BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC GIUSTI
JEAN-PIERRE-GEORGES HENRY

Minorations de nombres de Milnor

Bulletin de la S. M. F., tome 108 (1980), p. 17-45
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1980__108__17_0>

Bull. Soc. math. France,
108, 1980, p. 17-45.

MINORATIONS DE NOMBRES DE MILNOR

PAR

MARC GIUSTI et JEAN-PIERRE-GEORGES HENRY (*)

RÉSUMÉ. — Nous introduisons et étudions des invariants numériques, du type nombre de Milnor, d'une singularité isolée d'intersection complète (SIC). Ils se réduisent à la suite μ^* de B. TEISSIER dans le cas des hypersurfaces. Signalons le lemme-clé démontré : Pour presque toute direction d'hyperplan, la courbe polaire d'une SIC relative à cette direction lui est transverse. Nous pouvons alors établir diverses inégalités, par exemple : le nombre de Milnor d'une SIC non-hypersurface est strictement supérieur à celui d'une section hyperplane générique. D'autre part, le nombre de Milnor des SIC (non-hypersurfaces), ayant une dimension de plongement donnée, est minoré par une fonction croissante de cette dimension.

ABSTRACT. — We introduce and study some numerical Milnor type invariants of an isolated complete intersection singularity (CIS). They generalize the sequence μ^* of B. TEISSIER in the hypersurface case.

We point out a key-lemma: For a generic hyperplane direction, the polar curve of a CIS and the direction defining it are transversal.

We show several inequalities: the Milnor number of a CIS is greater than the Milnor number of its generic hyperplane section. For a non hypersurface CIS the Milnor number is greater than a growing function of its embedding dimension.

1. Introduction et énoncé des résultats

Soit $(X, 0)=(f^{-1}(0), 0)$ un germe de singularité isolée d'intersection complète (SIC) défini par l'application analytique

$$f=(f_1, \ldots, f_p): \quad (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0),$$

où n sera toujours la dimension de plongement de $(X, 0)$. On définit alors le nombre de Milnor ([Mi], [Ha]) de cette SIC, noté $\mu(f_1, \ldots, f_p)$ ou intrinsèquement $\mu(X, 0)$.

(*) Texte reçu le 12 décembre 1978; révisé le 4 mai 1979.

Marc GIUSTI et Jean-Pierre-Georges HENRY, Laboratoire de recherche associé au C.N.R.S. n° 169, Centre de Mathématiques, École polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1980/ 17 /$ 5.00

Dans toute la suite, les composantes $f_i (1 \leqslant i \leqslant p)$ seront toujours des combinaisons linéaires génériques des générateurs de l'idéal $I(X, 0)$ définissant $(X, 0)$, et on choisira également des coordonnées $z_1, \ldots, z_n$, combinaisons linéaires génériques des coordonnées de $\mathbb{C}^n$. (Nous dirons qu'une combinaison linéaire est générique si ses coefficients sont dans un ouvert de Zariski (de l'espace vectoriel correspondant) dont le choix sera indiqué ou clair suivant les cas.)

1.1. Définition - proposition. — Pour un choix générique des coordonnées et des générateurs de l'idéal $I(X, 0)$, le germe, défini par l'application analytique

$$F_j^{(n-i)} : \quad (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{i+j}, 0),$$

$$(z_1, \ldots, z_n) \to (f_1, \ldots, f_j, z_{n-i+1}, \ldots, z_n)$$

$(1 \leqslant j \leqslant p,\ 0 \leqslant i < n,\ i+j \leqslant n)$, est une SIC, et son nombre de Milnor $\mu_j^{(n-i)}$ ne dépend pas de ce choix dans les ouverts de Zariski.

Pour $j = p = 1$, on reconnaît la suite μ^* de Teissier ([Te$_1$], p. 300).

On dispose donc d'une suite double d'entiers dont on veut étudier le comportement.

Question 1. — *À j fixé, $\mu_j^{(n-i)}$ est-elle une suite décroissante de i?* (propriété déjà connue pour $j = 1$, cas des hypersurfaces [Te$_1$], p. 323). La réponse est positive.

Question 2. — *À i fixé, $\mu_j^{(n-i)}$ est-elle une suite croissante de j?* la réponse est négative, comme le montre le contre-exemple suivant. Donnons auparavant une définition.

1.2. Définition. — $(X, 0) = (f^{-1}(0), 0)$ est une SIC quasi homogène de type $(d_1, \ldots, d_p;\ a_1, \ldots, a_n)$ si f_j est un polynôme quasi homogène de degré d_j pour les poids $a_1, \ldots, a_n$ $(j = 1, \ldots, p)$. On notera H_d l'ensemble des SIC quasi homogènes de type $(d, \ldots, d;\ 1, \ldots, 1)$.

On sait calculer le nombre de Milnor d'une SIC quasi homogène en fonction de son type ([Gi], [Gr-Ha]). En particulier dans le cas H_d :

$$\mu_p^{(n)} \sim C_{n-1}^{p-1}\, d^n \qquad (d \to +\infty).$$

Donc, par exemple, $\mu_3^{(3)}/\mu_2^{(3)} \to 1/2 \quad (d \to +\infty)$ et $\mu_3^{(3)} < \mu_2^{(3)}$ dans H_d pour d suffisamment grand.

Cependant, en réponse à une question posée par Lê Dũng Tráng, on peut affirmer que $\mu_2^{(n)} > \mu_1^{(n)}$, et même, plus généralement, $\mu_p^{(n)} > \mu_1^{(n)}$ dès que $p \geqslant 2$.

1.3. De manière plus précise, définissons l'idéal jacobien :

$$I'(X, 0)=\left\{g\in\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\};\ \exists i\in\{1, \ldots, n\},\ \exists h\in I(X, 0),\ g=\frac{\partial h}{\partial z_i}\right\}.$$

La multiplicité $\bar{\mu}^{(n-i)}$ de l'idéal $(I'(X, 0), z_1, \ldots, z_i)$ est un invariant analytique de la SIC $(0\leqslant i<n)$.

1.3.1. *Remarque.* — *A priori*, on a $\bar{\mu}^{(n-i)}\leqslant\mu_1^{(n-i)}$. Reprenant un exemple dû à J.-P.-G. Henry [He], on peut voir qu'il existe des SIC avec l'inégalité stricte : pour le germe de SIC de $(\mathbb{C}^2, 0)$, défini par l'idéal $I(X, 0)=(z_2^2, z_1^4 z_2+z_1^8)$, après avoir, bien entendu, choisi des coordonnées génériques de $\mathbb{C}^2$, on obtient $\bar{\mu}^{(2)}=4$, tandis que $\mu_1^{(2)}=7$.

1.3.2. *Remarque.* — Toutefois dans le cas H_d, $\bar{\mu}^{(n-i)}$ et $\mu_1^{(n-i)}$ sont égaux. En effet, la multiplicité de $(I'(X, 0), z_1, \ldots, z_i)$ est celle d'un idéal engendré par une suite de paramètres combinaisons linéaires des générateurs ([Sam], th. 5, p. 186), c'est donc $(d-1)^{n-i}$ qui est également la valeur de $\mu_1^{(n-i)}$.

Ceci posé, on a les théorèmes suivants :

1.4. Théorème. — *Soit* $(X, 0)$ *un germe de* SIC *de dimension* $n-p$, *et de dimension de plongement* n. *Alors* :

(1.4.1) $$\mu_p^{(n)}\geqslant\mu_1^{(1)}\mu_p^{(n-1)}+(1+\mu_1^{(1)})\mu_{p-1}^{(n-1)},$$

(1.4.2) $$\mu_p^{(n)}\geqslant\mu_{p-1}^{(n-1)}+\mu_1^{(n)}+(C_{n-1}^{p-1}-1)\bar{\mu}^{(n)}+C_{n-1}^{p-1}\sum_{i=1}^{p-1}C_{p-1}^{i}\bar{\mu}^{(n-i)}.$$

En sommant les inégalités (1.4.2) :

(1.4.3) $$\mu_p^{(n)}\geqslant\sum_{i=0}^{p-1}[\mu_1^{(n-i)}+(\textstyle\sum_{j=p-1-i}^{p-1}C_{n-p+j}^{n-p}C_j^{p-1-i}-1)\bar{\mu}^{(n-i)}].$$

Les trois cas d'égalité sont atteints pour les SIC *de* H_d.

Pour les points épais et les courbes, on peut donner quelques améliorations des minorations :

1.5. Théorème.

1.5.1. *Points épais* $(n-p=0)$:

$$\mu_n^{(n)}\geqslant\sum_{i=0}^{n-1}C_n^i\mu_1^{(n-i)}.$$

1.5.2. *Courbes* $(n-p=1)$:

(1.5.2.1) $$\mu_{n-1}^{(n)}\geqslant\mu_{n-2}^{(n-1)}+\sum_{i=0}^{n-2}[C_{n-2}^{i}\mu_1^{(n-i)}+(n-2)C_{n-2}^{i}\bar{\mu}^{(n-i)}],$$

(1.5.2.2) $$\mu_{n-1}^{(n)} \geqslant \mu_{n-2}^{(n-1)} + \frac{\mu_1^{(1)}}{1+\mu_1^{(1)}}(n-1)\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^{i}\,\mu_1^{(n-i)}.$$

Les trois cas d'égalité sont encore atteints pour les SIC *de* H_d.

1.5.3. *Remarque.* — On peut trouver des exemples de SIC de courbes pour lesquelles les trois minorants (1.4.1), (1.5.2.1) et (1.5.2.2) ont des différences de signe et de valeur absolue arbitraires, bien qu'ils soient tous atteints dans le cas H_d.

1.5.4. — Les améliorations des théorèmes 1.5 incitent à poser :

CONJECTURE :

$$\mu_p^{(n)} \geqslant \mu_{p-1}^{(n-1)} + \sum_{i=0}^{p-1} C_{p-1}^{i}\,[\mu_1^{(n-i)} + (C_{n-1}^{p-1}-1)\,\bar{\mu}^{(n-i)}]$$

QUESTION. — *Peut-on dans* (1.4.2) *remplacer tous les* $\bar{\mu}$ *par des* μ?

1.6. COROLLAIRE. — $\mu_p^{(n)} > \mu_p^{(n-1)}$, *ce qui répond à la question* 1, *et* $\mu_p^{(n)} > \mu_1^{(n)}$ *dès que* $p \geqslant 2$.

1.7. COROLLAIRE. — *Soit* $(X, 0)$ *un germe de* SIC *de dimension* $n-p=q$ *et de dimension de plongement* n. *Alors :*

$$\mu(X, 0) \geqslant m(n, p) = \sum_{k=0}^{p-1} C_{q+k}^{q}\,2^k$$

Le cas d'égalité est atteint pour les SIC *de* H_2.

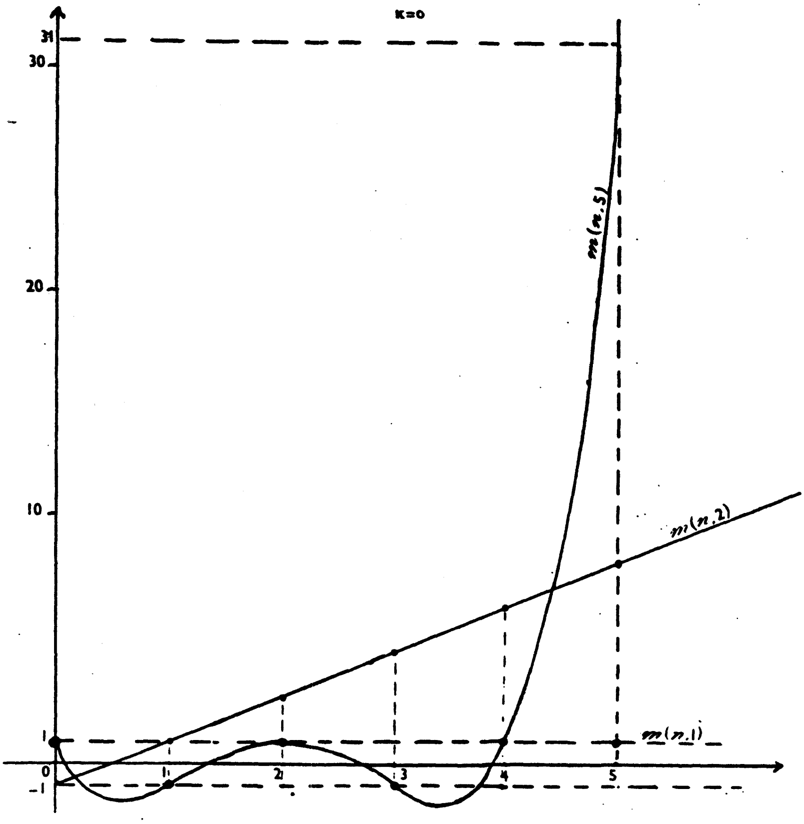
En effet, comme la dimension de plongement est n, $\mu_1^{(n-i)}$ et $\bar{\mu}^{(n-i)}$ $(0 \leqslant i < n)$ sont minorés par 1 (il y a égalité pour les SIC de H_2), donc $\mu_p^{(n)}$ par

$$m(n, p) = \sum_{i=0}^{p-1}\ \sum_{j=p-1-i}^{p-1} C_{n-p+j}^{n-p}\,C_j^{p-1-i} = \sum_{k=0}^{p-1} C_{n-p+k}^{n-p}\,2^k.$$

On dispose donc d'une condition nécessaire numérique pour qu'une SIC de dimension donnée ait une dimension de plongement donnée; et étant donné un nombre entier μ, il n'existe qu'un nombre fini de couples (n, p), dimension de plongement et codimension de plongement d'une SIC non-hypersurface de nombre de Milnor μ.

Donnons le début du tableau des $m(n, p)$; à p fixé, $m(n, p)$ est comme fonction de n, le polynôme d'interpolation de Lagrange qui prend les valeurs $(-1)^{i-1}$ pour les points $n=p-i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$:

$$m(n, p) = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-1-k}\,2^k\,C_n^k.$$



D'après (1.4.1), la suite double vérifie la relation de récurrence

$$m(n,\, p)=m(n-1,\, p)+2\,m(n-1,\, p-1)$$

avec les conditions initiales $m(n,\, 1)=1$ et $m(n,\, n)=2^n-1$.

1.8. Corollaire de 1.3.2 et 1.4.3. — *Le nombre de Milnor d'une* SIC *de* H_d *est donné par la formule*

$$\mu_p^{(n)}=(d-1)^{n-p+1}\sum_{i=0}^{p-1} C_{n-p+i}^{i}\, d^i,$$

qui factorise la formule alternée habituelle ([Gi], [Gr-Ha]) :

$$\mu_p^{(n)}=(-1)^{n-p+1}+\sum_{i=0}^{n-p}(-1)^i\, C_n^i\, C_{n-1-i}^{p-1}\, d^{n-i},$$

en deux facteurs sommes de termes positifs.

De plus dans H_d, $\mu_p^{(n)}$ vérifie la relation de récurrence (d'après (1.4.1)) :

$$\mu_p^{(n)}=(d-1)\,\mu_p^{(n-1)}+d\mu_{p-1}^{(n-1)}.$$

Tableau des premiers $m(n, p)$.

p \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n-p
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2		3	5	7	9	11	13	15	17	19	9
3			7	17	31	49	71	97	127	161	8
4				15	49	111	209	351	545	799	7
5					31	129	351	769	1471	2561	6
6						63	321	1023	2561	5503	5
7							127	769	2815	7937	4
8								285	1793	7423	3
9									511	4097	2
10										1023	1
											0

Nous tenons à remercier ici LÊ DŨNG TRÀNG qui, par ses questions, est à l'origine de ce travail; Gert-Martin GREUEL et Michel MERLE avec lesquels nous avons eu de nombreuses discussions qui ont permis d'éclairer maints points obscurs.

Le lemme-clef (3.1) est une généralisation d'un beau résultat de B. TEISSIER sur les $\mu_1^{(n-i)}$ ([Te$_3$], th. 1, p. 269). Vicente NAVARRO-AZNAR nous a fait remarquer qu'il restait valable sans hypothèse de généricité sur $f_1, \ldots, f_p$; le théorème (1.4.1) prend alors l'expression : Pour z_n générique,

$$\mu(f_1, \ldots, f_p)\geqslant(e(f_p)-1)\,\mu(f_1, \ldots, f_p, z_n)+e(f_p)\,\mu(f_1, \ldots, f_{p-1}, z_n).$$

C'est sous cette forme qu'il l'utilise pour borner le nombre de types topologiques projectifs de SIC non-hypersurfaces ayant un nombre de Milnor donné [Na].

2. Le lemme d'échange et l'équivalence fondamentale

Soit $A=(a_{ij})$ une $p\times n$ matrice à coefficients dans un anneau commutatif R.

Tous les sous-ensembles finis de $\mathbb{N}$ considérés ci-dessous seront ordonnés dans l'ordre croissant. On notera $I_k^{(m)}=(i_1, \ldots, i_k)$ un élément de $K_k^{(m)}$ (ensemble des combinaisons ordonnées de k éléments distincts de $\{1, \ldots, m\}$), et $M_A(I_k^{(m)})=M_A(i_1, \ldots, i_k)$ (ou $M(I_k^{(m)})$ si le choix de A est clair), le k-mineur de A obtenu en prenant les k premières lignes et les colonnes $i_1, \ldots, i_k$.

2.1. Lemme d'échange. — *Soient $I_k^{(m)}$ et $I_{k-1}^{(m)}$ deux ensembles d'indices d'intersection $I_q^{(m)}$. Alors, pour toute matrice A,*

$$M(I_{k-1}^{(m)})\,M(I_k^{(m)})=\sum\nolimits_{i\in I_k^{(m)}-I_q^{(m)}} \varepsilon_i\, M(I_k^{(m)}-\{i\})\,M(I_{k-1}^{(m)}\cup\{i\}),$$

avec $\varepsilon_i=\pm 1$.

Démonstration. — Considérons la matrice carrée d'ordre $2k-1$ suivante,

$$\begin{array}{|c|c|}
\hline
 & L_1(I_k^{(m)}) \\
0 & \cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots \\
 & L_{k-1}(I_k^{(m)}) \\
\hline
L_1(I_{k-1}^{(m)}) & L_1(I_k^{(m)}) \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
L_k(I_{k-1}^{(m)}) & L_k(I_k^{(m)}) \\
\hline
\end{array}$$

où $L_j(I_i^{(m)})$ désigne la matrice ligne des i éléments de A obtenue en prenant dans la j-ième ligne de A les colonnes $I_i^{(m)}$.

En développant de deux manières différentes son déterminant suivant la règle de Laplace on obtient le lemme sans difficulté.

Désignons maintenant par $J_k^{(m)}$ l'idéal de R engendré par les k-mineurs de A formés avec les k premières lignes et les m premières colonnes. On a alors le corollaire suivant du lemme d'échange :

2.2. Corollaire. — *Pour tout* $I_{k-1}^{(m-1)}$ *dans* $K_{k-1}^{(m-1)}$,

$$M(m-k+1, \ldots, m-1)\, M(I_{k-1}^{(m-1)} \cup \{m\}) + \varepsilon M(I_{k-1}^{(m-1)})\, M(m-k+1, \ldots, m),$$

appartient à $J_k^{(m-1)}$ (ε *est* $+1$ *ou* -1).

On notera $V(J)$ le germe d'espace analytique défini par un idéal J de $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$, et $\mathcal{O}_{V(J)} = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/J$ son anneau local.

2.3. Définition. — Deux germes d'espaces analytiques Cohen-Macaulay de même dimension d, $V(J)$ et $V(J')$ seront dits *numériquement équivalents* (et on notera $V(J) \equiv V(J')$) si, pour toute suite d'éléments $g_1, \ldots, g_d$ de $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ dont l'image dans $\mathcal{O}_{V(J)}$ et $\mathcal{O}_{V(J')}$ est une suite régulière, on a l'égalité des multiplicités d'intersection

$$(V(J) \,.\, V(g_1, \ldots, g_d))_0 = (V(J') \,.\, V(g_1, \ldots, g_d))_0.$$

De manière analogue, étant donnés trois germes $V(J)$, $V(J')$ et $V(J'')$, Cohen-Macaulay et de même dimension d, on dira que

$$V(J) \equiv V(J') + V(J'')$$

si, pour toute suite d'éléments $g_1, \ldots, g_d$ de $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ dont l'image dans $\mathcal{O}_{V(J)}$, $\mathcal{O}_{V(J')}$ et $\mathcal{O}_{V(J'')}$ est une suite régulière, on a :

$$(V(J) \,.\, V(g_1, \ldots, g_d))_0 = (V(J') \,.\, V(g_1, \ldots, g_d))_0 + (V(J'') \,.\, V(g_1, \ldots, g_d))_0.$$

2.4. Théorème (*Équivalence fondamentale*). — *Soit* $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ *une application analytique définissant un germe de* SIC.

Si A *est sa matrice jacobienne par rapport à des coordonnées génériques,* $J_k^{(m)}(A)$ $(1 \leqslant m \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant p,\ k \leqslant m)$ *est alors l'idéal définissant le lieu critique de l'application* $F_k^{(m)}$, *qui est Cohen-Macaulay d'après Hochster-Eagon* (cf. [Sai] ou [Gr]), *et on a l'équivalence :*

$$V(J_k^{(m)}) \equiv V(J_k^{(m-1)}, M(m-k+1, \ldots, m)) - V(J_k^{(m-1)}, M(m-k+1, \ldots, m-1)) + V(J_{k-1}^{(m-1)}).$$

Démonstration. — Nous aurons besoin du lemme suivant :

2.4.1. LEMME. — *Soient I un idéal d'un anneau $\mathcal{O}$, nœthérien, commutatif et unitaire, et a un élément de $\mathcal{O}$ non diviseur de 0. Alors, pour tout idéal U de $\mathcal{O}$, de colongueur finie dans $\mathcal{O}/aI$, on a la relation suivante entre les trois multiplicités :*

$$e_{\mathcal{O}/aI}(U\mathcal{O}/aI)=e_{\mathcal{O}/I}(U\mathcal{O}/I)+e_{\mathcal{O}/a\mathcal{O}}(U\mathcal{O}/a\mathcal{O}).$$

En effet dans la suite exacte

$$0\to a\mathcal{O}/aI\to\mathcal{O}/aI\to\mathcal{O}/a\mathcal{O}\to 0,$$

on peut identifier $\mathcal{O}/I$ et $a\mathcal{O}/aI$ par la multiplication par a car ce dernier n'est pas diviseur de 0 dans $\mathcal{O}$.

Il suffit alors d'appliquer un théorème de SERRE ([Se], prop. 10, p. II-27) pour obtenir le résultat cherché.

Considérons maintenant la situation où $\mathcal{O}$ est l'algèbre analytique de Cohen-Macaulay $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/J_k^{(m-1)}$, de dimension $n-m+k$.

2.4.2. LEMME. — *Pour des coordonnées génériques, l'image de $M(m-k+1, \ldots, m-1)$ n'est pas diviseur de 0 dans $\mathcal{O}$.*

Définissons :

$P_i (1\leqslant i\leqslant h)$ les idéaux premiers associés de (0) dans $\mathcal{O}$;

E le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{O}$ engendré par les images des mineurs $M(I_{k-1}^{(m-1)})$ $(I_{k-1}^{(m-1)}\in K_{k-1}^{(m-1)})$;

$\mathbb{C}^{C_{m-1}^{k-1}}\to E\to 0$ la surjection canonique;

F_i le sous-espace vectoriel $E\cap P_i$ $(1\leqslant i\leqslant h)$.

On ne peut avoir $F_i=E$ pour aucune valeur de i, sinon tous les mineurs $M(I_{k-1}^{(m-1)})$ $(I_{k-1}^{(m-1)}\in K_{k-1}^{(m-1)})$ s'annuleraient sur la composante $V(P_i)$ de $V(J_k^{(m-1)})$, donc $V(J_{k-1}^{(m-1)})$ serait de dimension $\geq n-m+k$, ce qui est absurde puisqu'il est de dimension $n-m+k-1$.

L'union de sous-espaces propres $F=\bigcup_{i=1}^{h} F_i$ est donc un fermé de Zariski de E, et, pour tout

$$\lambda=(\lambda_{I_{k-1}^{(m-1)}})_{I_{k-1}^{(m-1)}\in K_{k-1}^{(m-1)}} \quad \text{dans } \mathbb{C}^{C_{m-1}^{k-1}}-\pi^{-1}(F),$$

la combinaison linéaire

$$\sum\nolimits_{I_{k-1}^{(m-1)}\in K_{k-1}^{(m-1)}}\lambda_{I_{k-1}^{(m-1)}}M(I_{k-1}^{(m-1)})$$

n'est pas diviseur de 0 dans $\mathcal{O}$.

D'autre part, l'application Φ :

$$\Phi : \quad \mathbb{C}^{(k-1)(m-1)} \to \mathbb{C}^{C_{m-1}^{k-1}},$$

qui à une $(m-1)\times(k-1)$ matrice à coefficients complexes associe ses C_{m-1}^{k-1} $(k-1)$-mineurs, a une image qui ne peut être contenue dans aucune union finie de sous-espaces vectoriels propres.

En effet, si c'était le cas, cette image irréductible (car image par une application algébrique d'un ensemble algébrique irréductible) serait contenue dans un seul sous-espace vectoriel propre, donc dans un hyperplan, mais ceci est visiblement impossible. Choisissons donc un point λ dans $\operatorname{Im}\Phi - \pi^{-1}(F)$, et une matrice D dans $\Phi^{-1}(\lambda)$, qu'on peut compléter en une $(m-1)\times(m-1)$ matrice régulière C (car elle est de rang maximal!)

Considérons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} z'_1 \\ \vdots \\ z'_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}, \qquad C = \left(\star \,\vdots\, D\right).$$

Si A' est la matrice jacobienne de f par rapport aux nouvelles variables, on a $A' = AB$.

Soient :

$\tilde{A}$ la $(k-1)\times(m-1)$ sous-matrice de A, obtenue en prenant les $(k-1)$ premières lignes et les $(m-1)$ premières colonnes;

$\tilde{B}$ la $(m-1)\times(k-1)$ sous-matrice de B, obtenue en prenant les colonnes $m-k+1, \ldots, m-1$ de C.

Alors :

$$M_{A'}(m-k+1, \ldots, m-1) = \det(\tilde{A}\tilde{B})$$
$$= \sum_{I_{k-1}^{(m-1)} \in K_{k-1}^{(m-1)}} M_{{}^t\tilde{B}}(I_{k-1}^{(m-1)})\, M_A(I_{k-1}^{(m-1)})$$
$$= \sum_{I_{k-1}^{(m-1)} \in K_{k-1}^{(m-1)}} \lambda_{I_{k-1}^{(m-1)}}\, M_A(I_{k-1}^{(m-1)}).$$

En définitive, $M_{A'}(m-k+1, \ldots, m-1)$ n'est pas diviseur de 0 dans

$$\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/J_k^{(m-1)}(A) \simeq \mathbb{C}\{z'_1, \ldots, z'_n\}/J_k^{(m-1)}(A').$$

Maintenant soit I l'idéal de $\mathcal{O}$ engendré par les images des mineurs $M(I_{k-1}^{(m-1)} \cup \{m\})$, $(I_{k-1}^{(m-1)} \in K_{k-1}^{(m-1)})$.

$\mathcal{O}/I = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/J_k^{(m)}$ est un anneau de Cohen-Macaulay de dimension $n-m+k-1$. la même que celle de $\mathcal{O}/M(m-k+1, \ldots, m-1)\mathcal{O}$, puisque $M(m-k+1, \ldots, m-1)$ est un paramètre pour $\mathcal{O}$ (lemme 2.4.2). Mais, d'après le corollaire du lemme d'échange (2.2),

$$\mathcal{O}/M(m-k+1, \ldots, m-1)I = \mathcal{O}/M(m-k+1, \ldots, m)J_{k-1}^{(m-1)}\mathcal{O}.$$

La première algèbre analytique étant de dimension $n-m+k-1$ d'après ce qui précède, $M(m-k+1, \ldots, m)$ est un paramètre pour l'anneau de Cohen-Macaulay $\mathcal{O}$, donc n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathcal{O}$.

Étant donnée une algèbre analytique $\mathcal{A}$ quotient de $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ et un idéal U de $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$, on notera dans toute la suite, pour simplifier, $e(U\mathcal{A})$ la multiplicité $e_{\mathcal{A}}(U\mathcal{A})$ de l'idéal $U\mathcal{A}$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$.

Soit U un idéal de $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$, engendré par

$$g_1, \ldots, g_r \quad (r=n-m+k-1),$$

dont les images constituent une suite régulière dans les anneaux de Cohen-Macaulay précédents $\mathcal{O}/I$ et $\mathcal{O}/M(m-k+1, \ldots, m-1)\mathcal{O}$. Alors,

$$\begin{aligned}
&(V(g_1, \ldots, g_r).V(J_k^{(m-1)}, M(m-k+1, \ldots, m-1)))_0 \\
&\qquad + (V(g_1, \ldots, g_r).V(J_k^{(m)}))_0 \\
&= e(U\mathcal{O}/M(m-k+1, \ldots, m-1)\mathcal{O}) + e(U\mathcal{O}/I) \\
&\qquad (\mathcal{O}/M(m-k+1, \ldots, m-1)\mathcal{O} \text{ et } \mathcal{O}/I \text{ Cohen-Macaulay}) \\
&= e(U\mathcal{O}/M(m-k+1, \ldots, m-1)I) \quad (\text{lemmes } 2.4.1 \text{ et } 2.4.2) \\
&= e(U\mathcal{O}/M(m-k+1, \ldots, m)\, J_{k-1}^{(m-1)}\mathcal{O}) \quad (\text{lemme d'échange } 2.1) \\
&= e(U\mathcal{O}/M(m-k+1, \ldots, m)\mathcal{O}) + e(U\mathcal{O}/J_{k-1}^{(m-1)}\mathcal{O}) \\
&\qquad (\text{lemmes } 2.4.1 \text{ et } 2.4.2) \\
&= (V(g_1, \ldots, g_r).V(J_k^{(m-1)}, M(m-k+1, \ldots, m)))_0 \\
&\qquad + (V(g_1, \ldots, g_r).V(J_{k-1}^{(m-1)}))_0
\end{aligned}$$

car

$$\mathcal{O}/M(m-k+1, \ldots, m)\mathcal{O}$$

et

$$\mathcal{O}/J_{k-1}^{(m-1)}\mathcal{O} = \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/J_{k-1}^{(m-1)}$$

sont Cohen-Macaulay. Finalement :

$$\begin{aligned}
&V(J_k^{(m)}) + V(J_k^{(m-1)}, M(m-k+1, \ldots, m-1))_0 \\
&\qquad \equiv V(J_{k-1}^{(m-1)}) + V(J_k^{(m-1)}, M(m-k+1, \ldots, m))
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

3. Démonstration des théorèmes

Nous allons d'abord montrer la proposition 1.1.

Désignons par $\Delta(f)$ le discriminant de l'application f, germe d'hypersurface dans $\mathbb{C}^p$. Pour toute droite L de $\mathbb{C}^p$, qui n'est pas contenue dans le discriminant, le germe $(f^{-1}(L), 0)$ est une SIC, et la multiplicité d'intersection $(L.\Delta(f))_0$ est égale à la somme $\mu(X, 0)+\mu(f^{-1}(L), 0)$ (formule due indépendamment à GREUEL [Gr] et LÊ [Lê]). Donc, pour toute droite qui n'est pas contenue dans le cône tangent du discriminant, $\mu(f^{-1}(L), 0)$ est constant et minimum.

D'autre part, si $\mathcal{O}$ désigne l'anneau local $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/(f_1, \ldots, f_p)$ de $(X, 0)$, appelons P_i $(i=1, \ldots, h)$ les idéaux premiers associés de (0) dans $\mathcal{O}$, E le sous-$\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathcal{O}$ engendré par les images des coordonnées, et $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\pi} E \to 0$ la surjection canonique. Les sous-espaces vectoriels $E \cap P_i$ sont propres dès que $n-p \geqslant 1$. Toute forme linéaire dont les coefficients n'appartiennent pas au fermé de Zariski $\pi^{-1}(\bigcup_{i=1}^h E \cap P_i)$ de $\mathbb{C}^n$ n'est pas diviseur de 0 dans $\mathcal{O}$.

De plus, d'après le premier théorème de Bertini, un hyperplan générique découpe sur $(X, 0)$ une SIC; d'après la formule fondamentale de LÊ et GREUEL :

$$\mu(f_1, \ldots, f_p)+\mu(f_1, \ldots, f_p, \Sigma_{i=1}^n a_i z_i) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}/(f_1, \ldots, f_p, J_{p+1}^{(n)}(a)),$$

où $J_{p+1}^{(n)}(a)$ est l'idéal engendré par les $(p+1)$-mineurs de la matrice jacobienne de $f_1, \ldots, f_p, \Sigma_{i=1}^n a_i z_i$.

A une constante additive près, $\mu(f_1, \ldots, f_p, \sum_{i=1}^n a_i z_i)$ varie comme la colongueur d'un idéal de définition dans $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$; la partie de $\mathbb{C}^n$, où ce nombre est minimal, est un ouvert de Zariski.

Sous l'hypothèse de coordonnées génériques, on a alors, en désignant pour simplifier $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_n\}$ par $\mathcal{O}_n$:

$$\begin{aligned}\mu_p^{(n)}+\mu_p^{(n-1)} &= (V(f_1, \ldots, f_p).V(J_p^{(n-1)}))_0 \\ &= e((f_1, \ldots, f_p)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_p, J_p^{(n-1)}) \\ &= e(f_p\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_{p-1}, J_p^{(n-1)})).\end{aligned}$$

De même, sous l'hypothèse de générateurs de $I(X, 0)$ génériques,

$$\mu_p^{(n-1)}+\mu_{p-1}^{(n-1)} = e(z_n\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_{p-1}, J_p^{(n-1)})).$$

Soit Γ la courbe définie par l'idéal $(f_1, \ldots, f_{p-1}, J_p^{(n-1)})$, et $\mathcal{O}_\Gamma$ son anneau local. En soustrayant les deux formules précédentes, on obtient :

$$(\star) \qquad \mu_p^{(n)} - \mu_{p-1}^{(n-1)} = e_{\mathcal{O}_\Gamma}(f_p) - e_{\mathcal{O}_\Gamma}(z_n).$$

3.1. Lemme-clef. — *Sous les hypothèses de généricité habituelles, la multiplicité de la courbe Γ est $e_{\mathcal{O}_\Gamma}(z_n)$, soit $\mu_p^{(n-1)} + \mu_{p-1}^{(n-1)}$.*

Moyennant ce lemme on peut prouver le théorème (1.4.1). En effet, on peut minorer

$$\mu_p^{(n)} + \mu_p^{(n-1)} = e_{\mathcal{O}_\Gamma}(f_p) = (V(f_p).\Gamma)_0$$

par le produit des multiplicités de l'hypersurface $V(f_p)$ et de la courbe Γ, soit :

$$(1 + \mu_1^{(1)})(\mu_p^{(n-1)} + \mu_{p-1}^{(n-1)}).$$

Dans le cas H_d, les germes analytiques considérés sont des cônes, et l'inégalité devient une égalité. Finalement

$$\mu_p^{(n)} \geqslant (1 + \mu_1^{(1)})\, \mu_{p-1}^{(n-1)} + \mu_1^{(1)}\, \mu_p^{(n-1)}.$$

Pour démontrer le théorème (1.4.2), le premier pas va consister à minorer la différence de multiplicités de la formule $(\star)$.

Dans toute la suite, on aura besoin de la notation plus générale

$$J_{j_1, \ldots, j_k}^{(i_1, \ldots, i_m)}(A) \qquad ((i_1, \ldots, i_m) \in K_m^{(n)}, (j_1, \ldots, j_k) \in K_k^{(p)}, k \leqslant m),$$

pour l'idéal engendré par les k-mineurs d'une matrice A formés avec les lignes $j_1, \ldots, j_k$ et k des colonnes $i_1, \ldots, i_m$.

De même $M_{j_1, \ldots, j_k}^{(i_1, \ldots, i_k)}(A)$ désignera le k-mineur de A formé avec les lignes $j_1, \ldots, j_k$ et les colonnes $i_1, \ldots, i_k$. La matrice A sera omise quand ce sera la matrice jacobienne de $f_1, \ldots, f_p$ par rapport aux coordonnées $z_1, \ldots, z_n$.

3.2. Proposition :

$$e_{\mathcal{O}_\Gamma}(f_p) - e_{\mathcal{O}_\Gamma}(z_n) \geqslant e_{\mathcal{O}_\Gamma}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right).$$

Démonstration. — 1° Considérons la famille $F = f_1 + \lambda f_p = 0$. Si f_1 et f_p sont générales, elle définit une famille à un paramètre λ de SIC. Pour presque tout λ_0, la condition de (c)-cosécance est vérifiée au voisinage de $\lambda = \lambda_0$ (*cf.* [Te$_2$], prop. 2, p. 597). Quitte à changer f_1 en $f_1 + \lambda_0 f_p$, on peut donc supposer que cette famille est (c)-cosécante au voisinage de $\lambda = 0$, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} \in \overline{\left(z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}, \ldots, z_n \frac{\partial F}{\partial z_n}\right)} \mathcal{O}_n.$$

Dans le cas qui nous intéresse, et pour $\lambda=0$: f_p est entier sur l'idéal engendré par $(z_1(\partial f_1/\partial z_1), \ldots, z_n(\partial f_1/\partial z_n))$ dans $\mathcal{O}_n$.

2° Soient Γ_i les composantes irréductibles de la courbe Γ, et v_i les valuations discrètes associées. On peut supposer qu'on a fait les changements de coordonnées du type

$$z'_{n-1}=z_{n-1}+\sum_{i\neq n-1} a_i z_i,$$

qui ne changent pas $J_p^{(n-1)}$ et donc Γ, de façon que, sur chaque composante Γ_i, z_{n-1} ait la valuation minimale parmi les z_j :

$$v_i(z_{n-1})=\inf_{1\leqslant j\leqslant n} v_i(z_j).$$

D'après le lemme-clef, $e_{\mathcal{O}_\Gamma}(z_{n-1})=e_{\mathcal{O}_\Gamma}(z_n)$, et comme sur chaque composante Γ_i on avait $v_i(z_{n-1})\leqslant v_i(z_n)$, on doit avoir l'égalité

$$e_{\mathcal{O}_\Gamma}(z_{n-1})=\Sigma_i v_i(z_{n-1})=\Sigma_i v_i(z_n)=e_{\mathcal{O}_\Gamma}(z_n),$$

d'où, sur chaque composante de Γ, $v_i(z_{n-1})=v_i(z_n)$.

3° D'autre part, les changements de variables qui ne modifient pas $J_p^{(n-1)}$ et donc laissent Γ invariante, permettent d'assurer que $\partial/\partial z_n$ est une dérivation suffisamment générale parmi les $\partial/\partial z_j$ pour que, pour tout i et tout j, $1\leqslant j\leqslant n$:

$$v_i\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\leqslant v_i\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_j}\right).$$

Ce sont ceux du type

$$\begin{gathered} z'_1=z_1+a_1 z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z'_{n-1}=z_{n-1}+a_{n-1} z_n. \end{gathered}$$

4° Finalement, on a sur chaque Γ_i d'après le 1° :

$$v_i(f_p)\geqslant\inf_{1\leqslant j\leqslant n} v_i\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_j}\right)+\inf_{1\leqslant k\leqslant n} v_i(z_k)$$

et ceci implique grâce aux 2° et 3° :

$$v_i(f_p)\geqslant v_i\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)+v_i(z_n).$$

En sommant sur toutes les composantes irréductibles on obtient l'inégalité voulue.

Démonstration du lemme-clef. — 1° L'inégalité dans le sens

$$e_{\mathcal{C}_\Gamma}(z_n) \geq e_{\mathcal{C}_\Gamma}(z_{n-1})$$

s'obtient en sommant les inégalités du paragraphe 2 précédent.

2° Montrons l'inégalité dans l'autre sens.

On va d'abord montrer l'égalité

$$(1) \quad e((f_1, \ldots, f_{p-1}, z_n)\mathcal{O}_n / J_p^{(n-1)}) = e((f_1, \ldots, f_{p-1}, z_{n-1})\mathcal{O}_n / J_p^{(1, \ldots, n-2, n)}),$$

On considère pour cela la famille d'idéaux de $\mathcal{O}_n$, à quatre paramètres a, b, c, d, engendrés par

$$f_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, f_{p-1}(z_1, \ldots, z_n), cz_{n-1} + dz_n, J_p^{(n-1)}(A')$$

(qui en fait ne dépend que des deux paramètres c et d), où A' est la matrice jacobienne de $f_1, \ldots, f_p$ par rapport aux coordonnées

$$\left.\begin{array}{r} z'_1 = z_1 \\ \ldots\ldots. \\ z'_{n-2} = z_{n-2} \\ z'_{n-1} = az_{n-1} + bz_n \\ z'_n = cz_{n-1} + dz_n \end{array}\right\} \quad \text{avec} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

On utilise la semi-continuité de la colongeur de cette famille d'idéaux dans $\mathcal{O}_n$. Si z_{n-1} et z_n ont été pris assez généraux, pour $b = c = 0$ et pour $a = d = 0$, les colongueurs obtenues sont la colongeur générique de la famille d'idéaux, or dans le premier cas c'est

$$\dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_{p-1}, z_n, J_p^{(n-1)})) = e((f_1, \ldots, f_{p-1}, z_n)\mathcal{O}_n / J_p^{(n-1)})$$

et dans le deuxième

$$\dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_n/(f_1, \ldots, f_{p-1}, z_{n-1}, J^{(1, \ldots, n-2, n)})) = e((f_1, \ldots, f_{p-1}, z_{n-1})\mathcal{O}_n / J_p^{(1, \ldots, n-2, n)})$$

ce qui montre l'égalité (1).

Pour démontrer le lemme, il nous reste donc à prouver l'inégalité

$$(2) \quad e((f_1, \ldots, f_{p-1}, z_n)\mathcal{O}_n / J_p^{(n-1)}) \leq e((f_1, \ldots, f_{p-1}, z_n)\mathcal{O}_n / J_p^{(1, \ldots, n-2, n)}).$$

On utilise d'abord l'équivalence fondamentale (2.4) :

$$V(J_p^{(n-1)}) \equiv V(J_{p-1}^{(n-2)}) + V(M(n-p, \ldots, n-1), J_p^{(n-2)}) - V(M(n-p, \ldots, n-2), J_p^{(n-2)}),$$

$$V(J_p^{(1, \ldots, n-2, n)}) \equiv V(J_{p-1}^{(n-2)}) + V(M(n-p, \ldots, n-2, n), J_p^{(n-2)}) - V(M(n-p, \ldots, n-2), J_p^{(n-2)}).$$

L'inégalité (2) se ramène donc à l'inégalité (3) :

$$(3) \quad e((f_1, \ldots, f_{p-1}, z_n, M(n-p, \ldots, n-2, n-1))\mathcal{O}_n/J_p^{(n-2)}) \leqslant e((f_1, \ldots, f_{p-1}, z_n, M(n-p, \ldots, n-2, n))\mathcal{O}_n/J_p^{(n-2)}).$$

On considère l'idéal défini par

$$M = \frac{\partial(f_1(z_1, \ldots, z_{n-1}, az_{n-1}), \ldots, f_p(z_1, \ldots, z_{n-1}, az_{n-1}))}{\partial(z_{n-p}, \ldots, z_{n-1})},$$

dans l'anneau R quotient de $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}, a\}$ par l'idéal engendré par

$$f_1(z_1, \ldots, z_{n-1}, az_{n-1}), \ldots, f_{p-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}, az_{n-1}),$$

et les

$$\frac{\partial(f_1(z_1, \ldots, z_{n-1}, az_{n-1}), \ldots, f_p(z_1, \ldots, z_{n-1}, az_{n-1}))}{\partial(z_{i_1}, \ldots, z_{i_p})}$$
$$((i_1, \ldots, i_p) \in K_p^{(n-2)}).$$

Il suffit de montrer que

$$\frac{\partial(f_1(z_1, \ldots, z_{n-1}, az_{n-1}), \ldots, f_p(z_1, \ldots, z_{n-1}, az_{n-1}))}{\partial(z_{n-p}, \ldots, z_{n-2}, a)}$$

est entier sur $z_{n-1} M$ dans cet anneau R pour montrer l'inégalité voulue.

En effet, si cette propriété est vérifiée, on a

$$z_{n-1} \frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(z_{n-p}, \ldots, z_{n-2}, z_n)}(z_1, \ldots, z_{n-1}, az_{n-1})$$

entier sur

$$z_{n-1}\left[\frac{\partial(f_1,\ldots,f_p)}{\partial(z_{n-p},\ldots,z_{n-2},z_{n-1})}(z_1,\ldots,z_{n-1},az_{n-1})\right.$$
$$\left.+a\frac{\partial(f_1,\ldots,f_p)}{\partial(z_{n-p},\ldots,z_{n-2},z_n)}(z_1,\ldots,z_{n-1},az_{n-1})\right]$$

dans R.

Cette dépendance intégrale passe au quotient R/aR. Comme z_{n-1} peut être pris régulier dans R/aR, anneau isomorphe à $\mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n\}/(f_1,\ldots,f_{p-1},z_n,J_p^{(n-2)})$ Cohen-Macaulay de dimension 1, on en déduit que, dans cet anneau,

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_p)}{\partial(z_{n-p},\ldots,z_{n-2},z_n)}(z_1,\ldots,z_{n-1},0)$$
$$\in\overline{\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_p)}{\partial(z_{n-p},\ldots,z_{n-1})}(z_1,\ldots,z_{n-1},0)\right)}.$$

La multiplicité de l'idéal engendré par le terme de gauche est donc supérieure à celle de l'idéal engendré par le terme de droite. Il est facile de voir que cela équivaut à l'inégalité (3).

La dépendance intégrale voulue va résulter d'un lemme un peu plus général.

3.3. Lemme. — *Soit* $F_1(z_1,\ldots,z_{n-1},a),\ldots,F_p(z_1,\ldots,z_{n-1},a)$, *$p$ éléments de* $\mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_{n-1},a\}$ *définissant une famille à un paramètre a de* SIC. *Pour a dans un ouvert dense, on a dans l'anneau de la courbe définie par l'idéal* $(F_1,\ldots,F_{p-1},J_p^{(n-2)})$:

$$M'=\frac{\partial(F_1,\ldots,F_p)}{\partial(z_{n-p},\ldots,z_{n-2},a)}$$

entier sur $z_{n-1}\,.\,M(n-p,\ldots,n-2,n-1)$.

Démonstration. — Nous allons utiliser pour montrer les dépendances intégrales le critère du disque d'épreuve (*cf.* Lejeune-Teissier, [L.T], théorème 2.1). Pour a fixé, $a=a_0$, et un disque d'épreuve $z_1(\theta),\ldots,z_{n-1}(\theta)$ dans $\mathbb{C}^{n-1}$,

$$\frac{dF_1}{d\theta}=\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\frac{dz_1}{d\theta}+\ldots+\frac{\partial F_1}{\partial z_{n-1}}\frac{dz_{n-1}}{d\theta},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dF_p}{d\theta}=\frac{\partial F_p}{\partial z_1}\frac{dz_1}{d\theta}+\ldots+\frac{\partial F_p}{\partial z_{n-1}}\frac{dz_{n-1}}{d\theta},$$

d'où

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-2}} & \dfrac{dF_1}{d\theta} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-2}} & \dfrac{dF_p}{d\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-2}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-2}} & \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-1}} \end{vmatrix} \dfrac{dz_{n-1}}{d\theta} + r,$$

où r est dans l'idéal $J_p^{(n-2)}$:

$$P = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-2}} & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_{p-1}}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_{p-1}}{\partial z_{n-2}} & 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-2}} & F_p \end{vmatrix}$$

est donc entier sur la fibre de l'idéal $(z_{n-1} . M, F_1, \ldots, F_{p-1}, J_p^{(n-2)})$ au-dessus de $a=a_0$.

Si nous supposons maintenant que le point $a=0$ a été choisi dans l'ouvert d'équimultiplicité de l'idéal $(F_1, \ldots, F_{p-1}, J_p^{(n-2)}, z_{n-1} M)$, on peut appliquer le principe de « spécialisation de la dépendance intégrale » sous la forme du corollaire 3.3 du paragraphe 3 de [Te$_1$] (p. 331). P, étant entier sur la fibre de $(z_{n-1} . M, F_1, \ldots, F_{p-1}, J_p^{(n-2)})$ au-dessus de tous les points a d'un voisinage de 0, est entier sur $(z_{n-1} . M, F_1, \ldots, F_{p-1}, J_p^{(n-2)})$ au point spécial c'est-à-dire dans $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}, a\}$.

Considérons maintenant un disque d'épreuve dans $\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ donné par $z_1(\theta), \ldots, z_{n-1}(\theta), a(\theta)$, séries convergentes en θ nulles à l'origine.

On a les égalités

$$\begin{aligned} \frac{dF_1}{d\theta} &= \frac{\partial F_1}{\partial z_1}\frac{dz_1}{d\theta} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial z_{n-1}}\frac{dz_{n-1}}{d\theta} + \frac{\partial F_1}{\partial a}\frac{da}{d\theta}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ \frac{dF_p}{d\theta} &= \frac{\partial F_p}{\partial z_1}\frac{dz_1}{d\theta} + \ldots + \frac{\partial F_p}{\partial z_{n-1}}\frac{dz_{n-1}}{d\theta} + \frac{\partial F_p}{\partial a}\frac{da}{d\theta}. \end{aligned}$$

On effectue à nouveau le calcul de

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-2}} & \dfrac{dF_1}{d\theta} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-2}} & \dfrac{dF_p}{d\theta} \end{vmatrix}$$

et on trouve, modulo $J_p^{(n-2)}$, la somme des deux termes

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-1}} \end{vmatrix} \dfrac{dz_{n-1}}{d\theta} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_1}{\partial z_{n-2}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial a} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-p}} \cdots \dfrac{\partial F_p}{\partial z_{n-2}} & \dfrac{\partial F_p}{\partial a} \end{vmatrix} \dfrac{da}{d\theta},$$

c'est-à-dire

$$M\frac{dz_{n-1}}{d\theta} + M'\frac{da}{d\theta}.$$

aM' est donc entier sur l'idéal engendré par P, $z_{n-1}M$, $J_p^{(n-2)}$ et $F_1, \ldots, F_{p-1}$ dans $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}, a\}$. Comme nous avons démontré que P était entier sur $(F_1, \ldots, F_{p-1}, z_{n-1}M, J_p^{(n-2)})\,\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}, a\}$, on a

$$aM' \in \overline{(z_{n-1} \,.\, M, F_1, \ldots, F_{p-1}, J_p^{(n-2)})\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}, a\}}.$$

Dans les fibres, pour $a = a_0$, on doit avoir aussi

$$a_0 M' \in \overline{(z_{n-1}M, F_1, \ldots, F_{p-1}, J_p^{(n-2)})_{a=a_0}\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}},$$

ce qui entraîne évidemment la même propriété pour M'.

Nous pouvons à nouveau appliquer le principe de « spécialisation de la dépendance intégrale ». M' est entier sur la fibre de $(z_{n-1}.M, F_1, \ldots, F_{p-1}, J_p^{(n-2)})$ au-dessus de tous les points $a \neq 0$ d'un voisinage de 0, cet idéal étant supposé équimultiple; M' est entier sur l'idéal dans $\mathbb{C}\{z_1, \ldots, z_{n-1}, a\}$. Pour terminer la démonstration du lemme 3.3, il suffit de faire passer cette dépendance intégrale dans le quotient par l'idéal $(F_1, \ldots, F_{p-1}, J_p^{(n-2)})$.

3.4. PROPOSITION.

$$e_{\mathcal{O}_\Gamma}\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\geqslant e\left(\left(z_{n-p+1}\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, z_{n-1}\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right).$$

Démonstration. — Comme dans la proposition 3.2, on peut supposer que la famille $f_1+\lambda f_{p-1}=0$ est une famille de singularités isolées d'hypersurfaces vérifiant au voisinage de $\lambda=0$ la condition de (c)-cosécance

$$f_{p-1}=\frac{\partial}{\partial\lambda}(f_1+\lambda f_{p-1}) \in \overline{\left(z_1\frac{\partial(f_1+\lambda f_{p-1})}{\partial z_1}, \ldots, z_n\frac{\partial(f_1+\lambda f_{p-1})}{\partial z_n}\right)}\mathcal{O}_n,$$

d'où, pour $\lambda=0$,

$$f_{p-1}\in\overline{\left(z_1\frac{\partial f_1}{\partial z_1}, \ldots, z_n\frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)}\mathcal{O}_n.$$

On a donc sur toute composante irréductible C_i de la courbe C, définie par l'idéal engendré par $(f_1, \ldots, f_{p-2}, \partial f_1/\partial z_n, J_p^{(n-1)})$,

$$v_i(f_{p-1})\geqslant \inf_{1\leqslant j\leqslant n-1} v_i\left(z_j\frac{\partial f_1}{\partial z_j}\right),$$

et si z_{n-1} est générique dans les coordonnées $z_1, \ldots, z_{n-1}$, on a pour tout i

$$v_i(f_{p-1})\geqslant v_i\left(z_{n-1}\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}\right),$$

d'où

$$e\left(\left(f_1, \ldots, f_{p-1}, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right)$$
$$\geqslant e\left(\left(f_1, \ldots, f_{p-2}, z_{n-1}\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right).$$

En raisonnant par récurrence, et en utilisant de la même façon la (c)-cosécance des $f_1+\lambda_i f_i$ au voisinage de $\lambda_i=0$, il est facile de montrer l'inégalité annoncée.

3.5. PROPOSITION :

$$e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right)\geqslant \mu_1^{(n)}+(C_{n-1}^{p-1}-1)\bar{\mu}^{(n)}.$$

La proposition 3.5 va résulter des lemmes qui suivent.

3.6. LEMME.

$$e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-k}^{(n-1-k)}\right)$$
$$\geqslant e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-1-k}^{(n-2-k)}\right)$$
$$+e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}, \frac{\partial f_{p-k}}{\partial z_{n-1-k}}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-k}^{(n-2-k)}\right)$$
$$(0\leqslant k<p-1).$$

Démonstration. — Utilisons l'équivalence fondamentale. On peut écrire :

$$V(J_{p-k}^{(n-1-k)})\equiv V(J_{p-k}^{(n-2-k)}, M_{1,\ldots,p-k}^{(1,\ldots,p-k-1,n-k-1)})$$
$$-V(J_{p-k}^{(n-2-k)}, M_{1,\ldots,\hat{i},\ldots,p-k}^{(1,\ldots,p-k-1)})+V(J_{1,\ldots,\hat{i},\ldots,p-k}^{(n-2-k)}),$$

pour tout indice i, $1\leqslant i\leqslant p-k$.

D'autre part, on a, en développant suivant la dernière colonne,

$$M_{1,\ldots,p-k}^{(1,\ldots,p-k-1,n-k-1)}=\sum_{i=1}^{p-k} M_{1,\ldots,\hat{i},\ldots,p-k}^{(1,\ldots,p-k-1)}(-1)^{p-k-i}\frac{\partial f_i}{\partial z_{n-k-1}}.$$

Considérons la courbe C de $\mathbb{C}^n$, définie par l'idéal

$$\left(J_{p-k}^{(n-2-k)}, \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n;$$

soient C_j ses composantes irréductibles, et v_j les valuations discrètes associées. Sur chaque C_j, on a

$$M_{1,\ldots,p-k}^{(1,\ldots,p-k-1,n-k-1)}=\sum_{i=2}^{p-k} M_{1,\ldots,\hat{i},\ldots,p-k}^{(1,\ldots,p-k-1)}(-1)^{p-k-i}\frac{\partial f_i}{\partial z_{n-k-1}}$$

et

$$v_j(M_{1,\ldots,p-k}^{(1,\ldots,p-k-1,n-k-1)})\geqslant \inf_{2\leqslant i\leqslant p-k} v_j\left(M_{1,\ldots,\hat{i},\ldots,p-k}^{(1,\ldots,p-k-1)}\frac{\partial f_i}{\partial z_{n-k-1}}\right).$$

Des changements, par combinaisons linéaires sur les fonctions $f_2, \ldots, f_{p-1-k}$, ne changent pas la courbe C et peuvent être opérés de façon que le minimum soit toujours donné par $v_j(M_{1,\ldots,p-k-1}^{(1,\ldots,p-k-1)}\partial f_{p-k}/\partial z_{n-1})$. On utilise alors l'équivalence fondamentale

$$V(J_{p-k}^{(n-k-1)}) \equiv V(J_{p-k}^{(n-k-2)}, M_{1,\ldots,p-k}^{(1,\ldots,p-k-1,n-k-1)}) - V(J_{p-k}^{(n-k-2)}, M_{1,\ldots,p-k-1}^{(1,\ldots,p-k-1)}) + V(J_{p-k-1}^{(n-k-2)})$$

d'où

$$\begin{aligned} &e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-k}^{n-k-1}\right) \\ &\quad = e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}, M_{1,\ldots,p-k}^{(1,\ldots,p-k-1,n-k-1)}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-k}^{(n-k-2)}\right) \\ &\quad\quad - e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}, M_{1,\ldots,p-k-1}^{(1,\ldots,p-k-1)}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-k}^{(n-k-2)}\right) \\ &\quad\quad + e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-k-1}^{(n-k-2)}\right) \\ &\quad \geqq e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}, \frac{\partial f_{p-k}}{\partial z_{n-k-1}}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-k}^{(n-k-2)}\right) \\ &\quad\quad + e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-k-1}^{(n-k-2)}\right). \end{aligned}$$

3.7. LEMME. — *Pour $k \leqslant n-p-2$, soient $g_1, \ldots, g_{p+k}$ des combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$ et $i_1, \ldots, i_{p+k}$ des indices dans $\{1, \ldots, n\}$, tels que*

$$e\left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{p+k}}{\partial z_{i_{p+k}}}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-l}^{(n-1-k-l)}\right)$$

soit finie ($0 \leqslant l \leqslant p-2$); alors on peut trouver une g_{p+k+1} telle qu'on ait l'inégalité

$$\begin{aligned} &e\left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{p+k}}{\partial z_{i_{p+k}}}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-l}^{(n-1-k-l)}\right. \\ &\quad \geqslant e\left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{p+k}}{\partial z_{i_{p+k}}}, \frac{\partial g_{p+k+1}}{\partial z_{n-1-k-l}}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-l}^{(n-k-l-2)}\right) \\ &\quad\quad + e\left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{p+k}}{\partial z_{i_{p+k}}}\right)\mathcal{O}_n/J_{p-l-1}^{(n-k-l-2)}(\tilde{A})\right), \end{aligned}$$

où $\tilde{A}$ est la matrice jacobienne de $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{p-l-1}, f_{p-l}, \ldots, f_p$ avec $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{p-l-1}$, combinaisons linéaires des $f_1, \ldots, f_{p-l}$ qui ont servi à définir $J_{p-l}^{(n-1-k-l)}$.

Démonstration. — On considère les composantes irréductibles C_j de la courbe C définie par l'idéal

$$\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{p+k}}{\partial z_{i_{p+k}}}, J_{p-l}^{(n-k-l-2)}\right)\mathcal{O}_n$$

et les valuations v_j associées. Quitte à remplacer $f_1, \ldots, f_{p-l-1}$ par

$$\tilde{f}_1 = f_1 + \lambda_1 f_{p-l}, \ldots, \tilde{f}_{p-l-1} = f_{p-l-1} + \lambda_{p-l-1} f_{p-l}$$

et en remarquant que $J_{p-l}^{(n-k-l-2)}(\tilde{A}) = J_{p-l}^{(n-k-l-2)}$, et que C ne change pas, on peut s'assurer que, pour tout j,

$$v_j(M_{1,\ldots,p-l-1}^{(1,\ldots,p-l-1)}(\tilde{A})) \leqslant v_j(M_{1,\ldots,\hat{i},\ldots,p-l}^{(1,\ldots,p-l-1)}(\tilde{A}))$$
$$(1 \leqslant i \leqslant p-l-1)$$

De même, pour presque toute combinaison linéaire g_{p+k} de $f_1, \ldots, f_{p-l}$, on a, pour tout j,

$$v_j\left(\frac{\partial g_{p+k}}{\partial z_{n-1-k-l}}\right) \leqslant v_j\left(\frac{\partial f_i}{\partial z_{n-1-k-l}}\right), \qquad 1 \leqslant i \leqslant p-l.$$

On a donc, sur chaque C_j,

$$v_j(M_{1,\ldots,p-l}^{(1,\ldots,p-l-1,n-k-l-1)}) \geqslant v_j(M_{1,\ldots,p-l-1}^{(1,\ldots,p-l-1)}(\tilde{A})) + v_j\left(\frac{\partial g_{p+k}}{\partial z_{n-k-l-1}}\right).$$

En sommant les v_j, on obtient la même inégalité en remplaçant v_j par la multiplicité dans $\mathcal{O}_C$. L'équivalence fondamentale

$$V(J_{p-l}^{(n-k-l-1)}) \equiv V(J_{p-l}^{(n-k-l-2)}, M_{1,\ldots,p-l}^{(1,\ldots,p-l-1,n-k-l-1)})$$
$$- V(J_{p-l}^{(n-k-l-2)}, M_{1,\ldots,p-l-1}^{(1,\ldots,p-l-1)}(\tilde{A})) + V(J_{p-l-1}^{(n-k-l-2)}(\tilde{A})),$$

permet alors d'écrire l'inégalité annoncée.

3.8. Lemme. — *Soient $g_1, \ldots, g_{n-1}$ des combinaisons linéaires de $f_1, \ldots, f_p$, et $i_1, \ldots, i_{n-1}$ des indices dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que l'idéal $(\partial g_1/\partial z_{i_1}, \ldots, \partial g_{n-1}/\partial z_{i_{n-1}}, J_{p-l}^{(p-l)})\mathcal{O}_n$ soit primaire pour l'idéal maximal $(0 \leqslant l \leqslant p-1)$. On a alors l'inégalité*

$$e\left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{n-1}}{\partial z_{i_{n-1}}}\right)\mathcal{O}_n / J_{p-l}^{(p-l)}\right) \geqslant (p-l)\,\bar{\mu}^{(n)}.$$

Démonstration. — En fait, $J_{p-l}^{(p-l)} = M_{1,\ldots,p-l}^{(1,\ldots,p-l)}$. On a donc à minorer la multiplicité d'intersection de $M_{1,\ldots,p-l}^{(1,\ldots,p-l)}$ avec la courbe C : $\partial g_1/\partial z_{i_1} = \ldots = \partial g_{n-1}/\partial z_{i_{n-1}} = 0$. Pour presque toute g_n combinaison linéaire de $f_1, \ldots, f_{p-l}$, on a, sur chaque composante irréductible C_j de C, pour la valuation discrète associée v_j :

$$v_j\left(\frac{\partial g_n}{\partial z_i}\right) \leqslant v_j\left(\frac{\partial f_k}{\partial z_i}\right) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant p-l$$

pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Il est clair qu'on a alors :

$$e\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{n-1}}{\partial z_{i_{n-1}}}, M_{1,\ldots,p-l}^{(1,\ldots,p-l)}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{p-l} e\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{n-1}}{\partial z_{i_{n-1}}}, \frac{\partial g_n}{\partial z_i}\right),$$

c'est-à-dire une somme de $p-l$ termes supérieurs ou égaux à $\bar{\mu}^{(n)}$.

Nous pouvons maintenant achever la preuve de la proposition 3.5.

En utilisant les lemmes 3.6, 3.7, 3.8, on peut minorer

$$e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right)$$

par une somme de $\bar{\mu}^{(n)}$ et d'un $\mu^{(n)}$.

Calculons le nombre total de ces termes. Procédons par récurrence en notant $E(q, l)$ le nombre de ces termes apparaissant dans la minoration de

$$e\left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_r}{\partial z_{i_r}}\right)\mathcal{O}_n/J_l^{(q)}\right),$$

où $r = (n-1)-(q-l)$ et $n-1 \geqslant q \geqslant l$ et $p \geqslant l$.

3.9. Lemme. — $E(q, l) = E(q-1, l) + E(q-1, l-1)$.

Preuve. — Le lemme 3.7 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} e\left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_r}{\partial z_{i_r}}\right)\mathcal{O}_n/J_l^{(q)}\right) & \\ \geqslant e\left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_r}{\partial z_{i_r}}, \frac{\partial g_{r+1}}{\partial z_{i_{r+1}}}\right)\mathcal{O}_n/J_l^{(q-1)}\right) & \\ + e\left(\left(\frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_r}{\partial z_{i_r}}\right)\mathcal{O}_n/J_{l-1}^{(q-1)}\right), & \end{aligned}$$

ce qui entraine bien la relation annoncée.

D'autre part,

$$E(q, q)=q \quad \text{d'après le lemme 3.8}$$

et

$$E(q, 1)=1 \quad \text{évidemment,}$$

d'où le lemme suivant.

3.10. LEMME. — $E(q, l)=C_q^{l-1}$.

Preuve. — Ces deux suites doubles vérifient la même relation de définition par récurrence et les termes initiaux sont les mêmes

$$E(q, q)=q=C_q^{q-1},$$
$$E(q, 1)=1=C_q^0.$$

On en déduit qu'il y a C_{n-1}^{p-1} termes dont un est un $\mu_1^{(n)}$ pur, et les $C_{n-1}^{p-1}-1$ autres des $\bar{\mu}^{(n)}$, ce qui achève la démonstration de la proposition 3.5.

Nous allons maintenant minorer les autres termes contenus dans la minoration de $\mu_p^{(n)}-\mu_{p-1}^{(n-1)}$ de la proposition 3.4.

De l'inégalité 3.4, on déduit :

$$\mu_p^{(n)}-\mu_{p-1}^{(n-1)} \geqslant e\left(\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right)$$
$$+(C_{n-p-1}^1)e\left(\left(z_1, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+2}}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right)+\ldots$$
$$+(C_{n-p-1}^k)e\left(\left(z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1+k}}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right)+\ldots$$
$$+e\left(\left(z_1, \ldots, z_{p-1}, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right).$$

3.11. PROPOSITION :

$$e\left(\left(z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1+k}}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right) \geqslant C_{n-1}^{p-1}\bar{\mu}^{(n-k)}.$$

Démonstration. — Nous allons montrer qu'on peut minorer ce terme par une somme de termes supérieurs à $\bar{\mu}^{(n-k)}$ dont nous calculerons ensuite le nombre.

3.12. LEMME. — *Soient* $g_1, \ldots, g_r$, *r combinaisons linéaires de* $f_1, \ldots, f_p$; q, l, r *entiers avec* $n-1=r+k+q-l$, $n-1\geqslant q>l>1$, $p\geqslant l$, *et* $i_1, \ldots, i_r$ *des indices; on suppose que*

$$e\left(\left(z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_r}{\partial z_{i_r}}\right)\mathcal{O}_n/J_l^{(q)}\right)$$

est définie, alors il existe une g_{r+1} *combinaison linéaire de* $f_1, \ldots, f_p$ *et un indice* i_{r+1} *tels qu'on ait l'inégalité*

$$\begin{aligned} e\left(\left(z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_r}{\partial z_{i_r}}\right)\mathcal{O}_n/J_l^{(q)}\right) &\\ \geqslant e\left(\left(z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{r+1}}{\partial z_{i_{r+1}}}\right)\mathcal{O}_n/J_l^{(q-1)}\right) &\\ + e\left(\left(z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_r}{\partial z_{i_r}}\right)\mathcal{O}_n/J_{l-1}^{(q-1)}(\tilde{A})\right), \end{aligned}$$

où $\tilde{A}$ *est la matrice jacobienne de* $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{l-1}, f_l, \ldots, f_p$, *avec*

$$\tilde{f}_1=f_1+\lambda_1 f_l, \ldots, \tilde{f}_{l-1}=f_{l-1}+\lambda_{l-1} f_l$$

et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}$ *pris dans un ouvert dense convenable de* $\mathbb{C}^{l-1}$.

Preuve. — Elle s'effectue comme au lemme 3.7 en utilisant l'équivalence fondamentale

$$\begin{aligned} V(J_l^{(q)})\equiv V(J_l^{(q-1)}, M_{1,\ldots,l}^{(1,\ldots,l-1,q)}) &\\ - V(J_l^{(q-1)}, M_{1,\ldots,l-1}^{(1,\ldots,l-1)}(\tilde{A}))+V(J_{l-1}^{(q-1)}(\tilde{A})) \end{aligned}$$

Sur chaque composante de la courbe C, définie par l'idéal

$$\left(J_l^{(q-1)}, z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_r}{\partial z_{i_r}}\right)\mathcal{O}_n,$$

pour presque tout choix de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{l-1}$ c'est $M_{1,\ldots,l-1}^{(1,\ldots,l-1)}(\tilde{A})$ qui a la valuation minimum parmi les cofacteurs des $\partial f_i/\partial z_l$ dans $M_{(1,\ldots,l)}^{(1,\ldots,l-1,q)}(\tilde{A})$. Si g_{r+1} est une combinaison linéaire assez générale de $f_1, \ldots, f_l$: $\partial g_{r+1}/\partial z_l$ a une valuation inférieure à celles des $\partial f_i/\partial z_l (1\leqslant i\leqslant l)$, d'où

$$e((M_{1,\ldots,l}^{(1,\ldots,l-1,q)})\mathcal{O}_C)-e((M_{1,\ldots,l-1}^{(1,\ldots,l-1)})\mathcal{O}_C)\geqslant e\left(\left(\frac{\partial g_{r+1}}{\partial z_l}\right)\mathcal{O}_C\right),$$

et la démonstration du lemme en résulte.

En utilisant ce lemme de façon réitérée, on obtient finalement deux sortes de termes

$$(a)\qquad e\left(\left(z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{n-k}}{\partial z_{i_{n-k}}}\right)\mathcal{O}_n\right) \geqslant \bar{\mu}^{(n-k)},$$

$$(b)\qquad e\left(\left(z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial g_1}{\partial z_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial g_{n-k-1}}{\partial z_{i_{n-k-1}}}\right)\mathcal{O}_n/J_q^{(q)}\right) \geqslant q\,\bar{\mu}^{(n-k)},$$

par une démonstration analogue à celle du lemme 3.8.

Pour compter le nombre de $\bar{\mu}^{(n-k)}$ qu'on obtient dans la minoration de

$$e\left(\left(z_1, \ldots, z_k, \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-p+1+k}}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_p^{(n-1)}\right),$$

on procède comme au lemme 3.10, et on trouve C_{n-1}^{p-1}.

Le théorème (1.4.2) résulte enfin de la combinaison des lemmes et propositions précédents. On vérifie aisément que dans le cas H_d toutes les inégalités écrites deviennent des égalités.

Démonstration des théorèmes 1.5.

1.5.1. *Cas des points épais.* — $\mu_n^{(n)}$ n'est pas autre chose que la multiplicité de l'idéal $(f_1, \ldots, f_n)$ dans $\mathcal{O}_n$ diminuée de 1.

En utilisant le caractère générique de la (c)-cosécance, on peut minorer $e(f_1, \ldots, f_n)$ par $e(z_1(\partial f_1/\partial z_1), \ldots, z_n(\partial f_1/\partial z_n))$ qui est égal à $\sum_{i=0}^n C_n^i \mu_1^{(n-i)}$.

Dans le cas H_d, il est clair que c'est une égalité.

1.5.2. *Cas des courbes.* — 1° On peut obtenir une première amélioration (de 1.4.2) en faisant apparaître plus de μ_1^* purs.

D'après la proposition 3.2,

$$\mu_{n-1}^{(n)} - \mu_{n-2}^{(n-1)} \geqslant e\left(\left(f_1, \ldots, f_{n-2}, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n/J_{n-1}^{(n-1)}\right).$$

Or $J_{n-1}^{(n-1)}$ se réduit à un $(n-1)$-mineur.

Soient C_i les composantes irréductibles de la courbe C, définie par l'idéal $(f_1, \ldots, f_{n-2}, \partial f_1/\partial z_n)$, et v_i les valuations associées. On peut faire des changements de coordonnées de façon que la dérivation $\partial/\partial z_{n-1}$ soit suffisamment générique dans les dérivations $\partial/\partial z_1, \ldots, \partial/\partial z_{n-1}$ pour que, pour chaque indice j et sur chaque composante C_i, on ait

$$v_i\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_{n-1}}\right) = \inf_{1 \leqslant k \leqslant n-1} v_i\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_k}\right).$$

Alors :

$$v_i(J_{n-1}^{(n-1)}) \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} v_i\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_{n-1}}\right)$$

et

$$e(J_{n-1}^{(n-1)}\mathcal{O}_C) \geqslant \Sigma_{j=2}^{n-1} e\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_{n-1}}\mathcal{O}_C\right) + e\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}\mathcal{O}_C\right).$$

En utilisant le caractère générique de la (c)-cosécance, on peut minorer $e(\partial f_1/\partial z_{n-1}\mathcal{O}_C)$ par

$$e\left(\left(z_1\frac{\partial f_1}{\partial z_1}, \ldots, z_{n-2}\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-2}}, \frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}, \frac{\partial f_1}{\partial z_n}\right)\mathcal{O}_n\right),$$

en procédant comme dans la démonstration de la proposition 3.4. On en déduit que

$$e\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_{n-1}}\mathcal{O}_C\right) \geqslant \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \mu_1^{(n-i)},$$

et de la même façon

$$e\left(\frac{\partial f_j}{\partial z_{n-1}}\mathcal{O}_C\right) \geqslant \sum_{i=0}^{n-2} C_{n-2}^i \bar{\mu}^{(n-i)}, \qquad j=2, \ldots, n-1.$$

2° Revenons à la formule $(\star)$ du début du chapitre 3.

$$\mu_{n-1}^{(n)} - \mu_{n-2}^{(n-1)} = e(f_{n-1}\mathcal{O}_\Gamma) - e(z_n\mathcal{O}_\Gamma),$$

mais d'après le lemme-clef 3.1, $e(z_n\mathcal{O}_\Gamma)$ est la multiplicité de Γ, donc

$$e_{\mathcal{O}_\Gamma}(f_{n-1}) \geqslant (1+\mu_1^{(1)})\, e_{\mathcal{O}_\Gamma}(z_n).$$

D'où

$$\mu_{n-1}^{(n)} - \mu_{n-2}^{(n-1)} \geqslant \frac{\mu_1^{(1)}}{1+\mu_1^{(1)}} e(f_{n-1}\mathcal{O}_\Gamma) \geqslant \frac{\mu_1^{(1)}}{1+\mu_1^{(1)}}(n-1)\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \mu_1^{(n-i)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[Gi] GIUSTI (M.). — Sur les singularités isolées d'intersections complètes quasi-homogènes, *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, t. 27, 1977, fasc. 3, p. 163-192.

[Gr] GREUEL (G. M.). — Der Gauß-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten, *Math. Annalen*, t. 214, 1975, p. 235-266.

[Gr-Ha] GREUEL (G. M.) und HAMM (H.). — *Invarianten quasi-homogener vollständiger Durchschnitten, Inventiones math.*, vol. 49, 1978, p. 67-86.

[Ha] Hamm (H.). — Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume, *Math. Annalen*, t. 191, 1971, p. 235-252.

[He] Henry (J.-P.-G.). — Sur les idéaux jacobiens des courbes planes. *Annales Inst. Fourier*, Grenoble, t. 27, 1977, fasc. 3, p. 193-210.

[Lê] Lê Dũng Tráng. — Calcul du nombre de Milnor d'une singularité isolée d'intersection complète [en russe], *Funk. Anal.*, t. 8, 1974, n° 2, p. 45-49.

[L.T] Lejeune (M.) et Teissier (B.). — Clôture intégrale des idéaux et équisingularité *Séminaire du Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Publication de l'Université de Grenoble*, 1974.

[Mi] Milnor (J.). — *Singular points of complex hypersurfaces*. — Princeton, Princeton University Press, 1968 (*Annals of Mathematics Studies*, 61).

[Na] Navarro (V.). — *Sobre la topologia local y global de las intersecciones completes* (Thèse Universidad politecnica de Barcelona, E.T.S.I.I. Diagonal 647, 1978).

[Sai] Saito (K.). — Regularity of Gauss-Manin connexion of flat family of isolated singularities. *Quelques journées singulières*, 16 p. — Paris, École polytechnique, Centre de mathématiques, 1974.

[Sam] Samuel (P.). — Sur la notion de multiplicité en algèbre et géométrie analytique, *J. Math. pures et appl.*, série 9°, t. 30, 1951, p. 159-274 (*Thèse Sc. math.*. *Paris*, 1949).

[Se] Serre (J.-P.). — *Algèbre locale et multiplicités*. — Berlin, Springer-Verlag, 1965 (*Lecture Notes in mathematics*, 11).

[Te_1] Teissier (B.). — Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, *Singularités à Cargèse, Astérisque*, t. 7-8, 1973, p. 285-362.

[Te_2] Teissier (B.). — The hunting of invariants in the geometry of discriminants, *Proceedings of the Nordic Summer school on real and complex singularities* [1976, Oslo], p. 565-677. — Alphen aan den Rijn, Sijthoff and Noordhoff international Publishers, 1977.

[Te_3] Teissier (B.). — Variétés polaires, *Invent. Math.*, Berlin, t. 40, 1977, p. 267-292.