BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS BRUHAT
JACQUES TITS

Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local

Bulletin de la S. M. F., tome 112 (1984), p. 259-301
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1984__112__259_0>

Bull. Soc. math. France,
112, 1984, p. 259-301.

SCHÉMAS EN GROUPES ET IMMEUBLES DES GROUPES CLASSIQUES SUR UN CORPS LOCAL

PAR

F. BRUHAT et J. TITS (*)

Introduction

Dans deux articles antérieurs ([5] et [6]), notés I et II par la suite), nous avons montré l'existence d'une donnée radicielle valuée, donc d'un immeuble de type affine, dans le groupe des points rationnels sur K d'un groupe algébrique réductif G défini sur un corps K complet pour une valuation discrète à corps résiduel parfait (et même sous des hypothèses moins restrictives : *dans cette introduction, mais non dans le cours du mémoire, nous gardons cette hypothèse stricte sur* K), et associé à tout point de l'immeuble de G un schéma en groupes affine sur l'anneau des entiers de K, lisse, connexe, de fibre générique G.

Le but de ce travail est de donner des interprétations concrètes des objets précédents dans le cas des groupes classiques, « concrètes » signifiant liées de manière simple à la représentation « naturelle » de G comme groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel X sur un surcorps D de K, éventuellement non commutatif.

Pour ce qui est de la donnée radicielle valuée, cela a déjà été fait au paragraphe 10 de I, et une « Note ajoutée aux épreuves » à ce paragraphe annonce une interprétation de l'immeuble de G en termes de *normes* sur X. Mais les indications données dans cette Note sont d'une part sommaires, d'autre part défigurées par les fautes d'impression. Nous avons cru néces-

(*) Texte reçu le 10 janvier 1984, révisé le 19 avril 1984.

F. Bruhat, Université Paris-VII, U.E.R. de Mathématiques, 75251 Paris Cedex 05.
J. Tits, Collège de France, 11, place Marcelin-Berthelot, 75231 Paris Cedex 05.

saire d'en rédiger une réelle démonstration. Ayant ainsi associé à un point x de l'immeuble de G une norme α sur X, on peut considérer les « boules » de α (qui sont des *réseaux* dans X) et le schéma affine de fibre générique G dont l'algèbre affine est engendrée par les coefficients de la représentation naturelle de G par rapport aux différentes bases de ces différents réseaux. Nous verrons qu'on obtient ainsi des schémas en groupes *plats*, relevant de la théorie des paragraphes 2 et 3 de II, ayant une « grosse cellule », et qui, lorsqu'ils sont *lisses*, coïncident avec ceux introduits en II. De plus, cette propriété de lissité est toujours exacte, sauf en caractéristique résiduelle 2 pour les formes de D_n non déployées sur l'hensélisé strict de K (remarquons que dans ce cas, le groupe classique n'est ni simplement connexe, ni adjoint : ce n'est pas une simple coïncidence (*cf.* II, 4.6.1)). Ce dernier cas donne un exemple naturel de schéma en groupes plat et non lisse. Si le corps résiduel de K n'est plus supposé parfait, ce phénomène peut se produire même pour des formes de A_n (*cf.* § 5).

Cette étude des groupes classiques est divisée en deux parties. La première partie ci-dessous est consacrée au cas du groupe linéaire général ou spécial sur un corps éventuellement non commutatif. Une deuxième partie traitera du cas des groupes unitaires.

Un premier paragraphe est consacré aux *normes* sur X, et aux *ordres* de l'algèbre End X qu'on peut leur associer. Il n'y a là rien de bien nouveau (à l'exception peut-être des n^{os} 1.13 à 16) ni de bien difficile, mais les références que nous connaissons (par exemple [4], [13], [17], et surtout [10] et [15] auxquels nous nous référons beaucoup) utilisent souvent des hypothèses inutiles (corps valué commutatif, complet, voire localement compact) ([1]). Nous aussi il est vrai (valuation discrète, corps de rang fini sur son centre), mais nous indiquons sommairement dans un Appendice ceux des résultats énoncés qui restent vrais « en général ».

Le paragraphe 2 est consacré à la démonstration du théorème annoncé dans I, établissant une bijection « naturelle » entre l'immeuble élargi de GL_n et l'ensemble des normes sur X. Le paragraphe 3 associe à tout point

([1]) Le referee (outre plusieurs remarques dont nous le remercions) nous a signalé l'article de P. GÉRARDIN, Immeuble des groupes linéaires généraux, publié dans *Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups, Lecture Notes*, 880, Springer 1981, qui nous avait échappé. On y trouve notamment (sous l'hypothèse K localement compact) une étude des normes contenant nos résultats de 1.7 à 1.9 et une construction géométrique directe de la structure d'immeuble sur l'ensemble $\mathcal{N}$ des normes.

x de l'immeuble de GL_n un schéma en groupes lisse et connexe de fibre générique G et montre comment ce schéma peut être défini à partir de la représentation naturelle de G et de la norme sur X associée au point x. Le paragraphe 4 étudie l'effet d'un « changement de base étale », ce qui permet la comparaison avec les résultats de II, où les schémas considérés étaient définis par « descente étale » à partir du cas quasi-déployé. Enfin, le paragraphe 5 étudie rapidement le cas du groupe spécial linéaire SL_n.

Première Partie : le groupe linéaire général

Notations

— K désigne un corps commutatif muni d'une valuation discrète ω telle que $\omega(K^{\times})=\mathbf{Z}$ (si R est un anneau, on note $R^{\times}$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles de R).

— D désigne un corps de centre K, de dimension finie d^2 sur K. On suppose que ω se prolonge en une valuation discrète de D, notée encore ω (on verra en 1.6 que ce prolongement est alors unique). On sait que cette hypothèse est automatiquement satisfaite lorsque K est *hensélien* (avec unicité du prolongement) : la démonstration classique est en général donnée en supposant K complet, mais n'utilise en réalité que le lemme de Hensel (*cf.* par exemple [15], § 12).

— On note π_K (resp. π_D) une uniformisante de K (resp. D) et $e=[\omega(D^{\times}):\omega(K^{\times})]$ l'indice de ramification de D, de sorte que $\omega(\pi_D)=1/e$.

— On note $\mathcal{O}_D$ l'anneau des entiers de D, i. e. $\{t\in D \mid \omega(t)\geqslant 0\}$, $\mathfrak{p}_D$ son unique idéal maximal, i. e. $\{t\in D \mid \omega(t)>0\}$, et $\bar{D}$ son corps résiduel, i. e. le quotient $\mathcal{O}_D/\mathfrak{p}_D$. Les notations $\mathcal{O}_K$, $\mathfrak{p}_K$ et $\bar{K}$ s'en déduisent en prenant $D=K$.

— X désigne un espace vectoriel à droite de dimension finie $n>0$ sur D. On note M la K-algèbre des endomorphismes de X : c'est un espace vectoriel de dimension n^2d^2 sur K. La lettre G désigne le groupe $M^{\times}=GL(X)$ des automorphismes de X, c'est-à-dire le groupe linéaire général $GL(n, D)$. On se permettra de désigner aussi par G (ou par $GL(X)$, ou par $GL(n, D)$) le groupe algébrique réductif défini sur K correspondant, qui à une extension L de K fait correspondre le groupe multiplicatif de l'algèbre $M \otimes_K L$.

— Rappelons qu'un *réseau* de X est un sous-$\mathcal{O}_D$-module de type fini de X, engendrant l'espace vectoriel X; c'est un $\mathcal{O}_D$-module libre de rang n. Un *ordre* $\mathcal{M}$ de l'algèbre M est un sous-anneau de M, contenant l'élément unité, et qui est un réseau dans le K-espace vectoriel M; c'est une $\mathcal{O}_K$-algèbre noethérienne à gauche et à droite et c'est un $\mathcal{O}_K$-module libre de rang $n^2 d^2$.

1. Rappels et compléments sur les normes

1.1. Une *D-norme* ou plus simplement une *norme* sur X est une application $\alpha : X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ telle que l'on ait, pour $x, y \in X$ et $t \in D$,

$$\alpha(xt) = \alpha(x) + \omega(t), \tag{1}$$

$$\alpha(x+y) \geqslant \inf(\alpha(x), \alpha(y)), \tag{2}$$

$$\alpha(x) = +\infty \quad \text{si et seulement si} \quad x = 0. \tag{3}$$

Comme (2) entraîne $\alpha(x) \geqslant \inf(\alpha(x+y), \alpha(y))$, on a

$$\alpha(x+y) = \inf(\alpha(x), \alpha(y)) \quad \text{dès que} \quad \alpha(x) \neq \alpha(y). \tag{4}$$

Par suite, une famille (x_i) d'éléments non nuls de X telle que $\alpha(x_i) \not\equiv \alpha(x_j) \bmod \mathbf{Z}/e$ pour $i \neq j$ est nécessairement *libre* et $\alpha(X - \{0\})$ se compose de r classes modulo $\mathbf{Z}/e$, avec $1 \leqslant r \leqslant n$, et est un sous-ensemble *discret* de $\mathbf{R}$. L'entier r est appelé le *rang* de la norme α ([10], p. 149).

1.2. Plus généralement, soit A une K-algèbre, possédant un élément unité, donc contenant K. Une *norme de K-algèbre* sur A est une K-norme ω_A sur le K-espace vectoriel A, prolongeant ω et satisfaisant, pour $u, v \in A$, à

$$\omega_A(uv) \geqslant \omega_A(u) + \omega_A(v). \tag{5}$$

Si X est un A-module à droite, une *A-norme* sur X est une K-norme α sur X satisfaisant, pour $x \in X$ et $u \in A$, à

$$\alpha(xu) \geqslant \alpha(x) + \omega_A(u). \tag{6}$$

On dit encore que X muni de α est un module normé sur l'algèbre normée A.

1.3. Soit α une norme sur X. Elle définit sur X une topologie d'espace vectoriel topologique séparé, notée $\mathcal{T}_\alpha$, pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est formée des « boules »

$$\mathcal{X}_{\alpha,\,c}=\{x\in X \mid \alpha(x)\geqslant c\},$$

pour $c\in\mathbf{R}$. Vu (2), cette topologie est *moins fine* que la topologie canonique de X, obtenue en transposant celle de D^n grâce à n'importe quelle base de X. On vérifie aisément que les conditions suivantes sont équivalentes :

(Sc 1) *$\mathcal{T}_\alpha$ est la topologie canonique de X;*

(Sc 2) *tout hyperplan de X est fermé pour $\mathcal{T}_\alpha$;*

(Sc 2 *bis*) *tout sous-espace vectoriel de X est fermé pour $\mathcal{T}_\alpha$;*

(Sc 2 *ter*) *toute forme linéaire sur X est continue pour $\mathcal{T}_\alpha$;*

(Sc 3) *pour tout $c\in\mathbf{R}$, la boule $\mathcal{X}_{\alpha,\,c}$ est un réseau de X;*

(Sc 3 *bis*) *il existe $c\in\mathbf{R}$ tel que la boule $\mathcal{X}_{\alpha,\,c}$ soit un réseau de X.*

On sait que ces conditions sont automatiquement satisfaites lorsque D (ou, ce qui revient au même, K) est *complet* pour la valuation ω. Dans le cas général, notons $\hat{K}$ et $\hat{D}$ les complétés de K et D pour ω et notons $\hat{X}$ le complété de X pour la norme α. Alors, $\hat{X}$ est un espace vectoriel topologique sur $\hat{D}$ et l'injection de X dans $\hat{X}$ se prolonge en une application linéaire dite *canonique* de $X\otimes_D\hat{D}$ dans $\hat{X}$, qui est évidemment surjective. On voit aisément que *les conditions* (Sc) *ci-dessus sont encore équivalentes à l'une quelconque des conditions suivantes :*

(Sc 4) *l'application linéaire canonique $X\otimes_D\hat{D}\to\hat{X}$ est injective donc bijective;*

(Sc 4 *bis*) $\dim_D\hat{X}=n$*;*

(Sc 4 *ter*) *le prolongement par continuité de α à $X\otimes_D\hat{D}$ est une $\hat{D}$-norme.*

(Le prolongement par continuité de α à $X\otimes_D\hat{D}$ est toujours une « semi-norme », i.e. satisfait à (1) et (2).)

1.4. Définition. — (i) *Soient X_1 et X_2 deux sous-espaces vectoriels de X. On dit que X_2 est un supplémentaire* scindant *de X_1 pour la norme α si $X=X_1+X_2$ et si*

$$\alpha(x_1+x_2)=\inf(\alpha(x_1),\,\alpha(x_2)),\tag{7}$$

pour $x_1\in X_1$ et $x_2\in X_2$.

Plus généralement, on dit qu'une famille (X_i) de sous-espaces vectoriels de X est scindante pour α si $\alpha(\sum x_i)=\inf_i(\alpha(x_i))$ quels que soient les $x_i\in X_i$.

(ii) *On dit qu'une base* (e_i) *de* X *est scindante pour* α, *ou que* α *est scindée par la base* (e_i), *si la famille* $(e_i D)$ *est scindante, i.e. si l'on a, pour tous* $t_i \in D$,

$$\alpha\left(\sum e_i t_i\right) = \inf(\alpha(e_i) + \omega(t_i)). \tag{8}$$

(iii) *On dit qu'une norme* α *sur* X *est* scindable *si elle admet une base scindante.*

Notons que (7) entraîne $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Dire que X_2 est un supplémentaire scindant de X_1 signifie que l'application canonique est une *isométrie* de X_2 sur X/X_1 muni de la norme quotient, ou encore que α est « somme directe » de ses restrictions à X_1 et X_2 (dans la catégorie des espaces vectoriels normés avec comme morphismes les applications linéaires augmentant les normes). Ceci justifie la terminologie, qui n'est pas classique : on dit en général dans la littérature qu'une base satisfaisant à (8) est « orthogonale » pour α. Ce n'est pas très heureux et comme nous aurons plus tard à considérer simultanément des normes et des formes quadratiques sur X, la terminologie « orthogonale » devient franchement inacceptable.

1.5. Proposition. — *Soit* α *une norme sur* X.

(i) *Pour que* α *soit scindable, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions* (Sc) *de* 1.3. *En particulier, si* D *est complet, toute norme est scindable.*

(ii) *Si* α *est scindable, la restriction de* α *à un sous-espace vectoriel de* X *est une norme scindable, tout sous-espace vectoriel de* X *admet un supplémentaire scindant et tout élément* $x \neq 0$ *de* X *est le premier élément d'une base scindante.*

Il est clair que toute norme scindable satisfait à (Sc 1) (ou à (Sc 3)) et que si α satisfait à (Sc 2), il en est de même de sa restriction à un sous-espace vectoriel de X. Des récurrences évidentes montrent alors que, pour démontrer (i) et (ii), il suffit de prouver que si α satisfait à (Sc 2), alors tout hyperplan Y de X admet un supplémentaire scindant. La démonstration est classique lorsque D est commutatif et complet (*cf.* [10], [13]), mais s'étend sans difficulté : soit $x_0 \in X - Y$; comme Y est *fermé* pour T, on a $\sup\{\alpha(x_0 + y) \mid y \in Y\} < +\infty$ et comme $\alpha(X - \{0\})$ est *discret* dans $\mathbf{R}$, il existe $x \in x_0 + Y$ tel que $\alpha(x+y) \leqslant \alpha(x)$ pour tout $y \in Y$. On en déduit

$$\inf(\alpha(x), \alpha(y)) \leqslant \alpha(x+y) \leqslant \alpha(x) \leqslant \inf(\alpha(x+y), \alpha(y)),$$

d'où $\alpha(x+y) = \inf(\alpha(x), \alpha(y))$ et xD est un supplémentaire scindant de Y.

Remarque. — Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base scindante pour α, soit H l'hyperplan engendré par les e_i pour $i \geqslant 2$ et soit $y \in H$ avec $\alpha(y) \geqslant \alpha(e_1)$. Alors, $(e_1+y, e_2, \ldots, e_n)$ *est une base scindante pour* α : on a en effet $\alpha(e_1+y)=\alpha(e_1)=\sup_{z \in H} \alpha(e_1+y+z)$.

De cette remarque résulte directement la dernière assertion de (ii) : si $x=\sum e_i x_i$ avec par exemple $\alpha(x)=\alpha(e_1)+\omega(x_1)$. alors $\alpha(x-e_1 x_1) \geqslant \alpha(e_1 x_1)$ et $(x, e_2, \ldots, e_n)$ est une base scindante. Les deux autres assertions de (ii) s'en déduisent par récurrence sur la dimension du sous-espace vectoriel.

1.6. Le complété $\hat{D}$ de D pour la norme ω est un corps et la $\hat{K}$-algèbre $D \otimes_K \hat{K}$ est une $\hat{K}$-algèbre simple de centre $\hat{K}$. Or, l'application $\hat{K}$-linéaire canonique de $D \otimes_K \hat{K}$ dans $\hat{D}$ est un homomorphisme surjectif d'algèbres. Elle est donc bijective et ω considérée comme une K-norme sur D est scindable vu (Sc 4). Par suite, $\mathcal{O}_D$ est un $\mathcal{O}_K$-module libre de rang d^2 et $\mathcal{O}_D/\pi_K \mathcal{O}_D$ est un $\bar{K}$-espace vectoriel de dimension d^2, dont les $V_s=\pi_D^s \mathcal{O}_D/\pi_K \mathcal{O}_D$ pour $0 \leqslant s \leqslant e$ forment un drapeau (avec $V_e=\{0\}$). La multiplication par π_D induit un isomorphisme de V_{s-1}/V_s sur V_s/V_{s+1} pour $1 \leqslant s < e$. Il en résulte que $\dim_{\bar{K}} \bar{D}=\dim_{\bar{K}} V_s/V_{s+1}=d^2/e$ et qu'on obtient une base de $\mathcal{O}_D$ sur $\mathcal{O}_K$ (donc de D sur K) en choisissant des éléments $t_i \in \mathcal{O}_D (1 \leqslant i \leqslant d^2/e)$ dont les images dans $\bar{D}$ forment une base de $\bar{D}$ sur $\bar{K}$ et en considérant la famille $(t_i \pi_D^s)$ pour $1 \leqslant i \leqslant d^2/e$ et $0 \leqslant s < e$. C'est évidemment une base scindante (et même adaptée au sens de 1.8 ci-dessous) pour la K-norme ω.

En particulier, $\mathcal{O}_D$ est un *ordre* dans la K-algèbre centrale simple D. C'est l'unique ordre maximal et même le plus grand ordre de D : si B est un sous-anneau de D non contenu dans $\mathcal{O}_D$, alors B contient un élément x tel que $\omega(x)<0$ et B ne peut pas être un $\mathcal{O}_K$-module de type fini puisqu'il contient des éléments x^n de valuation arbitrairement petite.

Notons encore quelques conséquences évidentes :

— un réseau de X est un sous-$\mathcal{O}_D$-module qui est un réseau du K-espace vectoriel sous-jacent à X;

— si (e_j) est une base scindante pour la D-norme α sur X, alors la famille des $e_j t_i \pi_D^s$ est une base scindante pour α considérée comme une K-norme sur le K-espace vectoriel X;

— inversement, si une D-norme α est scindable en tant que K-norme, alors elle est scindable en tant que D-norme : cela résulte de (Sc 1) puisque la topologie de D est sa topologie canonique de K-espace vectoriel.

Remarques. — 1. La valuation de K se prolonge de manière unique (par continuité) en une valuation de $\hat{K}$, qui se prolonge de manière unique en une valuation du corps gauche $\hat{D}=D\otimes_K\hat{K}$, dont la restriction à D est évidemment ω : ceci montre l'unicité annoncée du prolongement de ω à D.

2. Supposer, comme nous l'avons fait, que la valuation de K se prolonge en une valuation de D est donc équivalent à supposer que $D\otimes_K\hat{K}$ est un *corps*, ou encore que le rang sur $\hat{K}$ du groupe algébrique réductif $GL(n, D)$ est égal à son rang sur K (*cf.* [16], 2.3.1).

1.7. DÉFINITION. — *On appelle* drapeau de réseaux *un ensemble* Δ *non vide de réseaux de* X, *totalement ordonné par inclusion et stable par homothéties. Une* graduation *de* Δ *est une application* c *strictement décroissante de* Δ *dans* $\mathbf{R}$, *telle que* $c(\mathscr{X}t)=c(\mathscr{X})+\omega(t)$ *pour* $\mathscr{X}\in\Delta$ *et* $t\in D$.

Choisissons un réseau $\mathscr{X}_0\in\Delta$. Toute classe d'homothétie de réseaux possède un représentant $\mathscr{X}$ et un seul tel que $\mathscr{X}\subset\mathscr{X}_0$ et $\mathscr{X}\not\subset\mathscr{X}_0\pi_D$. Considérons de tels représentants $\mathscr{X}_i$ des différentes classes d'homothéties de réseaux contenues dans Δ. Puisque $\mathscr{X}_i\not\subset\mathscr{X}_0\pi_D$, on a $\mathscr{X}_i\supset\mathscr{X}_0\pi_D$ et les quotients $\mathscr{X}_i/\mathscr{X}_0\pi_D$ forment un drapeau de sous-espaces vectoriels non nuls dans le $\bar{D}$-espace vectoriel $\mathscr{X}_0/\mathscr{X}_0\pi_D$ de dimension n. Par suite, le nombre r de classes d'homothéties contenues dans Δ est fini et $1\leqslant r\leqslant n$. On l'appelle le *rang* de Δ. En numérotant les $\mathscr{X}_i$ dans l'ordre décroissant, on obtient donc r réseaux $(\mathscr{X}_i)_{0\leqslant i<r}$ tels que

$$\mathscr{X}_0 \underset{\neq}{\supset} \mathscr{X}_1 \underset{\neq}{\supset} \ldots \mathscr{X}_{r-1} \underset{\neq}{\supset} \mathscr{X}_0\pi_D, \tag{9}$$

et Δ est la suite strictement décroissante de réseaux $(\mathscr{X}_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ définis par $\mathscr{X}_{qr+i}=\mathscr{X}_i\pi_D^q$ pour $q\in\mathbf{Z}$, $0\leqslant i<r$. Nous dirons que $(\mathscr{X}_0, \ldots, \mathscr{X}_{r-1})$ est la *tranche* de Δ d'origine $\mathscr{X}_0$.

Posons $n_i=\dim_{\bar{D}}\mathscr{X}_{i+1}/\mathscr{X}_i$. La suite $(n_1, \ldots, n_r)$ d'entiers $\geqslant 1$ est appelée le *type* de Δ d'origine $\mathscr{X}_0$: elle ne dépend pas de $\mathscr{X}_0$ à permutation circulaire près et on a $n_1+\ldots+n_r=n$. On peut choisir une base $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathscr{X}_0$ telle que les $e_i\pi_D$ pour $1\leqslant i\leqslant n_1+\ldots+n_j$ et les e_i pour $i>n_1+\ldots+n_j$ forment une base de $\mathscr{X}_j$ (pour $0\leqslant j<r$) : une telle base sera dite *adaptée* à Δ, de réseau origine $\mathscr{X}_0$.

Réciproquement, si l'on se donne r réseaux $\mathscr{X}_i$ satisfaisant à (9) (ou ce qui revient au même, un réseau $\mathscr{X}_0$ et un drapeau dans $\mathscr{X}_0/\mathscr{X}_0\pi_D$) l'ensemble des réseaux homothétiques à l'un des $\mathscr{X}_i$ est un drapeau de réseaux dont les $\mathscr{X}_i$ forment une tranche.

Enfin, se donner une graduation c de Δ revient évidemment à se donner les r nombres réels $c_i=c(\mathscr{X}_i)$ pour $0\leqslant i<r$, qui doivent satisfaire aux inégalités

$$(10) \qquad c_0<c_1<\ldots c_{r-1}<c_0+1/e.$$

1.8. Proposition. — (i) *Soit α une norme scindable sur X. L'ensemble Δ_α des boules $\mathscr{X}_{\alpha,c}$ pour $c\in\mathbf{R}$ est un drapeau de réseaux de rang égal à celui de α et l'application $c_\alpha:\Delta\to\mathbf{R}$ définie par $c_\alpha(\mathscr{X})=\inf\{\alpha(x)\mid x\in\mathscr{X}\}$ est une graduation de Δ_α.*

(ii) *Réciproquement, soit (Δ, c) un drapeau de réseaux gradué; il existe une norme scindable α sur X et une seule telle $\Delta=\Delta_\alpha$ et $c=c_\alpha$. Pour $x\in X$, $x\neq 0$, on a $\alpha(x)=c(\mathscr{X}_x)$, où $\mathscr{X}_x$ est le plus petit élément de Δ contenant x.*

C'est évident.

On appelle alors *type* de α celui de Δ_α et *base adaptée* pour α une base adaptée à Δ_α. On vérifie immédiatement qu'une base adaptée pour α n'est autre qu'une base scindante $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ satisfaisant à

$$(11) \qquad \alpha(e_1)\leqslant\alpha(e_2)\leqslant\ldots\leqslant\alpha(e_n)<\alpha(e_1)+\frac{1}{e},$$

et que

$$(12) \qquad \alpha(e_i)=c_\alpha(\mathscr{X}_j),$$

pour $\quad 0\leqslant j<r \quad$ et $\quad n_1+\ldots+n_{j-1}<i\leqslant n_1+\ldots+n_j.$

Si (e_i) est une base scindante quelconque, on peut choisir des $t_i\in D$ tels que $-\alpha(e_i)\leqslant\omega(t_i)<-\alpha(e_i)+1/e$. On voit alors aussitôt que, après une éventuelle permutation des indices, $(e_i t_i)$ est une base adaptée pour α, dont le réseau origine est la boule $\{x\mid\alpha(x)\geqslant 0\}$.

1.9. Soit C le groupe des commutateurs de $D^\times$ et soit $\det: G\to D^\times/C$ le déterminant de Dieudonné [8]. Comme $\omega(C)=\{0\}$, l'homomorphisme $\omega: D^\times\to\mathbf{R}$ passe au quotient par C et définit un homomorphisme $\omega': D^\times/C\to\mathbf{R}$. On pose $\delta=\omega'\circ\det$.

Soit $\mathscr{X}_0$ un réseau de X. Pour tout $g\in G$ tel que $g(\mathscr{X}_0)=\mathscr{X}_0$, il est immédiat que $\det g$ appartient à l'image de $\mathcal{O}_D^\times$ dans $D^\times/C$, d'où $\delta(g)=0$. Par suite, si $\mathscr{X}$ est un autre réseau de X, il existe $c\in\mathbf{R}$ tel que $\delta(g)=c$

pour tout $g \in G$ tel que $\mathscr{X} = g(\mathscr{X}_0)$. On dit que c est le *volume* du réseau $\mathscr{X}$ (par rapport à $\mathscr{X}_0$) et on pose $c = \mathrm{vol}\,\mathscr{X}$. Changer de réseau de départ revient à ajouter une constante à la fonction volume. Si $\mathbf{e} = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de X, on appelle volume de $\mathbf{e}$ et on note $\mathrm{vol}\,\mathbf{e}$ le volume du réseau engendré par les e_i.

PROPOSITION. — *Soit* α *une norme scindable sur* X. *Il existe un nombre réel et un seul, appelé* volume *de* α *et noté* $\mathrm{vol}\,\alpha$, *tel que*

$$\mathrm{vol}\,\alpha = \mathrm{vol}\,\mathbf{e} - \sum \alpha(e_i), \tag{13}$$

pour toute base $\mathbf{e} = (e_i)$ *scindante pour* α.

Soient (e_i) et (e'_i) deux bases scindantes. On vient de voir qu'on peut choisir des t_i, $t'_i \in D$ tels que, après permutations éventuelles, $(e_i t_i)$ et $(e'_i t'_i)$ soient des bases adaptées de même réseau origine $\mathscr{X}_0$. On a alors

$$\mathrm{vol}\,\mathbf{e} + \sum \omega(t_i) = \mathrm{vol}\,\mathscr{X}_0 = \mathrm{vol}\,\mathbf{e}' + \sum \omega(t'_i),$$

et, vu (12) dont nous reprenons les notations,

$$\sum \alpha(e_i) + \sum \omega(t_i) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} n_j c_\alpha(\mathscr{X}_{j-1}) = \sum \alpha(e'_i) + \sum \omega(t'_i),$$

d'où la proposition.

Le groupe G opère par transport de structure sur l'ensemble des normes : si α est une norme et si $g \in G$, on note $g.\alpha$ la norme $x \mapsto \alpha(g^{-1}(x))$. Elle est scindable si et seulement si α l'est et on a alors

$$\mathrm{vol}\, g.\alpha = \mathrm{vol}\,\alpha + \delta(g). \tag{14}$$

En effet, si (e_i) est une base scindante pour α, alors $(g(e_i))$ est une base scindante pour $g.\alpha$ et on a

$$\mathrm{vol}\, g.\alpha = \mathrm{vol}(g(e_i)) - \sum (g.\alpha)(g(e_i)) = \delta(g) + \mathrm{vol}(e_i) - \sum \alpha(e_i).$$

1.10. Soit α une norme scindable et soit $c \in \mathbf{R}$. L'application $\alpha + c$ est évidemment une norme scindable, que l'on dit par abus de langage *homothétique* de α. On a $\mathrm{vol}(\alpha + c) = \mathrm{vol}\,\alpha - nc$ et toute classe d'homothétie de normes scindables contient une et une seule norme de volume nul.

1.11. Soit α une norme sur X. Soit Y un espace vectoriel à droite sur D, de dimension finie m, et soit β une norme sur Y. Pour $u \in \mathrm{Hom}_D(X, Y)$, posons

$$\text{(15)}\qquad \operatorname{Hom}(\alpha, \beta)(u) = \inf_{x \in X} (\beta(u(x)) - \alpha(x)).$$

Il est classique et trivial que $\operatorname{Hom}(\alpha, \beta)$ est une K-norme sur le K-espace vectoriel $\operatorname{Hom}(X, Y)$. Si $X = Y$, on pose $\operatorname{End}\alpha = \operatorname{Hom}(\alpha, \alpha)$.

Supposons maintenant que α et β sont scindables et soit (e_i) (resp. (f_j)) une base de X (resp. Y) scindante pour α (resp. β). Si $u \in \operatorname{Hom}(X, Y)$ et si (u_{ji}) est la matrice de u par rapport à ces bases, matrice définie par

$$\text{(16)}\qquad u\left(\textstyle\sum_i e_i t_i\right) = \textstyle\sum_{i,\ j} f_j u_{ji} t_i \qquad (\text{pour } t_i \in D),$$

alors on a

$$\text{(17)}\quad \operatorname{Hom}(\alpha, \beta)(u) = \inf_i (\beta(u(e_i)) - \alpha(e_i)) = \inf_{i,\ j} (\omega(u_{ji}) + \beta(f_j) - \alpha(e_i)).$$

En effet, soit $x = \sum e_i t_i \in X$. On a

$$\begin{aligned}\beta(u(x)) &\geqslant \inf_i (\beta(u(e_i)) + \omega(t_i)) = \inf_i (\beta(u(e_i)) - \alpha(e_i) + \omega(t_i) + \alpha(e_i))\\ &\geqslant \inf_i (\beta(u(e_i)) - \alpha(e_i)) + \inf_i (\omega(t_i) + \alpha(e_i)) \geqslant \inf_i (\beta(u(e_i)) - \alpha(e_i)) + \alpha(x),\end{aligned}$$

d'où la première égalité de (17), et la seconde en résulte.

Prenons en particulier $Y = D$ et $\beta = \omega$; on voit que $\alpha^* = \operatorname{Hom}(\alpha, \omega)$ est une D-norme sur le D-espace vectoriel à gauche X^* dual de X et que la base duale (e_i^*) est une base scindante pour α^*, avec

$$\text{(18)}\qquad \alpha^*(e_i^*) = -\alpha(e_i).$$

Supposons maintenant que Y soit un D-espace vectoriel *à gauche*. Pour $z \in X \otimes_D Y$, posons

$$\text{(19)}\quad (\alpha \otimes \beta)(z) = \sup\left\{ \inf_k (\alpha(x_k) + \beta(y_k)) \,\middle|\, x_k \in X,\ y_k \in Y,\ z = \textstyle\sum_k x_k \otimes y_k \right\}.$$

On vérifie aisément qu'on obtient ainsi une K-norme $\alpha \otimes \beta$ sur le K-espace vectoriel $X \otimes_D Y$ et que, pour $x_j \in X$ et $t_{ij} \in D$, on a

$$\text{(20)}\qquad (\alpha \otimes \beta)\left(\textstyle\sum_j x_j \otimes f_j\right) = \inf_j (\alpha(x_j) + \beta(f_j)),$$

$$\text{(21)}\qquad (\alpha \otimes \beta)\left(\textstyle\sum_{i,\ j} e_i t_{ij} \otimes f_j\right) = \inf_{i,\ j} (\omega(t_{ij}) + \alpha(e_i) + \beta(f_j)).$$

En particulier

$$\text{(22)}\quad (\alpha \otimes \beta)(x \otimes y) = \alpha(x) + \beta(y) \quad \text{pour } x \in X \quad \text{et} \quad y \in Y.$$

On peut en effet supposer x et y non nuls et il suffit de considérer des bases scindantes (e_i) et (f_j) telles que $x=e_1$ et $y=f_1$.

De (17) et (21) on déduit que l'isomorphisme canonique de $Y \otimes_D X^*$ sur $\mathrm{Hom}_D(X, Y)$ transporte la norme $\beta \otimes \alpha^*$ sur $\mathrm{Hom}(\alpha, \beta)$.

Enfin, on vérifie aisément que, pour $u \in \mathrm{End}_D X$ et $v \in \mathrm{End}_D Y$, d'où $u \otimes v \in \mathrm{End}_K(X \otimes_D Y)$, on a

$$\mathrm{End}(\alpha \otimes \beta)(u \otimes v) = \mathrm{End}\,\alpha(u) + \mathrm{End}\,\beta(v). \tag{23}$$

Remarquons que, contrairement à ce que (23) pourrait faire croire, l'identification canonique de $\mathrm{End}_K(X \otimes_D Y)$ avec $\mathrm{End}_D X \otimes_K \mathrm{End}_D Y$ ne transporte pas en général (i.e. lorsque D n'est pas neutralisé par une extension étale de K : *voir* 4.9) $\mathrm{End}\,\alpha \otimes \beta$ sur $\mathrm{End}\,\alpha \otimes \mathrm{End}\,\beta$.

1.12. Si D est commutatif, (17) (resp. (21)) montre que la base $(f_j \otimes e_i^*)$ (resp. $(e_i \otimes f_j)$) est scindante pour $\mathrm{Hom}(\alpha, \beta)$ (resp. $\alpha \otimes \beta$). Dans le cas général, la donnée des bases (e_i) et (f_j) permet d'identifier $\mathrm{Hom}_D(X, Y)$ (resp. $X \otimes_D Y$) à D^{mn} et le munit ainsi d'une structure (non canonique) de D-espace vectoriel à droite par exemple. Alors, $\mathrm{Hom}(\alpha, \beta)$ (resp. $\alpha \otimes \beta$) est une D-norme et l'assertion précédente reste vraie. De 1.6 résulte aussi que la K-norme $\mathrm{Hom}(\alpha, \beta)$ (resp. $\alpha \otimes \beta$) est scindable.

1.13. Désormais nous désignons par α une D-norme scindable sur X et nous munissons la K-algèbre simple $M = \mathrm{End}_D X$ de la norme $\mathrm{End}\,\alpha$. On vérifie aussitôt que c'est une norme de K-algèbre. Nous dirons que $\mathrm{End}\,\alpha$ est la *norme carrée* sur M associée à α.

PROPOSITION. — (i) *Soit* $x \in X$, $x \neq 0$; *pour tout* $y \in X$, *on a*

$$\alpha(y) = \sup_{u \in M,\ u(x)=y} (\alpha(x) + \mathrm{End}\,\alpha(u)).$$

(ii) *Soit* β *une* D*-norme sur* X. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *il existe* $c \in \mathbf{R}$ *tel que* $\beta = \alpha + c$;

(*b*) $\mathrm{End}\,\beta = \mathrm{End}\,\alpha$;

(*c*) $\beta(u(x)) \geqslant \beta(x) + \mathrm{End}\,\alpha(u)$ *quels que soient* $x \in X$ *et* $u \in M$.

Par définition, on a $\alpha(u(x)) \geqslant \alpha(x) + \mathrm{End}\,\alpha(u)$. D'autre part, soit (e_i) une base de X scindante pour α et telle que $x = e_1$ (1.5. (ii)). Posant $u = y \otimes e_1^*$, on a $u(x) = y$ et $\mathrm{End}\,\alpha(u) = \alpha(y) + \alpha^*(e_1^*) = \alpha(y) - \alpha(x)$, ce qui établit (i).

Démontrons (ii). Si $\beta = \alpha + c$, on a $\beta^* = \alpha^* - c$ et $\mathrm{End}\,\beta = \beta \otimes \beta^* = \alpha \otimes \alpha^* = \mathrm{End}\,\alpha$. Donc (*a*) entraîne (*b*). Il est clair que (*b*) entraîne (*c*). Enfin, supposons (*c*) satisfaite et soient x, $y \in X$, $x \neq 0$. On a

$$\beta(y)-\beta(x) \geqslant \sup_{u \in M,\ u(x)=y} \operatorname{End} \alpha(u)=\alpha(y)-\alpha(x),$$

d'où (*a*).

Soit X' un M-module à gauche simple et soit D' le corps opposé au commutant de X', de sorte que X' est un D'-espace vectoriel à droite et que M s'identifie à $\operatorname{End}_{D'} X'$. On sait que X et X' sont isomorphes, canoniquement à homothétie près. Par suite, D et D' sont isomorphes, canoniquement à automorphisme intérieur près, et la valuation de K se prolonge à D'.

COROLLAIRE. — (i) *Il existe une K-norme α' sur X', et une seule à une constante additive près, qui fasse de X' un M-module normé; c'est une D'-norme scindable et* $\operatorname{End} \alpha'=\operatorname{End} \alpha$.

(ii) *L'ensemble des normes carrées sur M est indépendant du choix du M-module simple X.*

C'est immédiat.

1.14. LEMME. — *Soit Y un M-module à gauche simple et soit $x \in Y$, $x \neq 0$. Il existe un idempotent minimal ε de M tel que $\varepsilon x=x$ et* $\operatorname{End} \alpha(\varepsilon)=0$.

On peut supposer $Y=X$ et considérer une base (e_i) de X scindante pour α telle que $x=e_1$. Il suffit alors de prendre $\varepsilon=e_1 \otimes e_1^*$.

1.15. PROPOSITION. — *Soit Y un M-module à gauche de type fini et soit γ une norme sur Y faisant de Y un M-module normé, et scindable en tant que K-norme.*

(i) *Soit Y' un sous-M-module de Y. Il existe un sous-M-module Y'' de Y qui est un supplémentaire scindant de Y' pour γ.*

(ii) *Il existe une famille finie (Y_j) de sous-M-modules simples de Y telle que Y soit somme directe des Y_j et que, quels que soient les $y_j \in Y_j$, l'on ait*

$$\gamma\left(\sum y_j\right)=\inf(\gamma(y_j)).$$

Il est clair que (i) entraîne (ii) puisque Y est semi-simple, et qu'il suffit de démontrer (i) lorsque Y/Y' est *simple*.

La norme quotient $\dot{\gamma}$ de γ est évidemment une M-norme sur Y/Y'. Choisissons un élément $\dot{x} \neq 0$ dans Y/Y' et choisissons $x \in \dot{x}$ de telle sorte que Mx soit un sous-module simple et que $\gamma(x)$ soit la plus grande possible. Montrons qu'alors :

(24) $$\gamma(x)=\sup_{y\in\dot{x}}\gamma(y)=\dot{\gamma}(\dot{x}).$$

En effet, soit ε un idempotent minimal satisfaisant aux conditions du lemme 1.14. Si $y=x+x'\in\dot{x}$, alors $\varepsilon y=x+\varepsilon x'\in\dot{x}$ et $M\varepsilon y$ est un sous-M-module simple puisque $M\varepsilon$ est un idéal à gauche minimal. On en déduit $\gamma(x)\geqslant\gamma(\varepsilon y)\geqslant\gamma(y)+\mathrm{End}\,\alpha(\varepsilon)=\gamma(y)$, d'où (24).

Mais l'application canonique $y\rightarrow\dot{y}$ de Mx sur Y/Y' est un isomorphisme de M-modules simples et il résulte du corollaire 1.13 qu'il existe une constante $c\in\mathbf{R}$ telle que $\dot{\gamma}(\dot{y})=\gamma(y)+c$ pour tout $y\in Mx$, et cette constante est nulle d'après (24). L'application canonique est donc une isométrie de Mx sur Y/Y', c.q.f.d.

1.16. Il est classique (*voir* p. ex. [3] ou [15]) que la catégorie $\mathscr{C}_M$ des M-modules à gauche et la catégorie $\mathscr{C}_D$ des D-espaces vectoriels à gauche sont *équivalentes* : à $Y\in\mathscr{C}_M$ correspond fonctoriellement $Y'=\mathrm{Hom}_M(X, Y)\in\mathscr{C}_D$, à $Z\in\mathscr{C}_D$ correspond fonctoriellement $Z''=X\otimes_D Z\in\mathscr{C}_M$, et les applications canoniques $X\otimes_D\mathrm{Hom}_M(X, Y)\rightarrow Y$ et $\mathrm{Hom}_M(X; X\otimes_D Z)\rightarrow Z$ sont des isomorphismes. De plus, les applications canoniques $\mathrm{End}_M Y\rightarrow\mathrm{End}_D Y'$ et $\mathrm{End}_D Z\rightarrow\mathrm{End}_M Z''$ sont des isomorphismes de K-algèbres. Nous allons voir que cette équivalence reste vraie pour les modules normés :

PROPOSITION. — *Soit Y un M-module à gauche de type fini, muni d'une M-norme γ scindable en tant que K-norme, et soit Z un D-espace vectoriel à gauche de dimension finie, muni d'une D-norme scindable β. Posons $Y'=\mathrm{Hom}_M(X, Y)$ et $Z''=X\otimes_D Z$, $\gamma'=\mathrm{Hom}(\alpha, \gamma)$ et $\beta''=\alpha\otimes\beta$.*

(i) *β'' est une M-norme, l'isomorphisme canonique* $\mathrm{Hom}_M(X, Z'')\rightarrow Z$ *est une isométrie pour les normes* $\mathrm{Hom}(\alpha, \beta'')$ *et* β, *et l'isomorphisme canonique* $\mathrm{End}_D Z\rightarrow\mathrm{End}_M Z''$ *est une isométrie pour les normes* $\mathrm{End}\,\beta$ *et* $\mathrm{End}\,\beta''$.

(ii) *γ' est une D-norme, l'isomorphisme canonique $X\otimes_D Y'\rightarrow Y$ est une isométrie pour les normes $\alpha\otimes\gamma'$ et γ, et l'isomorphisme canonique* $\mathrm{End}_M Y\rightarrow\mathrm{End}_D Y'$ *est une isométrie pour les normes* $\mathrm{End}\,\gamma$ *et* $\mathrm{End}\,\gamma'$.

L'assertion (i) est immédiate. Il est évident que β'' est une M-norme puisque M opère sur Z'' via son opération sur X. Si $z\in Z$, l'élément correspondant de $\mathrm{Hom}_M(X, Z'')$ est l'application $z': x\rightarrow x\otimes z$ et $(\alpha\otimes\beta)(x\otimes z)-\alpha(x)=\beta(z)$, d'où $\mathrm{Hom}(\alpha, \beta'')(z')=\beta(z)$. Enfin, si

$u \in \operatorname{End}_D Z$, l'élément correspondant de $\operatorname{End}_M Z''$ est $\mathrm{id} \otimes u$ et $\operatorname{End} \beta(u) = \operatorname{End} \alpha \otimes \beta(\mathrm{id} \otimes u)$ d'après (23).

Démontrons (ii). — Il est évident que γ' est une D-norme. L'assertion (ii) résulterait alors de (i) en posant $Z = Y'$, d'où $Y \simeq Z''$, si l'on savait que toute M-norme scindable en tant que K-norme sur $Y = X \otimes_D Z$ est de la forme $\alpha \otimes \beta$. Ceci va résulter de 1.15 (ii), dont nous reprenons les notations. Notons tout d'abord que, pour tout $f \in Y'$, l'application $x \mapsto \gamma(f(x))$ est une M-norme sur X, donc de la forme α+constante (1.13), et cette constante est $\gamma'(f)$. Autrement dit,

$$\gamma(f(x)) = \gamma'(f) + \alpha(x), \tag{25}$$

quels que soient $x \in X$ et $f \in Y'$.

Choisissons maintenant pour chaque indice j un isomorphisme f_j de X sur Y_j. Les f_j forment une base du D-espace vectoriel Y'. Montrons que cette base est scindante pour γ'. Soit en effet $f = \sum t_j f_j \in Y'$, avec $t_j \in D$. On a :

$$\begin{aligned}\gamma'(f) &= \inf_{x \in X}(\gamma(\textstyle\sum f_j(xt_j)) - \alpha(x)) = \inf_{x,\, j}(\gamma(f_j(xt_j)) - \alpha(x))\\ &= \inf_j \inf_x (\gamma(f_j(xt_j) - \alpha(x)) = \inf_j \gamma'(t_j f_j),\end{aligned}$$

ce qui montre que (f_j) est scindante. Enfin, soient $x_j \in X$; on a, compte tenu de (20) et de (25),

$$\gamma(\textstyle\sum f_j(x_j)) = \inf_j \gamma(f_{j'}(x_j)) = \inf_j(\gamma'(f_j) + \alpha(x_j)) = \alpha \otimes \gamma'(\sum x_j \otimes f_j),$$

ce qui démontre la deuxième assertion de (ii). Quant à la troisième, elle résulte alors de l'assertion correspondante de (i).

1.17. Posons $\mathscr{M}_\alpha = \{u \in M \mid \operatorname{End} \alpha(u) \geqslant 0\}$ et $J_\alpha = \{u \in M \mid \operatorname{End} \alpha(u) > 0\}$. Il est évident que $\mathscr{M}_\alpha$ est un *ordre* dans la K-algèbre simple M, que J_α est un idéal bilatère de $\mathscr{M}_\alpha$ et que le groupe multiplicatif $\mathscr{M}_\alpha^\times$ des éléments inversibles de $\mathscr{M}_\alpha$ est le stabilisateur de α dans $M^\times$. Reprenons le drapeau de réseaux Δ_α formé des boules $\mathscr{X}_{\alpha,\, c}$, choisissons un réseau origine $\mathscr{X}_0 \in \Delta_\alpha$, de sorte que Δ_α est la suite strictement décroissante de réseaux $(\mathscr{X}_k)_{k \in \mathbf{Z}}$, considérons une base adaptée (e_i) d'origine $\mathscr{X}_0$ et soient r le rang et $(n_1, \ldots, n_r)$ le type d'origine $\mathscr{X}_0$ de α (1.7 et 1.8).

La proposition suivante est alors immédiate :

PROPOSITION. — *Soit $u \in M$.*

(i) $u \in \mathscr{M}_\alpha$ (*resp.* $u \in J_\alpha$) *si et seulement si* $u(\mathscr{X}_k) \subset \mathscr{X}_k$ (*resp.* $u(\mathscr{X}_k) \subset \mathscr{X}_{k+1}$) *pour tout* $k \in \mathbf{Z}$, *ou encore pour* $0 \leqslant k < r$.

(ii) $u \in \mathscr{M}_\alpha$ (*resp.* $u \in J_\alpha$) *si et seulement si la matrice* U *de* u *par rapport à la base adaptée* (e_i) *satisfait à la condition suivante :*

(H) (resp. (RH)) *U est un tableau $(U_{hk})_{1 \leqslant h,\, k \leqslant r}$ carré d'ordre r, où U_{hk} est une matrice à n_h lignes et n_k colonnes à coefficients dans $\mathcal{O}_D$ lorsque $h \geqslant k$ (resp. $h > k$) et dans $\mathfrak{p}_D$ lorsque $h < k$ (resp. $h \leqslant k$).*

1.18. Corollaire. — (i) *Pour $1 \leqslant s \leqslant r$, l'idéal bilatère J_α^s est formé des $u \in \mathscr{M}_\alpha$ tels que la matrice U_{hk} de la condition* (H) *ait ses coefficients dans $\mathfrak{p}_D$ dès que $h < k+s$ et dans $\mathfrak{p}_D^2$ dès que $h < k+s-r$.*

(ii) *$J_\alpha^r = \pi_D I . \mathscr{M}_\alpha = \mathscr{M}_\alpha . \pi_D I$, où $\pi_D I$ désigne l'élément de $\mathscr{M}_\alpha$ dont la matrice par rapport à (e_i) est diagonale de coefficients diagonaux tous égaux à π_D, on a $J_\alpha^{re} = \pi_K \mathscr{M}_\alpha$ et J_α est un idéal bilatère inversible d'inverse $J_\alpha^{-1} = \pi_K^{-1} J_\alpha^{re-1}$.*

(iii) *Quel que soit l'entier $s \in \mathbf{Z}$, on a $u \in J_\alpha^s$ si et seulement si $u(\mathscr{X}_k) \subset \mathscr{X}_{k+s}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$, ou pour $0 \leqslant k < r$.*

La démonstration de (i) par récurrence sur s est facile en considérant les éléments de J_α^s dont la matrice par rapport à (e_i) a tous ses coefficients nuls sauf un : nous la laissons au lecteur. Les assertions (ii) puis (iii) s'en déduisent aisément.

1.19. Un élément $u \in \mathscr{M}_\alpha$ définit d'après 1.17 (i) un $\bar{D}$-endomorphisme $\bar{u}_k$ du $\bar{D}$-espace vectoriel $\mathscr{X}_{k-1}/\mathscr{X}_k$ pour $k \in \mathbf{Z}$, d'où un homomorphisme $u \mapsto \bar{u} = (\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_{r-1})$ de $\mathscr{M}_\alpha$ dans $\prod_{1 \leqslant k \leqslant r} \operatorname{End}_{\bar{D}}(\mathscr{X}_{k-1}/\mathscr{X}_k)$.

Proposition. — (i) *L'homomorphisme $u \mapsto \bar{u}$ est surjectif de noyau J_α et sa restriction au groupe $\mathscr{M}_\alpha^\times$ des éléments inversibles de $\mathscr{M}_\alpha$ a pour image $\prod_{1 \leqslant k \leqslant r} \operatorname{Aut}_{\bar{D}}(\mathscr{X}_{k-1}/\mathscr{X}_k)$.*

(ii) *J_α est le radical de $\mathscr{M}_\alpha$.*

(iii) *Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on a $\mathscr{X}_{k+1} = J_\alpha \mathscr{X}_k$ et $\mathscr{X}_{k+1}$ est le radical du $\mathscr{M}_\alpha$-module à gauche $\mathscr{X}_k$.*

L'assertion (i) résulte aussitôt de 1.17 (ii), puisque la matrice de $\bar{u}_k$ par rapport à la base de $\mathscr{X}_{k-1}/\mathscr{X}_k$ formée des images des e_i pour $n_1 + \ldots + n_{k-1} < i \leqslant n_1 + \ldots + n_k$ est la matrice à coefficients dans $\bar{D}$ image canonique de U_{kk} (pour $1 \leqslant k \leqslant r$).

(ii) et (iii) résultent aussi de 1.17 (*voir* p. ex. [15], th. 39.14 et cor. 39.18). Esquissons-en néanmoins la démonstration. L'assertion (ii) résulte de (i), de 1.18 (ii) et du lemme bien connu suivant (*cf.* [15], th. 6.15).

LEMME. — *Soit A une $\mathcal{O}_K$-algèbre qui est un $\mathcal{O}_K$-module de type fini. Le radical* $\operatorname{rad} A$ *de A contient $\pi_K A$ et pour qu'un idéal bilatère J de A soit égal à* $\operatorname{rad} A$, *il faut et il suffit que A/J soit semi-simple et qu'il existe un entier $q \geqslant 1$ tel que $J^q \subset \pi_K . A$.*

Quant à (iii), la première assertion résulte de 1.17 (ii) et la deuxième de ce que $J_\alpha \mathscr{X}_k \subset \operatorname{rad} \mathscr{X}_k$ d'après (ii) et de ce que $\mathscr{X}_k / \mathscr{X}_{k+1}$ est un $\mathscr{M}_\alpha$-module simple d'après (i).

1.20. COROLLAIRE. — *Les réseaux de X invariants par $\mathscr{M}_\alpha$ (resp. $\mathscr{M}_\alpha^\times$) sont exactement ceux appartenant à Δ_α.*

Soit $\mathscr{Y}$ un réseau invariant par $\mathscr{M}_\alpha^\times$ et soit k le plus grand entier tel que $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}_k$. L'image de $\mathscr{Y}$ dans $\mathscr{X}_k / \mathscr{X}_{k+1}$ est un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et invariant par $\operatorname{Aut}(\mathscr{X}_k / \mathscr{X}_{k+1})$, d'où $\mathscr{X}_k = \mathscr{Y} + \mathscr{X}_{k+1}$ et $\mathscr{Y} = \mathscr{X}_k$ d'après le lemme de NAKAYAMA.

1.21. COROLLAIRE. — *Soit β une autre D-norme scindable sur X. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{M}_\alpha$ contient $\mathscr{M}_\beta$;*

(ii) *$\mathscr{M}_\alpha^\times$ contient $\mathscr{M}_\beta^\times$;*

(iii) *Δ_α est contenu dans Δ_β.*

Il est clair que (i) entraîne (ii); (ii) entraîne (iii) d'après 1.20 et (iii) entraîne (i) d'après 1.17 (i).

1.22. PROPOSITION. — *Pour $u \in M$, posons*

$$\rho(u) = \frac{1}{re} \sup \{ k \in \mathbf{Z} \mid u \in J_\alpha^k \}.$$

Alors, ρ est une K-norme d'algèbre sur M.

Les relations $\rho(u+v) \geqslant \inf(\rho(u), \rho(v))$, $\rho(uv) \geqslant \rho(u) + \rho(v)$ et $\rho(u) = +\infty$ si et seulement si $u = 0$ sont évidentes. De plus, $\rho(\lambda u) = \rho(u) + \omega(\lambda)$ pour $u \in M$ et $\lambda \in K$ puisque $\mathcal{O}_K^\times J_\alpha^k = J_\alpha^k$ et $\pi_K J_\alpha^k = J_\alpha^{k+re}$ d'après 1.18 (ii). Remarquons qu'avec les notations de 1.18, on a $\rho(\pi_D I) = 1/e$.

On dit que ρ est la *norme radique* sur M associée à l'ordre $\mathscr{M}_\alpha$.

1.23. PROPOSITION. — *Soit $\mathscr{M}$ un ordre de M. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe une norme scindable* α *sur* X *telle que* $\mathscr{M}=\mathscr{M}_\alpha$.

(ii) *Il existe une norme scindable* α *sur* X *telle que* $\mathscr{M}=\mathscr{M}_\alpha$ *et que* $\operatorname{End}\alpha$ *soit la norme radique associée à* $\mathscr{M}$.

(H′) *Il existe une base* (e_i) *de* X, *un entier* r *avec* $1\leqslant r\leqslant n$ *et des entiers* $n_1, \ldots, n_r\geqslant 1$ *tels que* $n_1+\ldots+n_r=n$ *et qu'un élément* $u\in M$ *appartienne à* $\mathscr{M}$ *si et seulement si sa matrice par rapport à la base* (e_i) *satisfait à la condition* (H) *de* 1.17.

Il est clair que (ii) entraîne (i) et (i) entraîne (H′) d'après 1.17. Supposons donc (H′) satisfaite et posons :

$$\alpha\left(\sum e_i t_i\right)=\inf(\omega(t_i)+c_i) \qquad (t_i\in D), \tag{26}$$

avec :

$$c_i=k/re \tag{27}$$

pour $n_1+\ldots+n_k<i\leqslant n_i+\ldots+n_{k+1}$ *et* $0\leqslant k<r$.

Il est clair que (e_i) est une base adaptée à α et que le type de α est $(n_1, \ldots, n_r)$, d'où $\mathscr{M}=\mathscr{M}_\alpha$ vu 1.17. D'autre part, 1.18 et la formule (17) entraînent que la condition $u\in J_\alpha^s$ (avec $0\leqslant s\leqslant r$) équivaut à $\operatorname{End}\alpha(u)\geqslant s/re$. On en déduit aussitôt que $\operatorname{End}\alpha$ est bien la norme radique associée à $\mathscr{M}$, d'où (ii).

Remarques. — 1. La norme α satisfaisant à (ii) est unique à une constante additive près d'après 1.13.

2. La proposition entraîne que pour toute norme scindable α, la norme radique ρ associée à $\mathscr{M}$ est une norme carrée, ce qui n'était pas évident *a priori*. Naturellement, on n'a pas toujours $\rho=\operatorname{End}\alpha$: on verra (2.14 et 16) que l'ensemble des $\operatorname{End}\alpha$ pour α satisfaisant à (i) est un simplex affine dont ρ est le centre de gravité.

1.24. Les ordres de M satisfaisant à (H') sont bien connus : leurs propriétés sont exposées p. ex. dans [15], § 39, notamment th. 39.14 ([2]). On sait qu'un ordre $\mathscr{M}$ de M satisfait à (H') si et seulement si c'est un anneau *héréditaire*, c'est-à-dire de dimension homologique $\leqslant 1$ (à gauche

([2]) Les résultats de [15], § 39 sont énoncés en supposant K *complet*. Mais, comme le dit d'ailleurs REINER lui-même p. 364, ils restent valables lorsque K n'est plus supposé complet, mais que $D\otimes_K\hat{K}$ est un *corps*, ce qui est vrai pour nous. *Voir* aussi le th. 40.5 de [15], qui assure que $\mathscr{M}$ est héréditaire si et seulement si $\mathscr{M}\otimes_{\mathcal{O}_K}\hat{\mathcal{O}}_K$ l'est.

et à droite), ou encore si et seulement si tout idéal (à gauche ou à droite) de $\mathscr{M}$ est un $\mathscr{M}$-module projectif. On sait également qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ordre $\mathscr{M}$ de M soit héréditaire est que *son radical J soit un $\mathscr{M}$-module à gauche projectif* ([1] ou [15], th. 39.1).

1.25. Nous noterons $\mathscr{H}$ l'ensemble des ordres de M de la forme $\mathscr{M}_\alpha$, c'est-à-dire des ordres héréditaires de M. De 1.20 résulte aussitôt que $\mathscr{M}_\alpha$ est un élément maximal de $\mathscr{H}$ (ordonné par inclusion) si et seulement si Δ_α ne contient qu'une seule classe d'homothétie de réseaux. Autrement dit, les éléments maximaux de $\mathscr{H}$ sont les stabilisateurs de réseaux, c'est-à-dire les *ordres maximaux* de M (dans l'ensemble de tous les ordres) (*cf.* [15], §§ 17 et 18).

Plus généralement, le rang r de α est égal au nombre d'ordres maximaux contenant $\mathscr{M}_\alpha$. Si $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_k$ sont des ordres maximaux deux à deux distincts; leur intersection appartient à $\mathscr{H}$ si et seulement si on peut trouver, après avoir éventuellement changé la numérotation des $\mathscr{M}_j$, des réseaux $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_k$ tels que $\mathscr{M}_j = \operatorname{End} \mathscr{X}_j$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$ et que :

$$\mathscr{X}_1 \supset \mathscr{X}_2 \supset \ldots \supset \mathscr{X}_k \supset \mathscr{X}_1 \pi_D.$$

On a alors $k \leqslant n$, le drapeau de réseaux associé à $\mathscr{M}_1 \cap \ldots \cap \mathscr{M}_k$ est l'ensemble des homothétiques des $\mathscr{X}_j$ et il est de rang k.

Autrement dit, $\mathscr{H}$ est naturellement muni d'une structure de *complexe simplicial abstrait* : les sommets de $\mathscr{H}$ sont les ordres maximaux, les simplexes de dimension k sont les ordres $\mathscr{M}_\alpha$ où α est de rang $k+1$ (pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$) et la relation d'incidence est l'opposée de l'inclusion.

1.26. Proposition. — *Soient α et β deux normes scindables sur X. Il existe une base de X scindante à la fois pour α et pour β.*

La démonstration donnée dans [10], prop. 1.3, où D est supposé commutatif et localement compact et l'énoncé attribué à A. Weil, reste valable au prix d'un changement minime : au lieu d'utiliser la compacité de l'espace projectif, on remarque que l'ensemble des $\beta(x)-\alpha(x)$ pour $x \in X$, $x \neq 0$, est borné et contenu dans la réunion d'un nombre fini de classes modulo $\mathbf{Z}/e$, donc contient ses bornes ([3]).

De 1.26 résulte comme dans [10], th. 2.4 :

([3]) On verra d'ailleurs plus loin une autre démonstration de 1.26, valable même en valuation dense (App.).

1.27. COROLLAIRE. — *Soit de plus* $t \in [0,1]$. *Il existe une norme* γ *et une seule sur* X, *notée* $t\alpha+(1-t)\beta$, *telle que toute base* (e_i) *de* X *scindante à la fois pour* α *et pour* β *soit scindante pour* γ *et que*

$$\gamma(e_i)=t\alpha(e_i)+(1-t)\beta(e_i) \qquad \textit{pour} \quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{29}$$

On a

$$\gamma(x)\geqslant t\alpha(x)+(1-t)\beta(x) \qquad \textit{pour tout} \quad x\in X, \tag{30}$$

et γ *est la plus petite norme sur* X *satisfaisant à* (30).

1.28. L'ensemble des $t\alpha+(1-t)\beta$ pour $0\leqslant t\leqslant 1$ est noté $[\alpha\beta]$ et est appelé le segment d'extrémités α et β. On voit qu'on a ainsi défini en quelque sorte une « structure affine » sur l'ensemble des normes scindables. Cependant, on prendra garde que l'inégalité (30) peut être *stricte* pour certains $x\in X$ et qu'il n'est pas en général possible de définir des barycentres de $k\geqslant 3$ normes scindables (sauf si elles admettent une base scindante commune).

1.29. Reprenons les notations de 1.11. On vérifie immédiatement sur les formules (17) et (21), compte tenu de 1.12, que :

$$t\,\mathrm{Hom}(\alpha, \beta)+(1-t)\,\mathrm{Hom}(\alpha', \beta')=\mathrm{Hom}(t\alpha+ (1-t)\beta, t\alpha'+(1-t)\beta'), \tag{31}$$

$$t\,\mathrm{End}\,\alpha+(1-t)\,\mathrm{End}\,\beta=\mathrm{End}(t\alpha+ (1-t)\beta), \tag{32}$$

$$t\alpha\otimes\beta+(1-t)\alpha'\otimes\beta'=(t\alpha+(1-t)\alpha')\otimes(t\beta+(1-t)\beta'), \tag{33}$$

où t, α' et β' désignent ce que l'on devine. De (13) résulte aussi que

$$\mathrm{vol}(t\alpha+(1-t)\beta)=t\,\mathrm{vol}\,\alpha+(1-t)\,\mathrm{vol}\,\beta. \tag{34}$$

Enfin, pour $c, c'\in\mathbf{R}$, on a

$$t(\alpha+c)+(1-t)(\beta+c')=t\alpha+(1-t)\beta+(tc+(1-t)c'), \tag{35}$$

ce qui permet de définir le barycentre de deux classes d'homothétie de normes scindables.

1.30. Faisons $D=K$ et reprenons les notations de 1.2. *Si* α *et* β *sont des* A-normes, *il en est de même de* $\gamma=t\alpha+(1-t)\beta$. Prenons en effet une K-base (e_i) de X scindante pour α et pour β et soit $u\in A$. DE (29) on tire

$\gamma(e_i u) \geqslant \gamma(e_i) + \omega_A(u)$, d'où

$$\gamma((\sum e_i t_i) u) \geqslant \inf_i (\gamma(e_i u) + \omega(t_i)) \geqslant \inf_i (\gamma(e_i) + \omega(t_i)) + \omega_A(u) = \gamma(\sum e_i t_i) + \omega_A(u)$$

quels que soient les $t_i \in K$, c.q.f.d.

2. Normes et immeubles

Désormais, nous reprenons pour l'essentiel, outre nos conventions générales, celles de I, 10.2. Cependant, le corps gauche est noté D au lieu de K, la dimension de X est notée n au lieu de $r+1$ et d'autres modifications mineures par rapport à I, 10.2 seront indiquées le moment venu. Pour la commodité du lecteur, nous allons rappeler les principales notations et les résultats dont nous aurons besoin.

2.1. A la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de X est associé un tore K-déployé maximal S du K-groupe algébrique $GL(X)$, dont les éléments rationnels sur K sont les éléments de G dont la matrice par rapport à (e_i) est diagonale à coefficients dans K. Le centralisateur Z (noté T dans I, 10.2) est le groupe des matrices diagonales à coefficients dans D. Pour $t = \operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n) \in Z$, on pose

$$(1) \qquad a_i(t) = t_i^{-1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Les restrictions à S des a_i forment une base du groupe des caractères $X^*(S)$ de S. On pose $V_1^* = X^*(S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ et on munit V_1^* de la norme euclidienne pour laquelle (a_i) est une base orthonormale.

On sait que les *racines* de G suivant S sont les caractères

$$(2) \qquad a_{ij} = a_j - a_i \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \neq j \leqslant n.$$

Leur ensemble Φ est un système de racines irréductible de type A_{n-1} dans le sous-espace V^* de V_1^* qu'il engendre. Pour $a_{ij} \in \Phi$, le sous-groupe radiciel $U_{a_{ij}}$ de G associé à a_{ij} (*cf.* II, 1.1.3) (ou plutôt le sous-groupe des éléments rationnels sur K du dit) est formé des $u_{ij}(k)$ pour $k \in D$, définis par I, 10.2.1 :

$$(3) \qquad u_{ij}(k).e_h = e_h \quad \text{pour} \quad h \neq j \qquad \text{et} \qquad u_{ij}(k).e_j = e_j + e_i k.$$

2.2. On a démontré (I, 10.2.2 et 10.2.3) que $(Z, (U_a)_{a\in\Phi})$ est une *donnée radicielle* génératrice de type Φ dans G (au sens de I, § 6) et que la famille $\varphi=(\varphi_a)_{a\in\Phi}$ définie par

(4) $$\varphi_{a_{ij}}(u_{ij}(k))=\omega(k) \qquad (1\leqslant i\neq j\leqslant n,\ k\in D)$$

est une *valuation* spéciale de cette donnée radicielle (*cf.* I, 6.2).

2.3. On peut donc considérer l'*immeuble* $\mathscr{I}$ de cette donnée radicielle valuée (I, § 7) et l'*appartement* A de $\mathscr{I}$ associé à Z (ou à S). Rappelons que A est un espace affine sous l'espace vectoriel réel V dual de V^*, qu'on identifie à V en prenant le point $\varphi\in A$ pour origine. Le groupe G opère sur $\mathscr{I}$, le sous-groupe Z stabilise A et un élément $t\in Z$ opère sur A par la translation de vecteur $\nu(t)\in V$ défini par $\langle a, \nu(t)\rangle=-\omega(a(t))$ pour $a\in\Phi$ (I, 10.2.5; *cf.* II, 4.2.7).

2.4. On peut aussi considérer l'*immeuble élargi* $\mathscr{I}^1$ de G (*cf.* II, 4.2.16). On sait que le groupe $X_K^*(G)$ des caractères rationnels qur K de G est de rang un, engendré par la restriction à G de la *norme réduite* $\mathrm{Nrd}_{M/K}=\mathrm{Nrd}_{D/K}\circ\det$. Posons

(5) $$a_0=(a_1+\ \dots\ +a_n)/n,$$

de sorte que a_0 engendre l'orthogonal V^{1*} de V^* dans V_1^*. La restriction à S de la norme réduite est le caractère nda_0 (rappelons que $d^2=\dim_K D$). On identifie le dual de $X_K^*(G)\otimes\mathbf{R}$ au dual V^1 de V^{1*} grâce à l'isomorphisme de restriction $X_K^*(G)\to\mathbf{Z}nda_0$.

L'immeuble élargi est alors le produit $\mathscr{I}\times V^1$ sur lequel G opère par

(6) $$g.(x, v)=(g.x, v+\theta(g)) \qquad \text{pour} \quad x\in\mathscr{I},\quad v\in V^1,\quad g\in G,$$

où $\theta(g)$ est l'élément de V^1 défini par

$$\langle\theta(g), \chi\rangle=-\omega(\chi(g)) \qquad \text{pour} \quad \chi\in X_K^*(G),$$

ou encore par

(7) $$\langle\theta(g), a_0\rangle=-\frac{1}{n}\omega(\det g)=-\frac{1}{n}\delta(g),$$

et sur lequel V^1 opère par $(v_0, (x, v))\mapsto(x, v+v_0)$. On voit que l'immeuble $\mathscr{I}$ peut s'identifier soit à l'un quelconque des sous-espaces $\mathscr{I}\times\{v\}$ de $\mathscr{I}^1$ (pour $v\in V^1$), soit au quotient de $\mathscr{I}^1$ par l'action de V^1. Cette dernière identification est compatible avec les actions de G. Par contre, le stabilisateur de $\mathscr{I} \times \{v\}$ pour l'action de G sur $\mathscr{I}^1$ est le sous-groupe distingué $G^1 = \mathrm{Ker}\, \delta$ (*cf.* II, 4.2.16). Il est indépendant de v et contient $SL(X)$.

L'appartement A_1 de $\mathscr{I}_1$ associé à Z est le produit $A \times V^1$: c'est un espace affine sous le dual $V_1 = V \times V^1$ de V_1^*, et on l'identifie à V_1 en prenant $(\varphi, 0)$ comme origine. Un élément $t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \in Z$ stabilise A_1 et y opère par la translation de vecteur $\nu_1(t) \in V_1$ défini par :

(8) $$\langle \nu_1(t), a_i \rangle = -\omega(a_i(t)) = \omega(t_i) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

De manière générale, les appartements, racines affines, murs, facettes de $\mathscr{I}^1$ sont par définition les produits par V^1 des objets correspondants de $\mathscr{I}$.

2.5. Le normalisateur N de S stabilise A_1, d'où un homomorphisme ν_1 de N dans le groupe des automorphismes affines de A_1. Mais N est le produit semi-direct du groupe des matrices de permutation de la base (e_i) par le sous-groupe distingué Z. Par suite, l'image $W_1 = \nu_1(N)$ est le produit semi-direct du sous-groupe W_0 des permutations des coordonnées par le sous-groupe $\nu_1(Z)$ des translations de coordonnées appartenant à $\mathbf{Z}/e$. Pour $v \in V^1$, le sous-espace $A \times \{v\}$ de A_1 est l'ensemble des $p \in A_1$ tels que $a_0(p) = a_0(v)$. Par suite, le stabilisateur W^1 de $A \times \{v\}$ dans W_1 est indépendant de v et est le produit semi-direct de W_0 par le sous-groupe des translations de vecteur $t \in V_1$ telles que $a_i(t) \in \mathbf{Z}/e$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $a_0(t) = 0$. Autrement dit, *W^1 opérant sur $A \simeq A \times \{v\}$ est le groupe de Weyl affine du système de racines $e\Phi$.* Des propriétés classiques des groupes de Weyl affines résulte alors que pour tout $p \in A_1$, le stabilisateur W_p de p dans W_1 (ou dans W^1) est engendré par les réflexions par rapport aux murs des racines affines passant par p.

2.6. Pour $p \in \mathscr{I}$ (resp. $p \in \mathscr{I}^1$), notons F_p la facette de $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{I}^1$) qui contient p et notons Stab_p le stabilisateur de p dans G.

LEMME. — *Soient p, $q \in \mathscr{I}^1$.*

(i) $\mathrm{Stab}_p \subset \mathrm{Stab}_q$ *si et seulement si la facette F_q est contenue dans l'adhérence $\bar{F}_p$ de la facette F_p.*

(ii) $\mathrm{Stab}_p = \mathrm{Stab}_q$ *si et seulement si $F_p = F_q$.*

On peut supposer p, $q \in A_1$ puisque deux points de $\mathscr{I}^1$ appartiennent à un même appartement. En appliquant I, 7.4.4 à G^1, on voit que Stab_p est engendré par les $U_{a, -a(p)}$ pour $a \in \Phi$ et $N_p = \nu_1^{-1}(W_p)$. On sait aussi (I, 1.3.3) que F_p est l'intersection des racines affines et des complémentaires de racines affines contenant p; la condition $F_q \subset \bar{F}_p$ signifie donc que toute racine affine contenant p contient q, et implique, vu 2.5, que $W_p \subset W_q$. De plus, on a $U_{a,-a(p)} \subset U_{a,-a(q)}$ si et seulement si les conditions $k \in \mathbf{Z}/e$ et $k \geqslant -a(p)$ entraînent $k \geqslant -a(q)$, c'est-à-dire si et seulement si toute racine affine de la forme $\{x \in A_1 \mid a(x)+k \geqslant 0\}$ (avec $k \in \mathbf{Z}/e$) contenant p contient q. D'où (i), dont (ii) résulte.

2.7. *Remarque.* — On notera que l'assertion analogue à 2.6 pour p, $q \in \mathscr{I}$ est inexacte. Ceci provient de ce que $GL(X)$ opère sur son immeuble via PGL et se comporte alors comme un groupe adjoint, tandis qu'il se comporte comme un groupe simplement connexe pour ce qui est de son action sur son immeuble élargi $\mathscr{I}^1$.

2.8. Au point p de l'appartement A_1 de $\mathscr{I}^1$, identifié comme plus haut à V_1, faisons correspondre la norme scindable α_p sur X admettant (e_i) comme base scindante et telle que $\alpha_p(e_i) = -a_i(p)$: autrement dit, posons

$$\alpha_p\left(\sum e_i x_i\right) = \inf_i\left(\omega(x_i) - a_i(p)\right) \qquad (x_i \in D). \tag{9}$$

Il est clair que *l'application $p \mapsto \alpha_p$ est une bijection de A_1 sur l'ensemble des normes sur X admettant (e_i) comme base scindante.*

2.9. Lemme. — (i) *Pour tout $v \in V^1$, on a*

$$\alpha_{p+v} = \alpha_p - a_0(v) \qquad (p \in A_1). \tag{10}$$

(ii) *Pour $p \in A_1$ et $g \in N$, on a $\alpha_{g.p} = g.\alpha_p$.*

L'assertion (i) est immédiate puisque $a_i(v) = a_0(v)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Pour démontrer (ii), il suffit de la faire lorsque $g \in Z$ et lorsque g est une permutation de la base (e_i) (2.5). Dans ce second cas, la preuve est immédiate par transport de structure. Si $g = \operatorname{diag}(t_1, \ldots, t_n) \in Z$, on a, vu (8),

$$\begin{aligned}(g.\alpha_p)\left(\sum e_i x_i\right) &= \alpha_p\left(g^{-1}.\sum e_i x_i\right) = \alpha_p\left(\sum e_i t_i^{-1} x_i\right)\\ &= \inf(\omega x_i) - \omega(t_i) - a_i(p)) = \inf(\omega(x_i) - a_i(g.p)) = \alpha_{g.p}\left(\sum e_i x_i\right),\end{aligned}$$

d'où notre assertion.

2.10. Lemme. — *Pour tout $p \in A_1$, le stabilisateur $\mathscr{M}^{\times}_{\alpha_p}$ (1.17) de α_p dans G est égal au stabilisateur* Stab_p *de p.*

La « décomposition de Bruhat » de G (I,7.3.4) entraîne que $G = \mathrm{Stab}_p . N . \mathrm{Stab}_p$ et que tout sous-groupe Y de G contenant Stab_p est engendré par Stab_p et l'intersection $Y \cap N$. Mais 2.9 (ii) montre que $\mathcal{M}^{\times}_{\alpha_p} \cap N = \mathrm{Stab}_p \cap N$. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Stab}_p \subset \mathcal{M}^{\times}_{\alpha_p}$, ou encore, puisque Stab_p est engendré par $\mathrm{Stab}_p \cap N$ et les $U_{a, -a(p)}$, que, pour tout $a_{ij} \in \Phi$, tout $u = u_{ij}(k)$, avec $k \in D$ et $\omega(k) \geqslant -a_{ij}(p) = a_i(p) - a_j(p) = \alpha_p(e_j) - \alpha_p(e_i)$, appartient à $\mathcal{M}_{\alpha_p}$, ce qui est immédiat vu (3) et 1.11 (17).

2.11. Théorème. — *Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des normes scindables sur X.*

(i) *L'application $p \mapsto \alpha_p$ se prolonge d'une manière et d'une seule en une application j de l'immeuble élargi $\mathcal{I}^1$ de G dans $\mathcal{N}$ covariante par G, c'est-à-dire satisfaisant à*

$$(11) \qquad j(g.x) = g.j(x) \quad \textit{pour} \quad x \in \mathcal{I}^1 \textit{ et } g \in G.$$

(ii) *L'application j est bijective et satisfait à*

$$(12) \qquad j(tx + (1-t)y) = tj(x) + (1-t)j(y)$$

pour $x, y \in \mathcal{I}^1$ et $t \in [0, 1]$, et à

$$(13) \qquad j(x+v) = j(x) - a_0(v) \quad \textit{pour} \quad x \in \mathcal{I}^1 \quad \textit{et} \quad v \in V^1.$$

(iii) *Pour toute application j' de $\mathcal{I}^1$ dans $\mathcal{N}$ possédant les propriétés* (11) *et* (12), *il existe une constante $c \in \mathbf{R}$ telle que $j' = j + c$.*

Comme l'immeuble élargi $\mathcal{I}^1$ s'identifie au quotient de $G \times A_1$ par la relation d'équivalence « *il existe $n \in N$ tel que $q = n.p$ et $g^{-1}hn \in \mathrm{Stab}_p$* » entre éléments (g, p) et (h, q) de $G \times A_1$ (I,7.4.1), l'existence et l'unicité de j résultent des lemmes 2.9 (ii) et 2.10. Comme deux points quelconques de $\mathcal{I}^1$ appartiennent à un même appartement, i. e. sont transformés de deux points de A_1 par un même élément de G, l'injectivité de j et (12) résultent des mêmes propriétés (évidentes) de l'application $p \mapsto \alpha_p$. La surjectivité de j résulte de ce que toute norme scindable est transformée par un élément de G d'une norme admettant (e_i) comme base scindante, c'est-à-dire de la forme α_p pour un $p \in A_1$. Enfin, (13) résulte de (10) et de la commutation des opérations de G et de V^1 sur $\mathcal{I}^1$. On a ainsi démontré (i) et (ii).

D'autre part, on sait qu'une application de $\mathcal{I}^1$ dans lui-même, covariante par G et affine sur les segments est de la forme $(x, v) \mapsto (x, v + v_0)$ avec $v_0 \in V^1$ (II,4.2.16), d'où (iii). —

2.12. *Remarque.* — Transportons à $\mathcal{N}$ la distance de $\mathcal{I}^1$ grâce à j. On obtient ainsi une distance d sur $\mathcal{N}$ équivalente à la distance d' introduite dans [10], définie par $d'(\alpha, \beta)=\sup_{x\in X-\{0\}}|\alpha(x)-\beta(x)|$. Plus précisément, on a $d'\leqslant d\leqslant \sqrt{n}.d'$, puisque l'on a, d'après [10], 2.1,

$$d\,(j\,(x), j\,(y))=(\sum a_i(y-x)^2)^{1/2}$$

et

$$d'\,(j\,(x), j\,(y))=\sup|a_i(y-x)|,$$

pour x, $y\in A_1$.

2.13. Faisons opérer G :

— sur l'ensemble $\mathcal{N}_0$ des normes scindables de volume nul (par rapport à la base (e_i)) par la loi (*cf.* 1.9(14) et 1.10)

$$(14)\qquad (g, \alpha)\mapsto g.\alpha+\frac{1}{n}\delta(g)=g.\alpha-a_0(\theta(g))\qquad (g\in G, \alpha\in\mathcal{N}_0);$$

— sur l'ensemble $\mathcal{N}^0$ des classes d'homothéties de normes scindables par passage au quotient;

— sur l'ensemble End $\mathcal{N}$ des normes carrées sur M par automorphismes intérieurs.

Il est clair que les bijections canoniques $\mathcal{N}_0\to\mathcal{N}^0$ et $\mathcal{N}^0\to$ End $\mathcal{N}$ sont compatibles avec ces opérations de G. Avec ces notations :

Corollaire. — *Il existe une bijection j_0 (resp. j^0, resp.* End j) *et une seule de l'immeuble $\mathcal{I}$ de G sur $\mathcal{N}_0$ (resp. $\mathcal{N}^0$, resp.* End $\mathcal{N}$) *covariante par G et affine sur les segments (autrement dit, satisfaisant à* (11) *et* (12)). *Pour $x\in\mathcal{I}$, on a $j_0(x)=j((x, 0))$ (resp. $j^0(x)=j(\{x\}\times V^1)$, resp.* End $j\,(x)=\mathrm{End}_{j((x,0))}$).

Que l'application définie par la deuxième phrase de l'énoncé possède les propriétés voulues est immédiat. Son unicité résulte de II,4.2.12.

2.14. Pour $x\in\mathcal{I}^1$ (resp. $x\in\mathcal{I}$), posons $\mathcal{M}_x=\mathcal{M}_{j(x)}$ (resp. $\mathcal{M}_x=\mathcal{M}_{j_0(x)}$). Rappelons aussi que F_x désigne la facette de $\mathcal{I}^1$ (resp. $\mathcal{I}$) contenant x.

Proposition. — *Soient x, $y\in\mathcal{I}^1$ (resp. $\mathcal{I}$). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$(15)\qquad \overline{F}_y\subset F_x;$$

(16) $\mathrm{Stab}_x \subset \mathrm{Stab}_y$ (*resp.* $\mathrm{Stab}_{(x,0)} \subset \mathrm{Stab}_{(y,0)}$);

(17) $\mathcal{M}_x^\times \subset \mathcal{M}_y^\times$;

(18) $\mathcal{M}_x \subset \mathcal{M}_y$.

En effet, (15) est équivalent à (16) d'après 2.6, (16) à (17) d'après 2.10 et (17) à (18) d'après 1.21.

COROLLAIRE. — *On a $\mathcal{M}_x = \mathcal{M}_y$ si et seulement si $F_x = F_y$.*

2.15. L'immeuble $\mathcal{I}$ muni de l'ensemble $\mathcal{F}$ de ses facettes est un complexe simplicial géométrique (I,2.1.12; rappelons que le système de racines Φ est irréducible), d'où une structure de complexe simplicial abstrait sur $\mathcal{F}$. Notons que l'on peut identifier $\mathcal{F}$ avec l'ensemble des facettes de $\mathcal{I}^1$ par la bijection $F \mapsto F \times V^1$.

Le corollaire précédent permet de définir l'application $F \mapsto \mathcal{M}_F$ de $\mathcal{F}$ dans l'ensemble $\mathcal{H}$ des ordres héréditaires (1.25) et 2.14 entraîne :

COROLLAIRE. — *L'application $F \mapsto \mathcal{M}_F$ est un isomorphisme de complexe simplicial abstrait de $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{H}$.*

2.16. PROPOSITION. — *Soit $x \in \mathcal{I}$. Pour que* $\mathrm{End}\, j(x)$ *soit la norme radique associée à l'ordre $\mathcal{M}_x$* (1.2), *il faut et il suffit que x soit le centre de gravité de la facette F_x.*

On peut supposer que F_x est une facette de la « chambre fondamentale » C de l'appartement A, qui est le simplexe de A défini par les inégalités

(19) $$a_1 < a_2 < \ldots a_n < a_{n+1},$$

avec $a_{n+1} = a_1 + 1/e$. Il existe alors r indices i_k, avec $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n$ (où $r = \dim F_x + 1$) tels que F_x soit le simplexe de A défini par les inégalités

(20) $$a_1 = \ldots = a_{i_1} < a_{i_1+1} = \ldots = a_{i_2} < \ldots < a_{i_r+1} = \ldots = a_{n+1},$$

et le centre de gravité de F_x est le point de A défini par (20) et :

(21) $$a_{i_k+1} = a_{i_k} + 1/re \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant r.$$

On voit alors sans peine que la proposition résulte des formules (26) et (27) de 1.23.

2.17. *Remarque.* — Comme $\mathcal{I}$ est l'enveloppe convexe de l'ensemble des centres de gravité de ses facettes, il résulte de 2.13 et 2.16 que l'ensemble End $\mathcal{N}$ des normes carrées sur M est l'enveloppe convexe de l'ensemble des normes radiques associées aux ordres héréditaires de M.

3. Schémas

On conserve les hypothèses et notations du paragraphe 2. Le mot schéma signifie $\mathcal{O}_K$-schéma affine.

3.1. On sait qu'à un $\mathcal{O}_K$-module libre de type fini E correspond canoniquement un $\mathcal{O}_K$-schéma en groupes lisse, dont le groupe des points à valeurs dans une $\mathcal{O}_K$-algèbre R est le groupe additif $R \otimes E$ (*cf.* II,1.4.1). Le schéma en groupes ainsi associé au module $\mathcal{O}_D$ est noté $\mathfrak{D}$. Soit $a_{ij} \in \Phi$; on sait que $U_{a_{ij}}$ est canoniquement muni d'une structure de K-espace vectoriel ([2], 3.17) et l'application $t \mapsto u_{ij}(t)$ (2.1) est un isomorphisme de K-espaces vectoriels de D sur $U_{a_{ij}}$. Pour tout $k \in \mathbf{R}$, le groupe $U_{a_{ij}, k} = \{ u_{ij}(t) \mid t \in D,\ \omega(t) \geqslant k \}$ est un réseau. On note $\mathfrak{U}_{a_{ij}, k}$ le schéma qui lui est associé. Notons $[k]_e$ le plus petit élément de $\mathbf{Z}/e$ supérieur à k, autrement dit défini par

$$(1) \qquad [k]_e \in \mathbf{Z}/e \qquad \text{et} \qquad k \leqslant [k]_e < k + \frac{1}{e}.$$

Alors, l'application $t \mapsto u_{ij}(t\pi_D^{k'})$, avec $k' = e.[k]_e$, définit un isomorphisme de $\mathfrak{D}$ sur $\mathfrak{U}_{a_{ij}, k}$.

3.2. Soit $\mathcal{M}$ un *ordre* de la K-algèbre centrale simple $M = \mathrm{End}_D X$. C'est un $\mathcal{O}_K$-module libre de type fini, d'où un schéma noté $\mathfrak{M}$. Il est clair que $\mathfrak{M}$ est un *schéma en algèbres*, d'où un schéma en groupes noté $\mathfrak{M}^\times$ dont le groupe des points à valeurs dans une $\mathcal{O}_K$-algèbre R est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de $R \otimes M$. La fibre générique de $\mathfrak{M}^\times$ s'identifie au groupe algébrique $G = GL(X)$ et le groupe de ses points entiers, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathcal{O}_K$, au groupe multiplicatif $\mathcal{M}^\times$.

La norme $\mathrm{Norme}_{M/K}$ et la norme réduite Nrd_M sont des polynômes à coefficients dans $\mathcal{O}_K$ par rapport aux coordonnées relatives à une base du $\mathcal{O}_K$-module $\mathcal{M}$, donc appartiennent à l'algèbre affine du schéma $\mathfrak{M}$, et il est immédiat que $\mathfrak{M}^\times$ est le sous-schéma *ouvert de* $\mathfrak{M}$ défini par la norme, ou la norme réduite, ou encore que l'algèbre affine de $\mathfrak{M}^\times$ est donnée par :

$$O_K[\mathfrak{M}^\times] = O_K[\mathfrak{M}]\,[1/\mathrm{Norme}_{M/K}] = O_K[\mathfrak{M}]\,[1/\mathrm{Nrd}_M].$$

Par suite, $\mathfrak{M}^\times$ est *lisse* et *connexe* (i. e. ses fibres sont connexes : *cf.* II,1.2.12).

En particulier, considérons un réseau $\mathscr{X}$ de X et l'ordre maximal $\mathscr{M} = \operatorname{End}\mathscr{X}$, stabilisateur de $\mathscr{X}$ dans M. Notons $\mathfrak{End}\,\mathscr{X}$ et $\mathfrak{GL}(\mathscr{X})$ les schémas $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}^{\times}$ respectivement. Soit (f_i) une base de $\mathscr{X}$ et soit (g_{ij}) la matrice d'un élément $g \in M$ par rapport à cette base : l'application $g \mapsto (g_{ij})$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_K$-modules de $\mathscr{M}$ sur $(\mathcal{O}_D)^{n^2}$ et définit par suite un isomorphisme de schémas en groupes (additifs) de $\mathfrak{End}\,\mathscr{X}$ sur $\mathfrak{D}^{n^2}$, la multiplication dans $\mathfrak{End}\,\mathscr{X}$ se traduisant par les formules matricielles habituelles.

Notons $X_{[K]}$ le K-espace vectoriel sous-jacent à X et $\mathscr{X}_{[K]}$ le $\mathcal{O}_K$-module sous-jacent à $\mathscr{X}$, qui est un réseau dans $X_{[K]}$ (1.6). Le groupe algébrique $\operatorname{End}_D X$ (resp. $GL_D(X)$) s'identifie à un sous-groupe défini sur K de $\operatorname{End}_K X_{[K]}$ (resp. $GL_K(X_{[K]})$) et il est immédiat que $\mathfrak{End}\,\mathscr{X}$ (resp. $\mathfrak{GL}(\mathscr{X})$) est l'adhérence schématique de $\operatorname{End}_D X$ (resp. $GL_D(X)$) dans $\mathfrak{End}\,\mathscr{X}_{[K]}$ (resp. $\mathfrak{GL}(\mathscr{X}_{[K]})$) (*cf.* II,1.2.6).

3.3. Appliquons 3.2 au cas $n=1$ (d'où $M=D$) et $\mathscr{M}=\mathcal{O}_D$; on obtient alors le *schéma canonique* $\mathfrak{D}^{\times}$ de fibre générique le groupe multiplicatif de D (considéré comme groupe algébrique sur K). Comme le groupe algébrique Z (2.1) est isomorphe à $(D^{\times})^n$, on en déduit le *schéma canonique* $\mathfrak{Z}$ de fibre générique Z. Il est lisse et connexe.

3.4. Soit Y un K-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathscr{Y}$ un réseau de Y. Soit $\mathfrak{H}$ un schéma en groupes plat de fibre générique H et soit ρ une représentation linéaire de H dans Y, c'est-à-dire un morphisme de groupes algébriques de H dans $GL(Y)$. Rappelons qu'on dit que $\mathfrak{H}$ *opère* (resp. *opère fidèlement*) *dans* $\mathscr{Y}$ (par ρ) si ρ se prolonge (*cf.* II,1.2.4) en un morphisme de $\mathfrak{H}$ dans $\mathfrak{GL}(\mathscr{Y})$ (resp. en un isomorphisme de $\mathfrak{H}$ sur l'adhérence schématique de $\rho(H)$ dans $\mathfrak{GL}(\mathscr{Y})$).

3.5. Soit $q=(q_1, \ldots, q_n) \in (\mathbf{Z}/e)^n$; notons $\mathscr{X}(q)$ le réseau de X engendré par les $e_i \pi_D^{eq_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$. De 3.2 et 3.3 résulte immédiatement la proposition suivante (où l'on prend pour représentation linéaire ρ l'application identique) :

PROPOSITION. — (i) *Le schéma en groupes* $\mathfrak{Z}$ *opère fidèlement dans* $\mathscr{X}(q)$.

(ii) *Soit* $a_{ij} \in \Phi$ *et soit* $k \in \mathbf{R}$. *Pour que le schéma en groupes* $\mathfrak{U}_{a_{ij}, k}$ *opère (resp. opère fidèlement) dans* $\mathscr{X}(q)$, *il faut et il suffit que* $[k]_e \geqslant q_i - q_j$ (*resp.* $[k]_e = q_i - q_j$).

On peut encore exprimer (ii) en disant que *l'adhérence schématique de* $U_{a_{ij}}$ *dans* $\mathfrak{GL}(\mathscr{X}(q))$ (*ou dans* $\mathfrak{GL}(\mathscr{X}(q)_{[K]})$) *s'identifie à* $\mathfrak{U}_{a_{ij}, q_i - q_j}$

3.6. Soit x un point de l'immeuble $\mathscr{I}$ de G. Au paragraphe 2 nous lui avons associé une norme scindable $\alpha = j_0(x)$ sur X et un ordre $\mathscr{M}_x$ de M. On note $\mathfrak{G}_x$ le schéma $\mathfrak{M}_x^\times$: c'est donc un $\mathcal{O}_K$- *schéma en groupes affine, lisse, connexe et dont le groupe de points entiers est* $\mathscr{M}_x^\times = G^1 \cap \mathrm{Stab}_x = \mathrm{Stab}_{(x,0)}$. On a vu également que $\mathscr{M}_x$, donc $\mathfrak{G}_x$, ne dépend que de la facette $F = F_x$ de $\mathscr{I}$ contenant x. *On peut donc le noter aussi* $\mathfrak{G}_F$. Enfin, le rang r de α est égal à $1 + \dim F$.

THÉORÈME. — *Soit* $(\mathscr{X}_0, \ldots, \mathscr{X}_{r-1})$ *un système de représentants des classes d'homothéties du drapeau de réseaux associé à la norme* α.

Considérons la représentation linéaire ρ_r *de* G *dans* X^r *puissance r-ième de la représentation identique et soit* $\mathscr{X}_\alpha$ *le réseau* $\prod_{0 \leqslant j < r} \mathscr{X}_j$ *dans* X^r.

(i) *Le schéma en groupes* $\mathfrak{G}_x$ *opère fidèlement dans* $\mathscr{X}_\alpha$.

(ii) *Supposons que* x *appartienne à l'appartement* A *de* $\mathscr{I}$. *Alors, les schémas en groupes* $\mathfrak{Z}$ *et* $\mathfrak{U}_{a,-a(x)}$ *pour* $a \in \Phi$ *opèrent fidèlement sur* $\mathscr{X}_\alpha$. *Autrement dit,* $\mathfrak{Z}$ *et les* $\mathfrak{U}_{a,-a(x)}$ *sont les adhérences schématiques respectives de* Z *et des* $U_{a,-a(x)}$ *dans* $\mathfrak{GL}(\mathscr{X}_\alpha)$, *ou, vu* (i), *dans* $\mathfrak{G}_x$.

Vu 1.17, le $\mathcal{O}_K$-module $\mathscr{M}_x$ est l'image réciproque de Π End $\mathscr{X}_j$ par l'injection diagonale ρ_r de M dans $(\mathrm{End}\, X)^r$. On en déduit que la restriction de ρ_r à $\mathscr{M}_x$ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_x$ sur un sous-module facteur direct de Π End $\mathscr{X}_j$ et définit un isomorphisme du schéma en groupes (additifs) $\mathfrak{M}_x$ sur le sous-schéma en groupes fermé de $\Pi\, \mathfrak{End}\, \mathscr{X}_j$ adhérence schématique de $\rho_r(M)$. De plus, si f est la fonction régulière $(g_0, \ldots, g_{r-1}) \mapsto \prod_{0 \leqslant j < r} \mathrm{Norme}_{M/K}\, g_j$ sur M^r, on a $f \circ \rho_r = (\mathrm{Norme}_{M/K})^r$, d'où résulte que ρ_r définit un isomorphisme de $\mathfrak{M}_x^\times$ sur l'adhérence schématique de $\rho_r(G)$ dans $\Pi\, \mathfrak{GL}(\mathscr{X}_j)$, c'est-à-dire que $\mathfrak{G}_x$ opère fidèlement sur $\mathscr{X}_\alpha$.

Supposons maintenant $x \in A$. Pour tout $c \in \mathbf{R}$, le réseau $\{ y \in X \mid \alpha(y) \geqslant c \}$ est le réseau $\mathscr{X}(q(c))$, avec $q(c) = ([c + a_i(x)]_e)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et 3.5 (i) entraîne que $\mathfrak{Z}$ opère fidèlement sur chaque $\mathscr{X}_j$ donc sur $\mathscr{X}_\alpha$. Il ne reste plus qu'à démontrer que $\mathfrak{U}_{a,-a(x)}$ opère sur $\mathscr{X}(q(c))$ quel que soit c et qu'il existe un $c \in \mathbf{R}$ tel qu'il opère fidèlement sur $\mathscr{X}(q(c))$. Vu 3.5 (ii), la première assertion résulte de l'inégalité évidente

$$[c + a_i(x)]_e - [c + a_j(x)]_e \geqslant [a_i(x) - a_j(x)]_e \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant n,\ c \in \mathbf{R}),$$

et la seconde s'obtient en prenant $c = -a_j(x)$ (pour $a = a_{ij}$).

3.7. En appliquant alors le théorème 2.2.3 de II, on obtient :

COROLLAIRE. — *Soit $\Phi^+ \subset \Phi$ un système de racines positives et posons $\Phi^- = -\Phi^+$. Quels que soient les ordres mis sur Φ^+ et sur Φ^-, le morphisme produit est un isomorphisme de schémas de $\prod_{a \in \Phi^-} \mathfrak{U}_{a,\,-a(x)} \times \mathfrak{Z} \times \prod_{a \in \Phi^+} \mathfrak{U}_{a,\,-a(x)}$ sur un sous-schéma ouvert dense $\mathfrak{C}_x$ de $\mathfrak{G}_x$.*

En termes imagés, $\mathfrak{G}_x$ possède une « grosse cellule ».

3.8. Si $D = K$, autrement dit si G est *déployé* sur K (remarquons que G ne peut pas être quasi-déployé sans être déployé), le corollaire précédent montre que *l'identité de G se prolonge en un isomorphisme du schéma en groupes $\mathfrak{G}_x$ défini ci-dessus sur le schéma en groupes noté $\mathfrak{G}_{\{x\}}$ en* II,4.6.26. En effet, $\mathfrak{G}_{\{x\}}$ est connexe d'après II,4.6.2, puisque le schéma $\mathfrak{Z}$ (noté $\mathfrak{T}$ en II,4.6) l'est, et 3.7 joint à II,4.6.2 montre que $\mathfrak{G}_x$ et $\mathfrak{G}_{\{x\}}$ ont « la même grosse cellule ». On en déduit $\mathfrak{G}_x = \mathfrak{G}_{\{x\}}$, d'après II,1.2.13 et 14.

3.9. *Remarques.* — 1. Soient $x_0, \ldots, x_{r-1}$ les sommets de la facette F_x. Les ordres maximaux contenant $\mathscr{M}_x$ sont les $\mathscr{M}_{x_j}$ et, à un changement de numérotation près, le drapeau des réseaux invariants par $\mathscr{M}_{x_j}$ se compose des homothétiques de $\mathscr{X}_j$. On peut alors exprimer 3.6 (i) en disant que si x est un sommet de $\mathscr{I}$, le schéma $\mathfrak{G}_x$ est (par définition même) $\mathfrak{G}\mathfrak{L}(\mathscr{X}_x)$, où $\mathscr{X}_x$ est l'une quelconque des boules de la norme $j_0(x)$ (boules qui sont deux à deux homothétiques), et, dans le cas général, que $\mathfrak{G}_x$ *« est » l'image fermée dans $\prod_{0 \leq j < r} \mathfrak{G}_{x_j}$ du morphisme diagonal de G dans la fibre générique G^r de $\prod_{0 \leq j < r} \mathfrak{G}_{x_j}$.*

2. Soit Ω une partie bornée close non vide (I,2.4.6) de l'appartement A : c'est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_s\}$ de sommets de A. On peut alors définir l'ordre $\mathscr{M}_\Omega$ comme l'intersection des ordres maximaux $\mathscr{M}_{x_j}$ et poser $\mathfrak{G}_\Omega = \mathfrak{M}_\Omega^\times$. On voit comme en 3.6 que $\mathfrak{G}_\Omega$, $\mathfrak{Z}$ et les $\mathfrak{U}_{a,\,f_\Omega(a)}$ pour $a \in \Phi$ (avec $f_\Omega(a) = \sup(-a(\Omega))$) opèrent fidèlement sur $\prod_{1 \leq j \leq s} \mathscr{X}_{x_j}$, ou encore que $\mathfrak{G}_\Omega$ est l'image fermée de l'application diagonale $G \to \prod_{1 \leq j \leq s} \mathfrak{G}_{x_j}$, et que l'analogue de 3.7 reste vrai.

3. Dans II,4.6, nous avons considéré plus généralement des schémas G_f pour une fonction f sur Φ, quasi-concave optimale (II,4.5.2 et 3). Mais on montre aisément que, dans le cas qui nous intéresse ici et plus généralement dès que le système de racines Φ est de type A_n, toute fonction quasi-concave optimale est de la forme f_Ω pour une partie bornée close Ω de A.

—

3.10. Étudions la *fibre fermée* $\bar{\mathfrak{G}}_x$ du schéma $\mathfrak{G}_x$. Pour cela, reprenons les notations de 1.17, avec $\alpha = j_0(x)$. Alors, $\bar{\mathfrak{G}}_x$ s'identifie au groupe multiplicatif de la $\bar{K}$-algèbre $\bar{\mathcal{M}}_\alpha = \mathcal{M}_\alpha/\pi_K \mathcal{M}_\alpha$; c'est un ouvert du $\bar{K}$-espace vectoriel $\bar{\mathcal{M}}_\alpha$ et sa structure résulte du lemme suivant :

LEMME. — *Soient k un corps commutatif, A une k-algèbre de dimension finie, R le radical de A et H le groupe multiplicatif de A considéré comme groupe algébrique défini sur k. L'application $a \mapsto 1+a$ est un isomorphisme de variétés de R sur le radical unipotent déployé $R_{ud}(H)$ de H et l'homomorphisme canonique de A sur A/R définit un isomorphisme de groupes algébriques du quotient quasi-réductif ${}^qH = H/R_{ud}(H)$ sur le groupe multiplicatif de A/R.*

(Pour les notions de radical unipotent déployé et de quotient quasi-réductif, *voir* II, 1.1.11 sqq). On peut supposer k séparablement clos. Pour tout entier $p \geqslant 1$, $1+R^p$ est le translaté d'un sous-espace vectoriel, donc une sous-variété définie sur k de H, et est un sous-groupe distingué de H. Mais $1+R^p/1+R^{p+1}$ est isomorphe à R^p/R^{p+1} qui est un espace vectoriel sur k. Comme $R^p = \{0\}$ pour p assez grand, il en résulte que $1+R$ est un sous-groupe unipotent déployé distingué de H. De plus, $H/1+R$ est le groupe multiplicatif de l'algèbre semi-simple A/R, qui est un produit d'algèbres de matrices de rangs n_i sur des corps gauches D_i dont les centres L_i contiennent k. Par suite, $H/1+R$ est le produit des k-groupes algébriques $\prod_{L_i/k} GL(n_i, D_i)$ (où $\prod_{L_i/k}$ désigne l'opération de restriction des scalaires (*cf.* II, 1.5)) et est donc quasi-réductif, d'où le lemme.

3.11. Le radical de $\bar{\mathcal{M}}_\alpha$ est $\bar{J}_\alpha = J_\alpha/\pi_K \mathcal{M}_\alpha$ (*cf.* lemme 1.19) et le quotient $\bar{\mathcal{M}}_\alpha/\bar{J}_\alpha$ est isomorphe à $\mathcal{M}_\alpha/J_\alpha$, donc d'après 1.17 à $\prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \mathrm{End}_{\bar{K}}(\mathcal{X}_{j-1}/\mathcal{X}_j)$. Comme $\mathcal{X}_{j-1}/\mathcal{X}_j$ est un $\bar{D}$-espace vectoriel de dimension n_j, on déduit de ce qui précède :

PROPOSITION. — (i) *Le radical unipotent déployé $R_{ud}(\bar{\mathfrak{G}}_x)$ de $\bar{\mathfrak{G}}_x$ est la sous-variété $1+\bar{J}_\alpha$.*

(ii) *Le quotient quasi-réductif ${}^q\bar{\mathfrak{G}}_x = \bar{\mathfrak{G}}_x/R_{ud}(\bar{\mathfrak{G}}_x)$ de $\bar{\mathfrak{G}}_x$ est isomorphe à $\prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \prod_{\bar{C}/\bar{K}} GL(n_j, \bar{D})$, où $\bar{C}$ est le centre de $\bar{D}$. Il est réductif si et seulement si $\bar{C}$ est une extension séparable de $\bar{K}$.*

3.12. Démontrons maintenant l'analogue du théorème 4.6.33 de II. Considérons l'*étoile* $\mathcal{J}(F)$ de la facette $F = F_x$ dans le complexe simplicial $\mathcal{J}$, c'est-à-dire l'ensemble des facettes F' de $\mathcal{J}$ telles que $F \subset \bar{F}'$, ordonné par la relation $F' \subset \bar{F}''$. On a vu (2.14) que les éléments de $\mathcal{J}(F)$ sont les facettes F′ telles que $\mathscr{M}_{F'} \subset \mathscr{M}_F$; l'injection de $\mathscr{M}_{F'}$ dans $\mathscr{M}_F$ définit alors un morphisme de schémas en groupes $i_{F,\,F'} : \mathfrak{G}_{F'} \to \mathfrak{G}_F$, d'où un morphisme de groupes algébriques $\bar{i}_{F,\,F'} : \bar{\mathfrak{G}}_{F'} \to \bar{\mathfrak{G}}_F$ et par composition avec l'application canonique de $\bar{\mathfrak{G}}_F$ sur son quotient quasi-réductif, un morphisme de groupes algébriques $\bar{\mathfrak{G}}_{F'} \to {}^q\bar{\mathfrak{G}}_F$, dont l'image est notée $p(F')$. On en déduit aussi un homorphisme, dit canonique, du groupe $\mathfrak{G}_{F'}(\mathcal{O}_K)$ des points entiers de $\mathfrak{G}_{F'}$ dans le groupe ${}^q\bar{\mathfrak{G}}_F(\bar{K})$ des points rationnels sur $\bar{K}$ de ${}^q\bar{\mathfrak{G}}_F$.

PROPOSITION. — (i) *L'application $F' \mapsto p(F')$ est un isomorphisme d'ensembles ordonnés de $\mathscr{I}(F)$ sur l'ensemble des $\bar{K}$-sous-groupes pseudo-paraboliques de ${}^q\bar{\mathfrak{G}}_F$ ordonné par la relation opposée à l'inclusion.*

(ii) *Le groupe $p(F')(\bar{K})$ des points rationnels sur $\bar{K}$ de $p(F')$ est l'image canonique dans ${}^q\bar{\mathfrak{G}}_F(\bar{K})$ du groupe des points entiers $\mathfrak{G}_{F'}(\mathcal{O}_K) = G^1 \cap \mathrm{Stab}_{F'}$.*

(iii) *L'image réciproque de $p(F')(\bar{K})$ dans $\mathfrak{G}_F(\mathcal{O}_K) = G^1 \cap \mathrm{Stab}_F$ est égale à $\mathfrak{G}_{F'}(\mathcal{O}_K) = G^1 \cap \mathrm{Stab}_{F'}$.*

Les $\bar{K}$-sous-groupes pseudo-paraboliques de $\prod_{\bar{L}/\bar{K}} \mathrm{End}\, \mathscr{X}_{j-1}/\mathscr{X}_j$ sont obtenus par restriction des scalaires de $\bar{L}$ à $\bar{K}$ à partir des $\bar{L}$-sous-groupes paraboliques du $\bar{L}$-groupe réductif $\mathrm{End}\, \mathscr{X}_{j-1}/\mathscr{X}_j$ et il est bien connu que ceux-ci sont les stabilisateurs de drapeaux dans le $\bar{D}$-espace vectoriel $\mathscr{X}_{j-1}/\mathscr{X}_j$. Mais il est clair que se donner une suite $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_r)$ de drapeaux δ_j dans $\mathscr{X}_{j-1}/\mathscr{X}_j$ revient exactement à se donner un drapeau de réseaux $\Delta \supset \Delta_\alpha$: les réseaux de Δ sont les homothétiques des images réciproques des éléments des δ_j dans les $\mathscr{X}_{j-1}$ pour $1 \leqslant j \leqslant r$. L'assertion (i) résulte alors de 2.14 et (ii) et (iii) de la description explicite des $\mathscr{M}_{F'}$ (1.17).

4. MONTÉE ÉTALE

On conserve les hypothèses et notations des paragraphes précédents. De plus, on désigne par $\tilde{K}$ une extension galoisienne de degré fini de K, de groupe de Galois Γ. On suppose que $\tilde{K}$ est *étale*, c'est-à-dire (*cf.* II, 1.6.2) que la valuation ω de K se prolonge de manière *unique* en une valuation $\tilde{\omega}$ de $\tilde{K}$, que $\tilde{\omega}$ est *non ramifiée* (i. e. $\tilde{\omega}(\tilde{K}) = \omega(K)$) et que le corps résiduel $\bar{\tilde{K}}$ est *séparable* sur $\bar{K}$. L'extension $\bar{\tilde{K}}$ de $\bar{K}$ est alors galoisienne et son groupe de Galois s'identifie canoniquement à Γ. On pose $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ et on note $\tilde{\mathcal{O}}$ l'anneau des entiers de $\tilde{K}$. D'une manière générale, si Y est un « objet attaché à K » (resp. à $\mathcal{O}$), on note $\tilde{Y}$ « l'objet obtenu par extension des scalaires » de K à $\tilde{K}$ (resp. de $\mathcal{O}$ à $\tilde{\mathcal{O}}$) muni de « l'action naturelle de Γ ». Par exemple, si Y est un K-espace vectoriel (resp. un $\mathcal{O}$-module), on pose $\tilde{Y}=Y\otimes_K\tilde{K}$ (resp. $\tilde{Y}=Y\otimes_{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{O}}$); si α est une K-norme sur Y, on désigne par $\tilde{\alpha}$ la K-norme $\alpha\otimes\tilde{\omega}$ sur $\tilde{Y}$; on note $\tilde{G}$ le groupe algébrique sur $\tilde{K}$ déduit de G et aussi, par abus de notations, le groupe $\tilde{G}(\tilde{K})=G(\tilde{K})$ de ses points rationnels sur $\tilde{K}$. A des isomorphismes canoniques près, on a $\tilde{G}=\mathrm{Aut}_{\tilde{D}}\tilde{X}=\tilde{M}^{\times}$, avec $\tilde{M}=M\otimes_K\tilde{K}=\mathrm{End}_{\tilde{D}}\tilde{X}$.

4.1 Considérons la $\tilde{K}$-algèbre $\tilde{D}=D\otimes_K\tilde{K}$. Conformément à nos conventions générales, on note $\tilde{\omega}$ le prolongement canonique $\omega\otimes\tilde{\omega}$ de la valuation ω de D en une $\tilde{K}$-norme d'algèbre sur $\tilde{D}$. Comme $\tilde{D}$ est une $\tilde{K}$-algèbre centrale simple de rang fini, il existe un corps D' de centre $\tilde{K}$, de rang fini d'^2 sur $\tilde{K}$, unique à isomorphisme près, tel que $\tilde{D}$ soit isomorphe à l'algèbre des matrices d'ordre $s=d/d'$ à coefficients dans D'. *On suppose dans toute la suite du paragraphe que la condition suivante est satisfaite :*

(ME) *La valuation $\tilde{\omega}$ de $\tilde{K}$ se prolonge en une valuation ω' de D'.*

Notons deux cas intéressants où (ME) est satisfaite :

– K (donc $\tilde{K}$) est *hensélien*, par exemple complet;

– $D'=\tilde{K}$, autrement dit D est *neutralisé par* $\tilde{K}$.

4.2. La $\tilde{K}$-algèbre $\tilde{M}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices d'ordre ns à coefficients dans D', ou encore à $M'=\mathrm{End}_{D'}X'$, où X' est un D'-espace vectoriel à droite de dimension ns. D'où un isomorphisme de $\tilde{K}$-groupes algébriques de $\tilde{G}$ sur $G'=GL(X')$, ce qui permet d'appliquer à $\tilde{G}=G'$ tous les résultats précédents, notamment la construction de l'immeuble $\mathcal{I}'$, noté aussi $\tilde{\mathcal{I}}$, de la bijection End j' de $\mathcal{I}'$ sur l'ensemble des $\tilde{K}$-normes carrées sur $M'=\tilde{M}$, de l'isomorphisme de complexe simplicial abstrait de l'ensemble des facettes de $\mathcal{I}'$ sur l'ensemble $\mathcal{H}'$ des ordres héréditaires de M', etc.

4.3. Lemme. — *Soit Y un K-espace vectoriel de dimension finie.*

(i) *L'application $\mathcal{Y}\mapsto\tilde{\mathcal{Y}}=\mathcal{Y}\otimes_{\mathcal{O}}\tilde{\mathcal{O}}$ est une bijection de l'ensemble des réseaux de Y sur l'ensemble des réseaux de $\tilde{Y}$ invariants par Γ.*

(ii) *L'application $\alpha\mapsto\tilde{\alpha}$ est une bijection de l'ensemble des K-normes (resp. K-normes scindables) sur Y sur l'ensemble des $\tilde{K}$-normes (resp. $\tilde{K}$-normes scindables) invariantes par Γ sur $\tilde{Y}$.*

Ce résultat classique se montre par « descente étale » : si $(\lambda_\sigma)_{\sigma\in\Gamma}$ est une base de $\tilde{\mathcal{O}}$ sur $\mathcal{O}$, on a $\det(\lambda_\sigma^\tau)\in\tilde{\mathcal{O}}^{\times}$ puisque $\overline{\tilde{K}}$ est galoisienne sur $\overline{K}$ et tout élément $y\in\tilde{Y}$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\tilde{\mathcal{O}}$ des $y_\sigma=\sum\lambda_\sigma^\tau\, y^\tau\in\tilde{\mathcal{O}}\, y\cap Y$. Le lemme en résulte facilement.

4.4. LEMME. — (i) *L'application* $\mathscr{M} \mapsto \tilde{\mathscr{M}} = \mathscr{M} \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}}$ *est une bijection de l'ensemble des ordres de* M *sur l'ensemble des ordres de* $\tilde{M}$ *invariants par* Γ.

(ii) *Si* $\mathscr{M}$ *est un ordre de* M, *le radical* rad $\tilde{\mathscr{M}}$ *de* $\tilde{\mathscr{M}}$ *est égal à* $(\mathrm{rad}\,\mathscr{M})^{\tilde{}} = (\mathrm{rad}\,\mathscr{M}) \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}}$.

L'assertion (i) résulte de 4.3. Pour démontrer (ii), on utilise le lemme 1.19. On a $\pi_K \mathscr{M} \subset \mathrm{rad}\,\mathscr{M}$ et le quotient $\mathscr{M}/\mathrm{rad}\,\mathscr{M}$ est semi-simple. On en déduit que $\tilde{\mathscr{M}}/(\mathrm{rad}\,\mathscr{M})^{\tilde{}} = (\mathscr{M}/\mathrm{rad}\,\mathscr{M}) \otimes_{\bar{K}} \bar{\tilde{K}}$ (puisque $\tilde{\mathcal{O}}$ est plat sur $\mathcal{O}$) et est semi-simple puisque $\bar{\tilde{K}}$ est séparable sur $\bar{K}$. Par suite, $\mathrm{rad}\,\tilde{\mathscr{M}} \subset (\mathrm{rad}\,\mathscr{M})^{\tilde{}}$. D'autre part, si $(\mathrm{rad}\,\mathscr{M})^q \subset \pi_K \mathscr{M}$, on a $((\mathrm{rad}\,\mathscr{M})^{\tilde{}})^q \subset \pi_K \tilde{\mathscr{M}}$, et $(\mathrm{rad}\,\mathscr{M})^{\tilde{}} \subset \mathrm{rad}\,\tilde{\mathscr{M}}$.

4.5. PROPOSITION. — *L'application* $\mathscr{M} \mapsto \tilde{\mathscr{M}}$ *est une bijection de* $\mathscr{H}$ *sur l'ensemble des éléments invariants par* Γ *de* $\mathscr{H}'$, *et pour tout* $\mathscr{M} \in \mathscr{H}$, *la norme radique* $\rho_{\tilde{\mathscr{M}}}$ *est égale à* $(\rho_{\mathscr{M}})^{\tilde{}} = \rho_{\mathscr{M}} \otimes \tilde{\omega}$.

Comme $\tilde{\mathcal{O}}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{O}$, un $\mathscr{M}$-module à gauche E est projectif de type fini si et seulement si $E \otimes_{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}}$ est un $\tilde{\mathscr{M}}$-module projectif de type fini (*cf.* [15], th. 2.39). La première assertion en résulte grâce à 4.4 (ii) et à la caractérisation des éléments de $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{H}'$) comme les ordres dont le radical est un module à gauche projectif (évidemment de type fini puisque un ordre est noethérien) (1.24). La seconde est immédiate : pour $u \in \tilde{\mathscr{M}}$, on a $(\rho_{\mathscr{M}})^{\tilde{}}(u) = k/er$ si et seulement si

$$u \in (rad\,\mathscr{M})^k \otimes \tilde{\mathcal{O}} - (\mathrm{rad}\,\mathscr{M})^{k+1} \otimes \tilde{\mathcal{O}} = (\mathrm{rad}\,\tilde{\mathscr{M}})^k - (\mathrm{rad}\,\tilde{\mathscr{M}})^{k+1}.$$

4.6. Appliquons 4.4 et 4.5 au cas $n=1$, $M=D$ et $\mathscr{M}=\mathcal{O}_D$. Le radical de l'ordre héréditaire $\tilde{\mathscr{D}} = \mathcal{O}_D \otimes \tilde{\mathcal{O}}$ de $\tilde{D}$ est l'idéal principal engendré par π_D (identifié à $\pi_D \otimes 1$) et la norme $\tilde{\omega}$ de $\tilde{D}$ est la norme radique associée à $\tilde{\mathscr{D}}$. Choisissons un $\tilde{D}$-module simple à droite S et identifions D' au commutant de S, de sorte que S est un espace vectoriel à gauche de dimension $s=d/d'$ sur D'. Vu 1.13, il existe sur S une $\tilde{D}$-norme ω_0, et une seule à une constante près; rappelons que ω_0 est aussi une D'-norme scindable et que la norme End ω_0 sur $\tilde{D} = \mathrm{End}_{D'}\, S$ est égale à $\tilde{\omega}$. On choisit ω_0 de telle sorte que $0 \in \omega_0(S)$ et on pose $\mathscr{S} = \{ x \in S \mid \omega_0(x) \geqslant 0 \}$.

Soit e' l'indice de ramification de D' et soient r'_0 le rang et $(n'_1, \ldots, n'_{r'_0})$ le type de l'ordre $\tilde{\mathscr{D}}$ (1.20). Alors $\pi_{\tilde{\mathscr{D}}}^{e'}$ est un générateur de l'idéal engendré par π_K (1.18); d'où $r'_0 = e/e'$. De plus, il résulte de 1.19 que le drapeau de réseaux associé à ω_0 est l'ensemble des $\mathscr{S}\pi_D^k$ pour $k \in \mathbf{Z}$, d'où $n'_1 = \ldots = n'_{r'_0} = de'/ed'$ et $x \in \mathscr{S}\pi_D^k - \mathscr{S}\pi_D^{k+1}$ équivaut à $\omega_0(x) = k/e$. Enfin, la $\bar{K}$-algèbre $\bar{D} \otimes \bar{\bar{K}}$ est isomorphe au produit de $r'_0 = e/e'$ exemplaires de l'algèbre des matrices d'ordre de'/ed' à coefficients dans $\bar{D}'$.

4.7. Théorème. — (i) *Il existe une bijection et une seule* $\psi : x \mapsto \tilde{x}$ *de l'immeuble* $\mathscr{I}$ *de* G *sur l'ensemble* $\tilde{\mathscr{I}}^{\natural}$ *des points invariants par* Γ *de l'immeuble* $\tilde{\mathscr{I}}$ *de* $\tilde{G}$ *qui soit covariante par* G *et affine sur les segments.*

(ii) *Les facettes de* $\mathscr{I}$ *sont les images réciproques par* ψ *des facettes invariantes par* Γ *de* $\tilde{\mathscr{I}}$.

(iii) *Pour tout* $x \in \mathscr{I}$, *on a* $\operatorname{End} j'(\tilde{x}) = (\operatorname{End} j(x))^{\sim}$ *et* $\tilde{\mathscr{M}}_{\tilde{x}} = (\mathscr{M}_x)^{\sim}$.

(iv) *Pour tout* $x \in \mathscr{I}$, *l'identité de* $\tilde{G}$ *se prolonge en un isomorphisme de schémas en groupes de* $(\mathfrak{G}_x)^{\sim}_{\mathscr{O}}$ *sur* $\tilde{\mathfrak{G}}_{\tilde{x}}$.

L'unicité de ψ résulte de II, 4.2.12. Montrons son existence. Remarquons tout d'abord que $\mathscr{I}$ (resp. $\tilde{\mathscr{I}}^{\natural}$) est l'enveloppe convexe des centres de gravité des facettes de $\mathscr{I}$ (resp. des facettes invariantes par Γ de $\tilde{\mathscr{I}}$) : c'est évident pour $\mathscr{I}$ et résulte pour $\tilde{\mathscr{I}}^{\natural}$ de ce que, si $z \in \tilde{\mathscr{I}}$ est invariant par Γ, alors la facette F_z le contenant l'est aussi et z est dans l'enveloppe convexe des centres de gravité des facettes dont les sommets forment une orbite de Γ dans l'ensemble des sommets de F_z. Identifions alors $\mathscr{I}$ (resp. $\tilde{\mathscr{I}}$) à l'ensemble des normes carrées $\operatorname{End} \mathscr{N}$ (resp. $\operatorname{End} \mathscr{N}'$) sur M (resp. $\tilde{M} = M'$) par $\operatorname{End} j$ (resp. $\operatorname{End} j'$), de sorte que les centres de gravité des facettes correspondent aux normes radiques (2.16). Pour $\beta, \gamma \in \operatorname{End} \mathscr{N}$ et $t \in [0, 1]$, on a $(t\beta + (1-t)\gamma)^{\sim} = t\tilde{\beta}(1-t)\tilde{\gamma}$ (1.29(33)). Par suite, l'ensemble des $\beta \in \operatorname{End} \mathscr{N}$ tels que $\tilde{\beta}$ appartienne à $\operatorname{End} \mathscr{N}'$ est convexe et contient les normes radiques (vu 4.5), donc est $\operatorname{End} \mathscr{N}$ tout entier (2.17) ; et son image par $\beta \mapsto \tilde{\beta}$ est convexe et contient les normes radiques invariantes par Γ, donc est $(\operatorname{End} \mathscr{N}')^{\natural}$ tout entier. Ceci démontre (i) et (iii), d'où résulte (ii) compte tenu de 2.14, et (iv) d'après la définition même des schémas $\mathfrak{G}_x$ à partir de $\mathscr{M}_x$.

4.8. Corollaire. — *Supposons K hensélien. Si D est neutralisé par une extension étale* $\tilde{K}$ *de K (autrement dit, si le groupe algébrique réductif G se déploie sur une extension étale de K), l'identité de G se prolonge en un isomorphisme de schémas en groupes de* $\mathfrak{G}_x$ *sur le schéma* $\mathfrak{G}_{\{x\}}$ *défini en* II, 5.1.30 ($x \in I$).

Cela résulte de 3.8.

4.9. *Remarque.* — Supposons K hensélien. Alors *D est neutralisé par une extension étale de K si et seulement si le centre C de D est une extension séparable de* $\bar{K}$. Il est classique que cette condition est suffisante [14] et d'après un théorème de Jančevskii-Platonov ([11], [12]), elle entraîne que

$\bar{C}$ est une extension galoisienne cyclique de degré e de $\bar{K}$, dont le groupe de Galois est engendré par le restriction σ à $\bar{C}$ de l'automorphisme de $\bar{D}$ déduit de l'automorphisme intérieur de D défini par l'uniformisante π_D. Réciproquement, supposons D neutralisé par l'extension étale $\tilde{K}$. Les résultats précédents entraînent facilement (même si K n'est pas hensélien) que $\bar{C}$ est séparable ainsi que le théorème de JANČEVSKII-PLATONOV. En effet, 4.6 montre que $\bar{D} \otimes \bar{\tilde{K}}$ (resp. le centre $\bar{C} \otimes \bar{\tilde{K}}$ de $\bar{D} \otimes \bar{\tilde{K}}$) est isomorphe au produit de e exemplaires de l'algèbre des matrices d'ordre d/e à coefficients dans $\bar{\tilde{K}}$ (resp. de $\bar{\tilde{K}}$), et le groupe cyclique engendré par $\sigma \otimes \mathrm{id}$ permute transitivement les facteurs, d'où notre assertion. De plus, le polynôme $\mathrm{Nrd}_{D/K}$ devient par extension des scalaires le déterminant sur l'algèbre de matrices $\tilde{D}$ et ce qui précède entraîne aussitôt que *le polynôme* $\overline{\mathrm{Nrd}}$ *sur le* $\bar{K}$*-espace vectoriel* $\bar{D}$ *déduit de* $\mathrm{Nrd}_{D/K}$ *est donné par*

$$\overline{\mathrm{Nrd}} = \mathrm{Norme}_{\overline{CK}} \circ \overline{\mathrm{Nrd}}_{\overline{DC}}. \tag{1}$$

4.10. Appliquons maintenant les résultats de 1.13 à 1.16 aux $\tilde{D}$-modules normés et en particulier à $\tilde{X}$. On peut prendre pour X' le D'-espace vectoriel à droite $\mathrm{Hom}_{\tilde{D}}(S, \tilde{X})$ (où S est le $\tilde{D}$-module simple choisi en 4.6) et $\tilde{X}$ s'identifie à $X' \otimes_{D'} S$. La proposition 1.16 fournit une bijection $\gamma \mapsto \gamma'$ de l'ensemble des $\tilde{D}$-normes scindables sur $\tilde{X}$ sur l'ensemble $\mathscr{N}'$ des D'-normes scindables sur X'. Par ailleurs, l'application $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ est une bijection de $\mathscr{N}$ sur l'ensemble des $\tilde{D}$-normes scindables invariantes par Γ sur $\tilde{X}$ (4.3). Posons $\alpha' = (\tilde{\alpha})'$, de sorte que

$$\alpha' = \mathrm{Hom}(\omega_0, \tilde{\alpha}), \quad \tilde{\alpha} = {}^{\alpha'} \otimes \omega_0, \quad \mathrm{End}\, \tilde{\alpha} = (\mathrm{End}\, \alpha)^{\sim} = \mathrm{End}\, \alpha'.$$

On en déduit un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{I} \arrow[d, "\psi"] & \mathscr{I}^1 \arrow[l] \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\psi^1"] & \mathscr{N} \arrow[d] \\
\tilde{\mathscr{I}} & \tilde{\mathscr{I}}^1 \arrow[l] \arrow[r, "\sim"] & \mathscr{N}'
\end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont les applications canoniques, où ψ est la bijection $\mathscr{I} \to \tilde{\mathscr{I}}^{\Gamma}$ définie en 4.7, où ψ^1 est une bijection de $\mathscr{I}^1$ sur l'ensemble $(\tilde{\mathscr{I}}^1)$ des points fixes de Γ dans $\tilde{\mathscr{I}}^1$, covariante par G et affine sur les segments, et où la troisième flèche verticale est l'application $\alpha \mapsto \alpha'$. Remplacer ω_0 par $\omega_0 + c$ (avec $c \in \mathbf{R}$), revient à remplacer α' par $\alpha' - c$ et

ψ^1 par son composé avec la translation de vecteur $v \in V^1$ défini par $a_0(v)=c$.

Notons encore que les boules $\mathscr{X}_{\alpha, c}$ et $\mathscr{X}'_{\alpha', c}$ de α et α' sont reliées par :

$$\mathscr{X}'_{\alpha', c}=\{x' \in X' \mid x'(\mathscr{S}) \subset \mathscr{X}^{\sim}_{\alpha, c}\}=\operatorname{Hom}_{\tilde{\mathscr{D}}}(\mathscr{S}, \mathscr{X}^{\sim}_{\alpha, c}),$$

$$\mathscr{X}^{\sim}_{\alpha, c}=\sum\nolimits_{0 \leqslant k < r'_0} \mathscr{X}'_{\alpha', c-k/e} \otimes_{\mathscr{D}'} \mathscr{S} \pi_D^k.$$

Si r' est le rang de α' et $\mathscr{X}'_{\alpha'}$ le réseau de $(X')^{r'}$ défini comme en 3.6, il résulte de 3.6 que pour tout $x \in \mathscr{I}$, le *$\tilde{\mathcal{O}}$-schéma en groupes* $(\mathfrak{G}_x)^{\sim}_{\mathcal{O}}$ *opère fidèlement sur* $\mathscr{X}'_{\alpha'}$.

4.11. Pour démontrer le théorème 4.7(i) et (iii), nous avons utilisé, pour aller au plus court, les résultats de HARADA-BRUMER et d'AUSLANDER-GOLDMAN caractérisant les ordres héréditaires d'une part par la condition (H′) de 1.23, d'autre part par la propriété de leur radical d'être projectif (1.24). On peut aussi en donner une démonstration qui ne fait intervenir que des propriétés des immeubles et des schémas, démonstration que nous allons esquisser.

Tout d'abord, on se ramène au cas où K est *complet* (ou simplement hensélien), en utilisant le fait que l'immeuble de G sur K (resp. $\tilde{K}$) est canoniquement isomorphe comme complexe simplicial à l'immeuble sur $\hat{K}$ (resp. $\hat{\tilde{K}}$) (*cf.* [16] ou II, 4.2.25). Puis, on étudie le cas $n=1$, $X=D$, $G=D^{\times}$, et l'on montre que *le groupe de Galois* Γ *a alors un point fixe et un seul* x *dans* $\tilde{\mathscr{I}}$. L'existence de x résulte du théorème général d'existence de points fixes pour tout groupe borné, en particulier fini, d'isométries de $\tilde{\mathscr{I}}$ (I, 3.2.4). Supposons que Γ ait deux points fixes distincts x et y, avec $\dim F_x \leqslant \dim F_y$, et montrons que ceci implique une contradiction.

On se ramène au cas où $F_x \subset \bar{F}_y$ en remplaçant x soit par l'intersection du segment $[xy]$ avec la frontière de F_y (lorsque $x \notin F_y$), soit par le point z de cette frontière tel que $[xy] \subset [zy]$ (lorsque $x \in F_y$). On considère alors le schéma $\tilde{\mathfrak{G}}_x$. Il est invariant par Γ et on en déduit par « descente étale » (*cf.* II, 5.1.8 et 9) qu'il provient par extension des scalaires d'un $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse $\mathfrak{G}^{\natural}$ de fibre générique G. La proposition 3.12 montre que le $\bar{K}$-sous-groupe pseudo-parabolique de sa fibre fermée $\bar{\mathfrak{G}}^{\natural}$ correspondant à F_y est invariant par Γ, donc est un $\bar{K}$-sous-groupe pseudo-parabolique non trivial (II, 1.1.14). Compte tenu de ce que le centre de G fournit déjà un tore $\bar{K}$-déployé de dimension 1 contenu dans le centre de $\bar{\mathfrak{G}}^{\natural}$, il en résulte que $\bar{\mathfrak{G}}^{\natural}$ contient un tore $\bar{K}$-déployé de dimension $\geqslant 2$. Des résultats de GROTHENDIECK sur le relèvement des tores ([7], Exp. XI) on déduit alors que G possède un tore K-déployé de dimension $\geqslant 2$, ce qui est inexact.

Considérons alors la norme scindable $\omega_0 = j'_0(x)$ sur X′. De l'unicité du point fixe x résulte que $g.x=x$ pour tout $g\in G$, autrement dit que pour tout $t\in D^\times$, il existe $c(t)\in\mathbf{R}$ tel que $\omega_0(ty)=\omega_0(y)+c(t)$ pour tout $y\in X'$ et on vérifie aussitôt que l'application $t\mapsto c(t)$ prolongée à D par $c(0)=+\infty$ est une valuation de D prolongeant celle de K, donc coïncide avec ω. Ceci montre que $\operatorname{End}\omega_0=\tilde{\omega}$ et démontre 4.7(i) et (iii) pour $n=1$.

Dans le cas général, on tire aisément de la relation $\tilde{\omega}=\operatorname{End}\omega_0$ que *pour toute D-norme scindable* α *sur X, la norme* $(\operatorname{End}\alpha)^{\sim}$ *sur* $\tilde{M}$ *est une norme carrée*, d'où l'existence d'une injection φ de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}^{\natural}$ possédant les propriétés voulues. La démonstration de la surjectivité de φ est analogue à celle donnée plus haut de l'unicité du point fixe dans le cas $n=1$.

5. Le groupe SL

On conserve les hypothèses et notations précédentes. Nous allons indiquer rapidement comment se transposent les résultats des paragraphes 2 à 4 au cas du groupe $G_1=SL(X)$. Rappelons que G_1 est le sous-groupe algébrique de G défini par l'équation $\mathrm{Nrd}=1$ (où Nrd est le polynôme norme réduite). Il est défini sur K. Comme plus haut, on se permettra de désigner aussi par G_1 le groupe $G_1(K)$ de ses éléments rationnels sur K : il contient le groupe des éléments de $G(K)$ de déterminant 1.

5.1. La composante neutre S_1 de $S\cap G_1$ est un tore K-déployé maximal de G_1 et $S_1(K)$ est l'ensemble des $t=\operatorname{diag}(t_1,\ldots,t_n)$ avec $t_i\in K^\times$ et $t_1\ldots t_n=1$. Le centralisateur Z_1 de S_1 dans G_1 est l'intersection $Z\cap G_1$ et $Z_1(K)$ est l'ensemble des $t=\operatorname{diag}(t_1,\ldots,t_n)$ avec $t_i\in D^\times$ et $Nrd(t_1\ldots t_n)=1$. On a $G=G_1.Z$ et $G(K)=G_1(K)Z(K)$. Le système de racines de G_1 suivant S_1 s'identifie à φ par restriction de S à S_1 et les sous-groupes radiciels de G_1 sont ceux de G. Il est alors immédiat que $(Z_1, (U_a)_{a\in\Phi})$ est une donnée radicielle valuée dans $G_1=G_1(K)$ et l'immeuble de G_1 s'identifie canoniquement à celui de G. Notons que $G_1(K)$ est contenu dans le sous-groupe G^1 de 2.4; par suite, le stabilisateur dans G_1 d'un point $x\in\mathcal{I}$ est aussi le stabilisateur dans G_1 du point $(x, 0)$ de $\mathcal{I}^1$. D'autre part, on vérifie aisément que le normalisateur N_1 de S_1 dans G_1 a pour image canonique dans le groupe des automorphismes affines de l'appartement A le sous-groupe W^1 de 2.5, c'est-à-dire le groupe de Weyl affine du système de racines $e\Phi$ (SL est simplement connexe!). On en déduit que *les propositions* 2.6 *et* 2.14 *sont exactes pour* p, q, x, $y\in\mathcal{I}$, en notant Stab le stabilisateur dans G_1.

5.2. Il n'y a rien à changer à la définition des schémas $\mathfrak{U}_{a,k}$. Le *schéma canonique* $\mathfrak{Z}_1$ de fibre générique Z_1 est par définition l'adhérence schématique de Z_1 dans $\mathfrak{Z}$; c'est donc le sous-schéma de $(\mathfrak{D}^{\times})^n$ défini par l'équation $\mathrm{Nrd}(t_1 \ldots t_n)=1$ et l'application $(t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1 \ldots t_n, t_2, \ldots, t_n)$ définit un isomorphisme de schémas en groupes de $\mathfrak{Z}_1$ sur $\mathfrak{D}_1 \times (\mathfrak{D}^{\times})^{n-1}$, où $\mathfrak{D}_1$ est le sous-schéma de $\mathfrak{D}$ défini par l'équation $\mathrm{Nrd}=1$.

5.3. On voit sans peine que les assertions des n^{os} 3.5 à 3.7 restent exactes si l'on y remplace G par G_1, $\mathfrak{Z}$ par $\mathfrak{Z}_1$ et $\mathfrak{G}_x$ par l'adhérence schématique $\mathfrak{G}_{1,x}$ de G_1 dans $\mathfrak{G}_x$, *à condition d'y substituer aux épithètes* « lisse et connexe » *appliquées à* $\mathfrak{Z}$ *ou à* $\mathfrak{G}_x$ *l'épithète* « plat » *appliquée à* $\mathfrak{Z}_1$ *ou à* $\mathfrak{G}_{1,x}$.

Cependant, $\mathfrak{Z}_1$ *et les* $\mathfrak{G}_{1,x}$ *sont lisses et connexes si et seulement si le schéma en groupes* $\mathfrak{D}_1$ *l'est* (pour la connexité des $\mathfrak{G}_{1,x}$, on utilise l'analogue de II, 4.6.5). Ceci n'est pas toujours le cas, même si K est complet : on obtient un contre-exemple en prenant pour K un corps de caractéristique zéro à corps résiduel de caractéristique 2 non parfait et pour D le corps des quaternions sur K dont la norme réduite est le polynôme $X_0^2+cX_1^2+\pi_K(X_2^2+cX_3^2)$, où c est un élément de $\mathcal{O}_K$ dont l'image dans $\bar{K}$ n'est pas un carré.

5.4. L'opération d'adhérence schématique commute avec un changement de base *plat* (*cf.* II, 1.2.6). On en déduit que *le théorème* 4.7 (iv) *et le corollaire* 4.8 *restent valables pour les schémas* $\mathfrak{G}_{1,x}$.

5.5. Supposons que G se déploie sur une extension *étale* $\tilde{K}$ de K, autrement dit que D est neutralisé par $\tilde{K}$; (cf. 4.9). Alors, 5.4 et 3.8 entraînent que $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ et les $\mathfrak{G}_{1,x}$ sont lisses et connexes et que $\mathfrak{Z}_1$ (resp. $\mathfrak{G}_{1,x}$) est le sous-schéma fermé de $\mathfrak{Z}$ (resp. $\mathfrak{G}_x$) défini par l'équation $Nrd=1$. De 3.11 et 4.9(1) résulte alors que $R_{ud}(\mathfrak{G}\subseteq\mathfrak{C}_{1,x})=R_{ud}(\mathfrak{G}\subseteq C_x)$ et que le quotient quasi-réductif ${}^q\mathfrak{G}\subseteq C_{1,x}$ est le sous-groupe défini sur $\bar{K}$ de ${}^q\mathfrak{G}\subseteq C_x$ défini par l'équation

$$\mathrm{Norme}_{\bar{C}/\bar{K}}\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\mathrm{Nrd}_j\right)=1,$$

où Nrd_j est le polynôme norme réduite de $GL(n_j, \bar{D})$ sur $\bar{C}$.

Enfin, on voit aisément que, si K est hensélien ou plus généralement si l'application canonique $\mathfrak{D}_1(\mathcal{O}_K) \mapsto \mathfrak{D}_1(\bar{K})$ est surjective, alors l'analogue de la proposition 3.12 est exact.

APPENDICE

Nous avons supposé que la valuation ω de D était *discrète* et que D était de rang fini sur son centre K. Ces hypothèses sont bien souvent nécessaires, notamment pour tout ce qui concerne les ordres et les schémas. Cependant, bien des résultats des paragraphes 1 et 2 restent valables sans elles, ce que nous allons indiquer rapidement.

Soit donc D un corps muni d'une valuation ω non impropre à valeurs réelles. Les définitions d'une D-norme (1.1), d'une A-norme (1.2) et d'une D-norme scindable (1.4) peuvent être données sans changement. Mais 1.3 et 1.5 (i) ne sont plus exacts (sauf si D est maximalement complet), ni 1.6, 1.7 et 1.8 (les boules d'une norme scindable ne sont plus nécessairement des réseaux). Par contre, 1.5 (ii) (avec la démonstration de la Remarque), 1.9, 1.10, 1.11, 1.12 (sauf la dernière phrase), 1.13 et 1.14 restent vrais; 1.15 à 1.25 ne le sont plus; 1.26 à 1.30 sont valables sans changement dès que ω est discrète : pour le cas dense, voir plus loin.

Les définitions et résultats rappelés en 2.1 à 2.4 restent valables sans changement (I, 10.1), à l'exception de leurs interprétations en termes de groupes algébriques sur K ou de norme réduite (p. ex., il faut définir $\theta(g)$ par 2.4.(7)). Le n° 2.5 doit être modifié : W^1 n'est plus un groupe de Weyl affine, mais reste produit semi-direct de W_0 par le groupe des translations de vecteur $t \in V^1$ satisfaisant à $a_i(t) \in \omega(D^\times)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $a_0(t)=0$. Pour 2.6, on ne peut plus parler de la facette F_p, mais on peut néanmoins montrer que si F et F' sont des facettes de $\mathscr{I}^1$, le stabilisateur de F est contenu dans celui de F' si et seulement si $F' \subset \bar{F}$.

Le plus important est que *les* n$^{\text{os}}$ 2.8, 2.9 *et* 2.10 *restent vrais sans changer un mot aux démonstrations. Si la valuation* ω *est* discrète, *il en est de même du théorème* 2.11 *et de son corollaire* 2.13. Dans le cas dense, on a :

THÉORÈME 2.11 *bis*. — *Supposons* $\omega(D^\times)$ *dense dans* $\mathbf{R}$, *et soit* $\mathscr{N}$ *l'ensemble des normes scindables sur* X.

(i) *L'application* $p \mapsto \alpha_p$ *se prolonge d'une manière et d'une seule en une application* j *de l'immeuble élargi* $\mathscr{I}^1$ *de* G *dans* $\mathscr{N}$ *covariante par* G.

(ii) *L'application* j *est bijective et satisfait à*

$$j(x+v)=j(x)-a_0(v) \qquad \textit{pour} \quad x \in \mathscr{I}^1 \quad \textit{et} \quad v \in V^1. \tag{13}$$

(iii) *Pour toute application* j' *de* $\mathscr{I}^1$ *dans* $\mathscr{N}$ *covariante par* G, *il existe une constante* $c \in \mathbf{R}$ *telle que* $j'=j+c$.

COROLLAIRE. — *Il existe une bijection* j_0 (*resp.* j^0, (*resp.* End j) *et une seule de l'immeuble* $\mathscr{I}$ *de* G *sur* $\mathscr{N}_0$ (*resp.* $\mathscr{N}^0$, *resp.* End $\mathscr{N}$) *qui soit covariante par* G. *Pour* $x\in\mathscr{I}$, *on a* $j_0(x)=j((x, 0))$ (*resp.* $j^0(x)=j(\{x\}\times V^1)$, *resp.* (End j (x) = End j $((x, 0))$).

Les démonstrations d'existence sont identiques à celles de 2.11 (i) (où l'on supprime ce qui à trait à la formule (12)) et de 2.13. Quant aux assertions d'unicité, elles résultent de 1.8.2.1 et II.4.2.16.

De ce théorème résulte alors dans le cas dense une démonstration de 1.26 : deux normes scindables α et β sont les images par j de deux points de $\mathscr{I}^1$ qui appartiennent toujours à un même appartement $g.A_1$ (avec $g\in G$), et *la base* $(g^{-1}.e_i)$ *est scindante à la fois pour* α *et pour* β. On démontre alors 1.27 à 1.30 comme au paragraphe 1 et on voit comme en 2.11 que

$$j(tx+(1-t)y)=tj(x)+(1-t)j(y), \tag{12}$$

pour $x, y\in\mathscr{I}^1$ et $t\in[0, 1]$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUSLANDER (M.) et GOLDMAN (O.). — Maximal orders, *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 97, 1960, p. 1-24.

[2] BOREL (A.) et TITS (J.). — Groupes réductifs, *Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 27, 1965, p. 55-150.

[3] BOURBABI (N.). — *Algèbre*, chap. VIII, Paris, 1958.

[4] BOURBAKI (N.). — *Espaces vectoriels topologiques*, Paris, Masson, 1981.

[5] BRUHAT (F.) et TITS (J.). — Groupes réductifs sur un corps local, I, Données radicielles valuées, *Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 41, 1972, p. 5-251.

[6] BRUHAT (F.) et TITS (J.). — Groupes réductifs sur un corps local, II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée, *Publ. Math. I.H.E.S.* vol. 60, 1984, p. 5-184.

[7] DEMAZURE (M.) et GROTHENDIECK (A.). — Séminaire de Géométrie Algébrique. Schémas en Groupes (SGAD), I.H.E.S., 1963-64.

[8] DIEUDONNÉ (J.). — *La géométrie des groupes classiques*, Springer, 1963.

[9] DRAXL (P.) et KNESER (M.). — SK_1 von Schiefkörpern, *Lecture Notes*, 778, Springer, 1980.

[10] GOLDMAN (O.) et IWAHORI (N.). — The space of p-adic norms, *Acta Math.*, vol. 109, 1963, p. 137-177.

[11] JANČEVSKII (V. I.) et PLATONOV (V. P.). — Sur la conjecture de Harder (en russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 221, 1975, p. 784-787, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 16, 1975, p. 424-427.

[12] JANČEVSKII (V. I.). — Corps gauche sur un corps valué discret hensélien et problème de Tannaka-Artin (en russe), *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 226, 1976, p. 281-283, *Soviet Math. Dokl.*, vol. 17, 1976, p. 113-116.

[13] MONNA (A. F.) et SPRINGER (T. A.). — Sur la structure des espaces de Banach non-archimédiens, *Indag. Math.*, vol. 27, 1965, p. 602-614.

[14] NAKAYAMA (T.). — Divisionsalgebren über diskret bewerteten Körpern, *J. reine u. angew. Math.*, vol. 178, 1938, p. 11-13.

[15] REINER (I.). — *Maximal orders*, Londres, Academic Press, 1975.

[16] ROUSSEAU (G.). — *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*, Thèse, Université Paris-XI, 1977.

[17] SERRE (J.-P.). — *Corps locaux*, Paris, Hermann, 1962.

[18] SERRE (J.-P.). — Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach *p*-adiques, *Publ. Math. I.H.E.S.*, vol. 12, 1962, p. 69-85.

—