BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques : deux compléments

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 213-227

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__213_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 213-227.

FORMES QUADRATIQUES MULTIPLICATIVES ET VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES : DEUX COMPLÉMENTS

PAR

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE (*)

RÉSUMÉ. — Dans un article précédent, on a associé à toute variété algébrique intègre X définie sur un corps k de caractéristique différente de 2, et à toute forme de Pfister Φ définie sur k, un groupe $D^{\Phi}(X)$. On montre ici que de certaines propriétés de ces groupes résulte formellement leur trivialité sur les k-variétés intègres propres dont le corps des fractions est transcendant pur sur k. Par ailleurs, on déduit d'autres propriétés des groupes $D^{\Phi}(X)$ l'existence, sur toute $\mathbb{R}$-variété intègre, projective et lisse X telle que l'espace $X(\mathbb{R})$ des points réels ait s composantes connexes, de 0-cycles de degré $(s-2)$ qui ne sont pas rationnellement équivalents, sur X, à un 0-cycle effectif.

ZUSAMMENFASSUNG. — In einem früheren Artikel wurde zu jeder reduzierten und irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit X über dem Körper k (Char. $k \neq 2$) und zu jeder Pfisterform Φ über k eine Gruppe $D^{\Phi}(X)$ assoziiert. Im ersten Teil dieses Artikels wird auf formelle Art gezeigt : ist X vollständig und der Funktionenkörper von X rein transzendent, dann ist $D^{\Phi}(X)$ trivial. Im zweiten Teil, in dem $k = \mathbb{R}$, und in dem X glatt und projektiv ist, und s die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Raumes $X(\mathbb{R})$ der reellen Punkte von X bezeichnet, benutzt man die Gruppen $D^{\Phi}(X)$ um das Bestehen auf X von 0-Zyklen des Grades $(s-2)$, die nicht zu einem effektiven Zyklus rational äquivalent sind, festzustellen.

Introduction

Soit k un corps, supposé dans cette introduction de caractéristique 0, et X une k-variété algébrique géométriquement intègre, propre et lisse sur k. Dans beaucoup de cas où l'on montre que X n'est pas k-rationnelle (i. e. de corps des fractions transcendant pur sur k), la méthode utilisée est, grossièrement, la suivante. On définit un foncteur G de la catégorie des k-variétés propres et lisses dans une autre catégorie (par exemple les groupes abéliens) satisfaisant :

(i) G est trivial sur l'espace projectif $\mathbb{P}_k^n$, c'est-à-dire $G(\mathbb{P}_k^n)$ est isomorphe à $G(\operatorname{Spec} k)$;

(ii) G est un invariant k-birationnel : $G(Y)$ ne dépend, à isomorphisme près, que du corps des fractions de Y.

(*) Texte reçu le 6 juin 1979.

J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, 81, avenue du Général-Leclerc, 75014 Paris.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/213/$ 5.00

On constate ensuite que $G(X)$ est non trivial, ce qui permet de conclure, puisque (i) et (ii) impliquent :

(iii) Si Y est k-rationnelle, $G(Y)$ est trivial.

En pratique, il est souvent assez délicat d'établir (ii). Au paragraphe 1 de cet article, on voit que pour certains foncteurs G assez généraux, satisfaisant des conditions simples (*spécialisation* et *homotopie*), on obtient (iii) de façon relativement formelle. Plusieurs exemples de tels foncteurs sont donnés au paragraphe 2 : le groupe de Brauer de Y, les groupes $D^{\Phi}(Y)$ et $\tilde{D}^{\Phi}(Y)$ associés dans [2] à une k-variété intègre Y et à une k-forme de Pfister Φ. Pour ces derniers groupes, on ne sait établir (ii) que pour Y de dimension deux [5]. L'énoncé (iii) pour $D^{\Phi}(Y)$, qui a motivé la première partie de cet article, peut se déduire du corollaire 4.3 de l'article [8] de M. Knebusch. Il a cependant semblé utile de dégager la géométrie sous-jacente à ce genre de situations, dans la mesure où elle permet d'obtenir (iii) dans de nombreux cas.

Dans [3], D. Coray et l'auteur ont montré que, pour toute k-surface fibrée en coniques X au-dessus de $\mathbb{P}^1_k$, il existe un entier N, dépendant d'un invariant simple de la surface, tel que tout 0-cycle sur X de degré au moins N est rationnellement équivalent, sur X, à un 0-cycle effectif : au paragraphe 3, qui est indépendant des précédents, on montre comment de l'existence, pour X k-variété intègre projective et lisse, d'un accouplement entre $\tilde{D}^{\Phi}(X)$ et les classes de 0-cycles sur X, pour l'équivalence rationnelle (accouplement défini dans [2]), ainsi que de la valeur de certains groupes $\tilde{D}^{\Phi}(X)$ dans le cas $k=\mathbb{R}$, on tire le résultat annoncé dans le résumé, qui implique lui-même que la valeur de l'entier N obtenue dans [3] est, en général, la meilleure possible.

Le plan de l'article est le suivant :

0. Rappels et notations.
1. Trivialité de certains foncteurs sur les variétés k-rationnelles.
2. Exemples.
3. Compléments sur l'équivalence rationnelle sur les 0-cycles des variétés réelles.

Je remercie J.-J. Sansuc pour ses critiques de premières versions de cet article.

0. Rappels et notations

Il s'agit de rappels de [2]. On note A^* le groupe des éléments inversibles d'un anneau A (commutatif unitaire). Pour k (car $k\neq 2$) un corps, Φ une

k-forme de Pfister ([10], chap. 10) et K un surcorps de k, on note $D_K(\Phi)$ le sous-groupe de $K^\times$ formé des éléments représentés par Φ sur K. Pour X une k-variété algébrique (= schéma séparé et de type fini sur k) intègre, de corps des fractions $k(X)$, on définit le groupe

$$D^\Phi(X) = \{ f \in k(X)^\times,\ \forall P \in X,\ \exists g \in D_{k(X)}(\Phi), f/g \in O_{X,P}^\times \} / D_{k(X)}(\Phi),$$

où $O_{X,P}$ désigne l'anneau local du point P du schéma X. Le groupe $D^\Phi(X)$ contient un sous-groupe, $\tilde{D}^\Phi(X)$, formé des classes des éléments de $k(X)^\times$ qui s'écrivent partout semi-localement comme le produit d'une fonction inversible par un élément de $D_{k(X)}(\Phi)$. On note $D^\Phi(k) = D^\Phi(\mathrm{Spec}\, k) = k^\times / D_k(\Phi)$. Pour X une k-variété intègre régulière, on dispose d'accouplements, linéaires à droite, et à gauche pour le second

$$X(k) \times D^\Phi(X) \to D^\Phi(k), \tag{1}$$
$$(P, \alpha) \mapsto \langle P, \alpha \rangle,$$

$$Z_0(X) \times D^\Phi(X) \to D^\Phi(k), \tag{2}$$
$$(\textstyle\sum_i n_i P_i, \alpha) \mapsto \langle \sum_i n_i P_i, \alpha \rangle = \prod_i \langle P_i, \alpha \rangle^{n_i},$$

où $Z_0(X)$ désigne le groupe des 0-cycles de X, i.e. le groupe libre sur les points fermés de X. Pour X supposée de plus propre, respectivement projective, ces accouplements induisent des accouplements, bilinéaire pour le second

$$X(k)/R \times D^\Phi(X) \to D^\Phi(k) \tag{3}$$

respectivement

$$A_0(X) \times \tilde{D}^\Phi(X) \to D^\Phi(k), \tag{4}$$

où $X(k)/R$ désigne le quotient de $X(k)$ par la R-équivalence, et $A_0(X)$ désigne le groupe des classes de 0-cycles sur X, modulo l'équivalence rationnelle. Comme $D^\Phi(k)$ est annulé par $x \mapsto x^2$, le dernier accouplement est trivial sur $2A_0(X)$ (l'analogue valait pour (2)); il en induit donc un autre

$$A_0(X)/2A_0(X) \times \tilde{D}^\Phi(X) \to D^\Phi(k). \tag{5}$$

Pour X une variété projective et lisse sur le corps $\mathbb{R}$ des réels, géométriquement intègre de dimension n, notant φ_n la forme de Pfister « somme de 2^n carrés », on a des isomorphismes

$$\tilde{D}^{\varphi_n}(X) \simeq D^{\varphi_n}(X) \simeq (\pm 1)^s, \tag{6}$$

où s est le nombre de composantes connexes de l'espace $X(\mathbb{R})$ des points $\mathbb{R}$-rationnels de X, muni de la topologie réelle, et où la deuxième flèche est induite par (1) — noter $D^{\varphi\cdot}(\mathbb{R}) \simeq (\pm 1)$. Dans ce cas, les accouplements (2), (4), (5) ne dépendent que des points réels de X : si P est un point fermé complexe (c'est-à-dire que le degré, sur $\mathbb{R}$, du corps résiduel $\mathbb{R}(P)$ en P est deux) pour tout α dans $D^{\varphi\cdot}(X)$, on a $\langle P, \alpha \rangle = 1$, car, par définition ([2], 3.2.1) de l'accouplement (2), $\langle P, \alpha \rangle$ est la classe, dans $(\pm 1) = \mathbb{R}^\times / \mathbb{R}^{\times +}$, de la norme, de $\mathbb{R}(P) \simeq \mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$, d'un nombre complexe.

1. Trivialité de certains foncteurs sur les variétés k-rationnelles

Dans ce paragraphe, k est un corps, et on note F un foncteur covariant de la catégorie des k-algèbres locales (avec comme morphismes les k-homomorphismes locaux) dans la catégorie des groupes abéliens. Étant donné X un k-schéma intègre, de corps des fractions $k(X)$, on définit

$$D^F(X) = \bigcap_{P \in X} \operatorname{Im}(F(O_{X,P}) \to F(k(X))),$$

où P parcourt les points du schéma X, et où les flèches sont déduites des inclusions $O_{X,P} \subset k(X)$; de façon intuitive, $D^F(X)$ est le sous-groupe de $F(k(X))$ formé des éléments qui ont bonne réduction partout localement sur X. Étant donné $f : X \to Y$ un k-morphisme *dominant* de k-schémas intègres, on en tire par considération des points génériques un homomorphisme fonctoriel (pour de tels k-morphismes) $f^* : D^F(Y) \to D^F(X)$.

DÉFINITION :

($\mathbb{S}$) *On dit que F satisfait la* condition de spécialisation, *notée* ($\mathbb{S}$), *si, pour toute k-algèbre A qui est un anneau de valuation discrète, de corps des fractions K et de corps résiduel $\varkappa$, on a*

$$\operatorname{Ker}(F(A) \to F(K)) \subset \operatorname{Ker}(F(A) \to F(\varkappa)).$$

($\mathbb{H}$) *On dit que F satisfait la* condition d'homotopie, *notée* ($\mathbb{H}$), *si, pour tout surcorps K de k, l'homomorphisme*

$$p^* : \quad F(K) = D^F(K) \to D^F(\mathbb{A}_K^1),$$

déduit du morphisme structural $p : \mathbb{A}_K^1 \to \operatorname{Spec} K$ de la droite affine, est un isomorphisme.

Comme on le verra en 2.5, les groupes $D^{\Phi}(X)$ sont des exemples de groupes $D^F(X)$, avec F satisfaisant les conditions de spécialisation et d'homotopie, et de nombreux arguments qui ont été développés dans [2] se transcrivent *in extenso* pour les groupes $D^F(X)$, dès que F satisfait $(\mathbb{S})$ et $(\mathbb{H})$. Je ne détaillerai donc pas les démonstrations.

1.1. LEMME. — *Pour voir qu'un foncteur F comme ci-dessus satisfait la condition de spécialisation, il suffit de le voir pour A une k-algèbre qui est un anneau de valuation discrète complet; si F satisfait la condition de spécialisation, pour toute k-algèbre locale régulière, de corps des fractions K et de corps résiduel* $\varkappa$, *on a*

$$\mathrm{Ker}(F(A)\to F(K))\subset \mathrm{Ker}\,(F(A)\to F(\varkappa)).$$

Démonstration. — La première partie est immédiate; pour la seconde, on utilise le même type de récurrence que dans [2], 2.1, ou [5], 6.6.1.

1.2. PROPOSITION. — *Si F satisfait la condition de spécialisation, la correspondance* $X\rightsquigarrow D^F(X)$ *définit un foncteur contravariant de la catégorie des k-schémas réguliers intègres (avec comme morphismes les k-morphismes) dans la catégorie des groupes abéliens. En particulier, pour X un k-schéma régulier intègre, l'homomorphisme* $F(k)=D^F(\mathrm{Spec}\,k)\to D^F(X)$ *déduit du morphisme structural est injectif dès que X possède un k-point.*

Démonstration. — C'est une généralisation immédiate de celle de [2], proposition 2.2.2. Indiquons simplement comment, étant donné $f: X\to Y$ un morphisme de la catégorie de schémas susdite, on définit $f^*: D^F(Y)\to D^F(X)\subset F(k(X))$ (coïncidant, pour f dominant, avec l'homomorphisme f^* défini plus haut). Un élément α de $D^F(Y)$ provient d'un élément β de $F(O_{Y,f(\xi)})$, où ξ est le point générique de X. Du k-homomorphisme local $O_{Y,f(\xi)}\to O_{X,\xi}\simeq k(X)$, on déduit un homomorphisme de groupes abéliens par application de F, et on définit $f^*(\alpha)$ comme l'image de β par cet homomorphisme. Le lemme 1.1 permet de voir que f^* est bien défini. La dernière assertion de la proposition résulte de la fonctorialité de D^F.

1.3. PROPOSITION. — *Soit* $\pi: X\to Y$ *un k-morphisme de k-schémas réguliers intègres,* η *le point générique de Y, et* $p: X_\eta\to\eta=\mathrm{Spec}\,k(Y)$ *la fibre générique de* π*; supposons que F satisfait la condition de spécialisation, et que :*

(i) *localement pour la topologie de Zariski sur Y,* π *admet une section;*

(ii) *l'homomorphisme* $p^*: F(k(Y))\to D^F(X_\eta)$ *est un isomorphisme.*

Alors l'homomorphisme $\pi^*: D^F(Y)\to D^F(X)$ *est un isomorphisme.*

Démonstration (*cf.* [2], 4.1.2). — Soit $\sigma : U \to X$ une section de π au-dessus de l'ouvert U de Y, et $s : \eta \to X_\eta$ la section de p qu'elle définit. Utilisant 1.2 et le (ii) de l'hypothèse, nous obtenons le diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\begin{tikzcd}
F(k(Y)) \supset D^F(U) & & \\
D^F(X_\eta) \supset D^F(\pi^{-1}(U)) \arrow[u, "s^*"] \arrow[u, "\sigma^*"'] & \supset D^F(X) & \\
F(k(Y)) \supset D^F(U) \arrow[u, "p^*", "\wr"'] \arrow[u, "\pi^*"'] & \supset D^F(Y) \arrow[u, "\pi^*"] &
\end{tikzcd}$$

Une chasse au diagramme montre que pour $\alpha \in D^F(X)$, son image dans $D^F(X_\eta)$ provient d'un élément β de $F(k(Y))$, indépendant de U, et appartenant à $D^F(U)$. L'hypothèse (i) montre que les ouverts U pour lesquels il existe une section de $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ recouvrent Y. Ainsi l'intersection, dans $F(k(Y))$, des $D^F(U)$ correspondant est $D^F(Y)$, et β appartient à $D^F(Y)$. Du diagramme on déduit $\alpha = \pi^*(\beta) \in \pi^*(D^F(Y))$.

1.4. PROPOSITION. — *Soit k un corps infini, $n \geqslant 1$ un entier, et $p : \mathbb{A}_k^n = \mathbb{A}_k^{n-1} \times_k \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^{n-1}$ la projection sur le premier facteur. Soit U un ouvert de Zariski non vide de $\mathbb{A}_k^n$. L'image ensembliste $V = p(U)$ est un ouvert de $\mathbb{A}_k^{n-1}$, et le k-morphisme $q : U \to V$ induit par p admet, localement pour la topologie de Zariski sur V, une section. Si U contient tous les points de codimension 1 de $\mathbb{A}_k^n$, alors V contient tous les points de codimension 1 de $\mathbb{A}_k^{n-1}$, et la fibre de q au-dessus du point générique η de V (qui est aussi celui de $\mathbb{A}_k^{n-1}$) s'identifie à la fibre générique de p, c'est-à-dire à $\mathbb{A}_{\kappa(\eta)}^1$.*

Démonstration. — (i) Pour établir la première assertion, il suffit de montrer : si P est un point de $p(U)$, il existe un ouvert W de $\mathbb{A}_k^{n-1}$ contenant P, et tel que $p_W : p^{-1}(W) \to W$ admette une section ρ avec $\rho(W) \subset U$. Notons A l'anneau de $\mathbb{A}_k^{n-1}$, et $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de A définissant P. De l'homomorphisme composé

$$A \to A_\mathfrak{p} \to A_\mathfrak{p} / \mathfrak{p} A_\mathfrak{p} = \kappa(P)$$

(le deuxième homomorphisme est la surjection naturelle du localisé sur son corps résiduel), on déduit le diagramme de produits fibrés

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}_{\kappa(P)}^1 \arrow[r] \arrow[d, "p_1"] & \mathbb{A}_{A_\mathfrak{p}}^1 \arrow[r] \arrow[d, "p_2"] & \mathbb{A}_k^n \arrow[d, "p"] \\
\operatorname{Spec} \kappa(P) \arrow[r] & \operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} \arrow[r] & \mathbb{A}_k^{n-1}
\end{tikzcd}$$

Comme P appartient à $p(U)$, l'image réciproque de U *via* $\mathbb{A}^1_{\varkappa(P)} \to \mathbb{A}^n_k$ est un ouvert non vide qui, puisque k est infini, donc aussi $\varkappa(P)$, possède un point $\varkappa(P)$-rationnel. Ce point s'identifie à une section de p_1, qu'on peut relever en une section de p_2, laquelle provient elle-même d'une section σ de $p_Y : \mathbb{A}^1_Y \to Y$, pour Y ouvert convenable contenant P. Il est facile de voir que l'ouvert W image réciproque de U par le morphisme composé $Y \xrightarrow{\sigma} \mathbb{A}^1_Y \subset \mathbb{A}^n_k$ convient.

(ii) Si un point P de codimension 1 de $\mathbb{A}^{n-1}_k$ n'appartient pas à $p(U)$, le point générique de la fibre de p au-dessus de P définit un point de codimension 1 de $\mathbb{A}^n_k$ qui n'est pas dans U. Par ailleurs les points de la fibre générique de p définissent des points de $\mathbb{A}^n_k$ de codimension au plus 1. Ceci suffit à établir la deuxième partie de la proposition.

Nous arrivons au résultat principal de ce paragraphe :

1.5. Théorème. — *Soit k un corps, F un foncteur covariant de la catégorie des k-algèbres locales dans la catégorie des groupes abéliens, satisfaisant les conditions de spécialisation et d'homotopie. Pour X une k-variété intègre, l'homomorphisme $F(k) = D^F(\mathrm{Spec}\, k) \to D^F(X)$ déduit du morphisme structural est un isomorphisme dans chacun des cas suivants :*

(i) *k est infini, et X est un ouvert de l'espace affine $\mathbb{A}^n_k$ contenant tous les points de codimension 1 de $\mathbb{A}^n_k$.*

(ii) *X est une k-variété propre, de corps des fractions transcendant pur sur k, supposée lisse si k est fini.*

Démonstration. — Dans le cas (i), il existe d'après la proposition 1.4 une chaîne de k-morphismes $X = U_n \to U_{n-1} \to \ldots \to U_0 = \mathrm{Spec}\, k$, avec U_i ouvert de $\mathbb{A}^i_k$ contenant tous les points de codimension $\leqslant 1$ de $\mathbb{A}^i_k$, et $p_i : U_i \to U_{i-1}$ un k-morphisme admettant localement pour la topologie de Zariski sur U_{i-1} une section, et dont la fibre générique est la droite affine sur le point générique de U_{i-1}. Comme F satisfait $(\mathbb{S})$ et $(\mathbb{H})$, il résulte de 1.3 que $p_i^* : D^F(U_{i-1}) \to D^F(U_i)$ est un isomorphisme. Par fonctorialité de D^F, on en déduit que $p^* : F(k) = D^F(U_0) \to D^F(U_n) = D^F(X)$ est un isomorphisme, ce qui établit (i).

Pour traiter le cas (ii), supposons d'abord k infini. Comme X est propre sur k, il existe un ouvert U d'un espace affine $\mathbb{A}^n_k$, contenant tous les points de codimension 1 de $\mathbb{A}^n_k$, et un k-*morphisme* birationnel $f : U \to X$. Par fonctorialité de D^F (pour les k-morphismes dominants de k-schémas intègres), on en déduit le diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\begin{tikzcd}
F(\operatorname{Spec} k) \arrow[r] \arrow[d, equal] & D^F(X) \subset F(k(X)) \arrow[d, "f^*"'] \arrow[d, shift left=8, "\iota"] \\
F(\operatorname{Spec} k) \arrow[r] & D^F(U) \subset F(k(U))
\end{tikzcd}$$

d'où le résultat, en appliquant le (i) à U.

Pour traiter le cas où k est fini, et X intègre propre et lisse sur k, suivant Knebusch ([8], p. 297), on introduit un corps $L=k(u)$ extension transcendante pure de k, et $A \subset L$ l'anneau local d'un k-point de $\mathbb{A}_k^1$. Un lemme démontré ci-dessous nous assure de l'existence d'un k-point sur X, i. e. d'une section σ du morphisme structural $p : X \to \operatorname{Spec} k$. On a donc le diagramme commutatif de k-morphismes de k-schémas intègres réguliers

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, shift right, "p"'] & X_A \arrow[l] \arrow[d, shift right, "p_A"'] & X_L \arrow[l] \arrow[d, shift right, "p_L"'] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[u, shift right, "\sigma"'] & \operatorname{Spec} A \arrow[l] \arrow[u, shift right, "\sigma_A"'] & \operatorname{Spec} L \arrow[l] \arrow[u, shift right, "\sigma_L"']
\end{tikzcd}$$

obtenu par produits fibrés, d'où, par fonctorialité 1.2, le diagramme commutatif d'homomorphismes

$$\begin{tikzcd}
D^F(\operatorname{Spec} A) \arrow[r, "p_A^*"] \arrow[d, hook] & D^F(X_A) \arrow[r, "\sigma_A^*"] \arrow[d, hook] & D^F(\operatorname{Spec} A) \arrow[d, hook] \\
F(L) \arrow[r, "p_L^*"] & D^F(X_L) \arrow[r, "\sigma_L^*"] & F(L)
\end{tikzcd}$$

Comme L est infini, p_L^* est, d'après ce qui précède, un isomorphisme : le diagramme et l'égalité $\sigma^* \circ p^* = \mathrm{id}$ montrent alors que p_A^* est un isomorphisme. Considérons alors le diagramme suivant, déduit de l'inclusion $i : k \to A$ et de la spécialisation $q : A \to k$ (passage au corps résiduel de A) :

$$\begin{tikzcd}
F(k) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, hook, "p^*"] & D^F(\operatorname{Spec} A) \arrow[r, "q^*"] \arrow[d, hook, "p_A^*"] & F(k) \arrow[d, hook, "p^*"] \\
D^F(X) \arrow[r, "i_X^*"] & D^F(X_A) \arrow[r, "q_X^*"] & D^F(X)
\end{tikzcd}$$

Comme p_A^* est un isomorphisme, et que $q \circ i = \mathrm{id}$, ce diagramme montre que $p^* : F(k) \to D^F(X)$ est un isomorphisme. Reste à voir :

1.5.1. LEMME. — *Soit k un corps, X une k-variété propre, intègre, de corps des fractions transcendant pur sur k. Alors $X(k)$ est non vide.*

Démonstration. — C'est clair si k est infini — sans hypothèse de propreté. Si k est fini, $L=k(u)$ est infini, X_L est L-rationnelle, donc $X_L(L)$ est non vide, donc il existe un k-morphisme de $\operatorname{Spec} L$ dans X qui, comme X est propre, définit un k-morphisme de $\mathbb{A}_k^1$ dans X, et il suffit de prendre l'image d'un point de $\mathbb{A}_k^1(k)$.

1.5.2. *Remarques.* — On peut aussi déduire le lemme de l'énoncé suivant, qui a un intérêt sur tout corps k : *Soit X une k-variété propre, Y une k-variété intègre admettant un k-point régulier; s'il existe une k-application rationnelle de Y vers X, alors $X(k)$ est non vide.*

Je ne sais pas si, dans le théorème, le (i) vaut encore si k est fini : les arguments utilisés pour établir (ii) pour k fini permettent d'établir (i) pour k fini et $X(k)$ non vide; je ne sais pas si le (i) vaut sans cette dernière hypothèse, ni si dans le (ii), on peut omettre l'hypothèse de lissité lorsque k est fini.

2. Exemples

On donne une suite d'exemples de foncteurs F auxquels on peut appliquer le théorème 1.5, laissant au lecteur, dans la plupart des cas, le soin de la transcription. Dans les trois premiers exemples, le foncteur F considéré provient par restriction aux spectres de k-algèbres locales d'un foncteur $\tilde{F}$ de la catégorie des k-schémas dans la catégorie des groupes abéliens. On dispose donc dans ces cas, pour X intègre, d'une injection

$$\operatorname{Im}[\tilde{F}(X)\to\tilde{F}(\operatorname{Spec} k(X))]\subset D^F(X)$$

d'où l'on tire, *via* 1.5, des informations sur le premier groupe, dans le cas où X est k-rationnelle.

2.1. Soit T un k-tore, et soit, pour X un k-schéma,

$$\tilde{F}(X)=H^1_{\text{ét}}(X,\,T).$$

Le foncteur F obtenu satisfait $(\mathbb{S})$ et $(\mathbb{H})$ ([4], 2.2 et 4.2). Pour X une k-variété intègre régulière, $D^F(X)$ coïncide avec le groupe noté $D^T(X)$ dans [5], § 6.

2.2. Soit T un k-tore, et soit, pour X un k-schéma,

$$\tilde{F}(X)=H^2_{\text{ét}}(X,\,T).$$

Le foncteur F obtenu satisfait ($\mathbb{S}$) et, si k est de caractéristique 0, il satisfait ($\mathbb{H}$) (*cf.* [4], 2.2 et 4.2), ce qui est une généralisation de résultats d'Auslander-Goldman et de Grothendieck, dans le cas où $T = \mathbb{G}_{m,k}$ le groupe multiplicatif. Compte tenu de l'injection, pour X une k-variété intègre lisse, de $H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ dans $H^2_{\text{ét}}(k(X), \mathbb{G}_m)$, l'application du théorème 1.5 à ce cas donne une généralisation du résultat d'Auslander-Goldman : pour k de caractéristique 0, le groupe de Brauer de $k[t_1, \ldots, t_n]$ s'identifie au groupe de Brauer de k.

2.3. Soit k un corps de caractéristique différente de 2. A tout k-schéma X, associons

$$\tilde{F}(X) = W(X)$$

le groupe de Witt du schéma X, défini par Knebusch dans [9]. Le foncteur F obtenu associe à toute k-algèbre locale A son groupe de Witt $W(A)$ ([8], [9]); il satisfait ($\mathbb{S}$) ([8], 2.3), et c'est une conséquence du théorème de Harder et Milnor ([10], IX, 3.1) qu'il satisfait ($\mathbb{H}$). Soit A l'anneau de polynômes $k[t_1, \ldots, t_n]$, et, pour chaque idéal premier $\mathfrak{p}$ de hauteur 1 de A, soit $K_\mathfrak{p}$ le corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$. Soit $\partial_\mathfrak{p}$ un homomorphisme de second résidu $W(k(t_1, \ldots, t_n)) \to W(K_\mathfrak{p})$ défini par le choix d'un générateur de $\mathfrak{p}$, et soit ξ un élément du noyau de l'application produit

$$W(k(t_1, \ldots, t_n)) \xrightarrow{\{\partial_\mathfrak{p}\}} \prod_\mathfrak{p} W(K_\mathfrak{p}).$$

Un argument de recollement classique (*cf.* [5], 2.4 (i)) montre qu'il existe alors un ouvert U de $\mathbb{A}^n_k$ contenant tous les points de codimension 1 de $\mathbb{A}^n_k$, et un espace quadratique E sur U dont la classe dans $W(U)$ a ξ pour image dans $W(k(t_1, \ldots, t_n))$. Si k est infini, le théorème 1.5 (i) montre que ξ provient de $W(k)$ par l'application naturelle $W(k) \to W(k(t_1, \ldots, t_n))$; l'une des remarques 1.5.2 montre que ceci vaut dès que $U(k)$ est non vide; on voit alors facilement, par un argument de transfert ([10], VII, 2.1), en choisissant, pour k fini, une extension de degré impair L/k telle que $U(L)$ soit non vide, que ceci vaut dans tous les cas.

On dispose en fait de résultats bien plus précis : *voir* Arason-Knebusch ([1], § 5).

2.4. Soit D un corps gauche de degré n^2 sur un corps k. Pour toute k-algèbre A, les éléments de $A^\times$ représentés sur A par la forme « norme réduite de D à k » forment un sous-groupe de $A^\times$, et l'on peut définir $F(A)$

comme le quotient de $A^\times$ par ce sous-groupe. Il résulte de [2], 2.1, que, au moins pour *n premier*, le foncteur F satisfait ($\mathbb{S}$). C'est un cas particulier d'un résultat récent de Raghunathan et Ramanathan qu'en caractéristique 0, F satisfait ($\mathbb{H}$).

2.5. Supposons k de caractéristique différente de 2, et soit Φ une forme de Pfister définie sur k. Pour toute k-algèbre locale A, les éléments de $A^\times$ représentés par Φ sur A forment un sous-groupe de $A^\times$ ([7], th. 1.5), soit $N_\Phi(A)$. Définissons $F(A)=A^\times/N_\Phi(A)$. Pour X un k-schéma intègre, *le groupe* $D^F(X)$ *associé n'est autre que le groupe* $D^\Phi(X)$ *de* [2]. Le foncteur F satisfait ($\mathbb{S}$) ([8], 2.3; [2], 2.1.1). Il satisfait également ($\mathbb{H}$) : c'est la proposition 4.1.1 de [2]. On en déduit :

2.5.1. COROLLAIRE. — *Soit k un corps* (car $k \neq 2$) *et* Φ *une forme de Pfister définie sur k. Pour X une k-variété intègre, propre et k-rationnelle,* $D^\Phi(X)$ *est trivial, i.e. égal à* $D^\Phi(k)$.

Démonstration. — Cela résulte de 1.5 (ii), sauf si k est fini. Dans ce dernier cas, on obtient le résultat en considérant une tour infinie d'extensions de degré impair de k, et en utilisant la norme (à un niveau fini); notons cependant que, pour k fini, les groupes considérés sont nuls dès que Φ est de rang >2.

2.5.2. Soit k un corps, dans lequel (-1) n'est pas somme de 4 carrés (tout corps ordonnable est de ce type, mais, comme l'a montré Pfister (*cf.* [10], XI, § 2), il existe des corps non ordonnables de ce type, par exemple $\mathbb{R}(x_1, \ldots x_n)\ (\sqrt{-\sum_{i=1}^n x_i^2})$ pour $n \geqq 8$). Soient e_1 et e_3 deux éléments distincts de k, et $e_2=(e_1+e_3)/2$. Reprenant les équations données dans [2], § 5, dans le cas $k=\mathbb{R}$, nous obtenons une k-variété géométriquement intègre, projective et lisse, X, rationnelle sur $k(\sqrt{-1})$, avec $X(k)$ non vide, et pour laquelle l'accouplement (1) du paragraphe 0 :

$$X(k) \times D^{\varphi_2}(X) \to D^{\varphi_2}(k)$$

est non trivial : il existe A et B dans $X(k)$ et $\alpha \in D^{\varphi_2}(X)$ tels que

$$\langle A, \alpha \rangle \neq \langle B, \alpha \rangle.$$

Dans [2], on a montré que ceci implique que X n'est pas k-rationnelle, en raisonnant sur $X(k)/R$; on pourrait également raisonner sur $A_0(X)$, en utilisant [3], 6.3, et l'accouplement (4) du paragraphe 0. Ces deux approches utilisent la résolution des singularités; le corollaire 2.5.1 nous donne un argument plus simple : d'après l'inégalité ci-dessus, α n'est pas dans $D^{\varphi_2}(k)$, $D^{\varphi_2}(X)$ est non trivial et donc X n'est pas k-rationnelle.

3. Compléments sur l'équivalence rationnelle sur les 0-cycles des variétés réelles

Aux notations du paragraphe 0 ajoutons celle-ci : pour X une k-variété projective et lisse, on note $\tilde{A}_0(X)$ le sous-groupe de $A_0(X)$ formé des classes de 0-cycles de degré 0. Rappelons que pour k algébriquement clos, ce sous-groupe est divisible.

3.1. THÉORÈME. — *Soit X une $\mathbb{R}$-variété intègre, projective et lisse, avec $X(\mathbb{R})\neq\emptyset$, et soit $s\geqslant 1$ le nombre des composantes connexes de $X(\mathbb{R})$ pour la topologie réelle :*

(i) *Il existe un homomorphisme surjectif $A_0(X)/2A_0(X)\to(\pm 1)^s$; le cardinal de $\tilde{A}_0(X)/2\tilde{A}_0(X)$ est minoré par 2^{s-1};*

(ii) *Il existe un 0-cycle sur X, de degré $(s-2)$, qui n'est pas rationnellement équivalent sur X à un 0-cycle effectif.*

Démonstration. — (i) L'accouplement (5) :

$$A_0(X)/2A_0(X)\times D^{\varphi_n}(X)\to(\pm 1)$$

($n=\dim X$) définit un homomorphisme

$$D^{\varphi_n}(X)\to \mathrm{Hom}(A_0(X)/2A_0(X), (\pm 1))$$

qui est injectif : en effet, étant donné $\alpha\in D^{\varphi_n}(X)$, $\alpha\neq 1$, il existe un point réel P avec $\langle P, \alpha\rangle=(-1)$, d'après (6). Par dualité, on obtient que l'homomorphisme déduit de l'accouplement ci-dessus

$$A_0(X)/2A_0(X)\to \mathrm{Hom}(D^{\varphi_n}(X), (\pm 1))\simeq(\pm 1)^s$$

est surjectif. Notons que cet homomorphisme est induit par l'application de $Z_0(X)$ dans $(\pm 1)^s$ qui à un point fermé complexe associe l'élément neutre, et qui à un point réel associe l'élément (ε_i), avec $\varepsilon_i=-1$ pour i la composante réelle du point, et $\varepsilon_i=1$ pour les autres composantes. L'homomorphisme obtenu définit une surjection de $\tilde{A}_0(X)/2\tilde{A}_0(X)$ sur le sous-groupe de $(\pm 1)^s$ formé des éléments dont le produit des composantes vaut 1.

(ii) On peut supposer $s\geqslant 2$. Choisissons P_i un point réel dans la composante réelle d'indice i, et considérons le 0-cycle

$$P_1+\ldots+P_{s-1}-P_s$$

qui est de degré $(s-2)$, et supposons-le rationnellement équivalent sur X à un 0-cycle effectif $\sum_j r_j Q_j$, $r_j > 0$. Comme le degré est bien défini sur les classes d'équivalence rationnelle, on a

$$\sum_j r_j \leqslant \sum_j r_j \deg(Q_j) = s-2.$$

Il existe donc une composante connexe de $X(\mathbb{R})$ telle qu'aucun Q_j ne soit un point (réel) de cette composante. Choisissons alors $\alpha \in D^{\varphi_\bullet}(X)$ valant (pour l'accouplement (1)) sur cette composante (-1), et $(+1)$ sur les autres composantes. Pour l'accouplement (2), on a

$$\langle P_1 + \ldots + P_{s-1} - P_s, \alpha \rangle = (-1) \neq (+1) = \langle \textstyle\sum_j r_j Q_j, \alpha \rangle$$

et ceci contredit le fait que cet accouplement passe au quotient à gauche par l'équivalence rationnelle.

3.2. Proposition. — *Soit X une $\mathbb{R}$-variété projective et lisse, géométriquement intègre, et telle que $X_{\mathbb{C}}$ soit $\mathbb{C}$-rationnelle :*

(i) $\tilde{A}_0(X)$ *est annulé par* 2;

(ii) $\tilde{A}_0(X)$ *est engendré par les classes des différences de deux points réels* (*et est nul si* $X(\mathbb{R})$ *est vide*);

(iii) *soit s le nombre de composantes connexes de* $X(\mathbb{R})$, *et supposons que deux points réels situés dans la même composante connexe sont rationnellement équivalents sur X. Alors :*

$$\tilde{A}_0(X) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{s-1}.$$

Démonstration. — Le (i) est un cas particulier de [3], 6.4 (*b*). Le (ii) s'établit (suggestion de D. Coray) en utilisant $\tilde{A}_0(X_{\mathbb{C}})=0$ et le fait que l'application $f_* : Z_0(X_{\mathbb{C}}) \to Z_0(X)$ déduite de la flèche naturelle $f : X_{\mathbb{C}} \to X$ se décrit ainsi : pour P un point fermé de $X_{\mathbb{C}}$, on a $f_*([P]) = 2[f(P)]$ ou $[f(P)]$ selon que $f(P)$ est un point fermé réel ou complexe de X (on a noté $[M]$ le 0-cycle associé à un point fermé M). Sous l'hypothèse de (iii), si l'on se donne P_i $(i=1, \ldots, s)$ un point dans la i-ième composante connexe, le (ii) implique que les $([P_i]-[P_s])$, pour $i=1, \ldots, (s-1)$, engendrent $\tilde{A}_0(X)$. Comme, d'après (i), ils engendrent un $(\mathbb{Z}/2)$-vectoriel de rang au plus $(s-1)$, il résulte alors de 3.1 (i) qu'ils forment une base du $(\mathbb{Z}/2)$-vectoriel $\tilde{A}_0(X)$, dont le cardinal est donc exactement 2^{s-1}.

Remarques ajoutées sur épreuves: F. Ischebeck a obtenu une démonstration simple du théorème B de [2] et du théorème 3.1 ci-dessus. Ses méthodes permettent de montrer que pour une variété comme en 3.2, l'hypothèse de 3.2 (iii) est *toujours* satisfaite.

3.3. UN EXEMPLE

Étant donné n un entier >1 et $(e_1, \ldots, e_{2n-1})$ une suite strictement croissante de nombres réels, puis la surface affine définie dans $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ avec coordonnées (x, y, z) par l'équation

$$y^2+z^2=\prod_{i=1}^{2n-1}(x-e_i),$$

on a donné dans [5], exemple 4.4, un modèle X propre et lisse sur $\mathbb{R}$ de cette surface. L'espace $X(\mathbb{R})$ des points réels a n composantes connexes. Par ailleurs, X est équipée d'un $\mathbb{R}$-morphisme $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ (prolongeant la projection sur l'axe des x) qui en fait une $\mathbb{R}$-surface rationnelle fibrée en coniques, d'invariant $r=2n$ (pour ces notions, cf. [3], 1.2). Le théorème C de [3] dit que sur une k-surface (car $k=0$) $X \to \mathbb{P}^1_k$ fibrée en coniques, d'invariant r, tout 0-cycle sur X de degré $\geqslant \max(0, [r/2]-1)$ (où [ ] désigne ici la partie entière) est rationnellement équivalent à un 0-cycle effectif. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, tout 0-cycle de degré $\geqslant n-1$ est rationnellement équivalent à un 0-cycle effectif, et par ailleurs, on a construit dans 3.1 un 0-cycle de degré $s-2=n-2$ qui n'est pas rationnellement équivalent à un 0-cycle effectif. On voit donc que tant la borne du théorème C de [3] (au moins pour r pair) que celle de 3.1 (ii) sont, dans le cas général, *les meilleures possibles*. On peut montrer, en faisant un calcul analogue à celui que fait Iskovskikh dans [6] pour établir la $\mathbb{R}$-unirationalité de X, que deux points de $X(\mathbb{R})$ qui sont dans la même composante connexe sont R-équivalents — et *a fortiori* rationnellement équivalents. La proposition 3.2 (iii) s'applique donc : on a $\tilde{A}_0(X)\simeq(\mathbb{Z}/2)^{n-1}$. Notons pour terminer que si l'application $X(\mathbb{R})/R \to \tilde{A}_0(X)$ qui à la classe d'un point $P\in X(\mathbb{R})$ associe la classe de $([P]-[P_n])$ (P_n point réel fixé dans la n-ième composante) est toujours injective (puisque $X(\mathbb{R})/R$ s'identifie à l'ensemble des composantes connexes), elle cesse d'être surjective dès que n est >2, l'ensemble de gauche ayant $s=n$ éléments, et celui de droite 2^{n-1}. Dans le cas $n=2$, c'est un fait général que, pour les surfaces du type considéré (sur un corps de caractéristique 0 quelconque), l'application est une bijection ([3], 6.7 (iv)).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARASON (J.Kr.) und KNEBUSCH (M.). — Über die Grade quadratischer Formen, *Math. Ann.*, vol. 234, 1978, p. 167-192.

[2] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.). — Formes quadratiques multiplicatives et variétés algébriques, *Bull. Soc. math. Fr.*, t. 106, 1978, p. 113-151.

[3] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et CORAY (D.). — L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques, *Compositio Mathematica*, vol. 39, 1979, p. 301-332.

[4] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — Cohomologie des groupes de type multiplicatif sur les schémas réguliers, *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 287, série A, 1978, p. 449-452.

[5] COLLIOT-THÉLÈNE (J.-L.) et SANSUC (J.-J.). — Fibrés quadratiques et composantes connexes réelles, *Math. Ann.*, vol. 244, 1979, p. 105-134.

[6] ISKOVSKIKH (V.A.). — Surfaces rationnelles avec un pinceau de courbes rationnelles, *Mat. Sbornik*, vol. 74, 1967, p. 608-638, trad. ang. *Math. of the U.S.S.R.-Sbornik*, vol. 3, 1967, p. 563-587.

[7] KNEBUSCH (M.). — Runde Formen über semilokalen Ringen, *Math. Ann.*, vol. 193, 1971, p. 21-34.

[8] KNEBUSCH (M.). — Specialization of quadratic and symmetric bilinear forms, and a norm theorem, *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 24, 1973, p. 279-299.

[9] KNEBUSCH (M.). — Symmetric bilinear forms over algebraic varieties, *Conference on quadratic forms*, p. 103-283. — Kingston, Queen's University, 1977 (*Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics*, vol. 46).

[10] LAM (T.-Y.). — *The algebraic theory of quadratic forms*, Reading, Benjamin, 1973.