BULLETIN DE LA S. M. F.

GUY LAFFAILLE

Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 187-206
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__187_0>

Bull. Soc. math. France
108, 1980, p. 187-206.

GROUPES p-DIVISIBLES ET MODULES FILTRÉS : LE CAS PEU RAMIFIÉ (*)

PAR

GUY LAFFAILLE

Université de Grenoble-I

RÉSUMÉ. — Soit A_0 l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans un corps parfait de caractéristique $p \neq 0$. Soient K_0 le corps des fractions de A_0 et K une extension finie totalement ramifiée de K_0 de degré e. Soit A l'anneau des entiers de K.

Si $e \leqslant p-1$, on caractérise l'image essentielle du foncteur construit par Grothendieck et Messing de la catégorie des groupes p-divisibles, à isogénies près, définis sur A, dans celle des modules filtrés.

Si $e=1$, on montre que tout module filtré faiblement admissible positif de Fontaine contient un réseau fortement divisible au sens de Mazur. On en déduit que la catégorie des modules filtrés faiblement admissibles est stable par produit tensoriel si $e=1$.

En utilisant les estimations de Mazur, on donne des exemples de modules filtrés faiblement admissibles provenant de la cohomologie cristalline.

ABSTRACT. — Let A_0 be the ring of Witt vectors with coefficients in a perfect field of characteristic $p \neq 0$. Let K_0 be the field of quotients of A_0 and K be a finite, totally ramified, extension of K_0 of degree e. Let A be the ring of integers of K.

If $e \leqslant p-1$, we give a complete description of the essential image of the functor built by Grothendieck and Messing from the category of p-divisible groups over A, up to isogenies, into the category of filtered modules.

If $e=1$, we show that every weakly admissible, positive, filtered module of Fontaine contains a strongly divisible lattice in the sense of Mazur. From this, we deduce that the category of weakly admissible, filtered modules is closed under tensor product if $e=1$.

Using the Mazur's estimates, we give examples of weakly admissible filtered modules from crystalline cohomology.

(*) Texte reçu le 14 mars 1979, révisé le 16 juin 1979.

Guy LAFFAILLE, Laboratoire de Mathématiques pures, Institut Fourier dépendant de l'Université scientifique et médicale de Grenoble associé au C.N.R.S., B. P. n° 116, 38402 Saint-Martin-d'Hères.

0. Introduction

Soit k un corps parfait de caractéristique $p \neq 0$. Soient $A_0 = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et K_0 le corps des fractions de A_0. Soient K une extension finie totalement ramifiée de K_0 de degré e et A l'anneau des entiers de K.

Grothendieck et Messing ([5], [6], [11], *voir* aussi [3], p. 221) ont construit un foncteur LM_K de la catégorie des groupes p-divisibles, à isogénies près, définis sur A dans la catégorie des modules filtrés (n° 1.3). Ce foncteur est pleinement fidèle ([3], IV, prop. 5.2) et Fontaine a conjecturé que l'image essentielle est la catégorie des modules filtrés faiblement admissibles (n° 1.6) tels que $D_K^0 = D_K$ et $D_K^2 = 0$.

Après avoir donné quelques définitions (§ 1), nous démontrons (§ 2) la conjecture de Fontaine pour $e \leqslant p-1$ (th. 2.1) en utilisant la classification à isomorphismes près de Fontaine ([3], IV, prop. 5.1) et une réduction au cas simple ([7], th. 1.5).

Dans le paragraphe 3, nous montrons (th. 3.2) par une méthode analogue à celle du théorème 2.1 que, si $e=1$, tout module filtré D, tel que $D^0 = D$, est faiblement admissible si et seulement s'il contient un réseau M (i. e. un sous-A_0-module libre tel que $D = K_0 \bigotimes_{A_0} M$) qui, muni de la filtration $M^i = M \cap D^i$ et de l'action de F induite par D est fortement divisible au sens de Mazur ([9], [10]) (1).

Dans le paragraphe 4, nous déduisons du théorème 3.2 que la catégorie des modules filtrés faiblement admissibles est stable par produit tensoriel si $e=1$, répondant ainsi partiellement à une question de Fontaine ([4], § 5.2.6).

Dans le paragraphe 5, nous déduisons des estimations de Mazur que, si X est un schéma projectif et lisse sur A_0, à groupes de Hodge sans torsion, de dimension $< p$, les modules filtrés obtenus par extension des scalaires à partir des $H_{DR}^n\ (X/A_0)$ sont faiblement admissibles. Il semble raisonnable de conjecturer que ce résultat est vrai sans restriction sur la dimension de X.

1. Quelques définitions

1.1. Dans toute la suite, on choisit une clôture algébrique $\bar{k}$ de k. Soit P_0 le corps des fractions de $W(\bar{k})$. Soit $P = P_0 \bigotimes_{K_0} K$, c'est une extension finie,

(1) Ce résultat nous servira dans un travail en préparation avec J.-M. Fontaine pour montrer que tout module filtré faiblement admissible D tel que $D_{K_0}^0 = D$ et $D_{K_0}^p = 0$ est admissible et correspond donc à une représentation galoisienne (*cf.* [4], n° 3.6).

totalement ramifiée, de P_0 de degré e. Le groupe de Galois J de $\overline{k}/k$ s'identifie au groupe des K_0-automorphismes continus de P_0 et au groupe des K-automorphismes continus de P. Soit A_p l'anneau des entiers de P.

PROPOSITION. — *Soit M un A_p-module libre de rang fini (resp. un P-espace vectoriel de dimension finie), sur lequel J opère semi-linéairement et continûment. Alors l'application canonique de $A_P \otimes_A M^J$ (resp. $P \otimes_K M^J$), dans M est un isomorphisme.*

Démonstration. — Si M est un espace vectoriel, la proposition est un cas particulier du théorème 1, p. III.31 de [14]. En fait, Serre ramène le cas d'un espace vectoriel à celui d'un réseau et montre en passant l'assertion relative aux modules.

1.2. On note σ le Frobenius absolu sur k, $\overline{k}$, K_0 et P_0.

Un F-*cristal* sur A_0 est un A_0-module libre de rang fini muni d'un endomorphisme F injectif et σ-semi-linéaire.

Tout F-cristal sur A_0 peut donc être considéré comme un $A_0[F]$-module (à gauche) où $A_0[F]$ est l'anneau, non commutatif si $k \neq F_p$, engendré par A_0 et une indéterminée F, avec les relations $F\lambda = \sigma(\lambda)F$ pour tout $\lambda \in A_0$.

Un *F-iso-cristal* sur K_0 est un K_0-espace vectoriel de dimension finie, muni d'un automorphisme σ-semi-linéaire F.

1.3. Un *module filtré* sur K est la donnée d'un F-iso-cristal D sur K_0 et d'une filtration de $D_K = K \otimes_{K_0} D$ par des sous-K-espaces vectoriels $(D_K^i)_{i \in \mathbf{Z}}$, décroissante, exhaustive et séparée ([4], § 1.2).

Si D est un module filtré sur K, on note D_{P_0} le module filtré sur P dont le F-iso-cristal sous-jacent est $P_0 \otimes_{K_0} D$, la filtration de $D_P = P \otimes_{P_0} D_{P_0} \simeq P \otimes_K D_K$ étant définie par $D_P^i = P \otimes_K D_K^i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

1.4. Si D est un F-iso-cristal sur P_0, on sait que D est somme directe de ses composantes isotypiques $(D_\alpha)_{\alpha \in}$, où si $\alpha = r/s$, avec r et s entiers premiers entre eux et $s \geqslant 1$, D_α est le sous-P_0-espace vectoriel de D engendré par les x tels que $F^s x = p^r x$. Les α tels que $D_\alpha \neq 0$ sont les *pentes* de D. On pose $t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}} \alpha . \dim_P(D_\alpha)$.

Si D est un F-iso-cristal sur K_0, on appelle pentes de D les pentes de D_{P_0} et on pose $t_N(D) = t_N(D_{P_0})$.

1.5. Si D est un module filtré sur K, on pose $t_H(D) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} i . \dim_K (D_K^i / D_K^{i+1})$.

Si M est un réseau de D stable par F, la longueur du A_0-module M/FM est égale à la longueur du $W(\bar{k})$-module $W(\bar{k}) \otimes_{A_0} M/F(W(\bar{k}) \otimes_{A_0} M)$, et cette longueur est égale à $t_N(D_{P_0}) = t_N(D)$ ([7], § 1.2).

1.6. Un module filtré sur K, *faiblement admissible*, est un module filtré D tel que :

– d'une part $t_N(D) = t_H(D)$;

– d'autre part, pour tout sous-F-iso-cristal D' de D, on a $t_H(D') \leqslant t_N(D')$.

Cette définition généralise celle de [4] où le corps résiduel est supposé algébriquement clos. Comme dans [4], § 2, on montre que la catégorie des modules filtrés, sur K_0, faiblement admissibles est abélienne.

Si D' est un sous-F-iso-cristal de D, le module filtré D' est faiblement admissible si et seulement si $t_N(D') = t_H(D')$.

Un module filtré faiblement admissible D est *simple* s'il n'est pas réduit à 0 et si les inégalités $t_H(D') \leqslant t_N(D')$ sont strictes pour tout sous-F-iso-cristal D' propre (*voir* [4], § 4).

1.7. Proposition. – *Soit D un module filtré sur K. Alors D est faiblement admissible si et seulement si le module filtré D_{P_0}, sur P, l'est.*

Démonstration. – Si D_{P_0} est faiblement admissible, il est clair que D l'est. Supposons que D_{P_0} n'est pas faiblement admissible. Il existe alors un sous-F-iso-cristal D' sur P_0 de D_{P_0} tel que $t_H(D') > t_N(D')$. Choisissons D' minimal pour cette propriété et soit E le sous-$P_0[J]$-module de D_{P_0} engendré par D'. D'après 1.1, on a $E = P_0 \otimes_{K_0} E^J$ et E^J est un sous-F-iso-cristal de D, en outre $t_H(E) = t_H(E^J)$ et $t_N(E) = t_N(E^J)$. Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que $t_H(E) > t_N(E)$.

Comme D_{P_0} est de dimension finie, il existe un nombre fini $g_1, \ldots, g_n$ d'éléments de J tels que $E = \sum_{i=1}^n g_i D'$.

Montrons que tout sous-F-iso-cristal B sur P_0 de D_{P_0} de la forme $B = \sum_{i=1}^m h_i D'$ où $h_i \in J$ est tel que $t_H(B) > t_N(B)$. Si $m=1$, alors B est isomorphe à D' et on a $t_H(B) = t_H(D') > t_N(D') = t_N(B)$. Supposons la propriété vraie pour $m-1$ et que $g_m(D') \not\subset \sum_{i=1}^{m-1} g_i D'$. On a un épimorphisme de modules filtrés : $(\sum_{i=1}^{m-1} g_i D') \oplus g_m D' \to B$; soit D'' son noyau. On a $D'' = (\sum_{i=1}^{m-1} g_i D') \cap g_m D'$. Donc D'' est isomorphe à un sous-objet strict de D' et d'après la minimalité de D' on a $t_H(D'') \leqslant t_N(D'')$.

Comme t_H et t_N sont additives, on a

$$t_H(B) = t_H(D') + t_H(\textstyle\sum_{i=1}^{m-1} g_i D') - t_H(D''),$$
$$t_N(B) = t_N(D') + t_N(\textstyle\sum_{i=1}^{m-1} g_i D') - t_N(D'').$$

Par hypothèse de récurrence, on a $t_H(\sum_{i=1}^{m-1} g_i D') > t_N(\sum_{i=1}^{m-1} g_i D')$, donc $t_H(B) > t_N(B)$. La propriété est donc vraie pour tout m et la proposition est démontrée.

2. Groupes p-divisibles à isogénies près : le cas $e \leqslant p-1$.

2.1. L'objet de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Si $e \leqslant p-1$, le foncteur LM_K induit une anti-équivalence entre la catégorie des groupes p-divisibles, à isogénies près, définis sur A, et la catégorie des modules filtrés faiblement admissibles tels que $D_K^0 = D_K$ et $D_K^2 = 0$.*

2.2. Soit π une uniformisante de A.

Si M est un F-cristal, on note M_A (resp. $M_A[1]$) le sous-A-module $A \otimes_{A_0} M + (p^{-1}\pi A) \otimes_{A_0} FM$ (resp. $(p^{-1}\pi A) \otimes_{A_0} FM$) de $M_K = K \otimes_{A_0} M$.

Messing [11] et Fontaine [3] ont déjà caractérisé l'image essentielle de LM_K pour $e \leqslant p-1$. Le résultat peut s'énoncer ainsi :

PROPOSITION. — *Supposons $e \leqslant p-1$. Soit D un module filtré de pentes >0. Pour que D soit dans l'image essentielle de LM_K il faut et il suffit que D satisfasse les conditions suivantes :*

(i) $D_K^0 = D_K$ *et* $D_K^2 = 0$;

(ii) *il existe un réseau M de D tel que :*

— *d'une part* $pM \subset FM \subset M$;

— *d'autre part, si $L = D_K^1 \cap M_A$, l'application évidente*

$$L/\pi L \to M_A/M_A[1] \simeq M/FM$$

est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

2.3. La catégorie des modules filtrés faiblement admissibles est abélienne et même artinienne. Compte tenu du corollaire 1.12 de [7], pour démontrer le théorème, pour k *algébriquement clos*, il suffit de prouver la proposition suivante :

PROPOSITION. — *Si $e \leqslant p-1$, tout module filtré faiblement admissible D, simple, de pentes >0, tel que $D_K^0 = D_K$ et $D_K^2 = 0$ est dans l'image essentielle de LM_K.*

Démonstration. — Si D est faiblement admissible avec $D_K^0 = D_K$ et $D_K^2 = 0$, les pentes de D sont comprises entre 0 et 1 et D contient des réseaux M tels que

$pM \subset FM \subset M$. D'après la proposition 2.2, il suffit donc de montrer la proposition suivante (vraie sans restriction sur e ni sur k) :

2.4. Proposition. — *Soit D un module filtré faiblement admissible simple de pentes >0, tel que $D_K^0 = D_K$ et $D_K^2 = 0$. Soit M un réseau de D tel que $pM \subset FM \subset M$ et soit $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite décroissante de réseaux de D définie par récurrence par :*

(*a*) $M_0 = M$;

(*b*) *si $L_n = D_K^1 \cap M_{n,A}$ et si X_n est l'ensemble des sous-A_0-modules N de M_n tel que $pN \subset FN \subset N$ et $N_A \subset L_n + (p^{-1}\pi A) \otimes_{A_0} FM_n$, alors M_{n+1} est la réunion des $N \in X_n$.*

Soit $M_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_n$ et $L_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} L_n$, alors :

(i) *M_∞ est un réseau de D tel que $pM_\infty \subset FM_\infty \subset M_\infty$;*

(ii) *on a $L_\infty = D_K^1 \cap M_{\infty,A}$ et l'application évidente*

$$L_\infty/\pi L_\infty \to M_{\infty,A}/M_{\infty,A}[1]$$

est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

2.5. Lemme. — *Pour tout $n \geqslant 0$, on a $FM_n \subset M_{n+1}$.*

Démonstration. — En effet FM_n appartient à X_n.

2.6. Lemme. — *Si $M_{n+1} \neq M_n$, alors $L_n \cap M_{n,A}[1]$ n'est pas contenu dans πL_n.*

Démonstration. — Si $M_{n+1} \neq M_n$, l'application

$$L_n/(L_n \cap M_{n,A}[1]) \to M_{n,A}/M_{n,A}[1]$$

n'est pas surjective. Comme elle est injective et que

$$\mathrm{rg}_A(L_n) = \dim_K(D_K^1) = t_H(D) = t_N(D)$$
$$= \dim_k(M_n/FM_n) = \dim_k(M_{n,A}/M_{n,A}[1]),$$

on ne peut avoir $L_n \cap M_{n,A}[1] \subset \pi L_n$.

2.7. Lemme. — *Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\pi L_{n-1} \cap L_n \cap M_{n,A}[1] \subset \pi L_n$.*

Démonstration. — Soit $x \in L_{n-1}$ tel que $\pi x \in L_n \cap M_{n,A}[1]$. Si l'on identifie, de manière évidente, $p^{-1}FM_n$ à un sous-A_0-module de $K \otimes_{A_0} M_n = K \otimes_{A_0} M$, on voit que x peut s'écrire $x = p^{-1}Fy + x'$ avec $y \in M_n$ et $x' \in M_{n,A}[1]$.

On a alors

$$p^{-1}Fy \in L_{n-1}+M_{n,A}[1] \subset L_{n-1}+M_{n-1,A}[1] \subset M_{n-1,A};$$

donc $p^{-1}Fy \in p^{-1}FM_{n-1} \cap M_{n-1,A}$.

Le théorème des diviseurs élémentaires, appliqué à M_{n-1}/FM_{n-1}, montre qu'il existe une base $x_1, \ldots, x_h$ de M_{n-1} sur A_0 et des entiers $r_1, \ldots, r_h$ positifs tels que les $p^{r_i}x_i$ forment une base de FM_{n-1}. Comme $pM_{n-1} \subset FM_{n-1}$, on a $r_i=0$ ou 1. Alors $M_{n-1,A}$ a pour base sur A les $\lambda_i x_i$ avec

$$\lambda_i=\begin{cases} 1 & \text{si } r_i=1, \\ p^{-1}\pi & \text{si } r_i=0 \end{cases}.$$

Comme $Fy \in FM_{n-1}$, on peut écrire $p^{-1}Fy=\sum d_i p^{r_i-1}x_i$ avec $d_i \in A_0$; comme $p^{-1}Fy$ appartient à $M_{n-1,A}$, si $r_i=0$, alors d_i doit être divisible par π, donc par p. Les $p^{r_i-1}d_i$ sont donc tous entiers et $p^{-1}Fy$ appartient à M_{n-1}.

Soit $M'_n=M_n+A_0p^{-1}Fy$. On a

$$M'_n \subset M_{n-1} \qquad \text{et} \qquad pM'_n \subset pM_n+A_0Fy \subset FM_n \subset FM'_n.$$

D'autre part $FM'_n \subset FM_{n-1} \subset M_n$ (lemme 2.5), donc $FM'_n \subset M'_n$. Enfin $M'_n \subset L_{n-1}+M_{n-1,A}[1]$ car, par construction $M_n \subset L_{n-1}+M_{n-1,A}[1]$ et $p^{-1}Fy \in L_{n-1}+M_{n,A}[1]$.

D'après la maximalité de M_n on a $M'_n=M_n$, donc $p^{-1}Fy \in M_n$ et $x=p^{-1}Fy+x' \in M_n+M_{n,A}[1] \subset M_{n,A}$; donc x appartient à $M_{n,A} \cap D^1_K=L_n$ et $\pi x \in \pi L_n$. Le lemme est donc démontré.

2.8. LEMME. — *On a* $L_\infty \neq 0$.

Démonstration. — C'est clair si la suite des M_n est stationnaire. Sinon, d'après le lemme 2.6, pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe $x \in L_n \cap M_{n,A}[1]$ n'appartenant pas à πL_n. Pour tout $m \leqslant n$, l'élément x appartient à $L_m \cap M_{m,A}[1]$ car $L_n \subset L_m$ et $M_{n,A}[1] \subset M_{m,A}[1]$. Par récurrence décroissante sur m, le lemme 2.7 montre que, pour tout m tel que $n \geqslant m \geqslant 0$, l'élément x n'appartient pas à πL_m. On en déduit que pour tout n le module L_n n'est pas contenu dans πL_0 ce qui implique que $L_\infty \neq 0$.

2.9. LEMME. — *On a* $M_{\infty,A}=L_\infty+M_{\infty,A}[1]$ *et* $L_\infty=D^1_K \cap M_{\infty,A}$.

Démonstration. — Pour tout entier $s \geqslant 1$, choisissons un entier n_s tel que, si $n \geqslant n_s$, alors $M_n \subset M_\infty+p^sM_0$ et $L_n \subset L_\infty+p^sL_0$ (un tel entier n_s existe puisque le A_0-module M_0/p^sM_0 et le A-module L_0/p^sL_0 sont de longueur finie).

Pour tout n, on a $M_\infty \subset M_n$ donc $M_{\infty,A} \subset M_{n,A}$ et par conséquent $M_{\infty,A} \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} M_{n,A}$. Pour tout $n \geqslant n_s$, on a $M_{n,A} \subset M_{\infty,A} + p^s M_{0,A}$ et on en déduit que $M_{\infty,A} = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_{n,A}$.

Pour tout n, on a $L_\infty \subset L_n \subset M_{n,A}$, donc $L_\infty \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} M_{n,A} = M_{\infty,A}$, et on en déduit que $L_\infty + M_{\infty,A}[1] \subset M_{\infty,A}$. Pour tout entier $n \geqslant n_s$, on a

$$M_{n+1,A} \subset L_n + M_{n,A}[1] \subset L_\infty + p^s L_0 + M_{\infty,A}[1] + p^s M_{0,A}[1],$$

d'où

$$M_{\infty,A} = \bigcap_{n=0}^{\infty} M_{n+1,A} \subset L_\infty + M_{\infty,A}[1]$$

et par conséquent $M_{\infty,A} = L_\infty + M_{\infty,A}[1]$.

Enfin

$$L_\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} L_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} (D_K^1 \cap M_{n,A}) = D_K^1 \cap (\bigcap_{n=0}^{\infty} M_{n,A}) = D_K^1 \cap M_{\infty,A}.$$

2.10. *Démonstration de la proposition* 2.4. — Il résulte du lemme 2.9 que l'application canonique $L_\infty / \pi L_\infty \to M_{\infty,A} / M_{\infty,A}[1]$ est surjective, donc $\mathrm{rg}_A L_\infty \geqslant \dim_k (M_\infty / F M_\infty)$.

Soit $D_\infty = K_0 \bigotimes_{A_0} M_\infty$, c'est un sous-$F$-iso-cristal de D et on a

$$t_N(D_\infty) = \dim_k (M_\infty / F M_\infty).$$

En considérant D_∞ comme un module filtré, on a

$$t_H(D_\infty) = \dim_K ((K \bigotimes_A L_\infty) \cap D_K^1) = \mathrm{rg}_A L_\infty.$$

D'où $t_H(D_\infty) \geqslant t_N(D_\infty)$.

Comme D est faiblement admissible, on a $t_H(D_\infty) = t_N(D_\infty)$ et D_∞ est lui aussi faiblement admissible (1.6). Le lemme 2.8 implique que $D_\infty \neq 0$. Comme D est simple, on a $D = D_\infty$ et il est alors clair que M_∞ a les propriétés voulues.

2.11. *Fin de la démonstration du théorème.* — Il reste le cas où k n'est pas algébriquement clos.

Si D est dans l'image essentielle de LM_K, le module filtré D_{P_0} du n° 1.3 est dans l'image essentielle de LM_P, donc D_{P_0} est faiblement admissible d'après la proposition 1.4 de [7], il est alors clair que D est faiblement admissible.

Réciproquement, soit D un module filtré sur K, faiblement admissible, tel que $D_K^0 = D_K$ et $D_K^2 = 0$. Alors D_{P_0} est faiblement admissible d'après la proposition 1.7, donc D_{P_0} appartient à l'image essentielle de LM_P. D'après la proposition 2.2, il existe un réseau M de D_{P_0} tel que

$pM \subset FM \subset M$ et si $L=(D_{P_0})_P^1 \cap M_{A_P}$, on a $L/\pi L \simeq M_{A_P}/M_{A_P}[1]$. Si M_0 est un réseau de D_{P_0} tel que $pM_0 \subset FM_0 \subset M_0$, contenant M, la suite des M_n définis par l'algorithme de 2.4 est stationnaire : en effet si M_n contient M, on voit que M appartient à l'ensemble X_n de 2.4 et donc $M \subset M_{n+1}$.

Choisissons M_0 de la forme $W(\bar{k}) \otimes_{A_0} N$ où N est un réseau de D tel que $pN \subset FN \subset N$. Supposons M_n stable pour l'action de $J\,(=\mathrm{Gal}(\bar{k}/k))$, alors M_{n,A_P} et $L_n = D_P^1 \cap M_{n,A_P}$ le sont aussi, donc si $g \in J$, le $W(\bar{k})$-module $g\,M_{n+1}$ appartient à X_n, donc $g\,M_{n+1} \subset M_{n+1}$ d'après la maximalité de M_{n+1}. Par conséquent, M_∞ est stable par J et si $N_\infty = M_\infty^J$, il est clair que N_∞ vérifie les conditions de la proposition 2.2, ce qui achève la démonstration.

2.12. *Remarque.* — On vérifie facilement que la proposition 2.4 est encore vraie si on ne suppose plus D simple à pentes >0. L'algorithme est stationnaire et M_∞ est le plus grand sous-réseau de M qui vérifie (i) et (ii).

3. Modules filtrés et F-cristaux fortement divisibles

Dans ce paragraphe, on suppose $e=1$, on a donc $K=K_0$. Si D est un module filtré, D_K s'identifie à D et, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on écrit D^i au lieu de D_K^i.

3.1. Si M est un F-cristal, on pose pour tout entier $i \geqslant 0$:

$$M(i) = p^i M \cap FM.$$

On a $pM(i) \subset M(i+1) \subset M(i)$ et si i est assez grand on a $M(i)=p^i M$.

Un F-cristal filtré est la donnée d'un F-cristal M muni d'une filtration par des sous-A_0-modules M^i facteurs directs de M, décroissante, exhaustive et séparée.

Un F-cristal *fortement divisible* est un F-cristal filtré M tel que :

(i) pour tout entier $i \geqslant 0$ on a $FM^i \subset p^i M$;

(ii) pour tout entier $i \geqslant 1$, l'application évidente

$$FM^i/pFM^i \to M(i)/pM(i-1)$$

est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

Un module filtré D est *positif* si $D^0 = D$.

Si D est un module filtré, un réseau M de D est un réseau *adapté* de D si $FM \subset M$ et si M, muni de l'action de F et de la filtration induites par celles de D, est fortement divisible.

3.2. Le but de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit D un module filtré positif. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *D contient un réseau adapté;*

(ii) *D est faiblement admissible.*

3.3 LEMME. — *Soit M un F-cristal, alors la longueur du* A_0*-module* M/FM *est égale à* $\sum_{i=1}^{\infty} \dim_k (M(i)/p\,M(i-1))$.

Démonstration. — Soit n un entier tel que $p^n M \subset FM$. Pour $i \geqslant n$, on a $M(i) = p^i M$; donc

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \dim_k (M(i)/p\,M(i-1)) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \dim_k (M(i)/p\,M(i-1)) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \dim_k (p^{n-i} M(i)/p^{n-i+1} M(i-1)) \\ &= \lg (M(n)/p^n M(0)) = \lg (p^n M/p^n FM) = \lg (M/FM).\end{aligned}$$

3.4. *Démonstration de* (i) $\Rightarrow$ (ii) *du théorème.* — Pour tout entier $i \geqslant 1$, on a un isomorphisme $FM^i/p\,FM^i \simeq M(i)/p\,M(i-1)$. La somme des dimensions des espaces de départ est égale à

$$\textstyle\sum_{i\geqslant 1} \dim_k M^i/p\,M^i = \sum_{i\geqslant 1} \dim_{K_0} D^i = \sum_{i\in Z} i \dim_{K_0} D^i/D^{i+1}$$

puisque D est positif. Cette somme est donc égale à $t_H(D)$.

D'après le lemme, la somme des dimensions des espaces images est égale à la longueur de M/FM, donc à $t_N(D)$ d'après 1.5. Donc $t_N(D) = t_H(D)$.

Soit D' un sous-F-iso-cristal de D et $M' = M \cap D'$.

On a $M'^i = M' \cap D'^i = M \cap D' \cap D^i = M^i \cap D'$.

De même $M'(i) = p^i M' \cap FM' = p^i M \cap FM \cap D' = M(i) \cap D'$.

Pour tout $i \geqslant 1$, on a donc une application évidente $FM'^i \to M'(i)/p\,M'(i-1)$. Le noyau de cette flèche est

$$\begin{aligned}FM'^i \cap p\,M'(i-1) &= FM^i \cap p\,M(i-1) \cap D' \\ &= p\,FM^i \cap D', \text{ puisque } M \text{ est adapté à } D, \\ &= p\,FM'^i.\end{aligned}$$

Donc pour tout $i \geqslant 1$, on a une injection

$$FM'^i/p\,FM'^i \to M'(i)/p\,M'(i-1).$$

En faisant la somme des dimensions, on en déduit que $t_H(D') \leqslant t_N(D')$. Donc D est bien faiblement admissible.

3.5. PROPOSITION. — *Supposons k algébriquement clos. Soit :*

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0$$

une suite exacte de modules filtrés faiblement admissibles positifs. Si D' et D'' admettent des réseaux adaptés, alors D admet un réseau adapté.

Démonstration. — Comme k est algébriquement clos, la catégorie des F-iso-cristaux sur K_0 est semi-simple ([2], [8]). Soit $\hat{D}''$ un sous-F-iso-cristal de D tel que la projection de D sur D'' induise un isomorphisme de F-iso-cristaux de $\hat{D}''$ sur D''. Si $X \subset D''$, on note $\hat{X}$ son relèvement dans $\hat{D}''$.

Soit M'' un réseau adapté de D''. Pour tout entier $i \geqslant 0$, soit N^i un supplémentaire de M''^{i+1} dans M''^i, de sorte que $M'' = \bigoplus_{i \geqslant 0} N^i$.

Choisissons une base $(x^i_j)_{1 \leqslant j \leqslant n_i}$ de N^i et, pour tout i et tout j, un relèvement y^i_j *de* x^i_j dans D^i. Il existe donc $z^i_j \in D'$ tel que $y^i_j = \hat{x}^i_j + z^i_j$.

Soit r un entier tel que $D^r = 0$ et soit M' un réseau adapté de D'. Quitte à changer M' en $p^{-s} M'$ pour un entier s convenable, on peut supposer que pour tout i et tout j les z^i_j sont dans $p^r M'$.

Soit M le A_0-module engendré par M' et les y^i_j. On a $\hat{M}'' \subset M$ et on en déduit que la projection de M sur D'' est M'' et que pour tout i celle de $M(i)$ est $M''(i)$.

Par construction, si $M^i = M \cap D^i$, on a

$$M^i = M'^i + \sum_{\substack{i' \geqslant i \\ j}} A_0 y^{i'}_j.$$

Donc

$$FM^i \subset FM'^i + p^r M' + F\hat{M}''^i \subset p^i M' + p^r M' + p^i \hat{M}'' = p^i M.$$

Pour tout $i \geqslant 1$, on a donc une application naturelle $f_i : FM^i \to M(i)/pM(i-1)$.

Si $x \in FM^i$, on peut l'écrire

$$x = Fm + \sum_{\substack{i' \geqslant i \\ j}} \lambda_{i'j}\, F y^{i'}_j \qquad \text{avec} \quad m \in M'^i \quad \text{et} \quad \lambda_{i'j} \in A_0.$$

Si $f_i(x) = 0$, on a $\sum_{\substack{i' \geqslant i \\ j}} \lambda_{i'j}\, F x^{i'}_j \in p\, M''(i-1)$, donc comme M'' est adapté, tous les $\lambda_{i'j}$ sont divisibles par p. Par suite Fm est aussi dans le noyau de f_i et $Fm \in FM'^i \cap pM(i-1) = FM'^i \cap pM'(i-1) = p\ FM'^i$ puisque M' est adapté. Le noyau de f_i est donc $p\,FM^i$. On a donc, pour tout i, une injection de $FM^i/p\,FM^i$ dans $M(i)/pM(i-1)$.

En faisant la somme des dimensions, on a $t_H(D) \leqslant t_N(D)$. Comme il y a égalité, les injections sont des isomorphismes et M est bien adapté à D.

3.6. *Démonstration de* (ii) $\Rightarrow$ (i) *du théorème pour k algébriquement clos.* — Si D est faiblement admissible positif, D admet une suite de composition dont les quotients successifs sont faiblement admissibles, simples et positifs. Donc par récurrence sur la longueur de la suite, pour démontrer le théorème pour k algébriquement clos, il suffit de montrer la proposition suivante :

3.7. PROPOSITION. — *Soit D un module filtré faiblement admissible positif et simple. Alors D admet un réseau adapté.*

Démonstration. — Comme D est faiblement admissible, son polygone de Newton est au-dessus de son polygone de Hodge, donc les pentes de D sont $\geqslant 0$. Si 0 est une pente de D, le module filtré $D'=D_0$ vérifie $0 \leqslant t_H(D_0) \leqslant t_N(D_0)=0$, donc D' est faiblement admissible et $D=D'$ puisque D est simple. Alors D contient le module de Dieudonné d'un groupe p-divisible étale sur k qui répond à la question.

On suppose donc dans la suite que les pentes de D sont strictement positives : nous allons procéder comme pour 2.4, c'est-à-dire construire à partir d'un réseau de D un algorithme décroissant dont la limite M_∞, si elle est non nulle, est un réseau adapté. Pour prouver que $M_\infty \neq 0$, nous montrerons que l'obstruction à ce que le n-ième réseau construit convienne entraîne l'existence d'un facteur direct non nul commun au premier et au n-ième modules.

3.8. LEMME. — *Pour tout entier $i \geqslant 1$, soit M^i un réseau de D^i. Pour $i \geqslant 1$, notons $M[i]$ le sous-$A_0[F]$-module de D engendré par le sous-A_0-module*

$$p^{i-1}M^1+\ldots+pM^{i-1}+M^i+p^{-1}FM^{i+1}+p^{-2}FM^{i+2}+\ldots$$

Notons $M=M[0]$ le sous-$A_0[F]$-module de D engendré par le sous-A_0-module $\sum_{j\geqslant 1} p^{-j}FM^j$. Alors M est un réseau de D; pour tout $i \geqslant 1$, on a $pM[i-1] \subset M[i]$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \lg(M[i]/pM[i-1])=t_N(D)$.

De plus si, pour tout $i \geqslant 1$, on a $M^i \subset M[i-1]$, alors M est adapté à D et on a $M(i)=FM[i]$ et $M^i=M\cap D^i$.

Démonstration. — Soit D' le sous-F-iso-cristal engendré par D^1. En considérant D' comme module filtré, on a $t_N(D') \leqslant t_N(D)$ puisque $D' \subset D$ et $t_H(D')=t_H(D)$ puisque $D^1 \subset D'$; par conséquent $t_N(D') \leqslant t_H(D')$. Comme D est faiblement admissible, on a $t_H(D') \leqslant t_N(D')$, donc $t_H(D')=t_N(D')=t_N(D)$. Puisque D est à pentes >0, on a $D'=D$ et les $M[i]$, pour tout $i \geqslant 0$, sont des réseaux de D.

Par définition on a $pM[i-1] \subset M[i]$. Soit r un entier tel que $D^r=0$; si $i \geqslant r$, alors $M[i]$ est le $A_0[F]$-module engendré par $\sum_{j=1}^r p^{i-j}M^j$, donc $p^i M[0]=FM[i]$. On en déduit

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \lg(M[i]/pM[i-1]) &= \textstyle\sum_{i=1}^{r} \lg(M[i]/pM[i-1]) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{r} \lg(p^{r-i}M[i]/p^{r-i+1}M[i-1]) \\ &= \lg(M[r]/p^r M[0]) = \lg(M[r]/FM[r]) \\ &= t_N(D) \text{ d'après } 1.5.\end{aligned}$$

Si, maintenant, on suppose que, pour tout i, $M^i \subset M[i-1]$, on voit que $pM[i-1] \subset M[i] \subset M[i-1]$. On en déduit des applications k-linéaires naturelles $f_i : M^i/pM^i \to M[i]/pM[i-1]$ qui sont surjectives par construction. En faisant la somme des dimensions on a $t_H(D) \geqslant t_N(D)$; comme il y a égalité, les f_i sont des isomorphismes.

On en déduit que $pM^i = M^i \cap pM[i-1]$, donc M^i est facteur direct dans $M[i-1]$. En particulier M^1 est facteur direct dans $M^0=M[0]=M$ et, si $i \geqslant 2$, M^{i-1} est facteur direct dans $M[i-2]$, donc dans $M[i-1]$. Donc $M^i = M[i-1] \cap D^i$ et M^i est facteur direct dans $M^{i-1}=M[i-1] \cap D^{i-1}$. Par récurrence, on en déduit que $M^i = M \cap D^i$ pour tout i.

Par définition des $M[i]$, on a

$$FM[i] \subset M(i) \qquad \text{et} \qquad M = FM + p^{-1}FM^1 + \ldots + p^{-i}FM^i + \ldots$$

Donc

$$p^i M = F(p^i M + p^{i-1}M^1 + \ldots + M^i + p^{-1}M^{i+1} + p^{-2}M^{i+2} + \ldots).$$

Comme chaque M^j est facteur direct dans M^{j-1}, on a

$$\left(\textstyle\sum_{j \geqslant 1} p^{-j}M^{i+j}\right) \cap M = M^{i+1} \subset M^i.$$

Donc

$$M(i) = p^i M \cap FM = p^i FM + p^{i-1}FM^1 + \ldots + FM^i.$$

Comme $pM[i-1] \subset M[i]$, par récurrence on a $p^i M \subset M[i]$, donc $p^i FM \subset FM[i]$. Comme $p^{i-1}M^1 + \ldots + M^i \subset M[i]$, on a finalement $M(i) \subset FM[i]$, d'où le lemme.

3.9. *Suite de la démonstration de la proposition* 3.7. — Pour tout $i \geqslant 1$, soit M_0^i un réseau de D^i. On définit par récurrence à partir des M_0^i des suites décroissantes de réseaux de D^i : supposons les M_n^i connus, pour $i \geqslant 1$, on note $M_n[i]$ le sous-$A_0[F]$-module de D engendré par le sous-A_0-module

$$p^{i-1}M_n^1 + p^{i-2}M_n^2 + \ldots + M_n^i + p^{-1}FM_n^{i+1} + p^{-2}FM_n^{i+2} + \ldots$$

et on note $M_n[0]$ le sous-$A_0[F]$-module de D engendré par $\sum_{i=1}^{\infty} p^{-i} F M_n^i$; on pose alors $M_{n+1}^i = M_n^i \cap M_n[i-1]$.

Si pour tout $i \geqslant 1$, la suite M_n^i est stationnaire, la proposition résulte du lemme 3.8. Il reste donc à montrer le lemme :

3.10. Lemme. — *Pour tout $i \geqslant 1$, la suite M_n^i est stationnaire.*

Montrons d'abord un autre lemme :

3.11. Lemme. — *Pour $i \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$, soit u_n^i la dimension du k-espace vectoriel $X_n^i = (pM_n^i + (M_n^i \cap pM_n[i-1]))/pM_n^i$. Pour i fixé, l'application naturelle $g_n^i : X_n^i \to X_{n-1}^i$ est injective, donc la suite des u_n^i est stationnaire.*

Démonstration. — Il suffit de vérifier que

$$M_n^i \cap pM_n[i-1] \cap pM_{n-1}^i \subset pM_n^i.$$

Or

$$\begin{aligned} M_n^i \cap pM_n[i-1] \cap pM_{n-1}^i &\subset M_n^i \cap p(M_{n-1}[i-1] \cap M_{n-1}^i) \\ &= M_n^i \cap pM_n^i = pM_n^i. \end{aligned}$$

Donc les g_n^i sont injectives et la suite des u_n^i, pour i fixé, est décroissante donc stationnaire.

3.12. *Démonstration du lemme* 3.10. — Pour tout i et tout n, on a par construction $pM_n[i-1] \subset M_n[i]$ et des surjections $M_n^i \to M_n[i]/pM_n[i-1]$, donc des isomorphismes $h_n^i : M_n^i/M_n^i \cap pM_n[i-1] \simeq M_n[i]/pM_n[i-1]$.

Comme dans le lemme 3.8, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lg(M_n[i]/pM_n[i-1]) = t_N(D),$$

donc

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lg(M_n^i/pM_n^i) = t_H(D) = t_N(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \lg(M_n^i/M_n^i \cap pM_n[i-1]).$$

Si pour tout i les suites u_n^i stationnent en 0, d'après le lemme 3.11, on a, pour n assez grand et pour tout i, $M_n^i \cap pM_n[i-1] \subset pM_n^i$, et l'égalité ci-dessus montre que ces inclusions sont des égalités; les h_n^i sont donc des isomorphismes de k-espaces vectoriels. Par conséquent, pour n assez grand, on a

$$M_n[i] \subset M_n[i-1],$$

donc

$$M_n^i \subset M_n[i-1] \qquad \text{et} \qquad M_{n+1}^i = M_n^i \cap M_n[i-1] = M_n^i.$$

Le lemme est alors démontré dans ce cas.

Supposons maintenant que toutes les suites u_n^i ne stationnent pas en 0. Quitte à remplacer les M_0^i par les M_n^i pour un entier n convenable, on peut supposer que toutes les suites u_n^i sont constantes. Soit i_0 un indice tel que $u_n^{i_0} \neq 0$; on voit d'après le lemme 3.11 et par récurrence décroissante sur n que pour tout n les modules $M_0^{i_0}$ et $M_n^{i_0}$ ont un facteur direct non nul commun. Posons $M_\infty^i = \bigcap_{n=0}^\infty M_n^i$, on a donc $M_\infty^{i_0} \neq 0$.

Soit s un entier $\geqslant 0$. Les A_0-modules $M_0^i/p^s M_0^i$ sont tous de longueur finie et presque tous nuls. Il existe donc un entier n_s tel que, si $n \geqslant n_s$, on a $M_n^i \subset M_\infty^i + p^s M_0^i$, pour tout i.

Soit pour $i \geqslant 1$:

$$M_\infty[i] = A_0[F](p^{i-1} M_\infty^1 + p^{i-2} M_\infty^2 + \ldots$$
$$+ M_\infty^i + p^{-1} FM_\infty^{i+1} + p^{-2} FM_\infty^{i+2} + \ldots)$$

et soit

$$M_\infty[0] = A_0[F](\textstyle\sum_{i=1}^\infty p^{-i} FM_\infty^i).$$

Pour tout entier s et pour tout $n \geqslant n_s$, on a $M_n[i] \subset M_\infty[i] + p^s M_0[i]$, donc $\bigcap_{n=0}^\infty M_n[i] \subset M_\infty[i]$. Comme $M_\infty[i] \subset M_n[i]$, on a $M_\infty[i] = \bigcap_{n=0}^\infty M_n[i]$.

On a aussi $M_\infty^i \subset M_{n+1}^i \subset M_n[i-1]$ pour tout n, donc $M_\infty^i \subset M_\infty[i-1]$.

Soit $M_\infty = M_\infty[0]$ et soit $D_\infty = K_0 \bigotimes_{A_0} M_\infty$, alors D_∞ est un sous-F-isocristal de D.

Comme dans le lemme 3.8, on déduit de $M_\infty^i \subset M_\infty[i-1]$ que, pour tout i, on a $M_\infty[i] \subset M_\infty[i-1]$ et des surjections

$$M_\infty^i/pM_\infty^i \to M_\infty[i]/pM_\infty[i-1].$$

Comme $\dim_k M_\infty^i/pM_\infty^i \leqslant \dim_{K_0} D_\infty^i$, en faisant la somme des dimensions, on a

$$t_H(D_\infty) \geqslant \lg(M_\infty/FM_\infty) = t_N(D_\infty).$$

Puisque D est faiblement admissible, on a $t_H(D_\infty) = t_N(D_\infty)$ et D_∞ est faiblement admissible (1.6). Comme $M_\infty^{i_0} \neq 0$, on a $D_\infty \neq 0$ et comme D est simple on a $D_\infty = D$. Il est alors clair que M_∞ est un réseau adapté à D.

3.13. *Fin de la démonstration du théorème.* — Soit D un module filtré sur K_0 faiblement admissible et positif. D'après la proposition 1.7, le module filtré D_{P_0} est faiblement admissible. Comme D_{P_0} est positif, d'après la démonstration qui précède, D_{P_0} *admet un réseau adapté* M.

Soit $N=\bigcap_{g\in J} gM$, c'est un réseau de D_{P_0} stable par J. D'après la proposition 1.1, on a $N=W(\overline{k})\bigotimes_{A_0} N^J$. Comme $N\subset M$, on a $N^J\subset M^J$ et comme N est le plus grand sous-module de M stable par J, on a $N^J=M^J$.

Comme F commute à l'action de J, on a $FM^J\subset M^J$. Comme la filtration de D_{P_0} est stable par J, on a $(M^J)^i=(M^i)^J$ et il est alors clair que M^J est adapté à D.

3.14. *Remarque*. — Soient D un module filtré positif faiblement admissible, pas nécessairement simple, et M un réseau de D. Il existe un plus grand réseau adapté à D contenu dans M : c'est la réunion M' des réseaux adaptés à D contenus dans M. Si, pour tout $i\geqslant 1$, on choisit un réseau M_0^i de D^i, et si on définit les $M_n[i]$ et les M_n^i à partir des M_0^i comme au n° 3.9, l'algorithme est stationnaire et sa limite est un réseau adapté. Si M est stable par F et si $M_0^i=D^i\cap p^iF^{-1}M$, on a $M'=M_n[0]$ pour n assez grand.

4. Stabilité par produit tensoriel

4.1. L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Si $e=1$, la catégorie des modules filtrés faiblement admissibles est stable par produit tensoriel.*

Démonstration. — Supposons que l'on sache que, si D_1 et D_2 sont deux modules filtrés positifs (i. e. $D^0=D$) et faiblement admissibles, alors $D_1\otimes D_2$ est faiblement admissible.

Pour tout $j\in\mathbb{Z}$, soit S_j le module filtré dont le F-iso-cristal sous-jacent est K_0 comme espace vectoriel sur lui-même, l'action de F étant définie par $F\lambda=p^j\sigma(\lambda)$ pour tout $\lambda\in K_0$, la filtration étant définie par

$$S_j^i=\begin{cases} S_j & \text{si } i\leqslant j,\\ 0 & \text{si } i>j\end{cases}.$$

Si D est un module filtré faiblement admissible, $D\otimes S_j$ est faiblement admissible et si j est assez grand $D\otimes S_j$ est positif.

Soient D_1 et D_2 deux modules filtrés faiblement admissibles. Soient j_1 et j_2 deux entiers tels que $D_1\otimes S_{j_1}$ et $D_2\otimes S_{j_2}$ soient positifs. D'après le résultat admis $(D_1\otimes S_{j_1})\otimes(D_2\otimes S_{j_2})\simeq(D_1\otimes D_2)\otimes S_{j_1+j_2}$ est faiblement admissible. Donc $D_1\otimes D_2\simeq(D_1\otimes D_2)\otimes S_{j_1+j_2}\otimes S_{-j_1-j_2}$ est faiblement admissible.

D'après le théorème 3.2, pour achever la démonstration du théorème, il suffit de montrer la proposition suivante :

4.2. PROPOSITION. — *Soient D_1 et D_2 deux modules filtrés faiblement admissibles positifs. Si M_1 et M_2 sont des réseaux adaptés respectivement de D_1 et D_2, alors $M_1 \bigotimes_{A_0} M_2$ est un réseau adapté de $D_1 \otimes D_2$.*

Démonstration. — Admettons pour le moment le lemme :

LEMME. — *On a pour tout entier i :*

(*a*) $$(M_1 \otimes M_2)^i = \textstyle\sum_{i'+i''=i} M_1^{i'} \otimes M_2^{i''};$$

(*b*) $$(M_1 \otimes M_2)(i) = \textstyle\sum_{i'+i''=i} M_1(i') \otimes M_2(i'').$$

Comme $FM_1^{i'} \subset M_1(i')$ et $FM_2^{i''} \subset M_2(i'')$, on a

$$F(M_1^{i'} \otimes M_2^{i''}) = FM_1^{i'} \otimes FM_2^{i''} \subset (M_1 \otimes M_2)(i),$$

donc $F(M_1 \otimes M_2)^i \subset (M_1 \otimes M_2)(i)$.

On en déduit des applications naturelles

$$f_i : \quad F(M_1 \otimes M_2)^i / pF(M_1 \otimes M_2)^i \to (M_1 \otimes M_2)(i)/p(M_1 \otimes M_2)(i-1).$$

Montrons que les f_i sont surjectives. Soit $x \otimes y \in M_1(i') \otimes M_2(i'')$ avec $i'+i''=i$. Comme M_1 et M_2 sont adaptés, on a

$$x = Fm_1 + px' \quad \text{avec} \quad x' \in M_1(i'-1) \quad \text{et} \quad m_1 \in M_1^{i'},$$
$$y = Fm_2 + py' \quad \text{avec} \quad y' \in M_2(i''-1) \quad \text{et} \quad m_2 \in M_2^{i''}.$$

D'où :

$$\begin{aligned} x \otimes y = F(m_1 \otimes m_2) &+ pFm_1 \otimes y' + px' \otimes Fm_2 \\ &+ p^2 x' \otimes y' \in F(M_1^{i'} \otimes M_2^{i''}) + p(M_1 \otimes M_2)(i-1). \end{aligned}$$

Par conséquent les applications f_i sont bien surjectives. La somme des dimensions à gauche est $t_H(D_1 \otimes D_2)$, à droite $t_N(D_1 \otimes D_2)$.

Comme

$$\begin{aligned} t_H(D_1 \otimes D_2) &= t_H(D_1) \dim_{K_0} D_2 + t_H(D_2) \dim_{K_0} D_1 \\ &= t_N(D_1)\, dim_{K_0} D_2 + t_N(D_2)\, dim_{K_0} D_1 = t_N(D_1 \otimes D_2), \end{aligned}$$

les applications f_i sont des isomorphismes et $M_1 \otimes M_2$ est adapté à $D_1 \otimes D_2$. La proposition est donc démontrée.

4.3. *Démonstration du lemme.* — Soient N_1^i un supplémentaire de M_1^{i+1} dans M_1^i et N_2^i un supplémentaire de M_2^{i+1} dans M_2^i. On a

$$M_1 \otimes M_2 = \bigoplus_{i',i''} N_1^{i'} \otimes N_2^{i''}.$$

Si

$$E_1^i = K_0 \bigotimes_{A_0} N_1^i \quad \text{et} \quad E_2^i = K_0 \bigotimes_{A_0} N_2^i,$$

on a

$$(D_1 \otimes D_2)^i = \bigoplus_{i'+i'' \geqslant i} E_1^{i'} \otimes E_2^{i''}.$$

D'où :

$$(M_1 \otimes M_2)^i = \bigoplus_{i'+i'' \geqslant i} N_1^{i'} \otimes N_2^{i''} = \sum_{i'+i'' = i} M_1^{i'} \otimes M_2^{i''}.$$

Le (*a*) du lemme est donc démontré.

Appliquons le théorème des diviseurs élémentaires à M_1/FM_1 et à M_2/FM_2 : il existe une base $\{x_m\}$ de M_1 et des entiers $r_m \geqslant 0$ tels que les $p^{r_m} x_m$ forment une base de FM_1 et il existe une base $\{y_n\}$ de M_2 et des entiers $s_n \geqslant 0$ tels que les $p^{s_n} y_n$ forment une base de FM_2.

Alors $F(M_1 \otimes M_2)$ a pour base les $p^{r_m+s_n} x_m \otimes y_n$ et $p^i M_1 \otimes M_2$ a pour base les $p^i x_m \otimes y_n$.

Donc $(M_1 \otimes M_2)(i)$ a pour base les $p^{a_{nm}} x_m \otimes y_n$ avec $a_{nm} = \max(r_m + s_n, i)$. Et $\sum_{i'+i''=i} M_1(i') \otimes M_2(i'')$ a pour base les $p^{b_{nm}} x_m \otimes y_n$ avec

$$b_{nm} = \min_{i'+i''=i} (\max(r_m, i'), \max(s_n, i'')).$$

Il est clair que $a_{nm} = b_{nm}$, donc

$$(M_1 \otimes M_2)(i) = \sum_{i'+i''=i} M_1(i') \otimes M_2(i'')$$

et le lemme est démontré.

4.4. *Remarque.* — Le théorème entraîne d'après [4] que, si $e=1$, la catégorie $MK_{K_0}^f$ des modules filtrés faiblement admissibles est tannakienne sur $\mathbf{Q}_p$ au sens de Saavedra [13]. Si $\mathbf{Q}_p^{nr}$ est l'extension algébrique maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans K_0, le choix d'un foncteur fibre à valeurs dans $\mathbf{Q}_p^{nr}$ (il en existe d'après [4]) permet d'identifier la catégorie $\mathbf{Q}_p^{nr}$-linéaire déduite de $MF_{K_0}^f$ par extension des scalaires à la catégorie des représentations, de dimension finie, d'un groupe pro-algébrique sur $\mathbf{Q}_p^{nr}$.

5. Modules filtrés et cohomologie cristalline

5.1. Soit X un schéma projectif et lisse sur A_0 tel que, pour tout i et tout j, les A_0-modules $H^j(X, \Omega_{X/A_0}^i)$ sont sans torsion. On sait ([1], 7.26) que la cohomologie de De Rham $H_{DR}^*(X/A_0)$ s'identifie à la cohomologie cristalline

$H^*_{\mathrm{cris}}(X_k)$ de la fibre spéciale X_k de X et l'endomorphisme de Frobenius permet de considérer chaque $H^m_{DR}(X/A_0)$ comme un F-cristal. Muni de la filtration de Hodge ce F-cristal devient un F-cristal filtré.

Choisissons un entier $n \geqslant 0$ et notons M le F-cristal filtré $H^n_{DR}(X/A_0)$. Mazur a démontré ([9], [10]) que M est divisible, c'est-à-dire que :

(i) pour tout entier $i \geqslant 0$, on a $FM^i \subset (pFM + p^i M) \cap p^{[i]} M$, *où* $[i] = \min_{n \geqslant i} v(p^n/n!)$ où v est la valuation de K_0 normalisée par $v(p)=1$;

(ii) pour tout $i \geqslant 0$, l'application évidente

$$(FM^i + pFM)/(FM^{i+1} + pFM) \to (pFM + p^i M \cap FM/(pFM + p^{i+1} M) \cap FM$$

est un isomorphisme de k-espaces vectoriels.

5.2. Proposition. — *Soit X un schéma projectif et lisse sur A_0 tel que, pour tout i et tout j, les A_0-modules $H^j(X, \Omega^i_{X/A_0})$ sont sans torsion. Soit m un entier $\geqslant 0$ et soit M le F-cristal filtré $H^m_{DR}(X/A_0)$:*

(*a*) *si $m < p$, alors M est fortement divisible;*

(*b*) *si M est fortement divisible, le module filtré obtenu par extension des scalaires à K_0 à partir de M est faiblement admissible.*

Démonstration. — (*a*) Si $i < p$, on a $i = [i]$, donc, d'après les estimations de Mazur rappelées ci-dessus, on a $FM^i \subset p^i M$ pour tout i. On en déduit des applications naturelles $FM^i \to M(i)/pM(i-1)$. Le noyau est $FM^i \cap pFM \cap p^i M = pFM^i \cap p^i M$ puisque M^i est facteur direct dans M. Pour tout i, on a donc des injections $FM^i/pFM^i \to M(i)/pM(i-1)$.

En faisant la somme des dimensions, on voit que ces injections sont des isomorphismes. Donc M est fortement divisible.

(*b*) Si M est fortement divisible, il est adapté à $D = K_0 \otimes_{A_0} M$, muni de la filtration $D^i = K_0 \otimes_{A_0} M^i$. Donc d'après le théorème 2.1 le module filtré D est faiblement admissible.

5.3. On peut montrer facilement qu'un F-cristal filtré divisible ne donne pas nécessairement par extension des scalaires un module filtré faiblement admissible.

Dans [12], Ogus construit pour p impair des exemples d'hypersurfaces X telles que $H^p_{DR}(X/A_0)$ ne soit pas fortement divisible. Si $p=3$ et si X est l'hypersurface définie par $\sum_{i=0}^4 X_i^5 + 3\prod_{i=0}^4 X_i$, le F-cristal filtré $H^3_{DR}(X/A_0)$ n'est pas fortement divisible, mais la description donnée par Ogus permet de vérifier que le module filtré associé est faiblement admissible.

5.4. *Remarque*. — Il semble raisonnable de conjecturer que si X est un schéma sur A_0 vérifiant les hypothèses de la proposition 4.2, les $K_0 \otimes_{A_0} H^m_{DR}$ (X/A_0) sont faiblement admissibles quel que soit m et même admissibles au sens de Fontaine [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTHELOT (P.) et OGUS (A.). — *Notes on Crystalline Cohomology*, *Mathematical Notes* n° 21, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[2] DIEUDONNÉ (J.). — Groupes de Lie et hyperalgèbres de Lie sur un corps de caractéristique $p>0$ (VII), *Math. Ann.*, t. 134, 1957, p. 114-133.

[3] FONTAINE (J.-M.). — *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*. *Astérisque*, 47-48, Soc. math. de France. 1977.

[4] FONTAINE (J.-M.). — Modules galoisiens. modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. in *Journées de Géométrie algébrique de Rennes*. 1978. *Astérisque*, 65, Soc. Math. de France, 1979.

[5] GROTHENDIECK (A.). — Groupes de Barsotti-Tate et cristaux. *Actes du congrès inter. math.*, 1970, t. 1, p. 431-436, Gauthier-Villars. Paris. 1971.

[6] GROTHENDIECK (A.). — *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné*, Université de Montréal, Montréal, 1974.

[7] LAFFAILLE (G.). — Constructions de groupes p-divisibles. Le cas de dimension 1. in *Journées de Géométrie algébrique de Rennes*. 1978. *Astérisque*, 65, Soc. Math. de France, 1979.

[8] MANIN (Y.). — The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristic, *Russian Math. Surveys*, 18, 1963, p. 1-83.

[9] MAZUR (B.). — Frobenius and the Hodge filtration, *Bull. A.M.S.*, 78, 1972, p. 653-667.

[10] MAZUR (B.). — Frobenius and the Hodge filtration (Estimates), *Ann. of Math.*, t. 98, 1973, p. 58-95.

[11] MESSING (W.). — *The Crystals Associated to Barsotti-Tate Groups: with Applications to Abelian Schemes*, *Lecture Notes in Math.*, n° 264, Springer, Berlin, 1972.

[12] OGUS (A.). — Griffiths transversality in crystalline cohomology, *Ann. of Math.*, t. 108, 1978, p. 395-419.

[13] SAAVEDRA RIVANO (N.). — *Catégories tannakiennes*, *Lecture Notes in Math.*, n° 265, Springer, Berlin, 1972.

[14] SERRE (J.-P.). — *Abelian l-Adic representations and elliptic curves*, Benjamin, New York, 1968.