

# BULLETIN DE LA S. M. F.

D. LE BRIGAND

J.J. RISLER

## **Algorithme de Brill-Noether et codes de Goppa**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 116, n° 2 (1988), p. 231-253

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1988\\_\\_116\\_2\\_231\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1988__116_2_231_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ALGORITHME DE BRILL-NOETHER ET CODES DE GOPPA

PAR

D. LE BRIGAND et J.J. RISLER (\*)

---

RÉSUMÉ. — Soit  $C$  une courbe projective plane définie sur un corps  $k$ , n'ayant que des singularités ordinaires, l'algorithme classique de Brill-Noether permet de construire une base du  $k$ -espace vectoriel  $\mathcal{L}(D)$  où  $D$  est un diviseur effectif, rationnel sur  $k$ , de  $C$ .

Dans cet article nous généralisons l'algorithme à une courbe projective plane ayant des singularités quelconques. Dans le cadre de la théorie des codes, l'intérêt de cette généralisation est qu'elle permet de construire de "bons" codes associés à des courbes ayant un grand nombre de points rationnels sur un corps fini. Comme application, nous donnons un exemple de code dont les paramètres sont situés au-dessus de la borne de Varshamov-Gilbert; ce code est construit à l'aide d'une courbe ayant un point singulier non ordinaire et dont le nombre de points rationnels sur  $F_{16}$  atteint la borne de Weil.

ABSTRACT. — Let  $C$  be a projective plane curve, defined on a field  $k$ , with ordinary singular points; the classical Brill-Noether algorithm gives a construction of a basis of the  $k$ -vector space  $\mathcal{L}(D)$ ,  $D$  being an effective,  $k$ -rational, divisor of  $C$ .

In this paper, we present a generalisation of the Brill-Noether algorithm to a projective plane curve having non ordinary singularities. In the frame work of Code Theory, that generalisation gives a construction of "good" codes associated with curves having many rational points over a given finite field. We give, as an example, the construction of a code, the parameters of which are better than Varshamov-Gilbert bound; this code is associated with a curve having a non ordinary singular point and the maximum number of rational points over  $F_{16}$  within the Weil bound.

### Introduction

Soit  $C$  une courbe projective, plane, définie sur un corps  $k$ ,  $D$  un diviseur effectif de  $C$ . L'algorithme de Brill-Noether permet, à partir de

---

(\*) Texte reçu le 3 octobre 1986, révisé le 19 mai 1987.

D. LE BRIGAND, Université P. et M. Curie, U.A. 213, Tour 45–46, 5<sup>ième</sup> étage, 4 Place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05, France.

J.J. RISLER, Université P. et M. Curie, U.A. 189, Tour 55–65, 5<sup>ième</sup> étage, 4 Place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05, France.

Ce travail a été réalisé dans le cadre de l'A.T.P. n° 904 188 du C.N.R.S.

l'équation de  $C$  et du diviseur  $D$ , d'exhiber une base de l'espace vectoriel (sur  $k$ )  $\mathcal{L}(D)$ ; cet algorithme utilise la notion d'*adjointe* d'une courbe plane et est classiquement présenté uniquement dans le cas où  $C$  n'a que des *singularités ordinaires* (cf. [A], [F] ou [W]). (Remarquons que cela est théoriquement suffisant puisque toute courbe plane  $C$  est birationnellement équivalente à une courbe plane  $\bar{C}$  n'ayant comme singularités que des points doubles ordinaires).

Nous généralisons dans cet article l'algorithme de Brill-Noether au cas où les singularités de  $C$  sont quelconques.

Comme l'algorithme de Brill-Noether (cf. [G1]) sert à construire les matrices génératrices des codes de Goppa, cette généralisation nous permet de donner un algorithme pour construire des codes géométriques définis à l'aide d'une courbe plane ayant des singularités quelconques. L'article se termine par un exemple de construction d'un tel code, défini sur  $F_{16}$ . Ce code a pour longueur 32, dimension 4 et distance minimale 27 : il a donc des paramètres "excellents", ce qui montre qu'il est sûrement intéressant de considérer des courbes ayant des singularités quelconques.

Nous remercions F. CATANESE, de Pise, pour une conversation qui a été déterminante dans l'élaboration de cet article et Mme ORION qui a bien voulu en assurer la frappe.

## 0. Références

Nous utilisons dans cet article certains résultats de [F], mais sur un corps *non algébriquement clos* (un corps fini en l'occurrence). Les résultats de [F] se transposent immédiatement à ce cas; pour une référence sur la géométrie des courbes sur un corps quelconque, cf. [C].

## 1. Définitions — Rappels — Notations

Soient  $k$  un corps fini,  $\bar{k}$  une clôture algébrique de  $k$ ,  $S$  une surface projective lisse définie sur  $k$ .

**1.1. Courbes algébriques** ([F, p. 103, ...]). — Soit  $X$  une courbe lisse définie sur  $k$ , contenue dans  $S$ . On supposera  $X$  absolument irréductible sur  $k$ , *i.e.* irréductible sur  $\bar{k}$ . La donnée d'une telle courbe est équivalente à celle de son *corps de fonctions rationnelles*  $k(X)$  noté  $K$  : ce dernier est une extension de type fini et de degré de transcendance 1 de  $k$ ;  $k$  est algébriquement fermé dans  $K$ .

Les points de  $X$  à coordonnées dans  $k$  sont les *points rationnels* de  $X$ .

On appelle *place* de  $X$  (ou de  $K$ ) une somme formelle de points de  $X$  à coordonnées dans  $\bar{k}$  invariante par l'action du groupe de Galois de  $\bar{k}$  sur  $k$ . Il existe une correspondance biunivoque entre les places  $\gamma$  de  $X$  et les

anneaux de valuation discrète  $\mathcal{O}_\gamma(X)$  de  $K$  :  $\text{ord}_\gamma$  désignera la valuation de  $\mathcal{O}_\gamma(X)$ , (cf. [C, p. 2]).

**1.2. Diviseur rationnel.** — Un diviseur  $D$  sur  $X$ , rationnel sur  $k$ , est une somme formelle de places :

$$D = \sum_{\gamma} n_{\gamma} \gamma \quad n_{\gamma} \in \mathbb{Z};$$

où  $n_{\gamma} = 0$  sauf pour un nombre fini de places  $\gamma$ .

Un diviseur  $D$  sera dit *effectif* si

$$D = \sum_{\gamma} n_{\gamma} \gamma \quad \text{avec } n_{\gamma} \geq 0,$$

pour toute place  $\gamma$  de  $X$ . Le *degré* d'un diviseur  $D = \sum_{\gamma} n_{\gamma} \gamma$  est  $\text{deg } D = \sum_{\gamma} n_{\gamma}$ . Le *support* d'un diviseur  $D$  est  $\text{supp } D = \{\gamma \mid n_{\gamma} \neq 0\}$ .

Si  $f$  est un élément de  $K^*$  on lui associe un diviseur  $(f)$  sur  $X$  en posant :

$$(f) = \sum_{\gamma} \text{ord}_{\gamma}(f) \gamma$$

et on a  $\text{deg}(f) = 0$  pour tout  $f$  dans  $K^*$  (cf. [C, p. 18]). Deux diviseurs  $D = \sum_{\gamma} n_{\gamma} \gamma$  et  $D' = \sum_{\gamma} n'_{\gamma} \gamma$  seront dits *équivalents* s'il existe  $f$  dans  $K^*$  tel que  $D - D' = (f)$ .

Remarquons que deux diviseurs équivalents ont le même degré.

On peut définir une relation d'ordre sur l'ensemble des diviseurs sur  $\tilde{X}$  de la façon suivante :

$$D \leq D'$$

si et seulement si pour toute place  $\gamma$  de  $X$  on a  $n_{\gamma} \leq n'_{\gamma}$ .

A tout diviseur  $D$  sur  $X$  est associé un  $k$ -espace vectoriel noté  $\mathcal{L}(D)$  :

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in K^* \mid (f) \geq -D\} \cup \{0\}.$$

La dimension  $\ell(D)$  de  $\mathcal{L}(D)$  est finie et ne dépend que de la classe de  $D$  pour l'équivalence linéaire. Dans le cas où  $S = \mathbb{P}^2(k)$ ,  $\ell(D)$  est donnée par le *théorème de Riemann-Roch* (cf. [F, p. 210])

$$\ell(D) = \text{deg } D + 1 - g + \ell(\mathcal{K} - D)$$

où  $g$  est le genre de  $X$ ,  $\mathcal{K}$  la classe canonique et si  $\text{deg } D \geq 2g - 1$ , on a :

$$\ell(D) = \text{deg } D + 1 - g.$$

(cf. [C, p. 32]).

**1.3 Diviseur intersection.** — *Un diviseur rationnel  $\mathcal{D}$  sur une surface lisse  $S$  est une somme formelle de courbes irréductibles  $\mathcal{C}_i$  contenues dans  $S$  et définies sur  $k$  :*

$$\mathcal{D} = \sum_i n_i \mathcal{C}_i, \quad n_i \in \mathbb{Z};$$

(cf. [Sh, p. 127]) où  $n_i = 0$  sauf pour un nombre fini d'indices  $i$ .

Si  $X$  est une courbe lisse de  $S$ ,  $\mathcal{C}$  une autre courbe définie sur  $k$  contenue dans  $S$  et ne contenant pas  $X$  comme composante, on associe à  $\mathcal{C}$  un diviseur sur  $X$  en posant :

$$\mathcal{C} \cdot X = \sum_{x \in \mathcal{C} \cap X} m_x(\mathcal{C}, X)x.$$

$\mathcal{C} \cdot X$  est appelé *diviseur intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $X$* ; pour tout  $x$  de  $\mathcal{C} \cap X$ ,  $m_x(\mathcal{C}, X)$  est la *multiplicité d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $X$  au point  $x$* , définie de la façon suivante :

Soit  $\mathcal{O}_x$  l'anneau local de  $S$  en  $x$ ,  $\Phi$  (resp.  $F$ ) une équation de  $\mathcal{C}$  (resp.  $X$ ) dans  $\mathcal{O}_x$ , alors :

$$m_x(\mathcal{C}, X) = \dim_{\bar{k}} \mathcal{O}_x / (\Phi, F)$$

(cf. [B, p. 4]). Remarquons que  $\mathcal{C} \cdot X$  est un diviseur rationnel effectif.

De même si  $\mathcal{D}$  est un diviseur sur  $S$  :  $\mathcal{D} = \sum_i n_i \mathcal{C}_i$  où pour tout  $i$   $\mathcal{C}_i$  ne contient pas  $X$  comme composante, on peut lui associer un diviseur sur  $X$  en posant :

$$\mathcal{D} \cdot X = \sum_i n_i (\mathcal{C}_i \cdot X).$$

Dans la suite nous supposons que tous les objets et morphismes sont définis sur  $k$  (quitte à prendre une extension du corps de départ).

**1.4. Éclatements** (cf. [B, p. 15-16 dans le cas  $k = \mathbb{C}$ ]).

*Définition.* — Soit  $S$  une surface projective lisse,  $P_1$  un point de  $S$ , l'*éclatement de  $P_1$  dans  $S$*  est un morphisme birationnel :

$$\pi_1 : S_1 \longrightarrow S$$

tel que :

- $S_1$  est une surface projective lisse, définie sur  $k$ ;
- la restriction de  $\pi_1$  à  $\pi_1^*(S - P_1)$  est un isomorphisme sur  $S - P_1$ ;
- $E_1 = \pi_1^*(P_1)$  est isomorphe à  $\mathbb{P}^1$ .

$E_1$  est le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

Si  $C$  est une courbe de  $S$  et  $P_1$  un point de  $C$  de multiplicité  $r_1$ , l'adhérence de  $\pi_1^*(C - P_1)$  dans  $S_1$  est une courbe  $C_1$  appelée transformée stricte de  $C$  dans  $S_1$  et on a :

$$\pi_1^*(C) = C_1 + r_1 E_1.$$

La restriction  $\tilde{\pi}_1$  de  $\pi_1$  à  $C_1$  est l'éclatement du point  $P_1$  dans  $C$ ; le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \xrightarrow{\quad} & S_1 \\ \tilde{\pi}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ C & \xrightarrow{\quad} & S \end{array}$$

est commutatif.

Pratiquement l'éclatement  $\pi_1$  se fait de la façon suivante :

Soient  $U$  un ouvert de  $S$ , contenant  $P_1$ ,  $(x, y)$  des coordonnées locales au voisinage de  $P_1$ ,  $U_1$  la sous-variété de  $U \times \mathbb{P}^1$  d'équation :  $xY - yX = 0$  où  $(X, Y)$  désigne les coordonnées homogènes dans  $\mathbb{P}^1$ . La projection  $p_1$  :

$$\begin{array}{ccc} U_1 & \longrightarrow & U \\ (x, y, X, Y) & \longmapsto & (x, y) \end{array}$$

est un isomorphisme au-dessus des points de  $U$  tels que  $x$  ou  $y$  soit non nul et :

$$p_1^{-1}(P_1) = \{P_1\} \times \mathbb{P}^1.$$

Les points de  $E_1 \cap C_1$  s'identifient aux directions tangentes à  $S$  en  $P_1$ .

**1.5.** Nous aurons besoin dans la suite du lemme suivant :

Soit  $V$  un ouvert non vide de  $C$ , on note  $\Gamma(V)$  l'ensemble des fonctions rationnelles sur  $C$  qui sont définies en tout point de  $V$ , alors on a avec les mêmes notations que plus haut et en supposant que  $x = 0$  est l'équation de  $E_1$  (cf. [F, p. 165]) :

LEMME. — *Il existe un voisinage affine  $W$  de  $P_1$  dans  $C$  tel que  $\pi_1^{-1}(W)$  soit une sous-variété affine ouverte  $W'$  de  $C_1$  et on a :*

$$x^{r_1-1}\Gamma(W') \subset \Gamma(W).$$

**1.6. Normalisée d'une courbe.** — Soit  $C$  une courbe définie sur  $k$ , absolument irréductible sur  $k$ , contenue dans une surface lisse  $S$ . Si  $P_1$  est

un point singulier de  $C$ , on éclate ce point dans  $S$  et on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_1 & \longrightarrow & S_1 \\ \tilde{\pi}_1 \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \tilde{C} & \longrightarrow & \tilde{S} \end{array}$$

Si  $C_1$  est une courbe lisse dans  $S_1$ ,  $C_1$  est la normalisée, notée  $\tilde{C}$ , de  $C$ ; sinon on éclate un point singulier  $P_2$  de  $C_1$ , etc. On sait qu'au bout d'un nombre fini  $N$  d'éclatements ponctuels, la transformée stricte  $C_N$  de  $C_{N-1}$  par  $\pi_N$  sera une courbe lisse : c'est la normalisée  $\tilde{C}$  de  $C$

(cf. [F, p. 180]). La surface lisse  $S_N$  sera notée  $\tilde{S}$ .

Posons  $\pi = \pi_N \circ \dots \circ \pi_1$ ;  $\pi_i$  est l'éclatement d'un point  $P_i$  de  $S_{i-1}$  de multiplicité  $r_i$  sur  $C_{i-1}$  ( $C_0 = C$ ;  $S_0 = S$ ). On notera  $\tilde{\pi} : \tilde{C} \rightarrow C$  le *morphisme de normalisation* qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C} & \longrightarrow & \tilde{S} \\ \tilde{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ C & \longrightarrow & S \end{array}$$

Si  $P$  est un point singulier de  $C$ , les points  $P_i$  qui se projettent sur  $P$  sont appelées classiquement *points infiniment voisins de P*.

Les places  $\gamma$  de  $\tilde{C}$  telles que  $\tilde{\pi}_*(\gamma) = P$  seront appelées *places au-dessus de P*.

**1.7. Diviseur sur la normalisée d'une courbe.** — Soit  $D$  un diviseur effectif sur  $S$ , on peut lui associer le diviseur  $\pi^*(D)$  sur  $\tilde{S}$ . Si  $\pi^*(D)$  ne contient pas  $\tilde{C}$  comme composante, il définit un diviseur sur  $\tilde{C}$  comme on l'a vu dans § 1.3. Nous appliquerons ce résultat par la suite dans les cas suivants :

a) Soit  $E_i$  le diviseur exceptionnel du  $i$ ème éclatement  $\pi_i$  et  $\pi'_i$  le morphisme

$$\tilde{S} \longrightarrow S_i \quad (\pi'_i = \pi_N \circ \dots \circ \pi_{i+1}; \pi'_0 = \pi).$$

On notera  $\tilde{E}_i$  le diviseur effectif sur  $\tilde{C}$  associé au diviseur sur  $\tilde{S}$  :  $\pi'_i{}^*(E_i)$  (il est clair que ce dernier ne contient pas  $\tilde{C}$  comme composante). On a donc :

$$\tilde{E}_i = \pi'_i{}^*(E_i) \cdot \tilde{C}.$$

b) Soit  $\mathfrak{C}$  une courbe tracée sur  $S$  ne contenant pas  $C$  comme composante. On notera  $(\mathfrak{C})$  le diviseur effectif sur  $\tilde{C}$  associé au diviseur sur  $\tilde{S}$ ,  $\pi^*(\mathfrak{C})$  :

$$(\mathfrak{C}) = \pi^*(\mathfrak{C}) \cdot \tilde{C}.$$

Il résulte de l'hypothèse que  $\pi^*(\mathfrak{C})$  ne contient pas  $\tilde{C}'$  comme composante).

**1.8. Courbes projectives planes. Formes.** — On se place maintenant dans le cas où  $S = \mathbb{P}^2(k)$ .

Un polynôme homogène de  $k[X, Y, Z]$  de degré  $d$  est une forme de degré  $d$ .

Une courbe projective plane  $C$  définie sur  $k$  admet pour équation  $\varphi(X, Y, Z) = 0$  où  $\varphi$  est une forme. On notera une courbe plane  $C$  d'équation  $\varphi = 0$  :  $C(\varphi = 0)$ .

On dira qu'une courbe plane  $C$  est à singularités ordinaires si en chaque point singulier  $P$  de  $C$  de multiplicité  $r$ , la courbe a  $r$  tangentes distinctes. Si  $C$  est une courbe plane absolument irréductible sur  $k$ , n'ayant que des singularités ordinaires  $P_1, \dots, P_n$  de multiplicités respectives  $r_1, \dots, r_n$ , le genre de  $C$  est égal :

$$g = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n r_j(r_j-1)$$

(cf. [F, p. 199]) où  $m$  est le degré de la forme  $\varphi$  qui définit  $C$  ( $g$  est en fait le genre de la normalisée  $\tilde{C}$  de  $C$ ).

Soit  $C$  une courbe projective plane singulière,  $\tilde{\pi} : \tilde{C} \rightarrow C$  le morphisme de normalisation de  $C$ . Si  $\tilde{\pi}$  est composé de  $N$  éclatements ponctuels de centre  $P_1, \dots, P_N$  ayant les multiplicités respectives  $r_1, \dots, r_N$  sur les transformées strictes successives  $C_i$ , alors le genre de  $\tilde{C}$  (ou de  $C$ ) est égal à (cf. [A]) :

$$g = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N r_j(r_j-1).$$

Soient  $C(F=0)$  une courbe plane singulière,  $\tilde{\pi} : \tilde{C} \rightarrow C$  le morphisme de normalisation,  $\mathfrak{C}(\varphi=0)$  une autre courbe plane ne contenant pas  $C$  comme composante. Le diviseur sur  $\tilde{C}$  associé à  $\mathfrak{C}$  est égal à :

$$(\mathfrak{C}) = \sum_{\gamma} \text{ord}_{\gamma}(\varphi)\gamma$$

où  $\text{ord}_{\gamma}(\varphi)$  est défini de la façon suivante : si  $\gamma$  est une place au-dessus d'un point singulier  $P$  de  $C$ ,  $(x, y)$  des coordonnées locales au voisinage

de  $P$ ,  $\varphi_*(x, y)$  l'équation locale de  $\mathfrak{C}$  au voisinage de  $P$  et  $\bar{\varphi}$  l'image de  $\varphi_*$  dans  $\mathcal{O}_P(C) \subset K$ , alors on pose :

$$\text{ord}_\gamma(\varphi) = \text{ord}_\gamma(\bar{\varphi})$$

(cf. [F, p. 182]). Si  $\gamma_1, \dots, \gamma_\ell$  sont les places de  $\tilde{C}$  au-dessus de  $P$ , on décompose chaque  $\gamma_i$  en une somme formelle de points à coordonnées dans  $\bar{k}$  :

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{n_i} Q_{ji}.$$

Un point  $Q_{ji}$  ainsi obtenu appartient au support d'une seule place  $\gamma_i$ , on peut donc poser sans ambiguïté :

$$\text{ord}_{Q_{ji}} = \text{ord}_{\gamma_i}.$$

Alors on a :

$$m_P(\mathfrak{C}, C) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_i} \text{ord}_{Q_{ji}}(\bar{\varphi}).$$

### 2. Adjointe d'une courbe $C$ contenue dans une surface

Il est entendu une fois pour toutes que les courbes  $\mathfrak{C}$  de  $S$  considérées ne contiennent pas  $C$  comme composante.

Les objets et morphismes considérés dans ce paragraphe seront toujours supposés définis sur  $k$ .

**2.1.** Soit  $S$  une surface algébrique lisse et projective,  $C$  une courbe réduite (non nécessairement lisse) contenue dans  $S$ . On note comme dans le paragraphe précédent par  $\tilde{\pi} : \tilde{C} \rightarrow C$  le morphisme de normalisation de  $C$  et  $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_N \circ \dots \circ \tilde{\pi}_1$ . Pour chaque  $i, i = 1, \dots, N$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C_i & \hookrightarrow & S_i \\ \tilde{\pi}_i \downarrow & & \downarrow \pi_i \\ C_{i-1} & \hookrightarrow & S_{i-1} \end{array}$$

où  $\pi_i$  est l'éclatement dans la surface lisse  $S_{i-1}$  d'un point  $P_i \in C_{i-1}$  de multiplicité  $r_i$  ( $r_i > 1$ ) sur  $C_{i-1}$ ;  $E_i$  désigne le diviseur exceptionnel de l'éclatement  $\pi_i$ ,  $E_i = \pi_i^*(P_i)$ ,  $\pi'_i$  le morphisme :  $\tilde{S} \rightarrow S_i$ , ( $\pi'_0 = \pi$ ) et  $\tilde{E}_i$  le diviseur sur  $\tilde{C}$  défini par  $\pi_i'^*(E_i)$  (cf. § 1.7).

**2.2. Définition.** — Une courbe  $\mathcal{C} \subset S$  est dite *adjointe de C* si l'on a :

$$(\mathcal{C}) \geq \sum_{i=1}^N (r_i - 1) \tilde{E}_i.$$

Le diviseur  $\sum_{i=1}^N (r_i - 1) \tilde{E}_i$  est appelé *diviseur d'adjonction de C*.

**2.3. Exemples.**

a) Si  $C$  est lisse, toute courbe est une adjointe de  $C$  (en effet le diviseur d'adjonction est réduit à  $(0)$ ).

b) LEMME. — Si  $C$  n'a que des singularités ordinaires  $P_j$  de multiplicités  $r_j$ , une courbe  $\mathcal{C}$  est une adjointe de  $C$  si et seulement si on a pour tout  $j$  :  $e_{P_j}(\mathcal{C}) \geq r_j - 1$  où  $e_{P_j}(\mathcal{C})$  désigne la multiplicité de  $\mathcal{C}$  en  $P_j$ .

*Démonstration.* — Pour désingulariser  $C$  il faut faire éclater une fois chaque point  $P_j$ ; comme ces éclatements sont indépendants les uns des autres on peut supposer que  $C$  a une seule singularité ordinaire  $P$  de multiplicité  $r$ . Soit  $\pi_1$  l'éclatement du point  $P$  dans  $S$ .

Le diviseur  $\tilde{E}_1$  sur  $\tilde{C}$  contient exactement  $r$  points  $Q_1, \dots, Q_r$ , à coordonnées dans  $\bar{k}$ , qui correspondent aux  $r$  tangentes distinctes de  $C$  en  $P$  :

$$\tilde{E}_1 = \sum_{i=1}^r Q_i.$$

Soit  $\mathcal{C}$  une courbe de  $S$  telle que  $e_P(\mathcal{C}) \geq r - 1$ . On a (cf. § 1.4) :

$$\pi_1^*(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_1 + e_P(\mathcal{C})E_1$$

où  $\mathcal{C}_1$  est la transformée stricte de  $\mathcal{C}$  par  $\pi_1$ .

Par suite :

$$(\mathcal{C}) = \pi_1^*(\mathcal{C}) \cdot \tilde{C} \geq e_P(\mathcal{C}) \tilde{E}_1$$

et la courbe  $\mathcal{C}$  est une adjointe de  $C$ .

Réciproquement si  $\mathcal{C}$  est une adjointe de  $C$  on a

$$(H) \quad (\mathcal{C}) \geq \sum_j (r_j - 1) \tilde{E}_j$$

et  $\tilde{E}_j = \sum_{i=1}^{r_j} Q_{ji}$ .

Si pour un certain  $j$  on a  $e_{P_j}(\mathcal{C}) = e < r_j - 1$ , il existe au moins une branche de  $C$  à laquelle  $\mathcal{C}$  n'est pas tangente en  $P_j$ . Si  $Q_{ji}$  est un des

points de  $\tilde{E}_j$  correspondant à cette branche, le coefficient de  $Q_{ji}$  dans  $(\mathcal{C})$  est égal à  $e$  ce qui contredit l'hypothèse (H).

*Remarque.* — On retrouve bien la définition classique d'une adjointe (cf. [F, p. 190]).

c) Considérons la courbe projective plane  $C$  d'équation  $Y^2T = X^3$ ,  $C$  a une seule singularité, qui est non ordinaire, en  $P_1 = (0, 0, 1)$  de multiplicité  $r_1 = 2$ . Le morphisme  $\tilde{\pi}$  est constitué d'un seul éclatement, celui de  $P_1$ , et si  $Q_1$  est l'unique point de  $\tilde{C}$  tel que

$$\tilde{\pi}(Q_1) = P_1$$

on a  $\tilde{E}_1 = 2Q_1$  (le diviseur  $E_1$  est tangent à  $\tilde{C}$  en  $Q_1$ ).

On en déduit immédiatement qu'une courbe plane  $\mathcal{C}$ , ne contenant pas  $C$  comme composante, est une adjointe de  $C$  si  $\mathcal{C}$  passe par  $P_1$ ; en effet on a :

$$(\mathcal{C}) = \sum_{\gamma} \text{ord}_{\gamma}(\mathcal{C})\gamma$$

et pour  $\gamma = Q_1$ , on a  $\text{ord}_{\gamma}(\mathcal{C}) = m_{P_1}(\mathcal{C}_1C)$ .

Par suite la condition  $(\mathcal{C}) \geq E_1$ , implique  $m_{P_1}(\mathcal{C}, C) \geq 2$ . Or  $m_{P_1}(\mathcal{C}, C) \geq e_{P_1}(\mathcal{C}) \times e_{P_1}(C) = e_{P_1} \times 2$ ; donc si  $e_{P_1}(\mathcal{C}) \geq 1$  la courbe  $\mathcal{C}$  sera une adjointe de  $C$ .

**2.4.** Il résulte de la définition des diviseurs  $\tilde{E}_i$  et de celles des adjointes que, si une courbe  $\mathcal{C}$ , contenue dans une surface  $S$ , "passe" par chaque point infiniment voisin  $P_i$  avec une multiplicité supérieure ou égale à  $r_i - 1$ , ( $1 \leq i \leq N$ ,  $N$  désignant le nombre d'éclatements nécessaires pour désingulariser  $C$ ), alors  $\mathcal{C}$  est une adjointe de  $C$ .

Cette condition est souvent prise comme définition de l'adjointe d'une courbe (cf. [A]), mais elle est plus restrictive que la définition que nous avons donnée : en effet on voit dans l'exemple 2.3.c) que si  $\mathcal{C}$  passe par  $P_1$  avec la multiplicité 1, sans admettre  $Y = 0$  comme tangente,  $\mathcal{C}$  sera une adjointe de  $C$  au sens de notre définition mais ne vérifiera pas la condition ci-dessus.

**2.5.** Nous allons maintenant donner une autre condition suffisante sur  $\mathcal{C}$  pour être adjointe de  $C$  au sens de notre définition.

Soit  $C$  une courbe réduite contenue dans  $S$ .

Plaçons-nous au voisinage d'un point singulier  $P_0$  de  $C$  et notons  $\pi_0 : \tilde{S}_0 \rightarrow S$  le morphisme composé des éclatements désingularisant  $C$  au voisinage de  $P_0$  :  $\pi_0$  est composé de  $p$ -éclatements qui sont certains des éclatements de la suite qui compose  $\pi$ .

Notons  $E'_i \subset \tilde{S}_0$  le transformé strict du diviseur exceptionnel  $E_i$  du  $i$ ème éclatement, par le morphisme

$$\pi'_{i,0} : \tilde{S}_0 \rightarrow S_i \quad (0 \leq i \leq p-1, \pi'_0 = \pi_0).$$

On a alors :

**2.6. LEMME.** —  $\pi_0^*(P_0) = n_1 E'_1 + \dots + n_p E'_p, \quad (E'_p = E_p).$

*Preuve.* — En effet on a  $\pi_1^*(P_0) = E_1$ . Le morphisme  $\pi_2$  est l'éclatement d'un point  $P_2$  de  $E_1$ ; on a donc :

$$\pi_2^*(E_1) = E'_1 + E_2$$

avec l'abus de langage consistant à noter de la même façon les transformées strictes de  $E_j$  sur  $\tilde{S}_0$  et sur  $S_i$  (pour  $j < i$ ). Plus généralement  $\pi_i$  est l'éclatement d'un point  $P_i$  de  $E_\ell$  avec  $\ell < i$ . Alors :

1. si  $P_i \notin E_k \quad \forall k < i, k \neq \ell$ , on a:

$$\begin{cases} \pi_i^*(E_\ell) = E'_\ell + E_i, \\ \pi_i^*(E_k) = E'_k, \end{cases}$$

$\forall k < i, k \neq \ell$  (avec le même abus de langage que précédemment).

2. si  $P_i \in E_\ell \cap E_k$  pour un certain  $k, k < i, k \neq \ell$ , on a :

$$\begin{cases} \pi_i^*(E_\ell) = E'_\ell + E_i, \\ \pi_i^*(E_k) = E'_k + E_i, \\ \pi_i^*(E_m) = E'_m, \end{cases}$$

$\forall m < i, m \neq k$  et  $\ell$ . Dans le cas 1, on a  $n_i = n_\ell$  et dans le cas 2 :  $n_i = n_\ell + n_k$ . On est toujours dans l'un de ces deux cas car trois diviseurs  $E'_j$  n'ont jamais de point commun.

**2.7.** On a :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i &= \pi'_{i,0}{}^*(E_i) \cdot \tilde{C} = E'_i \cdot \tilde{C}, \\ E_i &= \pi_i^*(P_i). \end{aligned}$$

Le LEMME 2.6 appliqué en  $P_i$  au morphisme  $\pi'_{i-1,0} : \tilde{S}_0 \rightarrow S_{i-1}$  donne :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_i &= \pi'_{i-1,0}{}^*(P_i) \cdot \tilde{C} \\ &= (m_{i,i} E'_i + m_{i,i+1} E'_{i+1} + \dots + m_{i,p} E_p) \cdot \tilde{C}. \end{aligned}$$

Si une courbe  $\mathfrak{C}$ , contenue dans  $S$ , a une multiplicité  $e_0$  au point  $P_0$ , elle vérifiera la condition d'adjonction en ce point si :

$$(\mathfrak{C}) = \pi_0^*(\mathfrak{C}) \cdot \tilde{C} \geq \sum_{i=1}^p (r_i - 1) \tilde{E}_i.$$

Comme on a :

$$\pi_0^*(\mathfrak{C}) \geq e_0 \pi_0^*(P_0) = \sum_{i=1}^p n_i e_0 E'_i$$

il suffit donc que pour tout  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , on ait :

$$n_i e_0 \geq \sum_{j=1}^i m_{j,i} (r_j - 1)$$

soit

$$e_0 \geq \sup_{1 \leq i \leq p} \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^i m_{j,i} (r_j - 1) = a_{P_0}.$$

Nous venons de prouver le théorème suivant :

**2.8. THÉORÈME.** — *Soit  $C$  une courbe réduite contenue dans une surface lisse  $S$  ; une courbe  $\mathfrak{C}$  de  $S$  est une adjointe de  $C$  si  $\mathfrak{C}$  a en chaque point singulier  $P$  de  $C$  une multiplicité supérieure ou égale à  $a_P$  où, avec les notations précédentes, on a :*

$$a_P = \sup_{1 \leq i \leq p} \frac{1}{n_i} \sum_{j=i}^i m_{j,i} (r_j - 1).$$

### 3. Théorème des résidus

On se place dans le cas  $S = \mathbb{P}^2(k)$ . Posons  $E = \sum (r_i - 1) \tilde{E}_i$  ;  $E$  est le diviseur d'adjonction sur  $C$ .

**3.1. THÉORÈME DES RÉSIDUS.** — *Supposons  $C$  absolument irréductible sur  $k$  ; soient  $D$  et  $D'$  deux diviseurs effectifs sur  $C$ , linéairement équivalents,  $E$  le diviseur d'adjonction sur  $C$ ,  $G$  une forme de degré  $p$  telle que :*

$$(G) = A + E + D \quad (\text{avec } A \text{ effectif}).$$

*Alors il existe une forme  $G'$  de même degré  $p$  telle que*

$$(G') = A + E + D'.$$

*Démonstration* (cf. [F, p. 190]). — Les diviseurs  $D$  et  $D'$  étant équivalents il existe par définition des formes  $H$  et  $H'$  de même degré telles que

$$D + (H) = D' + (H')$$

(cf. [F, p. 189]). On a alors :

$$\begin{aligned} (GH) &= (G) + (H) \\ &= A + E + D + (H) \\ &= A + E + D' + (H'). \end{aligned}$$

On a donc  $(GH) \geq E + (H')$ .

Si  $G$  est une forme,  $\bar{G}$  désignera l'image de  $G$  dans  $\mathcal{O}_P(C)$ .

Nous allons appliquer à  $GH$  le lemme suivant :

**3.2. LEMME.** — Soient  $E$  le diviseur d'adjonction sur  $C$ ,  $M$  et  $L$  deux formes telles que :

$$(M) \geq E + (L).$$

Alors on a :

$$\bar{M} \in \bar{L} \mathcal{O}_P(C) \quad \forall P \in C.$$

*Preuve du Lemme.* — La question est locale en chaque point  $P$  de  $C$ .

Si donc  $P$  est un point de  $C$ , on va raisonner par récurrence sur le nombre minimal d'éclatements nécessaires pour désingulariser la courbe  $C$  au voisinage de  $P$ .

Si  $P$  est lisse, le lemme est évident.

Soient donc  $P \in C$  un point de multiplicité  $r$ ,  $\tilde{\pi}_1 : C_1 \rightarrow C$  l'éclatement du point  $P$ ,  $W \subset C$  un voisinage affine de  $P$  dans  $C$  tel que le LEMME 1.5 soit vérifié ( $W_1 = \tilde{\pi}_1^{-1}(W)$  est alors un ouvert affine de  $C_1$  contenant tous les points  $P_i$  de  $C_1$  tels que  $\tilde{\pi}_1(P_i) = P$ ).

Nous supposons que  $X = 0$  est une équation du diviseur exceptionnel  $E_1$  de  $\pi_1$  et que  $P$  est dans la carte affine  $T = 1$ . Si  $G$  est une forme, nous noterons  $\text{Div}_P(\bar{G})$  (resp.  $E_P$ ) le diviseur sur  $\tilde{C}$  défini par  $\bar{G}$  (resp.  $E$ ) aux places qui sont au-dessus de  $P$ .

Revenons à la preuve du LEMME 3.2.

Posons  $\varphi = \bar{M}/\bar{L}$  dans le corps des fractions de  $\mathcal{O}_P(C)$  et soient  $\varphi_1$  (resp.  $\bar{M}_1, \bar{L}_1$ ), les transformées totales par  $\pi_1$  de  $\varphi$  (resp.  $\bar{M}, \bar{L}$ ).

Enfin posons  $\varphi_1 = X^{r-1}\varphi_2$ . On a alors :

$$\left. \begin{aligned} \text{Div}_P(\bar{M}) &= \text{Div}_P(\bar{M}_1) \\ \text{Div}_P(\bar{L}) &= \text{Div}_P(\bar{L}_1) \end{aligned} \right\} \text{ par définition.}$$

De plus,  $\text{Div}_P(\overline{M}) \geq E_P + \text{Div}_P(\overline{L})$  par hypothèse. Si on pose  $E_P = (r-1)\text{Div}_P(\overline{X}) + E'_P$ , on a :

$$\text{Div}(\overline{M}_1) \geq E'_P + (r-1)\text{Div}_P(\overline{X}) + \text{Div}_P(\overline{L}_1);$$

$X = 0$  étant par hypothèse une équation du diviseur exceptionnel de  $\pi_1$ ,  $E'_P$  est égal au diviseur d'adjonction de  $C_1$  aux places de  $\tilde{C}_1 = \tilde{C}$  qui sont au-dessus de  $P$ .

On a alors par hypothèse de récurrence :

$$\varphi_2 = \overline{M}_1 / \overline{L}_1(\overline{X})^{r-1} \in \mathcal{O}_{P_i}(C_1)$$

pour tout point  $P_i$  de  $C_1$  tel que  $\tilde{\pi}_1(P_i) = P$ .

On obtient alors par le LEMME 1.5 :

$$\varphi \in \mathcal{O}_P(C).$$

**3.3. Fin de la démonstration du THÉORÈME 3.1.** En appliquant à  $GH$  le LEMME 3.2 on obtient :

$$\overline{GH} \in \overline{H}' \mathcal{O}_P(C) \quad \forall P \in C.$$

On peut alors utiliser le "théorème fondamental de Max NOETHER" ([F, p. 120]).

Il existe une forme  $G'$  de même degré que  $G$  telle que :

$$GH = G'H' + BF,$$

$F$  étant une équation de  $C$ . On a alors :

$$\begin{aligned} (GH) &= (G'H') \text{ ,} \\ \text{soit} \quad (G') &= (G) + (H) - (H') \\ \text{d'où} \quad (G') &= A + E + D'. \end{aligned}$$

#### 4. L'algorithme de Brill-Noether

Soit  $C$  une courbe plane définie sur  $k$  et absolument irréductible. Soit  $D$  un diviseur rationnel effectif sur la normalisée  $\tilde{C}$  de  $C$ .

L'algorithme va construire une base de  $\mathcal{L}(D)$ .

**4.1. PROPOSITION.** — Soit  $E$  le diviseur d'adjonction sur  $C$ ,  $G_0$  une forme de degré  $\ell$  telle que :

$$(G_0) = E + D + A,$$

où  $A$  est effectif; alors on a

$$\mathcal{L}(D) = \left\{ \varphi \in k(C) \mid \varphi = \overline{G} / \overline{G}_0 \right\}$$

où  $G$  décrit l'espace des formes de degré  $\ell$ , non divisibles par l'équation de  $C$  et telles que  $(G) \geq E + A$ .

*Démonstration.*

a) Si  $\varphi$  s'écrit  $\overline{G} / \overline{G}_0$  comme dans l'énoncé du lemme on a :

$$(\varphi) = D' - D \geq -D$$

car  $D'$  est effectif; donc  $\varphi \in \mathcal{L}(D)$ .

b) Réciproquement soit  $\psi \in \mathcal{L}(D)$ . On peut donc écrire  $(\psi) = D_1 - D$  où  $D_1$  est un diviseur effectif sur  $\tilde{C}$  linéairement équivalent à  $D$ .

D'après la PROPOSITION 3.1, il existe une forme  $G_1$  de même degré que  $G_0$  telle que :

$$(G_1) = E + D' + A.$$

La fonction  $\psi_1 = \overline{G}_1 / \overline{G}_0$  a alors le même diviseur que la fonction  $\psi$  : ces deux fonctions diffèrent donc par une constante et  $\psi$  est bien de la forme voulue.

#### 4.2. Plan de l'algorithme.

Les données sont :

l'équation de  $C$  : forme  $F(X, Y, T) = 0$  de degré  $m$ ;

le diviseur  $D$  : si  $S_c$  est le lieu singulier de  $C$ , nous supposons que les supports de  $D$  et de  $\tilde{\pi}^{-1}(S_c)$  sont disjoints.

1. Déterminer une condition d'adjonction : pour cela on doit rechercher

a) les points singuliers de  $C$  (on les suppose rationnels sur  $k$ ) et leurs multiplicités,

b) pour chaque point singulier, l'entier  $a_P$  défini dans le THÉORÈME 2.8.

2. Trouver une forme  $G_0$  de degré  $\ell$  ("assez grand") telle que

a)  $G_0$  non divisible par  $F$ ,

b)  $G_0 = 0$  est l'équation d'une adjointe de  $C$  et on a  $(G_0) \geq 0$ .

b1) Si  $\ell < m$ ,  $F$  étant irréductible, cette condition sera réalisée.

Si  $\ell \geq m$ , on cherchera une base d'un supplémentaire  $V$  de l'espace des formes de degré  $\ell$  dont l'équation est divisible par  $F$ .

b2) Puis on écrira qu'un élément générique  $G$  de  $V$  "passe" par chaque point singulier  $P$  de  $C$  avec une multiplicité  $\geq a_P$ .

b3) Si  $D = \sum_{\gamma} n_{\gamma} \gamma$ ,  $n_{\gamma} \geq 0$ , pour chaque place  $\gamma$  telle que  $n_{\gamma} > 0$  on détermine (si possible) une paramétrisation locale  $(x(t), y(t))$  et on écrit que la valuation de  $G$  en  $t$  est  $\geq n_{\gamma}$ .

On sélectionne une forme  $G_0$  vérifiant les conditions précédentes.

3. Déterminer le diviseur "résiduel" :  $E' = (G_0) - D$ .

4. Trouver une base sur  $k$  de l'espace des formes  $G$  de degré  $\ell$  telles que :

$$(G) \geq E'.$$

5. Si  $\{G_0, \dots, G_n\}$  est une telle base, une base de  $\mathcal{L}(D)$  est donnée par

$$\left\{ 1, \overline{G_1}/\overline{G_0}, \dots, \overline{G_n}/\overline{G_0} \right\}$$

d'après la PROPOSITION 4.1.

**4.3. Remarque sur l'entier  $n$**  ( $n = \dim_k \mathcal{L}(D)$ ). — D'après le théorème de Riemann-Roch on a :

$$n \geq \deg D - g + 1$$

avec égalité si  $\deg D \geq 2g - 1$ .

Rappelons que le genre  $g$  de la courbe  $C$  est donné par :

$$g = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N r_i(r_i-1)$$

(cf. 1.8); où les points  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  sont les centres des éclatements nécessaires pour désingulariser la courbe  $C$ .

**4.4. Remarques sur le diviseur  $D$ .** — Dans 4.2 nous avons supposé que les supports de  $D$  et  $\tilde{\pi}^{-1}(S_c)$  étaient disjoints. Cette hypothèse permet d'affirmer que si  $G_0 = 0$  est l'équation d'une adjointe de  $C$  et si  $(G_0) \geq D$ , on a bien  $(G_0) \geq D + E$  où  $E$  est le diviseur d'adjonction; on peut donc appliquer la PROPOSITION 4.1.

Toutefois dans les exemples on pourra prendre des diviseurs rationnels  $D$  contenant des points de  $\tilde{\pi}^{-1}(S_c)$  si on est assuré que le diviseur résiduel  $E'$  est plus grand que le diviseur d'adjonction  $E$ .

**4.5. Remarque sur l'entier  $\ell$  ( $\ell =$  degré des adjointes).** — La dimension  $r$  de l'espace  $V$  des formes de degré  $\ell$  non divisibles par l'équation de  $G$  est égale à :

$$r = \begin{cases} r_1 = \frac{1}{2}\ell(\ell + 3) & \text{si } \ell \leq m, \\ r_1 - \frac{1}{2}(\ell - m)(\ell - m + 3) & \text{si } \ell > m. \end{cases}$$

La condition d'adjonction conduit à  $\frac{1}{2} \sum_P a_P(a_P + 1)$  conditions indépendantes, où la somme est prise sur tous les points singuliers  $P$  de  $C$  et les entiers  $a_P$  sont ceux définis dans le THÉORÈME 2.8.

Si  $D = \sum_{\gamma} n_{\gamma} \gamma$ , écrire qu'une forme  $G_0$  est telle que  $(G_0) \geq D$  conduit à  $d$  conditions ( $d$  à déterminer dans chaque cas).

Pour qu'une forme  $G_0$  vérifiant les hypothèses de l'algorithme existe il faudra que son degré  $\ell$  soit tel que :

$$r - \frac{1}{2} \sum_P a_P(a_P + 1) - d \geq 0.$$

## 5. Application : codes de Goppa

**5.1.** Rappelons brièvement la construction des codes de Goppa telle qu'elle est exposée dans [G1,G2,VM,...].

On se place sur le corps fini  $k = \mathbb{F}_q$ , avec  $q = p^r$  et  $p$  premier, et on considère une courbe plane  $C(F = 0)$  définie et absolument irréductible sur  $k$ , de genre  $g$ .

Soient  $G$  et  $D$  deux diviseurs rationnels effectifs sur la normalisée  $\tilde{C}$  de  $C$  vérifiant les conditions :

a)  $D = Q_1 + \dots + Q_n$  où les  $Q_i$  sont des points de  $\tilde{C}$  deux à deux distincts et rationnels sur  $k$ .

b) les supports de  $D$  et  $G$  sont disjoints.

c)  $\deg G < n$ .

Alors, le code de Goppa associé à  $D$ ,  $G$  et  $C$  est l'image de l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(G) &\longrightarrow (\mathbb{F}_q)^n, \\ \Phi(f) &= (f(Q_1), \dots, f(Q_n)). \end{aligned}$$

L'application  $\Phi$  est injective grâce à l'hypothèse c). Le code obtenu est de type  $[n, k, d]$  où

$$\begin{aligned} n &= \deg D, \\ k &\geq \deg G - g + 1, \quad (\text{avec égalité si } \deg G \geq 2g - 1), \\ d &\geq n - \deg G. \end{aligned}$$

Dans [G], GOPPA considère des courbes planes à singularités ordinaires. Nous donnons ici un exemple de code de Goppa associé à une courbe plane ayant des singularités quelconques.

**5.2.** On se place sur le corps  $k = \mathbb{F}_{16}$  et on considère la courbe plane  $C$  d'équation :

$$Y^2 Z^3 + Y Z^4 + X^5 = 0.$$

*Remarque.* — Cette courbe est citée dans [Se] : elle a la propriété d'avoir "beaucoup" de points rationnels sur  $\mathbb{F}_{16}$  (en fait, elle a le maximum de points rationnels possibles compatible avec la borne de Weil, cf. plus loin).

Le degré de  $C$  est  $m = 5$ . La courbe a un seul point singulier, non ordinaire,  $P_1 = (0, 1, 0)$  de multiplicité  $r_1 = 3$ .

La normalisée  $\tilde{C}$  s'obtient en éclatant deux fois :

1<sup>er</sup> éclatement  $\pi_1$  ; on éclate le point  $P_1$  : dans la carte  $Y = 1$ , on fait le changement de variable :

$$\begin{aligned} X' &= X, \\ Z' &= ZX'. \end{aligned}$$

Le diviseur exceptionnel  $E_1$  de  $\pi_1$  a pour équation :  $X' = 0$ . La transformée stricte  $C_1$  de  $C$  a pour équation locale au voisinage du point infiniment voisin  $P_2 = (0, 0)$  :

$$X'^2 + X'Z'^4 + Z'^3 = 0.$$

2<sup>e</sup> éclatement  $\pi_2$  ; on éclate le point  $P_2$  :  $P_2$  est de multiplicité  $r_2 = 2$  sur  $C_1$ , on fait le changement de variable :

$$\begin{aligned} X'' &= X'Z'', \\ Z'' &= Z'. \end{aligned}$$

Le diviseur exceptionnel  $E_2$  de  $\pi_2$  a pour équation  $Z'' = 0$ .

La transformée stricte  $C_2$  de  $C_1$  a pour équation locale au voisinage du point infiniment voisin  $P_3 = (0, 0)$  :

$$Z'' + X''^2 + X''Z''^3 = 0.$$

$P_3$  est un point lisse de  $C_2$  et  $C_2 = \tilde{C}$ . Le genre  $g$  de  $\tilde{C}$  (ou de  $C$ ) est égal à :

$$g = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 r_i(r_i-1),$$

soit  $g = 2$ . Avec les notations du paragraphe 2.4, on a :

$$n_1 = n_2 = 1; \quad m_{11} = m_{12} = m_{22} = 1.$$

Le diviseur d'adjonction est :

$$E = 3P_3.$$

Une courbe plane  $\mathfrak{C}$  sera adjointe de  $C$  si :

$$e_{P_1}(\mathfrak{C}) \geq 3 \quad (a_{P_1} = 3).$$

Cherchons les points de  $\tilde{C}$  qui sont rationnels sur  $\mathbb{F}_{16}$ . Leur nombre  $n_0$  est majoré par la borne de Weil (cf. [Se]). :

$$n_0 \leq q + 1 + 2g\sqrt{q}; \quad \text{ici } q = 16, \quad \text{d'où } n_0 \leq 33.$$

Nous allons voir que dans cet exemple la borne de Weil est atteinte.

Soit  $\alpha$  une racine primitive quinzisième de 1 vérifiant  $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$ ; la racine  $\alpha$  engendre  $\mathbb{F}_{16}$ .

La courbe plane  $C$  a 33 points rationnels sur  $\mathbb{F}_{16}$  :

$$\begin{aligned} Q_0 &= (0, 01); & Q_1 &= (0, 1, 0)(= P_1); & Q_2 &= (0, 1, 1) \\ Q_3, \dots, Q_7 &: (a, \alpha, 1) & \text{où } a &= \alpha, \alpha^4, \alpha^7, \alpha^{10}, \alpha^{13} \\ Q_8, \dots, Q_{12} &: (a, \alpha^2, 1) & \dots & a = \alpha^2, \alpha^5, \alpha^8, \alpha^{11}, \alpha^{14} \\ Q_{13}, \dots, Q_{17} &: (a, \alpha^4, 1) & \dots & a = \alpha, \alpha^4, \alpha^7, \alpha^{10}, \alpha^{13} \\ Q_{18}, \dots, Q_{22} &: (a, \alpha^5, 1) & \dots & a = 1, \alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12} \\ Q_{23}, \dots, Q_{27} &: (a, \alpha^8, 1) & \dots & a = \alpha^2, \alpha^5, \alpha^8, \alpha^{11}, \alpha^{14} \\ Q_{28}, \dots, Q_{32} &: (a, \alpha^{10}, 1) & \dots & a = 1, \alpha^3, \alpha^6, \alpha^9, \alpha^{12}. \end{aligned}$$

Si on note de la même façon les points rationnels lisses de  $C$  et les points correspondants de  $\tilde{C}$ , on voit que  $\tilde{C}$  a aussi 33 points rationnels qui sont :

$$Q_0, P_3, Q_2, Q_3, \dots, Q_{32}.$$

Considérons les diviseurs effectifs rationnels sur  $\mathbb{F}_{16}$  de  $\tilde{C}$  :

$$\begin{cases} D = P_3 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_{32}, \\ G = 5Q_0, \end{cases}$$

et cherchons le code de Goppa associé à  $D$ ,  $G$  et  $C$ , image de l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(G) &\longrightarrow (\mathbb{F}_{16})^{32}, \\ \Phi(f) &= (f(P_3), f(Q_2), \dots, f(Q_{32})). \end{aligned}$$

Comme  $\deg G \geq 2g - 1$ , ses paramètres vérifieront :

$$\begin{cases} k = \dim \mathcal{L}(G) = \deg G - g + 1 = 4, \\ n = 32, \\ d \geq n - \deg G = 27. \end{cases}$$

Considérons l'espace vectoriel des formes de degré 7. Une base de cet espace est :

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= Z^7; \Lambda_1 = XZ^6 \dots; \Lambda_7 = X^7 \\ \Lambda_8 &= YZ^6; \dots; \Lambda_{14} = YX^6 \\ &\dots \\ \Lambda_{33} &= Y^6Z; \Lambda_{34} = Y^6X \\ \Lambda_{35} &= Y^7. \end{aligned}$$

Le sous-espace des formes dont l'équation est divisible par celle de  $C$  est engendré par :

$$\begin{aligned} \Lambda'_5 &= \Lambda_5 + \Lambda_8 + \Lambda_{15} \\ \Lambda'_6 &= \Lambda_6 + \Lambda_9 + \Lambda_{16} \\ \Lambda'_7 &= \Lambda_7 + \Lambda_{10} + \Lambda_{17} \\ \Lambda'_{13} &= \Lambda_{13} + \Lambda_{15} + \Lambda_{21} \\ \Lambda'_{14} &= \Lambda_{14} + \Lambda_{16} + \Lambda_{22} \\ \Lambda'_{20} &= \Lambda_{20} + \Lambda_{21} + \Lambda_{26}. \end{aligned}$$

On factorise par ce sous-espace et on cherche dans le sous-espace obtenu une forme  $\varphi_0$  "passant" par  $G + E$ .

Soit  $\varphi_0 = \Lambda_{30} = Y^5Z^2$ . Le diviseur sur  $\tilde{C}$  associé à  $\varphi_0$  est :

$$(\varphi_0) = \text{ord}_{Q_0}(\bar{\varphi}_0)Q_0 + \text{ord}_{P_3}(\bar{\varphi}_0)P_3.$$

Une paramétrisation de  $\tilde{C}$  au voisinage de  $Q_0$  est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^5 + t^{10} + \dots \end{cases}$$

d'où  $\text{ord}_{Q_0}(\bar{\varphi}_0) = 25$ . Une paramétrisation de  $\tilde{C}$  au voisinage de  $P_3$  est :

$$\begin{cases} x = t^3 \\ z = t^5 + t^{10} + \dots \end{cases}$$

d'où  $\text{ord}_{P_3}(\bar{\varphi}_0) = 10$ . On a donc  $(\varphi_0) = 25 Q_0 + 10 P_3$ . Le diviseur résiduel est  $E' = 20 Q_0 + 10 P_3$ ; il est bien plus grand que le diviseur d'adjonction  $E$  (cf. § 4.4).

Une base de l'espace vectoriel des formes qui "passent" par  $E'$  est :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \Lambda_{30} = Y^5 Z^2, \\ \varphi_1 = \Lambda_{26} = Y^4 Z^3, \\ \varphi_2 = \Lambda_{27} = XY^4 Z^2, \\ \varphi_3 = \Lambda_{28} = X^2 Y^4 Z. \end{cases}$$

Une base de  $\mathcal{L}(G)$  est donc :

$$\left\{ 1, \bar{\varphi}_1/\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_2/\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_3/\bar{\varphi}_0 \right\}.$$

Posons  $\psi_1 = 1$ ;  $\psi_{j+1} = \bar{\varphi}_j/\bar{\varphi}_0$ ,  $j = 1, 2, 3$ . La matrice génératrice du code est :

$$\mathcal{M} = \left( \psi_i(P_3), \psi_i(Q_2), \dots, \psi_i(Q_{32}) \right)_{i=1, \dots, 4}.$$

Quand on met  $\mathcal{M}$  sous forme canonique :

$$\mathcal{M}' = (I_4, \overline{M})$$

on trouve un mot du code de poids 27.

La distance minimum du code est donc 27 et le code a les paramètres [32, 4, 27].

La matrice du code obtenu, mise sous forme canonique, se trouve *Figure 1*.

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \left[ \begin{array}{cccccccccccccccc}
 15 & 0 & 0 & 0 & 15 & 8 & 6 & 10 & 4 & 10 & 9 & 8 & 11 & 11 & 15 & 3 \\
 0 & 15 & 0 & 0 & 11 & 4 & 2 & 8 & 3 & 8 & 12 & 9 & 0 & 0 & 8 & 1 \\
 0 & 0 & 15 & 0 & 9 & 11 & 8 & 10 & 11 & 11 & 7 & 6 & 12 & 0 & 6 & 8 \\
 0 & 0 & 0 & 15 & 2 & 14 & 6 & 2 & 2 & 13 & 12 & 1 & 0 & 12 & 14 & 11
 \end{array} \right. \\
 \\
 \begin{array}{cccccccccccccccc}
 5 & 5 & 3 & 7 & 15 & 1 & 3 & 5 & 3 & 4 & 12 & 10 & 7 & 1 & 15 & 3 \\
 14 & 10 & 6 & 13 & 7 & 9 & 2 & 12 & 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 8 & 2 & 4 \\
 5 & 11 & 5 & 13 & 3 & 13 & 4 & 5 & 5 & 1 & 15 & 6 & 15 & 8 & 13 & 8 \\
 3 & 11 & 4 & 9 & 4 & 2 & 11 & 11 & 7 & 6 & 10 & 6 & 14 & 4 & 14 & 12
 \end{array} \left. \right]
 \end{array}$$

Figure 1

*Notations.* — Les chiffres à l'intérieur de la matrice représentent les exposants  $i$  des  $\alpha^i$  où  $\alpha$  est le générateur de  $F_{16}$ .

*Remarque.* — 15 correspond à  $\alpha^{15} = 1$ . Le deuxième vecteur ligne est de poids 27.

Bien que ce code ne soit pas MDS, ses paramètres  $R = k/n$ ,  $\delta = d/n$  sont situés au-dessus de la borne de Varshamov-Gilbert d'où l'intérêt de sa construction. De plus on a le résultat suivant :

En utilisant la même courbe  $C$ , le même diviseur  $D$  et le diviseur  $G = 18Q_0$  on construit, de la même façon, un code sur  $F_{16}$  de paramètres  $[32, 17, 14]$  (cf. [LB]). En concaténant ce code avec un code non-linéaire  $[5, 2^5, 1]$  on peut obtenir un code binaire ayant les paramètres  $[159, 2^{69}, 27]$ ; ce code a des paramètres meilleurs que ceux figurant dans la table de [MW-S]. Pour une démonstration de ce fait voir [D-M].

## BIBLIOGRAPHIE

- [A] ABYANKHAR (S.S.). — Historical ramblings in algebraic geometry and related algebra, pp. 409–448. — *Amer. Math. Monthly*, 1976.
- [B] BEAUVILLE (A.). — Surfaces algébriques complexes, [Astérisque, n° 54], S.M.F., 1978.
- [C] CHEVALLEY (C.). — *Introduction to the theory of algebraic functions*. — Amer. Math. Soc., 1951.

- [D-M] DRIENCOURT (Y.) et MICHON (J.F.). — Rapport sur les codes, *Univ. Aix-Marseille II et CIRM-Univ. Paris 7*, Octobre 1986.
- [F] FULTON (W.). — Algebraic curves, *Lectures Notes*, Benjamin, 1969.
- [G1] GOPPA (V.D.). — Algebraico-Geometric Codes, *Math. USSR Izv.*, t. **21**, 1983, p. 75-91.
- [G2] GOPPA (V.D.). — Codes and information, *Russian Math. Surveys*, t. **24**, 1984, p. 387-141.
- [LB] LE BRIGAND (D.). — A (32, 17, 14)-code coming from a singular curve, à paraître dans *la Revue du Signal*.
- [MW-S] MACWILLIAMS (F.J.) and SLOANE (N.J.A.). — *The theory of error-correcting codes*. — North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [Se] SERRE (J.P.). — *Résumé du cours de l'année 1984-1985*. — Paris, Collège de France, 1985.
- [Sh] SHAFAREVICH (I.R.). — *Basic algebraic geometry*. — Springer-Verlag, 1977.
- [VM] VLADUT (S.G.) et MANIN (Yu.I.). — Codes linéaires et courbes modulaires, [traduction française par DEZA (M) et LE BRIGAND (D.)], Juin 1985, *Publ. de l'Univ. P. et M. Curie*, n°72.
- [W] WALKER (R.J.). — *Algebraic curves*. — Springer-Verlag, 1978.
-