le centre de $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ est réduit à zéro.*

Démonstration. — Soit $\xi \in \mathfrak{z}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g}))$; c'est-à-dire que pour tout $\eta \in \mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ et $x \in V$,

$$0 = [\xi, \eta](x) = D\eta(x) \cdot \xi(x) - D\xi(x)\eta(x).$$

En choisissant pour η les champs constants $v \in V$, nous obtenons $D\xi = 0$. Nous obtenons ensuite $\xi = 0$ en choisissant $\eta = I$. $\square$

1.2. Détermination du premier prolongement.

Rappelons quelques propriétés fondamentales des algèbres de Jordan : une *structure d'algèbre* sur V est un élément A de $\mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$. L'algèbre (V, A) est *commutative* si pour tout $x, y \in V$, on a :

$$A(x \otimes y) = A(y \otimes x).$$

Alors A vaut zéro sur l'espace $\Lambda^2 V$ des tenseurs antisymétriques et peut être considérée comme un élément de $\mathrm{Hom}(S^2V, V)$. Nous dirons que A est une structure d'*algèbre de Jordan* si de plus $\ell^A(A(x \otimes x))$ et $\ell^A(x)$ commutent pour tout $x \in V$, où $\ell^A(x)$ est l'endomorphisme de V défini par

$$\ell^A(x)\, y = A(x \otimes y).$$

Nous supposons que (V, A) possède un élément neutre e, et nous notons

$$\mathfrak{q} := \ell^A(V) \quad \text{et} \quad \mathfrak{h} := [\mathfrak{q}, \mathfrak{q}].$$

Il est bien connu qu'alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ telle que $\mathfrak{h}e = 0$ et que $\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$ est une algèbre de Lie (dite *algèbre de structure de* (V, A)) qui est munie d'une involution σ dont $\mathfrak{h}$ est l'ensemble des points fixes; $\mathfrak{q}$ est le sous-espace propre pour la valeur propre -1. De plus, σ définit une involution (aussi notée σ) du sous-groupe analytique G de $\mathrm{Gl}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et (G, σ, V, e) est un espace préhomogène symétrique (déf. 0.1.1). Cet espace est complètement réductible si et seulement si l'algèbre de Jordan (V, A) est *semi-simple*, *i.e.* munie d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $(\cdot \mid \cdot)$ qui est *associative* dans le sens que les opérateurs $\ell^A(x)$ pour $x \in V$ sont symétriques par rapport à cette forme. Tout espace préhomogène symétrique complètement réductible s'obtient de cette façon (voir [Shi75], [Be94]).

Avec les notations précédentes relatives à une algèbre de Jordan (V, A), remarquons que A est un élément de $\mathrm{Hom}_s(V, \mathfrak{g})$. Cet espace est un G-sous-module de $\mathrm{Hom}(V \otimes V, V) \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(V, V))$, l'action de G étant donnée par

$$g \cdot A = g \circ A \circ (g^{-1} \otimes g^{-1}).$$

L'action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G dans cet espace est alors donnée par

$$X \cdot A = X \circ A - A \circ (X \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes X).$$

PROPOSITION 1.2.1. — *Soit (V, A) une algèbre de Jordan avec élément neutre e ; soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie et σ l'involution introduites ci-dessus ; notons $x\,y := A(x \otimes y)$.*

(i) *Si A est semi-simple, alors pour tout $T \in \mathrm{Hom}_s(V, \mathfrak{g})$, on a :*

$$T(e) \in \mathfrak{q}.$$

(ii) *Si $T(e)$ est dans $\mathfrak{q}$, pour tout $T \in \mathrm{Hom}_s(V, \mathfrak{g})$, alors l'application*

$$p : \mathrm{Hom}_s(V, \mathfrak{g}) \longrightarrow W, \quad T \longmapsto T(e)e$$

est $\mathfrak{g}$-équivariante. Ici, W est l'espace vectoriel V muni de l'action de $\mathfrak{g}$ par $X \cdot w = (\dot{\sigma}(X))(w)$.

(iii) *Si l'application $p : \mathrm{Hom}_s(V, \mathfrak{g}) \to W$, $T \mapsto T(e)e$ est $\mathfrak{g}$-équivariante, alors p est une bijection dont l'inverse est :*

$$s : W \longrightarrow \mathrm{Hom}_s(V, \mathfrak{g}), \quad a \longmapsto \big((x, y) \mapsto (xa)y + x(ay) - a(xy)\big).$$

Démonstration.

(i) Nous pouvons décomposer tout $T \in \mathrm{Hom}(V, \mathfrak{g})$ en une somme $T = T_1 + T_2$ telle que $T_1(v) \in \mathfrak{h}$ et $T_2(v) \in \mathfrak{q}$ pour tout $v \in V$. Alors l'opérateur $T_2(v)$ est par hypothèse auto-adjoint par rapport à la forme bilinéaire associative $(\cdot \mid \cdot)$ donnée et $T_1(v)$ est antisymétrique par rapport à cette forme. Nous avons, pour tout $T \in \mathrm{Hom}_s(V, \mathfrak{g})$ et $u, v, w \in V$,

$$\begin{aligned} \big(T(u)v \mid w\big) &= \big(T(v)u \mid w\big) \\ &= \big(u \mid (T_2 - T_1)(v)w\big) \\ &= \big(u \mid T(v)w\big) - 2\big(u \mid T_1(v)w\big). \end{aligned}$$

Donc, en utilisant le fait que la forme bilinéaire est symétrique,

$$\big(T(u)v \mid w\big) - \big(T(v)w \mid u\big) = 2\big(T_1(v)u \mid w\big).$$

En faisant la somme des trois équations obtenues en permutant u, v, w de façon cyclique il en résulte que :

$$\big(w \mid T_1(u)v\big) + \big(v \mid T_1(w)u\big) + \big(u \mid T_1(v)w\big) = 0.$$

En particulier, pour $u = e$, cette équation donne

$$\big(w \mid T_1(e)v\big) + \big(v \mid T_1(w)e\big) - \big(T_1(v)e \mid w\big) = 0,$$

d'où $(w \mid T_1(e)v) = 0$ compte tenu du fait que $\mathfrak{h}e = 0$, et donc $T_1(e) = 0$ car $(\cdot \mid \cdot)$ est non-dégénérée. Par conséquent, $T(e) = T_2(e)$ appartient à $\mathfrak{q}$.

(ii) Pour tout $X \in \mathfrak{g}$ et $T \in \operatorname{Hom}_s(V, \mathfrak{g})$, par définition de l'action de $\mathfrak{g}$ dans $\operatorname{Hom}(V, \operatorname{Hom}(V, V))$, nous avons :

$$\begin{aligned} p(X \cdot T) &= \big((X \cdot T)(e)\big)e \\ &= X\big(T(e)e\big) - \big(T(Xe)\big)e - \big(T(e)\big)(Xe) \\ &= X\big(T(e)e\big) - 2\big(T(e)\big)(Xe). \end{aligned}$$

Si X est dans $\mathfrak{h}$, alors $Xe = 0$ et par suite :

$$p(X \cdot T) = X\big(T(e)e\big) = \big(\dot\sigma(X)\big)\big(p(T)\big) = X \cdot p(T).$$

Si X est dans $\mathfrak{q}$, alors $[T(e), X]$ appartient à $\mathfrak{h}$ car $T(e)$ est dans $\mathfrak{q}$ par hypothèse, donc $(T(e) \circ X)(e) = (X \circ T(e))(e)$ et nous pouvons écrire :

$$p(X \cdot T) = X\big(T(e)e\big) - 2X\big(T(e)e\big) = (\dot\sigma X)\big(T(e)e\big) = X \cdot p(T).$$

Par conséquent, p commute avec l'action de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{q}$.

(iii) Remarquons d'abord que s est bien défini. En effet, $s(a)$ est connu dans la théorie des algèbres de Jordan comme étant la *mutation de A par rapport à a*, et il est connu que s est G-équivariant. L'image de s est le G-module engendré par A et appartient donc au G-module $\operatorname{Hom}_s(V, \mathfrak{g})$.

Il est évident que $p \circ s = \mathrm{id}_V$, donc p est surjectif. Montrons que p est injectif. Si T est un élément du noyau de p, $g \cdot T$ l'est aussi pour tout $g \in G$ puisque p est G-équivariant. Nous considérons T comme élément de $\operatorname{Hom}(V \otimes V, V)$ et écrivons $T(e \otimes e)$ au lieu de $T(e)e$. Alors, pour tout $g \in G$,

$$0 = (g \cdot T)(e \otimes e) = g\big(T(g^{-1}e \otimes g^{-1}e)\big),$$

d'où $T(v \otimes v) = 0$ pour tout $v \in \Omega = G \cdot e$. Puisque la G-orbite $d(\Omega) = \{v \otimes v \mid v \in \Omega\}$ engendre S^2V comme espace vectoriel, nous déduisons que $T = 0$, donc p est injectif. $\square$

Ajoutons la remarque que la proposition précédente peut être placée dans un cadre plus général que celui des algèbres de Jordan et peut alors servir à situer les algèbres de Jordan semi-simples dans ce cadre (voir [Be94]).

1.3. Version infinitésimale du théorème de Liouville.

Reprenons les notations de la section précédente. Nous venons de voir que le premier prolongement de $\mathfrak{g}$ est isomorphe à V comme espace vectoriel si (V, A) est semi-simple. Avant de déterminer les prolongements d'ordre supérieur, considérons l'exemple $V = \mathbb{K}$ et $G = \mathbb{K}_0^*$. Alors

$$S : x_1 \otimes \cdots \otimes x_{k+1} \longmapsto x_1 \cdots x_{k+1}$$

définit un élément non-trivial de $\mathrm{Hom}_s(S^k V, \mathfrak{g})$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}$ et $G = \mathbb{C}^*$, cette formule définit un élément non-trival S dans $\mathrm{Hom}_s(S^k V, \mathfrak{g})$, le produit $x_1 \cdots x_{k+1}$ étant pris dans $\mathbb{C}$. Nous allons montrer que, pour toutes les autres algèbres de Jordan simples, le deuxième prolongement de l'algèbre de structure est réduit à zéro.

LEMME 1.3.1.

(i) *Soit V une algèbre de Jordan semi-simple. Alors, pour tout S dans* $\mathrm{Hom}_s(S^2 V, \mathfrak{g})$, *l'image de S est incluse dans le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.*

(ii) *Soit V une algèbre de Jordan simple sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension plus grande que un telle que le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ agisse par des scalaires sur V (ou une somme directe de telles algèbres). Alors, pour tout $k > 1$,*

$$\mathrm{Hom}_s(S^k V, \mathfrak{g}) = 0.$$

Démonstration.

(i) Soit $S \in \mathrm{Hom}_s(S^2 V, \mathfrak{g})$. Pour tout $v \in V$, l'élément $S_v := S(v \otimes \cdot)$ appartient à $\mathrm{Hom}_s(V, \mathfrak{g})$. Donc

$$S(e \otimes v) = S(v \otimes e) = S_v(e) \in \mathfrak{q} = \ell(V)$$

d'après la partie (i) de la proposition 1.2.1. Nous allons en déduire que $S(e \otimes e)$ appartient au centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$. Pour le démontrer, rappelons que $\mathfrak{g}$ opère dans $\mathrm{Hom}(V \otimes V, \mathfrak{g})$ par

$$(X \cdot F)(v \otimes w) = \big[X, F(v \otimes w)\big] - F(Xv \otimes w + v \otimes Xw).$$

Par conséquent, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on a :

$$(X \cdot S)(e \otimes e) + 2S(Xe \otimes e) = \big[X, S(e \otimes e)\big].$$

Nous avons déjà remarqué que le membre de gauche de cette équation appartient à $\mathfrak{q}$. Si $X \in \mathfrak{q}$, le membre de droite de l'équation appartient à $[\mathfrak{q}, \mathfrak{q}] = \mathfrak{h}$ et doit donc être égal à zéro. Donc $S(e \otimes e)$ commute avec tout $X \in \mathfrak{q}$. Puisque $\mathfrak{q}$ engendre $\mathfrak{g}$, il s'ensuit que $S(e\otimes e)$ appartient à $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Ceci étant vrai pour tout $S \in \mathrm{Hom}_s(S^2V, \mathfrak{g})$, nous avons $(g \cdot S)(e \otimes e) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ pour tout $g \in G$. D'après la définition de l'action de G dans $\mathrm{Hom}(\otimes^2 V, \mathfrak{g})$, cela veut dire que

$$(g \cdot S)(e \otimes e) = g \circ S(g^{-1}e \otimes g^{-1}e) \circ g^{-1} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g}),$$

donc $S(v \otimes v)$ est dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ pour tout v appartenant à l'orbite ouverte $\Omega = G \cdot e$ car $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est un G-sous-module de $\mathfrak{g}$. Le fait que $d(\Omega) = \{v \otimes v \mid v \in \Omega\}$ engendre S^2V comme espace vectoriel implique maintenant que $S(S^2V)$ est contenu dans $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$.

(ii) Il suffit de démontrer que $\mathrm{Hom}_s(S^2V, \mathfrak{g}) = 0$. Considérons S dans $\mathrm{Hom}_s(S^2V, \mathfrak{g})$. D'après la partie (i), $S(u \otimes w)$ appartient pour tout $u, w \in V$ au centre de $\mathfrak{g}$ et agit donc selon l'hypothèse par un scalaire sur V : il existe $\lambda(u, w) \in \mathbb{K}$ tel que

$$S(u \otimes w) = \lambda(u, w)\,\mathrm{id}_V .$$

Par conséquent, pour tout $x \in V$,

$$S(u \otimes w)x = S(x \otimes w)u = \lambda(x, w)u.$$

Cela veut dire que l'image de $S(u\otimes w)$ est incluse dans $\mathbb{K}u$. Donc $S(u\otimes w)$ est à la fois un opérateur de rang inférieur ou égal à un et un multiple de l'identité. Puisque la dimension de V est plus grande que un, ceci n'est possible que si $S(u \otimes w) = 0$. $\square$

THÉORÈME 1.3.2. — *Soit V une algèbre de Jordan simple réelle ou complexe qui n'est pas isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $\mathfrak{g}$ son algèbre de structure.*

(i) *Pour tout $k > 1$, l'espace $\mathfrak{g}^{(k)} = \mathrm{Hom}_s(S^kV, \mathfrak{g})$ est réduit à zéro.*

(ii) *Tout champ de vecteurs $\mathfrak{g}$-conforme ξ de classe C^3 est donné par un polynôme quadratique*

$$\xi(x) = \xi(0) + Tx + \big(2(wx)x - wx^2\big) = \xi(0) + Tx + P(x)w,$$

où $\xi(0), w \in V$, $T \in \mathfrak{g}$ et $P(x) = 2\ell(x)^2 - \ell(x^2)$ est la représentation quadratique de l'algèbre de Jordan V. Ainsi l'algèbre de Lie locale $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ des champs de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes (de classe C^3) est une algèbre de Lie qui est isomorphe à $V \oplus \mathfrak{g} \oplus V$ comme espace vectoriel.

Démonstration.

(i) Rappellons qu'une algèbre de Jordan simple n'est autre qu'un espace préhomogène symétrique irréductible. Par conséquent, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le lemme de Schur implique que le centre de $\mathfrak{g}$ agit par des scalaires sur V et, puisque $\dim_{\mathbb{C}} V > 1$, les hypothèses de 1.3.1 (ii) sont remplies. Soit maintenant $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et considérons le complexifié $V_{\mathbb{C}}$ de V comme $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module. Deux cas peuvent se produire (voir [Kay94, chap. 1]) :

1) $V_{\mathbb{C}}$ est réductible et est alors isomorphe à $V \oplus V$ comme $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module. Ceci est le cas si V porte déjà une structure complexe et si $\mathfrak{g}$ agit de façon $\mathbb{C}$-linéaire. Puisque $\mathbb{C}$ est la seule algèbre de Jordan simple de dimension réelle égale à deux, la dimension réelle de V est plus grande que deux et sa dimension complexe est plus grande que un. Nous pouvons donc appliquer le raisonnement précédent, avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, pour conclure.

2) $V_{\mathbb{C}}$ est un $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-module irréductible. Ainsi V est une forme réelle d'une algèbre de Jordan simple complexe dont la dimension complexe est plus grande que un. D'après le lemme de Schur, le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus i\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ agit par des scalaires (complexes) sur $V_{\mathbb{C}}$, et sa sous-algèbre réelle $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ agit donc par des scalaires réels sur V. Puisque $\dim_{\mathbb{R}}(V) > 1$, les hypothèses de 1.3.1 (ii) sont ainsi remplies.

(ii) Nous venons de montrer que $\mathfrak{g}$ est de type fini d'ordre 2, et d'après le lemme 1.2.2, $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ est alors une algèbre de Lie de champs de vecteurs quadratiques

$$\xi(x) = \xi(0) + D\xi(0)x + \frac{1}{2} D^2\xi(x)(x \otimes x)$$

où $D\xi(0) \in \mathfrak{g}$ et $D^2\xi(0) \in \operatorname{Hom}_s(V, \mathfrak{g})$. D'après la détermination de cet espace (prop. 1.2.1), il existe $w \in V$ tel que $D^{\xi}(0)(x \otimes x) = 2P(x)w$, et nous obtenons la formule énoncée. $\square$

Le théorème précédent se généralise au cas d'une algèbre de Jordan semi-simple qui ne contient pas d'idéal isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. C'est une conséquence immédiate du lemme suivant :

LEMME 1.3.3. — *Soient $\mathfrak{g}_j \subset \mathfrak{gl}(W_j)$, $j = 1, 2$ des algèbres de Lie. Alors*

$$\mathfrak{co}(\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2) = \mathfrak{co}(\mathfrak{g}_1) \times \mathfrak{co}(\mathfrak{g}_2).$$

Démonstration. — L'inclusion « $\supset$ » est évidente. Pour démontrer la réciproque, considérons un champ de vecteurs $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$-conforme ξ sur $W_1 \oplus W_2$. Fixons $w \in W_2$ et considérons $\xi_w : W_1 \to W_1 \oplus W_2$, $x \mapsto \xi(x, w)$. Par hypothèse

$$D\xi\big((w, x)\big) \in \operatorname{End}(W_1) \times \operatorname{End}(W_2) \subset \operatorname{End}(W_1 \oplus W_2)$$

et on en déduit que la différentielle de $\mathrm{pr}_2 \circ \xi_w : W_1 \to W_2$ est égale à zéro. Par conséquent, $\mathrm{pr}_2 \circ \xi_w$ est constant. On en déduit que $\xi((x,y)) = (\xi_1(x), \xi_2(y))$ avec des champs $\mathfrak{g}_i$-conformes ξ_i sur W_i pour $i = 1, 2$. $\square$

Indiquons encore que l'association d'une algèbre de Lie graduée $V \oplus \mathfrak{g} \oplus V$ à une algèbre de Jordan V est connue comme *construction de Kantor-Koecher-Tits* (voir par exemple [Sa80, I.7]). En général, dans le cas où V n'est pas semi-simple, cette algèbre ne coïncide pas avec l'espace $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$; on en donne un contre-exemple (autre que $V = \mathbb{K}$) dans [Be94, chap. 4.5].

2 Version globale du théorème de Liouville

2.1. Relation entre champs de vecteurs et transformations conformes généralisées.

Nous avons vu (section 1.1) qu'un groupe local à un paramètre de transformations G-conformes définit un champ de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes. Réciproquement, nous avons :

LEMME 2.1.1. — *Soit G un sous-groupe fermé et connexe de* $\mathrm{Gl}(V)$ *d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors le groupe local à un paramètre engendré par un champ de vecteurs $\mathfrak{g}$-conformes est un groupe local de transformations G-conformes.*

Démonstration. — Soit ξ un champ de vecteurs $\mathfrak{g}$-conforme défini sur un ouvert V_1 de V et soit ϕ_t défini par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\phi_t(x) = \xi\big(\phi_t(x)\big), \quad \phi_0(x) = x,$$

pour $x \in V_1$ et t appartenant à un intervalle I_x de $\mathbb{R}$ comprenant zéro. Montrons que $\alpha(t) := D\phi_t(x)$ appartient à G. En effet, $\alpha(0) = \mathrm{id}_V$ est un élément de G et, en dérivant par rapport à t,

$$\alpha'(t) = D\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\phi_t\Big)(x) = D(\xi \circ \phi_t)(x) = D\xi\big(\phi_t(x)\big) \circ D\phi_t(x).$$

Cela veut dire que $\alpha'(t)$ appartient à l'espace $\{X \circ D\phi_t(x) \mid X \in \mathfrak{g}\}$. Or ceci est l'espace tangent au point $D\phi_t(x)$ de la G-orbite (par rapport à l'action à gauche de G sur $\mathrm{Gl}(V)$) passant par ce point. Il s'ensuit que $\alpha(t)$ reste dans la G-orbite passant par $\alpha(0)$ qui est égale à G (voir annexe (A4)). $\square$

Il existe un analogue d'une *représentation adjointe de* $\mathrm{Co}(G)$ *sur* $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$. Rappelons que tout difféomorphisme $\phi : V_1 \to V_2$ induit un isomorphisme naturel ϕ_* des algèbres de Lie des champs de vecteurs sur V_1 et sur V_2, donné par la formule

$$\phi_*\xi(x) = D\phi\bigl(\phi^{-1}(x)\bigr) \cdot \xi\bigl(\phi^{-1}(x)\bigr), \quad x \in V_2.$$

LEMME 2.1.2. — *Soient $\phi : V_1 \to V_2$ une transformation G-conforme et ξ un champ de vecteurs $\mathfrak{g}$-conforme sur V_1. Alors $\varphi_*\xi$ est un champ de vecteurs $\mathfrak{g}$-conforme sur V_2.*

Démonstration. — Il faut montrer que pour tout $x \in V_2$, la différentielle $D(\phi_*\xi)(x)$ appartient à $\mathfrak{g}$. Un calcul élémentaire donne

$$\begin{aligned} D(\phi_*\xi)(x) = \bigl(D^2\phi(\phi^{-1}(x)) \cdot \xi\bigl(\phi^{-1}(x)\bigr)\bigr) \circ D\phi^{-1}(x) \\ + D\phi\bigl(\phi^{-1}(x)\bigr) \circ D\xi\bigl(\phi^{-1}(x)\bigr) \circ D\phi^{-1}(x). \end{aligned}$$

Le deuxième terme appartient bien à $\mathfrak{g}$, car c'est le conjugué de $D\xi(\phi^{-1}(x))$ appartenant à $\mathfrak{g}$ par $D\phi(\phi^{-1}(x)) \in G$. En ce qui concerne le premier terme, nous pouvons conclure de la même manière après avoir remarqué que pour tout $y \in V_1$ et $v \in V$, il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que

$$D^2\phi(y) \cdot v = D\phi(y) \circ X.$$

Ceci est une conséquence du fait que $D^2\phi(y) \cdot v$ appartient à l'espace tangent à G au point $D\phi(y)$ qui s'identifie à l'espace

$$\bigl\{D\phi(y) \circ X \mid X \in \mathfrak{g}\bigr\}. \quad \square$$

Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est de type fini, ce lemme implique que les transformations G-conformes sont analytiques et même rationnelles dans certains cas :

PROPOSITION 2.1.3. — *Soit $\mathfrak{g}$ une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ de type fini k et telle que $\mathrm{id}_V \in \mathfrak{g}$, et soit $G \subset \mathrm{Gl}(V)$ un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors toute transformation G-conforme ϕ de classe $\mathcal{C}^{k+2}$ est rationnelle, et elle est déterminée uniquement par les valeurs $\phi(p)$ et $D^j\phi(p)$ pour $j = 1, \ldots, k$ en un point donné p dans le domaine de définition de ϕ. L'application $\phi \mapsto \phi_*$ est injective.*

Démonstration. — Montrons d'abord que ϕ induit un automorphisme

$$\phi_* : \mathfrak{co}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{co}(\mathfrak{g}).$$

En effet, si $\xi \in \mathfrak{co}(\mathfrak{g})$, le champ $\phi_*\xi$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ puisque ϕ est de classe $\mathcal{C}^{k+2}$. Comme il est $\mathfrak{g}$-conforme d'après le lemme précédent, il appartient alors à $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ et est ainsi polynomial. En particulier, nous pouvons considérer le champ de vecteurs constant $v \in V$. Comme il est $\mathfrak{g}$-conforme, $\phi_* v$ l'est aussi et s'exprime donc par un polynôme (de degré au plus k) :

$$(\phi_* v)(x) = D\phi\big(\phi^{-1}(x)\big) \cdot v = \big(D\phi^{-1}(x)\big)^{-1} \cdot v$$

est polynomial en x. Ainsi

$$\chi_\phi : V_2 \longrightarrow G, \quad x \longmapsto \big(D\phi^{-1}(x)\big)^{-1}$$

est polynomial (sur le domaine de définition V_2 de ϕ^{-1}). Considérons maintenant le champ de vecteurs $I(x) = x$. Par hypothèse, il appartient à $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$, donc

$$\lambda_\phi(x) := (\phi_* I)(x) = \big(D\phi^{-1}(x)\big)^{-1} \cdot \phi^{-1}(x)$$

est polynomial en x et

$$\phi^{-1}(x) = \big(\chi_\phi(x)\big)^{-1} \cdot \lambda_\phi(x)$$

est rationnel en x car l'inversion dans $\mathrm{Gl}(V)$ est rationnelle. De plus, cette formule redonne la fonction rationelle ϕ à partir de ϕ_* ; *i.e.* $\phi \mapsto \phi_*$ est injective.

Montrons maintenant que ϕ est uniquement déterminé par les valeurs $\phi(p)$, $D^j\phi(p)$, pour $j = 1, \ldots, k$ en un point donné p. Soit ψ une transformation G-conforme de classe $\mathcal{C}^{k+2}$ telle que $D^j\psi(p) = D^j\phi(p)$, pour $j = 0, 1, \ldots, k$ (*i.e.*, ψ et ϕ ont le même k-jet en p.) Alors $g := \phi \circ \psi^{-1}$ est une transformation G-conforme telle que $g(p) = p$, $Dg(p) = \mathrm{id}_V$ et $D^j g(p) = 0$ pour $j = 2, \ldots k$ (*i.e.* g a le k-jet de l'identité en p; voir annexe (A1).) Montrons que $g = \mathrm{id}_V$. D'abord, nous constatons que

$$D^{k+1}g(p) \in \mathrm{Hom}_s(S^k V, \mathfrak{g}) = 0.$$

En effet, $D^{k+1}g(p)$ est bien une application $(k+1)$-linéaire totalement symétrique, et pour tout $v \in V$, $(D^{k+1}g)(p)(v, \ldots, v) = (\partial_v \ldots \partial_v(Dg))(p)$ appartient à $\mathfrak{g}$ car ce terme est donné par $\alpha^{(k)}(0)$, où

$$\alpha : \mathbb{R} \supset I \longrightarrow G, \quad t \longmapsto Dg(p + tv)$$

est une courbe telle que $\alpha(0) = \mathrm{id}_V$ et $\alpha^{(j)}(0) = (D^{j+1}g(p))(v, \ldots, v) = 0$ pour $j = 1, \ldots, k-1$; donc $\alpha^{(k)}(0)$ appartient à $T_{\mathrm{id}}G = \mathfrak{g}$ (voir annexe (A3)). Par polarisation, $(D^{k+1}g)(p)(v_1, \ldots, v_k) = 0$ pour tout $v_1, \ldots, v_k \in V$. De la même manière, nous obtenons que $D^{k+2}g(p)$ est dans $\mathrm{Hom}_s(S^{k+1}V, \mathfrak{g}) = 0$, et ainsi de suite. En utilisant le fait que g est rationnelle, nous pouvons conclure que $g = \mathrm{id}_V$. $\square$

La proposition précédente nous permettra de décrire l'ensemble

$$\mathrm{Co}_*(G) := \{\phi_* \mid \phi \in \mathrm{Co}(G)\} \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g})).$$

Examinons d'abord le «stabilisateur de 0 dans $\mathrm{Co}_*(G)$» : soit $\mathrm{Co}(G)'$ l'ensemble des transformations G-conformes ϕ définies sur un voisinage de 0, et soit $\mathrm{Co}(G)_0$ l'ensemble des $\phi \in \mathrm{Co}(G)'$ telles que $\phi(0) = 0$. Alors

$$\mathrm{Co}_*(G)_0 := \{\phi_* \mid \phi \in \mathrm{Co}(G)_0\} \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g}))$$

est un groupe, car, si $\phi, \psi \in \mathrm{Co}(G)$ sont composables sur un ouvert, alors $(\phi \circ \psi)_* = \phi_* \circ \psi_*$. Nous considérons aussi l'ensemble

$$\mathrm{Co}(G)_{00} := \{\phi \in Co(G)_0 \mid D\phi(0) = \mathrm{id}_V\}$$

et le sous-groupe

$$\mathrm{Co}_*(G)_{00} := \{\phi_* \mid \phi \in \mathrm{Co}(G)_{00}\}$$

de $\mathrm{Co}_*(G)_0$. Nous ne pouvons pas conclure que $\mathrm{Co}_*(G)$ et

$$\mathrm{Co}_*(G)' := \{\phi_* \mid \phi \in \mathrm{Co}(G)'\}$$

sont des groupes. Pour décrire la structure de ces ensembles, rappelons (lemme 1.1.2) que $\mathfrak{co}(\mathfrak{g}) \cong V \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{n}$ est une algèbre de Lie graduée telle que $\mathfrak{n}$ est nilpotente. Puisque tout $\xi \in \mathfrak{n}$ s'annule en 0 à l'ordre 2 ou plus, il existe pour tout $\xi \in \mathfrak{n}$ un voisinage U de 0 tel que le flot $\phi_t(x)$ de ξ est bien défini pour $x \in U$ et $t = 1$, voir l'annexe (A2). Nous notons

$$\exp \xi := \phi_1 : U \to V.$$

Comme ξ est $\mathfrak{g}$-conforme, $\exp \xi$ est G-conforme (lemme 2.1.1), et comme ξ s'annule en 0 à l'ordre deux ou plus, $\exp \xi(0) = 0$ et $D(\exp \xi)(0) = 0$ (voir (A2)), *i.e.* $\exp \xi \in \mathrm{Co}(G)_{00}$, donc $\exp \mathfrak{n} \subset \mathrm{Co}(G)_{00}$. Le théorème suivant montre qu'il y a égalité — au fait près que nous considérons des éléments de $\mathrm{Co}(G)$ ayant la même expression analytique mais différents domaines de définition comme distincts. Pour cette raison nous passons par la «représentation adjointe» $\phi \mapsto \phi_*$ qui est injective dans le sens que, si deux transformations G-conformes ont le même germe en un point, alors leurs images sont les mêmes (prop. 2.1.3).

Nous notons N le sous-groupe analytique d'algèbre de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{n})$ dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g}))$, où ad désigne la représentation adjointe de $\mathfrak{co}(g)$. (Rappelons que ad est injectif, lemme 1.1.3; donc $\mathrm{ad}(\mathfrak{n}) \cong \mathfrak{n}$.) En outre, nous notons GN le groupe engendré par N et $G \cong G_*$ dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g}))$, et nous considérons V comme groupe de translations $\{\tau_v \mid v \in V\}$ (où $\tau_v(x) = x + v$) qui s'identifie au sous-groupe abélien V_* de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g}))$.

THÉORÈME 2.1.4 (structure du pseudogroupe G-conforme). — *Soit $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(V)$ une sous-algèbre de Lie de type fini k telle que* $\mathrm{id}_V \in \mathfrak{g}$, *et soit $G \subset \mathrm{Gl}(V)$ un sous-groupe fermé d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors, avec les notations introduites ci-dessus,*

$$\text{(i)} \qquad \mathrm{Co}_*(G)_{00} = N,$$

et N est un groupe de Lie nilpotent difféomorphe à l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$.

$$\text{(ii)} \qquad \mathrm{Co}_*(G)_0 = GN,$$

la décomposition étant un produit semidirect dont N est le sous-groupe distingué.

$$\text{(iii)} \qquad \mathrm{Co}_*(G)' = VGN,$$

et la décomposition $\phi = vgn$ avec $v \in V$, $g \in G$ et $n \in N$ est unique, donnée par $v = \tau_{\phi(0)}$, $g = D\phi(0)$ et $n = g^{-1}v^{-1}\phi$.

$$\text{(iv)} \qquad \mathrm{Co}_*(G) = VGNV.$$

Cette décomposition n'est pas unique.

(v) *Toute transformation G-conforme ϕ de classe $\mathcal{C}^{k+2}$ est rationnelle, et elle est une composée de translations, d'éléments de G et d'éléments de l'ensemble* $\exp(\mathfrak{n})$ *qui s'identifie à un groupe d'applications birationelles isomorphe à N.*

Démonstration.

Partie (i), inclusion « $\supset$ ». Nous avons constaté ci-dessus que $\exp \mathfrak{n}$ est contenu dans $\mathrm{Co}(G)_{00}$. Par conséquent $(\exp \mathfrak{n})_*$ est contenu dans $\mathrm{Co}_*(G)_{00}$. En utilisant la formule exprimant le crochet de Lie en termes du flot local,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} \big((\exp t\xi)_*\eta\big)(x) = [\xi,\eta](x)$$

et le fait que $\mathfrak{co}(g)$ est de dimension finie nous obtenons la formule

$$(\exp \xi)_* = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\xi)}$$

pour tout $\xi \in \mathfrak{n}$. Par conséquent,

$$N = \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\mathfrak{n})} = (\exp \mathfrak{n})_* \subset \mathrm{Co}_*(G)_{00}.$$

Inclusion « $\subset$ ». Nous avons montré dans la proposition précédente que $\phi \in \mathrm{Co}(G)_{00}$ est déterminé par son k-jet en 0. Nous allons déterminer les k-jets en 0 des éléments $\exp(\xi)$ lorsque $\xi \in \mathfrak{n}$, et montrer que cet ensemble de k-jets contient celui de ϕ. La clef de cette démarche sera le

LEMME 2.1.5. — *Pour $j = 2, \ldots, k$, l'application*

$$\epsilon_j : \mathfrak{n}_j \longrightarrow \mathrm{Hom}_s(S^{j-1}V, \mathfrak{g}), \quad \xi \longmapsto (D^j \exp \xi)(0)$$

est bien définie, linéaire et bijective.

Démonstration. — Rappelons que $\mathfrak{n}_j$ est l'ensemble des champs homogènes de degré j dans $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$. Si ξ appartient à cet ensemble, nous avons pour $\phi := \exp(\xi)$:

$$\phi(0) = 0, \quad D\phi(0) = \mathrm{id}_V, \quad D^r\phi(0) = 0 \text{ pour } r = 2, \ldots, j-1$$

(voir annexe $(A2)$). Le raisonnement utilisé dans la preuve de la proposition précédente montre qu'alors $D^j\phi(0)$ appartient à $\mathrm{Hom}_s(S^{j-1}V, \mathfrak{g})$. Ainsi l'application ϵ_j est bien définie. Montrons qu'elle est linéaire. Rappelons que, si ξ, η sont dans $\mathfrak{n}_j$, alors :

$$\psi := \exp(-\eta)\exp(-\xi)\exp(\xi + \eta) \in \exp\Big(\bigoplus_{r=j+1}^{k} \mathfrak{n}_r\Big)$$

(polynôme de Campbell-Hausdorff dans un groupe de Lie nilpotent.) Par conséquent $D^j\psi(0) = 0$ (annexe (A2)), et nous avons (voir l'annexe (A1))

$$\begin{aligned} D^j\big(\exp(\xi + \eta)\big)(0) &= D^j\big(\exp(\xi) \circ \exp(\eta) \circ \psi\big)(0) \\ &= D^j\big(\exp(\xi)\big)(0) + D^j\big(\exp(\eta)\big)(0), \end{aligned}$$

ce qui montre que ϵ_j est linéaire. Pour des raisons de dimension, il suffit maintenant de montrer que ϵ_j est injective. Or, si $(D^j \exp \xi)(0) = 0$, alors ξ s'annule en 0 à l'ordre $(j+1)$ (annexe (A2)) et comme ξ est polynomial de degré j, il est alors égal à zéro. □

Terminons maintenant la démonstration de l'inclusion « $\subset$ » de (i). Soit $\phi \in \mathrm{Co}(G)_{00}$ donné. Puisque $\phi(0) = 0$ et $D\phi(0) = \mathrm{id}_V$, un raisonnement déjà utilisé plusieurs fois nous montre que $D^2\phi(0) \in \mathrm{Hom}_s(V, \mathfrak{g})$. D'après le lemme, nous pouvons trouver $\phi_1 \in \exp(\mathfrak{n}_2)$ tel que $D^2\phi_1(0) = D^2\phi(0)$. Posons $\phi^{[1]} := \phi \circ \phi_1^{-1}$. Alors $(D^2\phi^{[1]})(0) = 0$ et $D^3\phi^{[1]}(0) \in \mathrm{Hom}_s(S^2V, \mathfrak{g})$. Le lemme nous permet de trouver $\phi_2 \in \exp(\mathfrak{n}_3)$ tel que $D^3\phi_2(0) = D^3\phi^{[1]}(0)$, et nous posons $\phi^{[2]} := \phi^{[1]} \circ \phi_2^{-1}$. Après $(k-1)$ itérations de ce procédé, nous avons trouvé $\phi^{[k]} = \phi \circ \phi_1^{-1} \circ \cdots \circ \phi_{k-1}^{-1}$ avec $\phi_j \in \exp(\mathfrak{n})$ pour $j = 1, \ldots, k-1$, et le k-jet de $\phi^{[k]}$ au point $0 \in V$ est celui de l'identité. Nous pouvons alors conclure que $\phi^{[k]} = \mathrm{id}_V$ (prop 2.1.3) et, par conséquent, ϕ est dans $\exp(\mathfrak{n})$, donc ϕ_* appartient à $\exp(\mathfrak{n})_* = N$.

Pour montrer que N est difféomorphe à son algèbre de Lie $\mathfrak{n} \cong \mathrm{ad}(\mathfrak{n})$ par l'application exponentielle, il suffit de montrer que tout sous-groupe à un paramètre de N est isomorphe au groupe additif $\mathbb{R}$. Soit $\xi \in \mathfrak{n}$, nul en zéro à l'ordre j ; supposons $\xi \neq 0$, donc $j < \infty$. Le raisonnement utilisé dans la preuve du lemme 2.1.5 montre alors que

$$\exp(\mathbb{R}\xi) \longrightarrow \mathfrak{n}_j, \quad \exp(t\xi) \longmapsto \big(D^j \exp(t\xi)\big)(0)$$

est un homomorphisme non-trivial dont l'image est donc un sous-groupe de $\mathfrak{n}_j$ isomorphe à $\mathbb{R}$.

(ii) D'après (i), N est contenu dans $\mathrm{Co}_*(G)_0$. Comme $G \subset \mathrm{Co}_*(G)_0$ de manière triviale, nous avons $GN \subset \mathrm{Co}_*(G)_0$. Pour la réciproque, décomposons $\phi \in \mathrm{Co}(G)_0$ comme $\phi = D\phi(0) \circ (D\phi(0))^{-1}\phi)$, où le premier facteur appartient à G et le deuxième à $\mathrm{Co}(G)_{00}$ car $D(D\phi(0)^{-1} \circ \phi)(0) = \mathrm{id}_V$; par conséquent, ϕ_* est dans $G\,\mathrm{Co}_*(G)_{00} = GN$, la dernière égalité d'après (i). Le produit GN est semi-direct car, si $Dn(0) = \mathrm{id}_V$, alors $D(gng^{-1})(0) = \mathrm{id}_V$ pour tout $g \in G$.

(iii) Décomposons $\phi \in \mathrm{Co}(G)'$ comme $\phi = \tau_{\phi(0)} \circ D\phi(0) \circ n$ avec $n = D\phi(0)^{-1} \circ \tau_{-\phi(0)} \circ \phi$; alors le premier facteur appartient à V, le deuxième à G et le troisième à $\mathrm{Co}(G)_{00}$, donc ϕ_* appartient à $VG\,\mathrm{Co}_*(G)_{00} = VGN$ d'après (i), et la décomposition est unique. L'inclusion réciproque est évidente car tout élément de $VG\exp(\mathfrak{n})$ est défini en 0.

(iv) Si ϕ est dans $\mathrm{Co}(G)$, soit p un point où ϕ est définie. Alors $\phi' := \phi \circ \tau_p$ appartient à $\mathrm{Co}(G)'$ et $\phi_* = \phi'_* \circ (\tau_{-p})_*$ appartient à $\mathrm{Co}_*(G)'V = VGNV$. L'inclusion réciproque est encore évidente. La décomposition de $\phi_* \in \mathrm{Co}_*(G)$ n'est plus unique car p peut être choisi arbitrairement dans le domaine de définition de ϕ.

(v) D'après la proposition 2.1.3, ϕ est rationnelle, et d'après (iv), nous pouvons décomposer ϕ comme anoncé, d'abord en décomposant $\phi_* \in VGNV$ et en utilisant ensuite que $\phi \mapsto \phi_*$ est injective. □

2.2. Le groupe des transformations conformes.

Dans le théorème précédent, nous n'avons pas parlé du « groupe $\mathrm{Co}(G)$ » car, pour justifier cette terminologie, il reste deux problèmes à discuter : d'abord, $VGNV$ est-il un groupe ? Ensuite, étant donné que $\phi \in \mathrm{Co}(G)$ admet un prolongement rationnel $\tilde{\phi}$, celui-ci est-il encore G-conforme ? C'est-à-dire qu'il faut examiner la question de savoir si $D\tilde{\phi}(x)$ appartient à G lorsque ϕ parcourt $\mathrm{Co}(G)$, et x est tel que $\det(D\tilde{\phi}(x))^{-1} \neq 0$. Puisque ceci est trivial pour une translation ou une application linéaire, nous pouvons nous borner à considérer $\phi \in \exp(\mathfrak{n})$. Ainsi nous sommes amenés à considérer le polynôme

$$B : V \times \mathfrak{n} \longrightarrow \mathrm{End}(V), \quad (x,\xi) \longmapsto (D\exp\xi(x))^{-1}.$$

Il s'agit en effet d'un polynôme car, pour tout $v \in V$, considéré aussi comme champ de vecteurs constant,

$$B(x,\xi)v = \big((\exp(-\xi))_* v\big)(x) = \big(\mathrm{e}^{-\operatorname{ad}(\xi)}v\big)(x)$$

est polynomial en x et aussi en ξ puisque $\operatorname{ad}(\xi)$ est nilpotent. (Dans le cas d'une algèbre de Jordan, ce polynôme se réduit au polynôme quadratique B lié au *noyau de Bergman*; voir [FK94, prop. X.4.5])

THÉORÈME 2.2.1 (structure du groupe G-conforme). — *Sous les hypothèses du théorème* 2.1.4, *soit* $\tilde{\phi}$ *le prolongement rationnel de* $\phi \in \mathrm{Co}(G)$.

(i) *Si x est un point de V tel que* $\det(D\phi(x))^{-1} \neq 0$, *alors* $D\phi(x)$ *appartient au normalisateur* $\overline{G} := \{g \in \mathrm{Gl}(V) \mid g \circ \mathfrak{g} \circ g^{-1} \subset \mathfrak{g}\}$ *de* $\mathfrak{g}$ *dans* $\mathrm{Gl}(V)$.

(ii) *Si* $\mathfrak{g}$ *est égale à son normalisateur* $\overline{\mathfrak{g}} = \{X \in \mathfrak{gl}(V) \mid [X,\mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}\}$ *et si* $G = \overline{G}$, *toute transformation G-conforme ϕ admet un prolongement rationnel en une application $\tilde{\phi}$ qui est G-conforme sur son domaine de définition, et* $\mathrm{Co}_*(G)$ *est un groupe de Lie d'algèbre de Lie* $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$ *qui est isomorphe au groupe engendré par G et* $\mathrm{Int}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g}))$ *dans* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g}))$. *La structure de ce groupe est décrite par le théorème* 2.1.4. *De plus,* $\mathrm{Co}_*(G)' = VGN$ *est un ouvert dense de* $\mathrm{Co}_*(G)$, *et, comme ensemble, on a* $\mathrm{Co}_*(G) = NVGN$.

Démonstration.

(i) Soit G_0 la composante neutre de G. Puisque, pour tout $\xi \in \mathfrak{n}$, $\exp\xi$ est G_0-conforme dans un voisinage de 0 dans V (lemme 2.1.1), nous pouvons trouver un voisinage U de $(0,0)$ dans $V \times \mathfrak{n}$ tel que $B(U) \subset G_0$. Ainsi l'application

$$B_* : U \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}), \quad (x,\xi) \longmapsto \big(X \mapsto \det\big(B(x,\xi)\big)B(x,\xi)\circ X \circ B(x,\xi)^{-1}\big)$$

est bien définie. Puisqu'elle est polynomiale, elle se prolonge par la même formule en un polynôme $B_* : V \times \mathfrak{n} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Or, si $\det(B(x,\xi)) \neq 0$, ceci veut dire que $(D(\exp\xi)(x))^{-1} = B(x,\xi) \in \overline{G}$. Ainsi l'assertion est prouvée pour $\phi \in \exp\mathfrak{n} \cong N$, et on en déduit immédiatement qu'elle est vraie pour tout $\phi \in \mathrm{Co}(G)$ grâce à la décomposition $\mathrm{Co}_*(G) = VGNV$.

(ii) Si $\overline{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$, alors $G = \overline{G}$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Gl}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, auquel nous pouvons appliquer le théorème 2.1.4. Nous venons de voir dans la partie (i) que le prolongement $\tilde{\phi}$ de $\phi \in \mathrm{Co}(G)$ est G-conforme. Ainsi deux transformations G-conformes, considérées comme définies sur des ouverts denses de V, sont toujours composables. Il s'ensuit que $\mathrm{Co}_*(G)$ est un groupe. Comme $\mathrm{Co}_*(G) = VGNV$, c'est le groupe engendré par G et $\mathrm{Int}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g}))$ dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g}))$. De plus,

$$VGN = \mathrm{Co}_*(G)' = \{\phi_* \in \mathrm{Co}_*(G) \mid \det(D\phi(0))^{-1} \neq 0\}$$

est bien un ouvert dense de $\mathrm{Co}_*(G)$. Par conséquent,

$$\mathrm{Co}_*(G) = (VGN)^{-1}(VGN) = NVGN. \quad \square$$

2.3. Le théorème de Liouville pour les algèbres de Jordan semi-simples.

Nous avons montré une version infinitésimale du théorème de Liouville pour les algèbres de Jordan semi-simples (théorème 1.3.2) : l'algèbre de structure $\mathfrak{g}$ d'une algèbre de Jordan semi-simple et n'ayant pas d'idéal isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est de type fini d'ordre $k = 2$, et $\mathfrak{co}(\mathfrak{g}) = V \oplus \mathfrak{g} \oplus W$, où $W \cong \mathfrak{n}$ est une algèbre de Lie abélienne isomorphe à V. Pour en déduire la version globale, nous devons d'abord définir les groupes G qui correspondent à l'algèbre de structure $\mathfrak{g}$: le *groupe de structure* de l'algèbre de Jordan semi-simple V est défini par

$$\mathrm{Str}(V) = \{g \in \mathrm{Gl}(V) \mid \forall x \in V : P(gx) = gP(x)^t g\},$$

où $P(x) = 2\ell(x)^2 - \ell(x^2)$ est la représentation quadratique de V, et la transposée de g est prise par rapport à la forme bilinéaire associative non-dégénérée $(x \mid y) = \mathrm{tr}(\ell(xy))$ de V (voir 1.2). Alors $\mathrm{Str}(V)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{Gl}(V)$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dans le cas où l'algèbre de Jordan V est *euclidienne* (*i.e.*, $(\cdot \mid \cdot)$ est definie positive), $\mathrm{Str}(V)$ contient le sous-groupe ouvert

$$G(\Omega) = \{g \in \mathrm{Gl}(V) \mid g(\Omega) = \Omega\},$$

où Ω est le cône convexe des carrés des éléments inversibles de V. Ces deux groupes joueront le rôle du groupe G des sections précédentes.

THÉORÈME 2.3.1 (théorème de Liouville pour les algèbres de Jordan semi-simples). — *Soit V une algèbre de Jordan semi-simple qui ne contient pas d'idéal isomorphe à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, soient $\mathfrak{g}$ son algèbre de structure et $G \subset \mathrm{Gl}(V)$ un sous-groupe fermé d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

(i) *Toute transformation G-conforme de classe C^4 est rationnelle, et elle est une composée de translations, d'éléments de G et de $-j$, où $j(x) = x^{-1}$ est l'inversion dans l'algèbre de Jordan V.*

(ii) *Si $G = \mathrm{Str}(V)$ est le groupe de structure de l'algèbre de Jordan V, alors l'ensemble $\mathrm{Co}(G)$ des transformations G-conformes, considérée comme un ensemble d'applications birationnelles et G-conformes de V, est un groupe de Lie dont la structure est celle décrite dans les théorèmes 2.1.4 et 2.2.1. De plus, si $V = \bigoplus_{j=1}^{\ell} V_j$ est la décomposition en idéaux simples de V, alors la composante neutre de $\mathrm{Co}(G)$ est le produit direct des composantes neutres des groupes $\mathrm{Co}(G_j)$ correspondants aux idéaux simples V_j.*

(iii) *Si V est une algèbre de Jordan euclidienne sur $\mathbb{R}$, alors l'énoncé de (ii) est aussi vérifié si $G = G(\Omega)$, le groupe des automorphismes du cône symétrique Ω. Dans ce cas, le groupe $\mathrm{Co}(G)$ est isomorphe au groupe $G(T_\Omega)$ des automorphismes biholomorphes du domaine de type tube $T_\Omega = V + i\Omega \subset V \oplus iV$.*

Démonstration.

Partie (i). Montrons d'abord que $-j$ est une transformation G-conforme. Rappelons que l'orbite ouverte $\Omega = G\cdot e$ est un espace préhomogène symétrique dont la symétrie σ_e par rapport au point de base e (l'élément neutre de V), multipliée par -1, est G-conforme (section 0.2). Il suffit maintenant de remarquer que σ_e n'est autre que la restriction de j à Ω ; ceci est une conséquence du fait que $j(g \cdot x) = {}^t g^{-1} \cdot j(x)$ pour tout $g \in \mathrm{Str}(V)$.

En vue de (ii), montrons que le prolongement rationnel $-j$ de $-\sigma_e$ est une transformation $\mathrm{Str}(V)$-conforme partout où il est défini. En effet, on a $-(Dj)(x) = P(x)^{-1}$ pour x inversible (voir [FK94, II.3.3]), et il résulte de la formule fondamentale

$$P\big(P(x)y\big) = P(x)P(y)P(x)$$

(voir [FK94, II.3.3]), que $P(x)$ appartient à $\mathrm{Str}(V)$ si $P(x)$ est inversible.

Montrons que le groupe $\exp\mathfrak{n}$ introduit dans 2.1.4 est donné par

$$\exp(\mathfrak{n}) = \big\{\phi_v := (-j)\circ\tau_v\circ(-j) \mid v \in V\big\}.$$

En effet ϕ_{tv}, pour $t \in \mathbb{R}$, est un groupe à un paramètre qui est engendré par le champ quadratique homogène

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0}\phi_{tv}(x) = -\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big|_{t=0} j\big(tv - j(x)\big)\Big) = -Dj(-x^{-1})\cdot v = P(x)v,$$

en utilisant que $Dj(-j(x)) = Dj(-x)^{-1} = P(-x) = P(x)$. Par conséquent, si ξ est le champ $\xi(x) = P(x)v$, alors $\exp t\xi = \phi_{tv}$ et $\exp \mathfrak{n} = \{\phi_v \mid v \in V\}$. Ainsi $\exp \mathfrak{n} = (-j) \circ V \circ (-j)$, $N = \exp \mathfrak{n}_* = (-j)_* V(-j)_*$, et comme $\mathrm{Co}_*(G) = VGNV$ (théorème 2.1.4), $\mathrm{Co}_*(G)$ est engendré par $(-j)_*$, G et les translations, et par injectivité de $\phi \mapsto \phi_*$, l'analogue est vrai pour $\mathrm{Co}(G)$.

Partie (ii). Nous avons vu ci-dessus que $D(-j)(x) = P(x)^{-1}$ est dans $\mathrm{Str}(V)$ pour tout x où $-j$ est défini. Puisque tout $\phi \in \mathrm{Co}(G)$ se décompose comme décrit dans (i), il s'ensuit que $D\tilde{\phi}(x) \in \mathrm{Str}(V)$ pour tout x où $\tilde{\phi}$ est défini ($\tilde{\phi}$ est le prolongement rationnel de ϕ), et nous pouvons conclure comme dans le théorème 2.2.1 que $\mathrm{Co}(\mathrm{Str}(V))$ est un groupe.

Enfin, l'algèbre de structure $\mathfrak{g} = \mathfrak{str}(V)$ de V se décompose en une somme directe des algèbres de structure $\mathfrak{g}_j$ des idéaux simples V_j. D'après le lemme 1.3.3, $\mathfrak{co}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathfrak{co}(\mathfrak{g}_j)$, ce qui implique la dernière assertion.

Partie (iii). En remarquant que $P(x)$ est dans $G(\Omega)$ si $\det(P(x)) \neq 0$ (voir [FK94, III.2.2]), nous pouvons conclure comme dans (ii). Puisque le groupe $G(T_\Omega)$, agissant dans son algèbre de Lie qui est isomorphe à $\mathfrak{co}(\mathfrak{g})$, est engendré par les mêmes éléments que $\mathrm{Co}_*(G)$ (voir [FK94, X.5.6]), il est isomorphe à $\mathrm{Co}_*(G)$. $\square$

REMARQUE. — On peut montrer que $\mathrm{Str}(V)$ est égal à son normalisateur dans $\mathrm{Gl}(V)$ et satisfait donc aux conditions du théorème 2.2.1; cependant, la démonstration utilisant l'identité fondamentale des algèbres de Jordan nous semble plus directe. Le groupe $G(\Omega)$ ne satisfait jamais aux conditions de 2.2.1 car il ne contient pas $-\mathrm{id}_V$.

2.4. La complétion conforme.

Rappelons que nous avons introduit dans la section 0.4 la notion d'un difféomorphisme *conforme* entre variétés munies de *champs de groupes* et que nous avons muni tout espace homogène d'un groupe G d'un champ de groupes tel que l'action de G soit conforme.

THÉORÈME 2.4.1.

(i) *Sous les hypothèses du théorème* 2.2.1 (ii), *notons* $P := GN$ *et soit* τ_v *la translation par* $v \in V$. *Alors*

$$\pi : V \longrightarrow M := \mathrm{Co}_*(G)/P, \quad v \longmapsto \tau_v P$$

est un plongement conforme de V *comme ouvert dense dans* M, *et toute transformation conforme* (*locale, et de classe* C^{k+2}) *de* M *admet un unique prolongement conforme et analytique sur* M *entier, donné par un élément* *du groupe* $\mathrm{Co}_*(G)$. *L'application*

$$\ell : \mathfrak{n} \times V \longrightarrow M, \quad (X, v) \longmapsto \exp X \cdot \tau_v P$$

est surjective. L'espace M *ne dépend que de l'algèbre de Lie de* G.

(ii) *Si* V *est une algèbre de Jordan simple non-isomorphe à* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* G *son groupe de structure, alors la complétion conforme* M *de* V *est compacte. Si de plus* V *est une algèbre de Jordan réelle euclidienne, la complétion conforme* M *de* V *est conformément isomorphe à la frontière de Shilov* $\Sigma = \{w \in V_{\mathbb{C}} \mid w^{-1} = \bar{w}\}$ *du domaine borné* D *équivalent à* T_Ω.

Démonstration.

(i) Nous identifions V au sous-groupe $\{\tau_v \mid v \in V\}$ de $\mathrm{Co}_*(G)$. Alors $V \cap P$ est le groupe trivial, ce qui implique que π est injectif. L'application π est $\mathrm{Co}_*(G)$-équivariante dans le sens que $\pi(\phi(v)) = \phi\tau_v P = \phi\pi(v)$ pour tout couple (ϕ, v) tel que $\phi(v) \in V$ est défini. En particulier, elle est V et G-équivariante.

Nous pouvons identifier l'espace tangent $T_{eP}M$ à V tel que $T_0\pi = \mathrm{id}_V$. Par équivariance, la différentielle $T_v\pi$ est surjective en tout point $v \in V$. Ainsi π est une submersion injective et son image est par conséquent un ouvert de M. Cet ouvert est dense car $VGN \subset \mathrm{Co}_*(G)$ est dense (théorème 2.2.1, ii). L'application π est conforme, car elle est conforme en 0 et équivariante.

Pour montrer que M est «conformément complète», considérons une transformation conforme locale ϕ de M. Puisque $\mathrm{Co}_*(G)$ opère transitivement sur M, nous pouvons supposer que $\phi(eP) = eP$. Alors ϕ induit, *via* π, une transformation G-conforme de V, et le théorème 2.2.1 implique alors que ϕ est donné par un élément de $\mathrm{Co}_*(G)$.

Comme $\mathrm{Co}_*(G) = NVP$ (théorème 2.2.1), l'application ℓ est surjective. L'espace M est connexe car $V \subset M$ est dense ; la composante neutre de $\mathrm{Co}_*(G)$ (qui est le groupe engendré par V, G_0 et N dans $\mathrm{Aut}(\mathfrak{co}(\mathfrak{g}))$) agit donc transitivement sur M, ayant G_0N comme groupe stabilisateur du point de base $0 \in M$. Par conséquent, M ne dépend que de la composante neutre G_0 de G.

(ii) Il est connu que P est un sous-groupe parabolique du groupe semi-simple $\mathrm{Co}_*(G)$ (voir par exemple [KS93] où l'on trouve une classification en annexe A.2), et par conséquent M est compact.

Si V est euclidienne, soit $p : T_\Omega \to D$, $z \mapsto (z - ie)(z + ie)^{-1}$. Alors

$$p : V \longrightarrow \Sigma, \quad x \longmapsto (x - ie)(x + ie)^{-1}$$

est d'image dense, $p(V) = \{w \in \Sigma \mid \delta(e - w) \neq 0\}$. Il est connu que p est conforme et que Σ est homogène sous l'action de $G(T_\Omega)$. Puisque $\mathrm{Co}_*(G) \cong G(T_\Omega)$ (voir 2.3.1, iii), on en déduit que $M \cong \Sigma$. $\square$

REMARQUES.

1) Le fait que la frontière Σ de D est conformément complète a été déjà démontré par Kaneyuki [Kan89, th. 6.2] en utilisant des résultats de la théorie des G-structures dus à Tanaka. Son résultat s'exprime en disant que *le groupe des transformations causales de* Σ *est isomorphe à* $G(T_\Omega)$. Dans ce contexte, *causal* est synonyme de *conforme*. Nous allons, dans un travail ultérieur, montrer comment on peut utiliser le théorème de Liouville présenté ici pour déterminer les *groupes causaux* de certains *espaces symétriques causaux*.

2) Nous conjecturons qu'un théorème analogue à notre théorème de Liouville soit vrai pour les *systèmes triples de Jordan non-dégénérés* (voir à ce sujet aussi Goncharov [Go87]). Si V est une algèbre de Jordan simple complexe, la complétion conforme M de V est isomorphe à la compactification de V définie par Loos [Lo77] dans le cadre des *systèmes triples de Jordan*. En effet, il définit M comme quotient pour une relation d'équivalence qui, dans le cadre du théorème précédent, n'est autre que la relation d'équivalence sur $\mathfrak{n} \times V$ donnée par les fibres de l'application surjective ℓ.

Annexe

Voici quelque lemmes de calcul différentiel utilisés dans le chapitre 2 : soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

A1. — Soient ϕ_1 et ϕ_2 des applications différentiables dans un voisinage de $0 \in V$ telles que pour $i = 1, 2$, $\phi_i(0) = 0$, $D\phi_i(0) = \mathrm{id}_V$, $D^j\phi_i(0) = 0$, $j = 2, \ldots, k-1$. Alors :

$$D^k(\phi_1 \circ \phi_2)(0) = D^k\phi_1(0) + D^k\phi_2(0).$$

A2. — Soit ξ un champ de vecteurs défini dans un voisinage de 0 qui s'annule en 0 à l'ordre $k \geq 1$ et soit

$$\phi : \mathbb{R} \times V \supset D \to V, \quad (t, x) \mapsto \phi_t(x)$$

le flot engendré par ξ, où D est un voisinage de $\{0\} \times V$ dans $\mathbb{R} \times V$ et $I_x := D \cap (\mathbb{R} \times \{x\})$ est un intervalle comprenant 0. Alors pour tout $t \in I_0$,

- $\phi_t(0) = 0$,
- $D(\phi_t)(0) = \mathrm{id}_V$ et
- $D^j(\phi_t)(0) = 0$ pour $j = 2, \ldots, k-1$ et si $D^k(\phi_t)(0) = 0$ pour tout $t \in I_t$, alors ξ s'annule en 0 à l'ordre $k+1$.

Si $k \geq 2$, alors il existe un voisinage U de 0 tel que $1 \in I_x$ pour tout $x \in U$; *i.e.* $\phi_1 : U \to V$ est bien défini.

A3. — Soit $M \subset \mathbb{K}^n$ une sous-variété différentiable et $\alpha : \mathbb{R} \supset I \to M$ une courbe de classe $\mathcal{C}^k$ telle que

$$\alpha(0) = p \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\Big|_{t=0} \alpha(t) = 0 \quad \text{pour } j = 1, \ldots, k-1.$$

Alors $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\Big|_{t=0} \alpha(t)$ appartient à T_pM.

A4. — Soit $H \subset \mathrm{Gl}(V)$ un sous-groupe fermé et soit $\alpha : \mathbb{R} \supset I \to \mathrm{Gl}(V)$ une courbe de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $t \in I$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha(t) \in T_{\alpha(t)}\big(\alpha(t) \circ H\big) ;$$

alors l'image de α appartient à $\alpha(0) \circ H$.

On peut démontrer (A1) et (A3) par exemple en utilisant un développement limité, et (A4) en introduisant une projection locale

$$p : \mathrm{Gl}(V) \supset U \longrightarrow \mathrm{Gl}(V)/H ;$$

on constate que $\beta = p \circ \alpha$ est une courbe constante.

En ce qui concerne (A2), il est classique que 0 est un point fixe de ϕ_t. On définit les courbes

$$\alpha_j(t) := (D^j \phi_t)(0).$$

Par récurrence, en utilisant (A1) et le fait que $\alpha_j'(0) = 0$, on montre que ces courbes sont des homomorphismes de groupes locaux qui doivent être triviaux. Si $\alpha_k(t) = 0$ pour tout $t \in I$, on obtient en dérivant par rapport à t que $D^k\xi(0) = 0$. Pour démontrer la dernière assertion de (A2), nous inspectons la preuve du théorème de Picard-Lindelöf (voir [A74, p. 217]) : par hypothèse, $D\xi(0) = 0$; il existe alors un voisinage U de 0 tel que ξ satisfait à une condition de Lipschitz avec une constante de Lipschitz $L < 1$; on constate qu'alors le flot $\phi_t(x)$ de ξ est bien défini pour tout $x \in U$ et $t < 1/L$, donc en particulier pour $t = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[A74] ARNOLD (V.). — *Équations Différentielles ordinaires.* — Éditions MIR, Moscou, 1974.

[Be94] BERTRAM (W.). — *Dualité des espaces riemanniens symétriques et analyse harmonique*, thèse, Université Paris 6, 1994.

[DNF79] DOUBROVINE (B.A.), NOVIKOV (S.P.) et FOMENKO (A.T.). — *Géométrie contemporaine I.* — Éditions MIR, 1979.

[FK94] FARAUT (J.) et KORANYI (A.). — *Analysis on symmetric cones.* — Oxford University Press, 1994.

[Go87] GONCHAROV (A.B.). — *Generalized conformal structures on manifolds*, Selecta Math. Soviet. 6, 1987, p. 307–340.

[Kan89] KANEYUKI (S.). — On the causal structures of the Shilov boundaries of symmetric bounded domains, dans *Prospects in Complex Geometry.* — Springer Lecture Note **1468**, New York, 1989.

[Kay94] KAYOYA (J.-B.). — *Analyse sur les algèbres de Jordan réelles simples*, thèse, Université Paris 6, 1994.

[Ko72] KOBAYASHI (S.). — *Transformation Groups in Differential Geometry.* — Springer EMG 70, New York, 1972.

[KS93] KOSTANT (B.) and SAHI (A.). — *Jordan algebras and Capelli identities*, Invent. Math., t. **112**, 1993, p. 657–664.

[L1850] LIOUVILLE (J.). — *Théorème sur l'équation* $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \lambda(\mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}\beta^2 + \mathrm{d}\gamma^2)$, J. Math. Pures et Appl., t. **15**, p. 103, 1850.

[Lo77] LOOS (O.). — *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Lecture Notes, Univ. of California, Irvine, 1977.

[Ru92] RUBENTHALER (H.). — *Algèbres de Lie et espaces préhomogènes.* — Hermann, Paris, 1992.

[Sa80] SATAKE (I.). — *Algebraic structures of symmetric domains.* — Iwanami Shoten, Princeton, 1980.

[Shi75] SHIMA (H.). — *On locally homogeneous domains of completeley reductive linear Lie groups*, Mathematische Annalen, t. **217**, 1975, p. 93–95.

[St64] STERNBERG (S.). — *Lectures on Differential Geometry.* — Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.