BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN FRESNEL
BERNARD DE MATHAN

Algèbres L^1 p-adiques

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 225-260
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__225_0>

Bull. Soc. math. France,
106, 1978, p. 225-260.

ALGÈBRES L^1 p-ADIQUES

PAR

JEAN FRESNEL et BERNARD DE MATHAN

[Université Bordeaux-I, Talence]

RÉSUMÉ. — On étudie l'algèbre L^1 du dual Γ du groupe additif $\mathbf{Z}_p$ et plus précisément le radical et le nilradical de cette algèbre en relation avec la transformation de Fourier p-adique de L^1 dans les fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$ à valeurs p-adiques. On montre enfin le lien entre cette étude et celle du produit tensoriel topologique de corps valués.

ABSTRACT. — We study the algebra L^1 of the dual Γ of the additive group $\mathbf{Z}_p$ and more precisely the radical and the nilradical of this algebra, in connexion with the p-adic Fourier transform from L^1 into the space of continuous functions on $\mathbf{Z}_p$ taking p-adic values. Last we show the connexion between this study and that of the topological tensor product of valued fields.

Introduction

Soit p un nombre premier, $\mathbf{Q}_p$ le corps p-adique élémentaire, $\mathbf{Z}_p$ son anneau de valuation, et $\mathbf{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$. La valeur absolue p-adique, notée $|\,.\,|$, est normalisée par $|p| = 1/p$ et la valuation associée v par $v(p) = 1$ (i. e. $v(x) = -\log_p |x|$).

L'analyse harmonique p-adique, concernant les fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}_p$, présente des situations très différentes de l'analyse harmonique classique, dont un outil fondamental, la mesure de Haar, n'existe plus toujours : on sait, par exemple, que le groupe additif $\mathbf{Z}_p$ n'a pas de mesure de Haar p-adique.

Appelons caractère p-adique d'un groupe topologique abélien G, tout homomorphisme continu de G dans le groupe multiplicatif U_p des éléments de $\mathbf{C}_p$, de valeur absolue 1. Le dual p-adique de G est le groupe $\hat{G}$ des caractères p-adiques de G. Soit maintenant G un groupe topologique abélien, pro-fini (i. e. compact, totalement discontinu). Munissons $\hat{G}$ de la topologie de la convergence uniforme, et considérons le bi-dual $\hat{\hat{G}}$. On dit que G est p-réflexif si $\hat{\hat{G}}$ est canoniquement isomorphe à G. Il n'en est pas toujours ainsi. Soit $\tilde{G}$ le sous-groupe de torsion de $\hat{G}$, c'est-à-dire le groupe des caractères p-adiques de G, à valeurs dans les racines de l'unité. Le groupe $\tilde{G}$ s'identifie au dual complexe G' de G, par le choix d'un isomorphisme entre le groupe des racines de l'unité dans $\mathbf{C}_p$ et dans $\mathbf{C}$ respectivement. Pour que G soit p-réflexif, il faut et il suffit que $\hat{G} = \tilde{G}$ ([10], [14]). Par exemple, $\mathbf{Z}_p$ n'est pas p-réflexif : le dual $\hat{\mathbf{Z}}_p$ s'identifie au groupe multiplicatif $1+\mathcal{M}_p$, où $\mathcal{M}_p$ est l'ensemble des $\alpha \in \mathbf{C}_p$ tels que $|\alpha| < 1$. Le caractère p-adique de $\mathbf{Z}_p$, défini par l'élément $\theta \in 1 + \mathcal{M}_p$, est l'application $x \mapsto \theta^x$. Les caractères d'ordre fini de $\mathbf{Z}_p$ correspondent aux éléments θ du groupe $R(p)$ des racines de l'unité, d'ordre une puissance de p.

On peut caractériser les groupes abéliens pro-finis p-réflexifs ([8], [11]). Un groupe abélien pro-fini G est p-réflexif si, et seulement si, il n'existe pas de sous-groupe fermé H de G tel que G/H soit sans p-torsion, ou encore, ce qui revient au même, si et seulement si $\mathbf{Z}_p$ n'est pas isomorphe à un quotient de G. Tout groupe abélien pro-fini possède un sous-groupe fermé p-réflexif maximal H_p, qui est facteur direct dans G, et $\mathrm{G} = H_p^I \oplus \mathbf{Z}_p$ [8].

Soit $\tilde{G}$ le groupe des caractères p-adiques d'un groupe abélien pro-fini G, à valeurs dans les racines de l'unité, et soit E un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$. On désigne par $L^1(\tilde{G}, E)$ l'algèbre de Banach des fonctions définies sur $\tilde{G}$, à valeurs dans E, tendant vers 0 selon le filtre des complémentaires des parties finies de $\tilde{G}$. La norme est

$$\|f\| = \sup_{\gamma \in \tilde{G}} |f(\gamma)|,$$

et la multiplication est la convolution $\star$:

$$f \star g(\gamma) = \textstyle\sum_{\delta \in \tilde{G}} f(\delta) g(\gamma\delta^{-1}).$$

On désigne par $L^1[\tilde{G}, E]$ la sous-algèbre de $L^1(\tilde{G}, E)$ formée des fonctions à support fini, c'est-à-dire la E-algèbre du groupe $\tilde{G}$. L'algèbre $L^1(\tilde{G}, E)$ apparaît comme le complété de $L^1[\tilde{G}, E]$.

Soit R le groupe des racines de l'unité dans $\mathbf{C}_p$. La transformation de Fourier $\mathcal{F}$, relative à G, est l'homomorphisme (de E-algèbre) de $L^1(G, E)$ dans l'algèbre $\mathcal{C}(G, \overline{E(R)})$ des fonctions continues, sur G, à valeurs dans $\overline{E(R)}$, défini de la façon suivante : Pour $f \in L^1(\tilde{G}, E)$, $\mathcal{F}(f)$ est la fonction $\hat{f} : G \to \overline{E(\mathrm{R})}$, telle que

$$\hat{f}(x) = \textstyle\sum_{\gamma \in \tilde{G}} f(\gamma)\gamma(x), \qquad \forall x \in G.$$

On peut montrer que les idéaux maximaux de $L^1(\tilde{G}, E)$ sont les idéaux formés des fonctions f dont la transformée de Fourier f s'annule en un point donné de G ([14], *voir* aussi cet article, § 2, prop. 2). Le noyau de la transformation de Fourier est donc le radical, i. e. l'intersection des idéaux maximaux, de l'algèbre $L^1(\tilde{G}, E)$.

Supposons tout d'abord que $E \supset R$. Il a été démontré que les groupes abéliens pro-finis G, pour lesquels la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ est injective, sont les groupes p-réflexifs : il suffisait de savoir ce qu'il en est pour le groupe $\mathbf{Z}_p$ ([11], [12]), et il a été démontré simultanément, par Y. AMICE et A. ESCASSUT d'une part [2], et les auteurs d'autre part ([6] et [8]), que la transformation de Fourier p-adique relative à $\mathbf{Z}_p$ n'est pas injective. Les démonstrations, différentes, font néanmoins toutes les deux appel aux fonctions analytiques p-adiques. Par ailleurs, en améliorant leur démonstration, les auteurs ont prouvé que la transformation de Fourier est surjective, et induit une *isométrie* du quotient de l'algèbre L^1 par le noyau, sur l'algèbre des fonctions continues, $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, E)$.

Désormais, nous désignerons par Γ le groupe des racines de l'unité d'ordre une puissance de p (dans $\mathbf{C}_p$). Le groupe Γ est isomorphe au groupe $\tilde{\mathbf{Z}}_p$, en associant à $\gamma \in \Gamma$, le caractère de $\mathbf{Z}_p$, $x \mapsto \gamma^x$. L'article suivant est consacré à l'étude des algèbres $L^1(\Gamma, E)$, où E est un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$.

Considérons d'abord le cas où $E \supset \Gamma$. Nous donnons une nouvelle démonstration, entièrement élémentaire, du fait que, dans ce cas, la transformation de Fourier $L^1(\Gamma, E) \to \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, E)$ n'est pas injective. La référence aux fonctions analytiques n'y est plus explicite, cependant, il s'agit toujours de suites de polynômes. L'avantage de cette démonstration, si elle est moins effective que celle de [8], est qu'elle permet de prouver l'existence d'éléments *nilpotents* non nuls, dans $L^1(\Gamma, E)$, et de montrer que l'idéal $\mathscr{N}$ des nilpotents est *dense* dans le radical $\mathscr{R}$ de $L^1(\Gamma, E)$. Après avoir rappelé la démonstration du théorème de surjectivité isométrique de la transformation de Fourier, dans ce cas, nous en déduisons, comme première conséquence, que $\mathscr{N} \neq \mathscr{R}$.

Le second paragraphe est consacré au cas où $E \not\supset \Gamma$. Nous savions déjà que, par exemple, si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, la transformation de Fourier $\mathscr{F}_E : L^1(\Gamma, E) \to \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{E(\Gamma)})$ est injective.

Tout sous-corps fermé E de $\mathbf{C}_p$ est l'adhérence d'une extension algébrique L de $\mathbf{Q}_p$, et nous démontrons que, pour que la transformation de Fourier $\mathscr{F}_E$ soit injective, il faut et il suffit que L soit de *différente non nulle* sur $\mathbf{Q}_p$. L'image B de la transformation de Fourier est dense dans une sous-$\bar{L}$-algèbre C de $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{E(\Gamma)})$, définie par une relation fonctionnelle très simple, et $B = C$ dans le cas où L est de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$. Dans ce dernier cas, $\mathscr{F}_E$ définit une isométrie entre l'algèbre $L^1(\Gamma, E)/\mathscr{R}_E$, quotient de $L^1(\Gamma, E)$ par son radical $\mathscr{R}_E$, et C. De plus, $\mathscr{R}_E$ est l'adhérence de l'idéal des nilpotents $\mathscr{N}_E$, et $\mathscr{R}_E \neq \mathscr{N}_E$. Les résultats proviennent de deux résultats algébriques dont l'essentiel est que, si L est de différente non nulle sur $\mathbf{Q}_p$, la forme L-linéaire T sur $L(\Gamma)$, limite inductive des applications $(1/[L(\gamma) : L])\operatorname{Tr}_{L(\gamma):L}$ $(\gamma \in \Gamma)$, est continue (§ 2, prop. 3); si, au contraire, L est de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$, l'application $\operatorname{Tr}_{L(\gamma):L}$ applique l'anneau de valuation $\mathscr{O}_{L(\gamma)}$ sur l'anneau de valuation $\mathscr{O}_L$ ou sur son idéal maximal $\mathscr{M}_L$, i. e. que « $L(\Gamma)$ est de différente 1 sur L » (§ 2, prop. 4).

Le fait que L soit de différente nulle, ou non nulle, sur $\mathbf{Q}_p$ peut aussi s'exprimer en termes de norme tensorielle : dire que L est de différente non nulle sur $\mathbf{Q}_p$ revient à dire que la norme *tensorielle* sur $L(\Gamma)$ est équivalente à la valeur absolue. Les résultats précédents sur la transformation de Fourier, notamment la surjectivité, nous permettent d'étudier dans le troisième paragraphe l'algèbre $L \hat{\otimes} \mathbf{Q}_p(\Gamma)$, complétée de $L(\Gamma)$ pour la *norme tensorielle* : il s'agit d'une algèbre *locale* qui n'est pas un corps, dans le cas où L est de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$. L'idéal maximal $\mathscr{M}$ de $L \hat{\otimes} \mathbf{Q}_p(\Gamma)$ est l'adhérence de l'idéal des nilpotents, dont il est cependant distinct, et le quotient $L \hat{\otimes} \mathbf{Q}_p(\Gamma)/\mathscr{M}$ est canoniquement isomorphe et isométrique à $\overline{L(\Gamma)}$.

Nous terminons en posant le problème de savoir si ces résultats restent vrais en prenant deux extensions algébriques quelconques, L et M, de $\mathbf{Q}_p$ (contenues dans $\mathbf{C}_p$). Soit $L \hat{\otimes} M$ le complété du compositum LM, pour la norme tensorielle. Ce complété est une algèbre locale, dont nous conjecturons qu'elle possède les mêmes propriétés que ci-dessus, lorsque la norme tensorielle sur LM n'est pas équivalente à la valeur absolue.

Cet article ne comporte pas de développement sur les algèbres L^1 relatives à d'autres groupes que $\Gamma = R(p)$. Indiquons qu'il est aisé, grâce à des techniques de produit tensoriel topologique, de montrer notamment que le radical de toute algèbre $L^1(\tilde{G})$ (où G est un groupe abélien pro-fini) est l'adhérence de l'idéal des nilpotents, et en est distinct lorsqu'il est non nul.

La technique de la transformation de Fourier p-adique permet aussi d'étudier le produit tensoriel topologique de deux sous-corps de $\mathbf{C}_p$ [5].

Notations. — Pour tout entier $s \geqslant 0$, on désigne par Γ_s le groupe des racines p^s-ièmes de l'unité (dans $\mathbf{C}_p$), et $\Gamma = \bigcup_{s \in \mathbf{N}} \Gamma_s$. On pose $K_s = \mathbf{Q}_p(\Gamma_s)$ (dans $\mathbf{C}_p$), et $K_\infty = \bigcup_{s \in \mathbf{N}} \mathrm{K}_s$.

Dans le premier paragraphe, K désigne une extension valuée complète de $\mathbf{Q}_p$, contenant Γ.

La notation $L^1(\Gamma)$ désigne la K-algèbre $L^1(\Gamma, K)$.

La valeur absolue et la valuation p-adique sont toujours notées $|\,.\,|$ et v respectivement, et normalisées par $|p| = 1/p$ et $v(p) = 1$.

Soit $P(X) \in K[X]$,

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_N X^N.$$

La notation $v(P, 0)$ désigne

$$v(P, 0) = \min_{0 \leqslant i \leqslant N}(v(a_i))$$

et

$$\| P, 1 \| = \max_{0 \leqslant i \leqslant N}(|a_i|).$$

L'application $\| ., 1 \|$ est une norme sur $K[X]$, et

$$\| PQ, 1 \| = \| P, 1 \| . \| Q, 1 \|$$

pour tout couple P, Q.

1. L'algèbre $L^1(\Gamma, K)$ lorsque le corps K contient Γ

THÉORÈME 1. — *L'algèbre $L^1(\Gamma)$ possède des éléments nilpotents non nuls. De façon plus précise, soit s_0 un entier positif, et ε un nombre réel positif. Il existe un élément $f \in L^1(\Gamma)$, satisfaisant aux conditions suivantes :*

(1) $$f(1) = 1;$$

(2) $$f(\gamma) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma_{s_0},\ \gamma \neq 1;$$

(3) $$|f(\gamma)| \leqslant 1 + \varepsilon \quad \textit{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma;$$

(4) $$f(\gamma) \in K_\infty \quad \textit{pour tout} \quad \gamma \in \Gamma;$$

(5) *Il existe un entier positif d tel que $f^d = 0$.*

THÉORÈME 2. — *L'idéal $\mathcal{R}$, noyau de la transformation de Fourier $\mathcal{F} : L^1(\Gamma) \to \mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, K)$, est l'adhérence de l'idéal $\mathcal{N}$ des éléments nilpotents dans $L^1(\Gamma)$.*

La démonstration de ces théorèmes résultera des lemmes suivants :

LEMME 1. — *Soit $f \in L^1(\Gamma)$, soit $(s_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'entiers positifs, strictement croissante, et soit $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $L^1(\Gamma)$, tendant vers f dans $L^1(\Gamma)$, et telle que f_k soit nulle en dehors de Γ_{s_k}. Soit $P_k(X)$*

le polynôme à coefficients dans K, de degré $p^{s_k}-1$ *au plus, tel que* $P_k(\gamma)=f_k(\gamma)$ *pour tout* $\gamma\in\Gamma_{s_k}$.

(*a*) *Pour que* $\hat{f}=0$, *il faut et il suffit que*

$$\lim_{k\to+\infty}(v(P_k,0)+s_k)=+\infty. \tag{6}$$

(*b*) *Soit d un entier positif. Pour que* $f^d=0$, *il suffit que*

$$\lim_{k\to+\infty}\left(v(P_k,0)+\left(1-\frac{1}{d}\right)s_k\right)=+\infty. \tag{7}$$

Preuve. — Soit $P_k(X)=a_{0,k}+\ldots+a_{p^{s_k}-1,k}X^{p^{s_k}-1}$. Comme la fonction définie sur $\mathbf{Z}_p$ par $x\mapsto\sum_{\gamma\in\Gamma_{s_k}}\gamma^x$ vaut p^{s_k} pour $x\equiv 0\pmod{p^{s_k}}$, et 0 pour $x\not\equiv 0\pmod{p^{s_k}}$, on voit que, pour tout $x\in\mathbf{Z}_p$,

$$\hat{f}_k(x)=p^{s_k}a_{n_x,k},$$

où n_x désigne l'entier tel que $0\leqslant n_x<p^{s_k}$ et $x+n_x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p^{s_k})$.

Ainsi $\inf_{x\in\mathbf{Z}_p}v(\hat{f}_k(x))=v(P_k,0)+s_k$ ce qui prouve (*a*).

Pour établir (*b*), remarquons que si g_k est une fonction de $L^1(\Gamma)$, nulle en dehors de Γ_{s_k}, et si $Q_k(X)$ est le polynôme de degré $p^{s_k}-1$ au plus, tel que $Q_k(\gamma)=g_k(\gamma)$ pour tout $\gamma\in\Gamma_{s_k}$:

$$Q_k(X)=b_{0,k}+\ldots+X^{p^{s_k}-1}b_{p^{s_k}-1},$$

alors $f_k\star g_k$ est nulle en dehors de Γ_{s_k}, et pour $\gamma\in\Gamma_{s_k}$, $f_k\star g_k(\gamma)=R(\gamma)$ où $R(X)$ est le polynôme :

$$R(X)=p^{s_k}\sum_{m=0}^{p^{s_k}-1}a_{m,k}b_{m,k}X^m. \tag{8}$$

En effet, pour tout couple (m,n) d'entiers tels que $0\leqslant m<p^{s_k}$, $0\leqslant n<p^{s_k}$, et tout $\gamma\in\Gamma_{s_k}$:

$$\sum_{\delta\in\Gamma_{s_k}}\delta^m(\gamma\delta^{-1})^n=\begin{cases}0 & \text{si } m\neq n,\\ p^{s_k}\gamma^n & \text{si } m=n.\end{cases}$$

L'égalité (8) montre que

$$\|f_k\star g_k\|\leqslant p^{-s_k}\|P_k,1\|.\|Q_k,1\|,$$

et donc que

$$\|f_k^d\|\leqslant p^{-(d-1)s_k}\|P_k,1\|^d.$$

Pour que $f^d=0$, il suffit que

$$\lim_{k\to\infty}(p^{-(d-1)s_k}\|P_k,1\|^d)=0,$$

condition équivalente à (7).

Remarque. — Puisque $||\hat{f}_k|| = p^{-(v(P_k,0)+s_k)}$, la condition (7) peut aussi s'écrire :

$$(7') \qquad \lim_{k\to+\infty} ||\hat{f}_k||\, p^{s_k/d} = 0.$$

Nous construisons une suite de polynômes (P_k), satisfaisant aux conditions du lemme 1, en nous donnant l'ensemble des zéros, convenablement choisi, du polynôme P_k.

LEMME 2. — *Soient s un entier positif, et λ un nombre réel, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Il existe une partie $B_{s,\lambda}$ de $\Gamma_s - \Gamma_{s-1}$, satisfaisant aux conditions suivantes :*

$$(9) \qquad \operatorname{card} B_{s,\lambda} = [\lambda p^{s-1}(p-1)].$$

Pour tout $\gamma \in \Gamma_s - \Gamma_{s-1}$, et tout entier t, $0 < t < s$:

$$(10) \qquad \operatorname{card}(B_{s,\lambda} \cap \gamma\Gamma_t) \geqslant [\lambda p^t]$$

(la notation $[.]$ désigne la partie entière).

Preuve. — Supposons $s > 1$ (l'énoncé étant trivial pour $s = 1$). Pour tout t, $0 < t < s$, toute classe de Γ_s modulo Γ_t est réunion de p classes modulo Γ_{t-1}, disjointes, et $\Gamma_s - \Gamma_{s-1}$ est réunion de $p-1$ classes modulo Γ_{s-1}. L'inégalité

$$p[\lambda p^{t-1}] \leqslant [\lambda p^t]$$

permet de construire, par récurrence, une suite $(B^{(t)})_{1 \leqslant t < s}$ de parties de $\Gamma_s - \Gamma_{s-1}$ telle que :

$$(11) \qquad B^{(t-1)} \subset B^{(t)} \qquad \text{pour} \quad 1 < t < s;$$

(12) Pour tout t, $1 \leqslant t < s$, et pour toute classe C, modulo Γ_t, incluse dans $\Gamma_s - \Gamma_{s-1}$,

$$\operatorname{card}(B^{(t)} \cap C) = [\lambda p^t].$$

Comme $(p-1)\ [\lambda p^{s-1}] \leqslant [\lambda p^{s-1}(p-1)]$, il existe une partie $B_{s,\lambda}$ de $\Gamma_s - \Gamma_{s-1}$, telle que

$$(11') \qquad B^{(s-1)} \subset B_{s,\lambda},$$

$$(9) \qquad \operatorname{card} B_{s,\lambda} = [\lambda p^{s-1}(p-1)],$$

et les relations (11) et (12) prouvent que $B_{s,\lambda}$ satisfait à la condition (10).

LEMME 3. — *Soit $B_{s,\lambda}$ une partie de $\Gamma_s - \Gamma_{s-1}$ satisfaisant aux conditions du lemme 2, et soit $F_{s,\lambda}(X)$ le polynôme $F_{s,\lambda}(X) = \prod_{\alpha \in B_{s,\lambda}} (X-\alpha)/(1-\alpha)$.*

On a

(13) $$v(F_{s,\lambda}(\gamma)) = 0 \qquad \textit{pour} \quad \gamma \in \Gamma_{s-1};$$

(14) $$v(F_{s,\lambda}(\gamma)) \geqslant \lambda(s-1) - \frac{1}{p-1} \qquad \textit{pour} \quad \gamma \in \Gamma_s - \Gamma_{s-1};$$

(15) $$v(F_{s,\lambda}(\gamma)) \geqslant -\lambda(1-p^{s-t}) \qquad \textit{pour} \quad \gamma \in \Gamma,\ \textit{d'ordre}\ p^t > p^s;$$

(15′) $$v(F_{s,\lambda}(\gamma)) \geqslant -\lambda \qquad \textit{pour} \quad \gamma \in \Gamma - \Gamma_s;$$

(16) $$v(F_{s,\lambda}, 0) \geqslant -\lambda.$$

Preuve. — Pour $\gamma \in \Gamma_{s-1}$, $v(1-\gamma) > v(1-\alpha)$, donc $v(\gamma-\alpha) = v(1-\alpha)$, d'où (13). Pour établir (14), soit $\gamma \in \Gamma_s - \Gamma_{s-1}$, supposons que $\gamma \notin B_{s,\lambda}$. Désignons, pour tout entier t, $0 \leqslant t < s$, par ν_t le nombre d'éléments de $B_{s,\lambda} \cap (\gamma\,\Gamma_t)$, et $\nu_s = \operatorname{card} B_{s,\lambda}$.

Comme $v(\gamma-\alpha) = 1/(p^{t-1}(p-1))$ si $\alpha/\gamma \in \Gamma_t - \Gamma_{t-1}$, on a

$$v\Big(\prod\nolimits_{\alpha \in B_{s,\lambda}} (\gamma-\alpha)\Big) = \sum\nolimits_{t=1}^{s} \frac{(\nu_t - \nu_{t-1})}{p^{t-1}(p-1)}.$$

Donc

$$v\Big(\prod\nolimits_{\alpha \in B_{s,\lambda}} (\gamma-\alpha)\Big) = \sum\nolimits_{t=1}^{s-1} \frac{\nu_t}{p^t} + \frac{\nu_s}{p^{s-1}(p-1)} \quad (\text{car}\ \nu_0 = 0).$$

Puisque $\nu_t \geqslant \lambda\, p^t - 1$ et $\nu_s \geqslant \lambda\, p^{s-1}(p-1) - 1$, on a donc

$$v\Big(\prod\nolimits_{\alpha \in B_{s,\lambda}} (\gamma-\alpha)\Big) \geqslant \lambda\, s - \sum\nolimits_{t=1}^{s-1} \frac{1}{p^t} - \frac{1}{p^{s-1}(p-1)},$$

soit

$$v\Big(\prod\nolimits_{\alpha \in B_{s,\lambda}} (\gamma-\alpha)\Big) \geqslant \lambda\, s - \frac{1}{p-1}.$$

D'autre part,

$$v\Big(\prod\nolimits_{\alpha \in B_{s,\lambda}} (1-\alpha)\Big) = \frac{[\lambda\, p^{s-1}(p-1)]}{p^{s-1}(p-1)} \leqslant \lambda.$$

L'inégalité (14) résulte alors immédiatement de ces deux inégalités. De la dernière découle également (16).

Enfin, soit $\gamma \in \Gamma_t - \Gamma_{t-1}$, où $t > s$. Pour chaque $\alpha \in \mathrm{B}_{s,\lambda}$, on a

$$v(\gamma-\alpha) = v(\gamma-1) = \frac{1}{p^{t-1}(p-1)},$$

donc

$$v\left(\frac{\gamma-\alpha}{1-\alpha}\right)=-\frac{1}{p^{s-1}(p-1)}(1-p^{s-t}).$$

Alors

$$v(F_{s,\lambda}(\gamma))=-\frac{[\lambda p^{s-1}(p-1)]}{p^{s-1}(p-1)}(1-p^{s-t}),$$

soit

(15) $$v(F_{s,\lambda}(\gamma))\geqslant-\lambda(1-p^{s-t}),$$

d'où (15') résulte aussitôt.

Nous allons maintenant pouvoir construire des suites de polynômes satisfaisant au lemme 1. Pour la démonstration du théorème 1, le premier élément de la suite est choisi de la façon suivante :

LEMME 4. — *Soient* s_0 *un entier positif,* δ *un nombre réel positif,* λ_1 *un réel,* $0<\lambda_1<1$, *tels que*

(17) $$1-\lambda_1+p^{-s_0}<\frac{\delta(p-1)}{2},$$

(18) $$(1-\lambda_1)s_0<\frac{\delta}{2}.$$

Il existe un entier $S>s_0$ *tel que, pour tout entier* $s_1\geqslant S$, *il existe un polynôme* $P_1(X)\in K_\infty[X]$, *de degré inférieur à* p^{s_1}, *satisfaisant aux conditions :*

(19) $$P_1(1)=1 \quad \textit{et} \quad P_1(\gamma)=0 \quad \textit{pour} \quad \gamma\in\Gamma_{s_0},\ \gamma\neq 1;$$

(20) $$v(P_1(\gamma))\geqslant-\delta \quad \textit{pour tout} \quad \gamma\in\Gamma_{s_1};$$

(21) $$v(P_1,0)\geqslant-\lambda_1 s_1$$

Preuve. — Soit λ_0 tel que $0<\lambda_0<\lambda_1$ et

(17') $$1-\lambda_0+p^{-s_0}<\frac{\delta(p-1)}{2}$$

(18') $$(1-\lambda_0)s_0<\frac{\delta}{2}.$$

Soit $S\geqslant((1-\lambda_0)/(\lambda_1-\lambda_0))s_0$. Soit $s_1\geqslant S$, et soit $P_1(X)$ le polynôme

$$P_1(X)=\frac{1}{p^{s_0}}\frac{X^{p^{s_0}}-1}{X-1}\prod\nolimits_{s_0<s\leqslant s_1}F_{s,\lambda_0}(X)$$

(où $F_{s,\lambda_0}(X)$ est le polynôme relatif à une partie B_{s,λ_0} de $\Gamma_s - \Gamma_{s-1}$, *cf.* lemmes 2 et 3). Autrement dit,

$$P_1(X) = \prod_{1 \leqslant s \leqslant s_1} F_{s,\mu_s}(X),$$

où $\mu_s = 1$ pour $1 \leqslant s \leqslant s_0$ et $\mu_s = \lambda_0$ pour $s_0 < s \leqslant s_1$.

La condition (19) est satisfaite. Examinons d'abord (21). D'après (16),

$$v(P_1, 0) \geqslant -s_0 - \lambda_0(s_1 - s_0),$$

d'où

$$v(P_1, 0) \geqslant -\lambda_1 s_1, \quad \text{puisque } s_1 \geqslant \frac{(1-\lambda_0)}{\lambda_1 - \lambda_0} s_0. \tag{21}$$

Évaluons maintenant $v(P_1(\gamma))$ pour $\gamma \in \Gamma_{s_1}$. On peut supposer γ d'ordre p^σ, avec $s_0 < \sigma \leqslant s_1$. D'après (13), (14) et (15),

$$v(P_1(\gamma)) \geqslant -\sum_{s=1}^{s_0}(1-p^{s-\sigma}) - \lambda_0 \sum_{s_0 < s < \sigma}(1-p^{s-\sigma}) + \lambda_0(\sigma - 1) - \frac{1}{p-1},$$

soit

$$v(P_1(\gamma)) \geqslant -(1-\lambda_0)s_0 + \lambda_0 \sum_{1 \leqslant s < \sigma} p^{s-\sigma} - \frac{1}{p-1},$$

i. e.

$$v(P_1(\gamma)) \geqslant -(1-\lambda_0)\left(s_0 + \frac{1}{p-1}\right) - \frac{1}{p^{\sigma-1}(p-1)}.$$

Puisque $p^{1-\sigma} \leqslant p^{-s_0}$, les inégalités (17) et (18) assurent alors que

$$v(P_1(\gamma)) \geqslant -\delta. \tag{20}$$

Pour construire de proche en proche, une partie de polynômes satisfaisant au lemme 1, nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME 5. — *Soient r, s, t, des entiers tels que $0 < r \leqslant s < t$. Soient λ et μ des réels tels que $0 \leqslant \lambda \leqslant \mu \leqslant 1$. Soit $P(X) \in K[X]$, un polynôme de degré inférieur à p^s tel que*

$$v(P, 0) \geqslant -\lambda s. \tag{22}$$

Il existe un polynôme $Q(X) \in K[X]$, de degré inférieur à p^t, tel que

$$v(Q, 0) \geqslant -\mu t, \tag{23}$$

$$Q(\gamma) = P(\gamma) \qquad \textit{pour} \quad \gamma \in \Gamma_r, \tag{24}$$

(25) $$v(Q(\gamma)) = v(P(\gamma)) \quad \textit{pour} \quad \gamma \in \Gamma_s,$$

(26) $$v(Q(\gamma)) \geqslant (\mu-\lambda)s - \mu r - \frac{1}{p-1} \quad \textit{pour} \quad \gamma \in \Gamma_t - \Gamma_s.$$

De plus, si $P(X)$ est à coefficients dans K_∞, il existe un polynôme $Q(X)$ à coefficients dans K_∞, satisfaisant aux conditions ci-dessus.

Preuve. — Avec les notations des lemmes 2 et 3, soit

$$Q(X) = P(X) \prod_{s<\tau\leqslant t} F_{\tau-r,\mu}(X^{p^r}).$$

Les conditions (24) et (25) sont immédiates.

D'après la relation (16) du lemme 3, on a

$$v(Q, 0) \geqslant v(P, 0) - \mu(t-s),$$

d'où (23) puisque $\lambda \leqslant \mu$.

Soit $\gamma \in \Gamma_\sigma - \Gamma_{\sigma-1}$, $s < \sigma \leqslant t$. On a $v(P(\gamma)) \geqslant -\lambda s$, et d'après le lemme 3

$$v(F_{\tau-r,\mu}(\gamma^{p^r})) \geqslant \begin{cases} -\mu & \text{pour } s < \tau < \sigma, \\ \mu(\sigma-r-1) - \dfrac{1}{p-1} & \text{pour } \tau = \sigma, \\ 0 & \text{pour } \tau > \sigma, \end{cases}$$

d'où (26) $v(Q(\gamma)) \geqslant (\mu-\lambda)s - \mu r - (1/(p-1))$.

Démonstration du théorème 1. — Soit $\delta = \log_p(1+\varepsilon)$. On peut supposer que $p^{-s_0} < \delta(p-1)/2$. Soit $(r_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs, soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite strictement croissante de nombres réels positifs, de limite $l < 1$, et telle que λ_0 et λ_1 satisfassent aux conditions (17), (18), du lemme 4. Il existe une suite strictement croissante $(s_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ de nombres entiers supérieurs à s_0 telle que $s_k > r_k$ pour tout k et

(27) $$\lim_{k\to+\infty}((\lambda_{k+1}-\lambda_k)s_k - \lambda_{k+1}r_k) = +\infty,$$

(28) $$(\lambda_{k+1}-\lambda_k)s_k - \lambda_{k+1}r_k - \frac{1}{p-1} \geqslant -\delta$$

et $s_1 > S$ (S étant défini au lemme 4).

Soit $P_1(X)$ satisfaisant aux conditions du lemme 4. Le lemme 5 permet de construire par récurrence une suite $(P_k(X))_{k\in\mathbf{N}^*}$ de polynômes de $K_\infty[X]$, telle que :

(23') $$v(P_k, 0) \geqslant -\lambda_k s_k,$$

$$(24') \qquad P_{k+1}(\gamma) = P_k(\gamma) \qquad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma_{r_k},$$

$$(25') \qquad v(P_{k+1}(\gamma)) = v(P_k(\gamma)) \qquad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma_{s_k},$$

$$(26') \quad v(P_{k+1}(\gamma)) \geqslant (\lambda_{k+1} - \lambda_k) s_k - \lambda_{k+1} r_k - \frac{1}{p-1} \qquad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma_{s_{k+1}} - \Gamma_{s_k}.$$

Soit alors $f_k \in L^1(\Gamma)$ telle que $f_k(\gamma) = P_k(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma_{s_k}$, et $f_k(\gamma) = 0$ pour $\gamma \notin \Gamma_{s_k}$. La condition (24') prouve que, pour chaque $\gamma \in \Gamma$, la suite $(f_k(\gamma))$ est stationnaire, puisque $r_k \to +\infty$. Cette remarque, jointe aux conditions (25'), (26') et (27), prouve que la suite (f_k) est convergente dans $L^1(\Gamma)$. Soit f sa limite. Il est immédiat de vérifier les conditions (1), (2), (4), du théorème 1. La condition (3) résulte de la condition (20) du lemme 4, et de (28), (25'), et (26'). Enfin, soit d un entier positif tel que $1-(1/d) > l$ ($= \lim \lambda_k$). On a $f^d = 0$ d'après le lemme 1.

Démonstration du théorème 2. — Soit $g \in L^1(\Gamma)$, telle que $\hat{g} = 0$. Supposons $g \neq 0$.

Soit, pour tout entier positif s, $R_s(X)$ le polynôme de $K[X]$, de degré inférieur à p^s, tel que $R_s(\gamma) = g(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma_s$. Posons $v(R_s, 0) + s = A_s$.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit r_1 un entier positif tel que $|g(\gamma)| < \varepsilon$ pour $\gamma \notin \Gamma_{r_1}$. Comme $\lim A_s = +\infty$ d'après le lemme 1, il existe un entier $s_1 > r_1$ tel que

$$\frac{1}{4} A_{s_1} - r_1 - \frac{1}{p-1} \geqslant -\log_p \varepsilon \qquad \text{et} \qquad 0 < \frac{A_{s_1}}{2 s_1} < 1$$

puisque $g \neq 0$.

Soit alors $\lambda_1 = 1-(A_{s_1}/2 s_1)$, et $\lambda_2 = 1-(A_{s_1}/4 s_1)$. On termine la démonstration en construisant, comme pour le théorème 1, des suites $(r_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$, $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$, $(s_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$, et une suite de polynômes $(P_k(X))_{k \in \mathbf{N}^*}$ telle que $P_1(X) = R_{s_1}(X)$. Le procédé permet d'obtenir un élément $f \in L^1(\Gamma)$, nilpotent, tel que $f(\gamma) = g(\gamma)$ pour $\gamma \in \Gamma_{r_1}$, et $|f(\gamma)| \leqslant \varepsilon$ pour $\gamma \notin \Gamma_{r_1}$ de sorte que $\|f-g\| \leqslant \varepsilon$.

Le théorème 1 permet de prouver le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — *La transformation de Fourier* $\mathscr{F} : L^1(\Gamma) \to \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, K)$ *est* surjective, *et définit par passage au quotient, une* isométrie *de* $L^1(\Gamma)/\mathscr{R}$ *sur* $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, K)$.

Preuve. — Comme les polynômes « coefficients binomiaux » $\binom{x}{n}$ $(n \in \mathbf{N})$ forment une base normale de l'espace de Banach $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, K)$, il suffit de démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g_n \in L^1(\Gamma)$ telle que

$$\hat{g}_n(x) = \binom{x}{n} \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{Z}_p, \tag{29}$$

$$\|g_n\| \leqslant 1+\varepsilon. \tag{30}$$

Soit s_0 un entier positif tel que $p^{1/p^{s_0}(p-1)} < 1+\varepsilon$. Nous allons montrer, par récurrence sur n, qu'il existe $g_n \in L^1(\Gamma)$, satisfaisant (29), (30) et

$$g_n(\gamma) = 0 \qquad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma_{s_0} - \{1\}. \tag{31}$$

Le résultat est trivial pour $n = 0$. Soit donc $n > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$(1+\delta)^2\, p^{1/p^{s_0}(p-1)} \leqslant 1+\varepsilon,$$

et supposons qu'il existe $g_{n-1} \in L^1(\Gamma)$ telle que

$$\hat{g}_{n-1}(x) = \binom{x}{n-1}, \tag{29'}$$

$$\|g_{n-1}\| \leqslant 1+\delta, \tag{30'}$$

$$g_{n-1}(\gamma) = 0 \qquad \text{pour} \quad \gamma \in \Gamma_{s_0} - \{1\}. \tag{31'}$$

D'après le théorème 1, il existe $f \in L^1(\Gamma)$ telle que $f(1) = 1$, $f(\gamma) = 0$ pour $\gamma \in \Gamma_{s_0} - \{1\}$, $\|f\| \leqslant 1+\delta$, et $\hat{f} = 0$. Soit alors $g_n \in L^1(\Gamma)$, définie par

$$g_n(\gamma) = \frac{g_{n-1}(\gamma) - g_{n-1}(1)\, f(\gamma)}{\gamma - 1} \qquad \text{pour} \quad \gamma \neq 1$$

et

$$g_n(1) = -\textstyle\sum_{\gamma \neq 1} g_n(\gamma).$$

La fonction g_n satisfait aux conditions (30) et (31). On a d'autre part

$$\hat{g}_n(x+1) - \hat{g}_n(x) = \binom{x}{n-1} \qquad \text{et} \qquad \hat{g}_n(0) = 0,$$

ce qui implique

$$\hat{g}_n(x) = \binom{x}{n}. \tag{29}$$

Une première application du théorème 3 est de préciser comme suit le théorème 2.

THÉORÈME 4. — *Le noyau* $\mathscr{R}$ *de la transformation de Fourier* $\mathscr{F} : L^1(\Gamma) \to \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, K)$ *est distinct de l'ensemble* $\mathscr{N}$ *des éléments nilpotents de* $L^1(\Gamma)$.

Ce théorème est conséquence de la proposition plus générale suivante :

PROPOSITION 1. — *Soit* K *un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique, complet, de caractéristique résiduelle* $p \neq 0$, *et soit* A *une* K*-algèbre de Banach. Désignons par* $\mathscr{N}$ *l'idéal des nilpotents de* A, *et par* $\mathscr{R}$ *le radical* (*de Jacobson*) *de* A, *i. e. l'intersection des idéaux maximaux. Supposons que* $\overline{\mathscr{N}} = \mathscr{R}$, *et qu'il existe un idempotent* ε *de norme supérieure à* 1, *et de norme* 1 *dans* $A/\mathscr{R}$. *Alors* $\mathscr{N} \neq \mathscr{R}$.

Montrons d'abord le lemme suivant.

LEMME 6. — *Soit* K *un corps muni d'une valuation ultramétrique, complet, et soit* A *une* K*-algèbre de Banach. Pour que l'idéal* $\mathscr{N}$ *des nilpotents de* A *soit fermé, il faut et il suffit qu'il existe un entier* $d > 0$ *tel que* $x^d = 0$ *pour tout* $x \in \mathscr{N}$.

Preuve. — Pour tout entier $d > 0$, soit $\mathscr{N}_d$ l'ensemble des éléments $x \in \mathscr{N}$ tels que $x^d = 0$.

L'ensemble $\mathscr{N}_d$ est fermé pour tout d. Si $\mathscr{N}$ est fermé, c'est un espace de Baire, et puisque $\mathscr{N} = \bigcup_{d>0} \mathscr{N}_d$, il existe donc un entier $d > 0$ tel que $\mathscr{N}_d$ soit d'intérieur dans $\mathscr{N}$ non vide. Ainsi, il existe $x \in \mathscr{N}_d$ et $\rho > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathscr{N}$ tel que $\| x - y \| \leqslant \rho$, on ait $y^d = 0$.

Soit maintenant y un élément quelconque de $\mathscr{N}$. Comme l'application polynomiale de K dans $A : \lambda \mapsto (x + \lambda (y - x))^d$ s'annule pour tout $\lambda \in K$ suffisamment petit, cette application est nulle. Ainsi en faisant $\lambda = 1$, on obtient $y^d = 0$.

Preuve de la proposition 1. — Soit ε un idempotent non nul de A. D'après te lemme 6, si on a $\mathscr{N} = \mathscr{R}$, il existe un entier $d > 0$ tel que $x^d = 0$ pour tout $x \in \mathscr{R}$. Soit alors s un entier suffisamment grand pour que $\left| \binom{p^s}{i} \right| < \| \varepsilon \|^{-i}$ pour tout i, $1 \leqslant i < d$ (où p est la caractéristique résiduelle de K). Pour tout $x \in \mathscr{R}$ tel que $\| x \| = \| \varepsilon \|$, on a alors :

$$\| (\varepsilon + x)^{p^s} \| = \left\| \varepsilon + \binom{p^s}{1} \varepsilon x + \ldots + \binom{p^s}{d-1} \varepsilon x^{d-1} \right\| = \| \varepsilon \|,$$

donc $\| \varepsilon + x \| \geqslant \| \varepsilon \|^{1/p^s}$ ce qui est absurde si ε est de norme plus grande que 1, et de norme 1 dans $A/\mathscr{R}$.

N.B. — On peut montrer que la proposition 1 reste valable si K est de caractéristique résiduelle 0.

Le théorème 4 résulte alors immédiatement des théorèmes 2 et 3 et de la proposition 1. Il suffit de considérer l'idempotent $\varepsilon \in L^1(\Gamma)$ défini par $\varepsilon(\gamma) = 1/p$ pour $\gamma \in \Gamma_1$ et $\varepsilon(\gamma) = 0$ si $\gamma \notin \Gamma_1$ (dont la transformée de Fourier est la fonction caractéristique de la boule $p\,\mathbf{Z}_p$).

2. L'algèbre $L^1(\Gamma, E)$

2.1. *Préliminaires et énoncé des résultats.* — Soit E un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, ne contenant pas nécessairement K_∞. La transformation de Fourier $\mathscr{F}_E$ est alors un homomorphisme de E-algèbre de $L^1(\Gamma, E)$ dans $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{EK_\infty})$: Pour $f \in L^1(\Gamma, E)$, $\mathscr{F}_E(f)$ est la fonction $\hat{f} \in \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{EK_\infty})$ définie par $\hat{f}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\,\gamma^x$.

PROPOSITION 2 [14]. — *Pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$, soit $\mathscr{M}_x$ l'idéal des fonctions $f \in L^1(\Gamma, E)$ telles que $\hat{f}(x) = 0$. Les idéaux maximaux de $L^1(\Gamma, E)$ sont exactement les idéaux $\mathscr{M}_x$ $(x \in \mathbf{Z}_p)$.*

Le noyau de la transformation de Fourier $\mathscr{F}_E$ est donc le radical (de Jacobson) $\mathscr{R}_E$ de l'algèbre $L^1(\Gamma, E)$, c'est-à-dire l'intersection des idéaux maximaux de cette algèbre.

Preuve. — Nous rappelons la démonstration de ce résultat, dû à SCHIKHOF, dans le cas où $E \supset K_\infty$. Nous utiliserons le résultat suivant :

LEMME 7. — *Soit k un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique, complet, et soit Ω une extension algébrique de k. Toute norme de k-algèbre sur Ω est supérieure ou égale à la valeur absolue sur Ω prolongeant celle de k.*

Preuve. — On peut supposer Ω de degré fini sur k. La norme $\|\ \ \|$ sur Ω est alors équivalente à la valeur absolue $|\ \ |$: il existe donc un nombre réel $A > 0$ tel que $\|x\| \geqslant A\,|x|$ pour tout $x \in \Omega$. S'il existait $x \in \Omega$ tel que $0 < \|x\| < |x|$, soit $\|x\| = \rho\,|x|$ où $0 < \rho < 1$, on aurait pour tout entier $n > 0$, $0 < \|x^n\| \leqslant \rho^n\,|x^n|$, ce qui est contraire au fait que $\|x^n\| \geqslant A\,|x^n|$. On a donc $|x| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in \Omega$.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2. Soit $\mathscr{M}$ un idéal maximal de $L^1(\Gamma, E)$ et soit φ la surjection canonique

$$L^1(\Gamma, E) \to L^1(\Gamma, E)/\mathscr{M}.$$

Pour tout $\gamma \in \Gamma$, désignons par e_γ l'élément de $L^1(\Gamma, E)$ défini par $e_\gamma(\gamma) = 1$, et, si $\delta \neq \gamma$, $e_\gamma(\delta) = 0$. L'application $\gamma \mapsto e_\gamma$ est un homomorphisme injectif multiplicatif de Γ dans $L^1(\Gamma, E)$, soit Γ' l'image de cet homomorphisme. Comme, pour tout $f \in L^1(\Gamma, E)$, on peut écrire $f = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\,e_\gamma$, le sous-corps $E(\varphi(\Gamma'))$ de $L^1(\Gamma, E)/\mathscr{M}$ est donc dense. Puisque tout élément de $\varphi(\Gamma')$ est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p, il existe un isomorphisme u de $E(\varphi(\Gamma'))$ dans $E K_\infty$. Puisque $|u(\alpha)| = |\alpha|$ pour tout $\alpha \in E(\varphi(\Gamma'))$, donc d'après le lemme 7, $|u(\alpha)| \leqslant \|\alpha\|$, où $\|.\|$ est la norme quotient dans $L^1(\Gamma, E)/\mathscr{M}$, l'isomorphisme u se prolonge donc par continuité, en un isomorphisme $\tilde{u}$ de $L^1(\Gamma, E)/\mathscr{M}$ dans l'adhérence $\overline{EK_\infty}$ de EK_∞ dans $\mathbf{C}_p$. Ainsi $\mathscr{M}$ est le noyau de l'homomorphisme d'algèbre $\psi = \tilde{u} \circ \varphi$, de $L^1(\Gamma, E)$ dans $\overline{EK_\infty}$. L'application de Γ dans $\overline{EK_\infty}$ $\gamma \to \psi(e_\gamma)$ étant un caractère, il existe $x \in \mathbf{Z}_p$ tel que $\psi(e_\gamma) = \gamma^x$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, donc $\psi(f) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma^x = \hat{f}(x)$. Ainsi, $\mathscr{M} = \mathscr{M}_x$.

Il reste à montrer qu'effectivement, pour chaque $x \in \mathbf{Z}_p$, l'idéal $\mathscr{M}_x$ est maximal. D'après ce qui précède, $\mathscr{M}_x$ est contenu dans un idéal maximal $\mathscr{M}_y$. Soit $L^1[\Gamma, E]$ la sous-algèbre de $L^1(\Gamma, E)$, formée des fonctions à support fini, c'est-à-dire, l'algèbre du groupe Γ, et soient

$$\mathscr{M}'_x = \mathscr{M}_x \cap L^1[\Gamma, E], \qquad \mathscr{M}'_y = \mathscr{M}_y \cap L^1[\Gamma, E].$$

Dans $L^1[\Gamma, E]$, l'idéal $\mathscr{M}'_x$ est maximal, car c'est le noyau de l'homomorphisme de $L^1[\Gamma, E]$ dans EK_∞, $f \mapsto \hat{f}(x)$, homomorphisme dont l'image est un sous-corps de EK_∞. On a donc $\mathscr{M}'_x = \mathscr{M}'_y$, et si l'on désigne par $\mathscr{F}[x]$ et $\mathscr{F}[y]$ les images respectives des homomorphismes $f \mapsto \hat{f}(x)$, $f \mapsto \hat{f}(y)$ de $L^1[\Gamma, E]$ dans EK_∞, il existe donc un E-isomorphisme w de $\mathscr{F}[x]$ dans $\mathscr{F}[y]$ tel que $w(\hat{f}(x)) = \hat{f}(y)$ pour tout $f \in L^1[\Gamma, E]$. Comme cet isomorphisme est isométrique pour la valeur absolue, il se prolonge par continuité en un isomorphisme $\tilde{w}$ de $\overline{\mathscr{F}[x]}$ dans $\overline{\mathscr{F}[y]}$, et $\tilde{w}(\hat{f}(x)) = \hat{f}(y)$ pour toute $f \in L^1(\Gamma, E)$. Ainsi $\mathscr{M}_x = \mathscr{M}_y$.

Remarquons que si $E \not\supset K_\infty$, seul l'idéal maximal $\mathscr{M}_0$ est de codimension 1 dans $L^1(\Gamma, E)$. On a $\mathscr{F}[0] = E$, et si $x \neq 0$, $\mathscr{F}[x] = EK_\infty$. Remarquons aussi que $\mathscr{M}_x = \mathscr{M}_y$ si, et seulement si, $v(x) = v(y)$, et si, pour $x \neq 0$, l'application $\gamma \mapsto \gamma^{x/y}$ de Γ dans lui-même est la restriction d'un E-automorphisme de EK_∞.

Pour poursuivre notre étude, nous devrons utiliser le fait que E est l'adhérence d'une extension algébrique L de $\mathbf{Q}_p$. Cela est conséquence du théorème de Tate-Sen-Ax que nous rappelons.

Désignons par Ω_p la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$.

THÉORÈME 5 ([3], [15]). — *Soit H un groupe de $\mathbf{Q}_p$-automorphismes de Ω_p, et soit $\tilde{H}$ le groupe d'automorphismes de $\mathbf{C}_p$ obtenu en prolongeant à $\mathbf{C}_p$, par continuité, les éléments de H. Le corps des invariants de $\tilde{H}$ est l'adhérence du corps des invariants de H.*

COROLLAIRE. — *Tout sous-corps fermé E de $\mathbf{Q}_p$, est l'adhérence dans $\mathbf{C}_p$ d'une extension algébrique L de $\mathbf{Q}_p$.*

Preuve. — Soit $L = E \cap \Omega_p$. Tout L-automorphisme σ de Ω_p se prolonge, par raison de linéaire disjonction, en un E-automorphisme de $E\,\Omega_p$, qui se prolonge lui-même encore, par continuité, en un E-automorphisme de $\mathbf{C}_p$. Autrement dit, E est inclus dans le corps des invariants du groupe $\widetilde{\mathrm{Gal}}\,(\Omega_p/L)$ (où $\mathrm{Gal}\,(\Omega_p/L)$ est le groupe des L-automorphismes de Ω_p). Donc, d'après le théorème 5, on a $E \subset \bar{L}$, et par suite $E = \bar{L}$.

Nous dirons qu'*une extension algébrique L de $\mathbf{Q}_p$ est de différente nulle sur un sous-corps M de L si* $\sup\,(v\,(\mathscr{D}_{\Lambda/M})) = +\infty$, où Λ décrit l'ensemble des extensions de degré fini de M, contenues dans L (la notation $\mathscr{D}_{\Lambda/M}$ désignant la différente de Λ sur M et $v\,(\mathscr{D}_{\Lambda/M}) = \inf_{\alpha \in \mathscr{D}_{\Lambda/M}} v\,(\alpha)$).

Nous allons maintenant démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *Soit L une extension algébrique de $\mathbf{Q}_p$, contenue dans $\mathbf{C}_p$, et soit $E = \bar{L}$. La transformation de Fourier $\mathscr{F}_E : L^1\,(\Gamma, E) \to \mathscr{C}\,(\mathbf{Z}_p, \overline{EK_\infty})$ est injective si, et seulement si, L n'est pas de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$.*

Dans le cas où L est de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$, la transformation de Fourier $\mathscr{F}_E$ définit, par passage au quotient, une isométrie de $L^1\,(\Gamma, E)/\mathscr{R}_E$ sur une sous-algèbre de $\mathscr{C}\,(\mathbf{Z}_p, \overline{EK_\infty})$. De plus, $\mathscr{R}_E$ est l'adhérence de l'idéal $\mathscr{N}_E$ des nilpotents de $L^1\,(\Gamma, E)$, mais $\mathscr{N}_E \neq \mathscr{R}_E$.

Remarquons que le cas où $E \supset K_\infty$ est inclus dans le cas où L est de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$ (car si $\bar{L} \supset K_\infty$, alors $L \supset K_\infty$, ainsi qu'il résulte immédiatement du théorème 5).

Pour démontrer le théorème 6, nous utiliserons les résultats algébriques développés dans le paragraphe suivant.

2.2. *Propriétés des traces.* — Pour tout sous-corps M de $\mathbf{C}_p$ et toute extension M' de M, de degré fini, la notation $\mathrm{Tr}_{M'/M}$ désigne la forme M-linéaire *trace sur M'*.

Remarquons tout d'abord que, si $p \neq 2$, K_∞ est une extension de K_1 (resp. de K_2 si $p = 2$), de groupe de Galois isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. Pour tout entier $n > 0$, et pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(K_\infty/K_n)$ il existe un unique élément $\alpha_\sigma \in 1 + p^n\,\mathbf{Z}_p$ tel que $\sigma\,(\gamma) = \gamma^{\alpha_\sigma}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, et l'application $\sigma \mapsto \alpha_\sigma$ est un isomorphisme de $\mathrm{Gal}\,(K_\infty/K_n)$ sur le groupe multiplicatif $1 + p^n\,\mathbf{Z}_p$. Or l'application de $\mathbf{Z}$ dans $1 + p\,\mathbf{Z}$ (resp. $1 + 4\,\mathbf{Z}$, si $p = 2$), $x \mapsto (1+p)^x$ (resp. $x \mapsto 5^x$) se prolonge par continuité en un isomorphisme du groupe additif $\mathbf{Z}_p$ sur le groupe multiplicatif $1 + p\,\mathbf{Z}_p$, si $p \neq 2$ (resp. $1 + 4\,\mathbf{Z}_2$ si $p = 2$). Ainsi, dans tous les cas, le groupe $\mathrm{Gal}\,(K_\infty/K_2)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$, et les seuls sous-corps de K_∞, contenant K_2, sont donc K_∞ et les K_n ($n \geqslant 2$). Donc si $LK_2 \not\supset K_\infty$, on a $(LK_2) \cap K_\infty = K_n$, où $n \geqslant 2$. Considérons d'abord le cas suivant.

2.2 (*a*) *Le cas où L n'est pas de différente nulle sur* $\mathbf{Q}_p$. — Pour démontrer le théorème 6 dans ce cas, nous utiliserons l'énoncé suivant :

PROPOSITION 3. — *Soit L une extension algébrique de* $\mathbf{Q}_p$ (*contenue dans* $\mathbf{C}_p$), *de différente non nulle. Soit* $(LK_2) \cap K_\infty = K_n$. *Pour tout entier* $s \geqslant n$, *l'application* T_s *de* LK_∞ *dans* LK_s, *définie par*

$$T_s = \lim \operatorname{inj}_{N \geqslant s} \frac{1}{p^{N-s}} \operatorname{Tr}_{LK_N/LK_s},$$

est une forme LK_s-*linéaire continue.*

Cette forme linéaire se prolonge donc par continuité en une forme $\overline{LK_s}$-linéaire sur $\overline{LK_\infty}$. Nous noterons encore T_s ce prolongement, qui est donc un projecteur continu $\overline{LK_s}$-linéaire de $\overline{LK_\infty}$ sur $\overline{LK_s}$, tel que $T_s(\xi) = 0$ pour $\xi \in \Gamma - \Gamma_s$.

Preuve. — Remarquons tout d'abord que, pour tout s, LK_s est de différente non nulle sur K_s. En effet, toute sous-extension M de LK_s sur K_s, de degré fini, est contenue dans une extension de la forme ΛK_s, où Λ est une sous-extension de L, de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$. On a alors

$$v(\mathscr{D}_{M/K_s}) \leqslant v(\mathscr{D}_{\Lambda K_s/K_s}).$$

Or

$$\mathscr{D}^{-1}_{\Lambda K_s/K_s} \cap \Lambda \subset \mathscr{D}^{-1}_{\Lambda/\Lambda \cap K_s}.$$

Ainsi, si d est entier tel que $v(\mathscr{D}_{\Lambda/\mathbf{Q}_p}) \leqslant d$, donc *a fortiori* $v(\mathscr{D}_{\Lambda/\Lambda \cap K_s}) \leqslant d$, on a

$$v(\mathscr{D}_{\Lambda K_s/K_s}) \leqslant d.$$

Comme $LK_2 \not\supset K_\infty$ car LK_2 est de différente non nulle sur K_2, on a donc $LK_2 \cap K_\infty = K_n$ où $n \geqslant 2$. Pour $s \geqslant n$, LK_s est linéairement disjointe de K_∞ sur K_s.

Soit alors $N \geqslant s \geqslant n$.

$$\begin{array}{ccc} LK_s & \to & LK_N \\ | & & | \\ M & \to & MK_N \\ | & & | \\ K_s & \to & K_N \end{array}$$

Soit $d \in \mathbf{N}$ tel que, pour toute sous-extension M de LK_s sur K_s, de degré fini, on ait

$$v(\mathscr{D}_{M/K_s}) \leqslant d.$$

Comme

$$v(\mathscr{D}_{MK_N/M})+v(\mathscr{D}_{M/K_s}) = v(\mathscr{D}_{MK_N/K_N})+v(\mathscr{D}_{K_N/K_s}),$$

on a donc

$$v(\mathscr{D}_{MK_N/M}) \geqslant v(\mathscr{D}_{K_N/K_s})-v(\mathscr{D}_{M/K_s}) \geqslant N-s-d.$$

Alors, pour tout $x \in MK_N$, tel que $v(x) \geqslant 0$, $x/p^{N-s-d} \in \mathscr{D}^{-1}_{MK_N/M}$, donc

$$v(\mathrm{Tr}_{LK_N/LK_s}(x)) = v(T_{MK_N/M}(x)) \geqslant N-s-d;$$

ce qui démontre la proposition 3.

Considérons maintenant :

2.2 (*b*) *Le cas où L est de différente nulle sur* $\mathbf{Q}_p$. — Pour démontrer le théorème 6 dans ce cas, nous utiliserons le résultat algébrique suivant :

PROPOSITION 4. — *Soit L une extension algébrique de* $\mathbf{Q}_p$ *(contenue dans* $\mathbf{C}_p$*), de différente nulle. Pour tout entier* $N > 0$, *on a*

$$v(\mathscr{D}_{LK_{N+1}/LK_N}) = 0 \ (^1).$$

Preuve. — Remarquons que soit $LK_{N+1} = LK_N$ (cas trivial), soit LK_N est linéairement disjoint de K_{N+1} sur K_N. La proposition 4 résulte alors de l'énoncé plus précis suivant.

PROPOSITION 4 *bis*. — *Soit* Λ *une extension de degré fini de* K_N, *linéairement disjointe de* K_{N+1}. *Soit* α *un entier* $\geqslant 2$. *Supposons que* $v(\mathscr{D}_{\Lambda/K_N}) \geqslant 2\alpha$. *Alors* $v(\mathscr{D}_{\Lambda K_{N+1}/\Lambda}) \leqslant 1/p^{\alpha-1}$.

Preuve. — Quelques lemmes sont nécessaires.

LEMME 8. — *Soit* $\xi_N \in \Gamma_N - \Gamma_{N-1}$. *On a, pour tout* $x \in \Lambda$,

$$v(x^p-\xi_N) \leqslant \frac{p}{p-1}.$$

Preuve. — On peut supposer $v(x) = 0$. Soit $\xi_{N+1} \in K_{N+1}$ tel que $\xi^p_{N+1} = \xi_N$. L'élément $y = \xi_{N+1}-x$ de ΛK_{N+1} est racine du polynôme

$$Y^p+pxY^{p-1}+\ldots+\binom{p}{k}x^{p-k}Y^k+\ldots+px^{p-1}Y+x^p-\xi_N, \tag{32}$$

(1) On peut en fait démontrer que, pour toute extension algébrique M de $\mathbf{Q}_p$, de différente nulle, et pour toute extension de degré fini N de M, on a $v(\mathscr{D}_{N/M}) = 0$ [5].

et ce polynôme est irréductible sur Λ car Λ et K_{N+1} sont linéairement disjointes sur K_N. Toutes les racines de ce polynôme (dans $\Lambda\, K_{N+1}$) sont donc de valuation $v(x^p-\xi_N)/p$. Supposons que $v(x^p-\xi_N) > 0$.

Soit y une racine dans $\Lambda\, K_{N+1}$ du polynôme (32). Écrivons

$$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}x^{p-k}y^k = -(x^p-\xi_N+y^p). \tag{33}$$

Comme on a, pour $1 < k \leqslant p-1$,

$$v\left(\binom{p}{k}x^{p-k}y^k\right) > v\left(\binom{p}{1}x^{p-1}y\right) = 1+\frac{v(x^p-\xi_N)}{p},$$

donc

$$v(x^p-\xi_N+y^p) = 1+\frac{v(x^p-\xi_N)}{p}$$

Or, comme $v(y^p) = v(x^p-\xi_N)$, donc

$$v(x^p-\xi_N+y^p) \geqslant v(x^p-\xi_N),$$

on en déduit l'inégalité $v(x^p-\xi_N) \leqslant p/(p-1)$.

LEMME 9. — *Supposons qu'il existe $x \in \Lambda$, tel que*

$$\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p^{\alpha-1}(p-1)} \leqslant v(x^p-\xi_N) \leqslant \frac{p}{p-1}. \tag{34}$$

Alors

$$v(\mathscr{D}_{\Lambda K_{N+1}/\Lambda}) \leqslant \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Preuve. — Soit $\rho \in \Lambda$ tel que $v(\rho) = v(x^p-\xi_N)-1$ ($\rho = x^p-\xi_N)/p$, si l'on veut).

L'élément $z = (\xi_{N+1}-x)/\rho$ de $\Lambda\, K_{N+1}$ est racine du polynôme unitaire irréductible sur Λ

$$g(Z) = \frac{1}{\rho^p}((\rho Z+x)^p-\xi_N).$$

Comme $v(\xi_{N+1}-x) = v(\xi_N-x^p)/p \geqslant v(\rho)$, on a $v(z) \geqslant 0$, donc :

$$v(\mathscr{D}_{\Lambda K_{N+1}/\Lambda}) \leqslant v(g'(z)) \quad \text{d'après [16].}$$

Or $g'(z) = (p/\rho^{p-1})\,\xi_{N+1}^{p-1}$, donc :

$$v(g'(z)) = p-(p-1)\,v(x^p-\xi_N) \leqslant \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Ainsi

$$v(\mathscr{D}_{\Lambda K_{N+1}/\Lambda}) \leqslant \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Nous allons démontrer la proposition 4 *bis* en construisant un élément $x \in \Lambda$ satisfaisant (34) (lemme 9).

Soit I l'extension non ramifiée, maximale, de $\mathbf{Q}_p$, contenue dans Λ, et soit $I' = IK_N$, qui est l'extension non ramifiée maximale de K_N contenue dans Λ. Soit θ une uniformisante de Λ, et soit π l'uniformisante $\pi = \xi_N - 1$ de K_N.

L'élément θ est racine d'un polynôme d'Eisenstein sur I' de la forme

$$h(X) = \pi(a_0 + \ldots + a_{\mu-1} X^{\mu-1}) + X^{\mu},$$

où $v(a_i) \geqslant 0$ et $v(a_0) = 0$.

On a

$$v(\mathscr{D}_{\Lambda/K_N}) = v(\mathscr{D}_{\Lambda/I'}) = v(h'(\theta)).$$

Comme les nombres $v(ia_i\, \theta^{i-1} + v(\pi)$ $(1 \leqslant i < \mu,\ a_i \neq 0)$, et $v(\mu\, \theta^{\mu-1})$ sont deux à deux distincts, on a donc, si $v(\mathscr{D}_{\Lambda/K_N}) \geqslant 2\alpha$,

$$v(ia_i \theta^{i-1}) + v(\pi) \geqslant 2\alpha \qquad \text{et} \qquad v(\mu\theta^{\mu-1}) \geqslant 2\alpha,$$

ce qui implique que $v(a_i) \geqslant \alpha$ pour $1 \leqslant i < \mu$, $i \not\equiv 0 \pmod{p^{\alpha}}$, et $\mu \equiv 0 \pmod{p^{\alpha}}$. On peut ainsi écrire le polynôme $h(X)$ sous la forme

$$h(X) = \pi(b_0 + b_1 X^{p^{\alpha}} + \ldots + b_{r-1} X^{(r-1)p^{\alpha}}) + X^{rp^{\alpha}} + p^{\alpha} R(X),$$

où $b_i \in \mathcal{O}_{I'}$, $v(b_0) = 0$, $R(X) \in \mathcal{O}_{I'}[X]$ (pour tout sous-corps M de $\mathbf{C}_p$, *la notation* $\mathcal{O}_M$ *désigne l'anneau de valuation* de M).

De la même façon, θ est racine d'un polynôme d'Eisenstein sur I, de la forme

$$l(X) = p(c_0 + c_1 X^{p^{\alpha}} + \ldots + c_{s-1} X^{(s-1)p^{\alpha}}) + X^{sp^{\alpha}} + p^{\alpha} S(X),$$

où $c_i \in \mathcal{O}_I$, $v(c_0) = 0$, et $S(X) \in \mathcal{O}_I[X]$.

LEMME 10. — *Il existe des polynômes* $P(X)$ *et* $Q(X)$, *à coefficients dans* $\mathcal{O}_I$, *tels que :*

$$p \equiv \theta^{sp^{\alpha}} P(\theta^{p^{\alpha}}) \pmod{p^{\alpha}}, \tag{35}$$

$$\pi \equiv \theta^{rp^{\alpha}} Q(\theta^{p^{\alpha}}) \pmod{p^{\alpha}}. \tag{36}$$

Preuve. — La forme du polynôme $l(X)$ montre que

$$p(c_0 + c_1 \theta^{p^{\alpha}} + \ldots + c_{s-1} \theta^{(s-1)p^{\alpha}}) \equiv -\theta^{sp^{\alpha}} \pmod{p^{\alpha}}.$$

Or, comme $v(c_0) = 0$, l'inverse de $c_0 + c_1 \theta^{p^\alpha} + \ldots + c_{s-1} \theta^{(s-1)p^\alpha}$ peut s'écrire, $\bmod p^{\alpha-1}$, comme $-P(\theta^{p^\alpha})$, où $P(X) \in \mathcal{O}_I[X]$. D'où (35).

De la même façon, il existe un polynôme $Q_0(X) \in \mathcal{O}_{I'}[X]$ tel que

$$\pi \equiv \theta^{rp^\alpha} Q_0(\theta^{p^\alpha}) \pmod{p^\alpha}.$$

Le polynôme $Q_0(X)$ peut s'écrire $Q_0(X) = Q_1(X) + \pi Q_2(X)$ où $Q_1(X) \in \mathcal{O}_I[X]$ et $Q_2(X) \in \mathcal{O}_{I'}[X]$.

Ainsi :

$$\pi \equiv \theta^{rp^\alpha}(Q_1(\theta^{p^\alpha}) + \pi Q_2(\theta^{p^\alpha})) \pmod{p^\alpha}.$$

Montrons que, pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe deux polynômes $Q_{1,k}(X) \in \mathcal{O}_I[X]$ et $Q_{2,k}(X) \in \mathcal{O}_{I'}[X]$ tels que

$$\pi \equiv \theta^{rp^\alpha}(Q_{1,k}(\theta^{p^\alpha}) + \pi\theta^{krp^\alpha} Q_{2,k}(\theta^{p^\alpha})) \pmod{p^\alpha}. \tag{37}$$

En effet, par récurrence, on déduit aussitôt de (37) :

$$\pi \equiv \theta^{rp^\alpha}(Q_{1,k}(\theta^{p^\alpha}) + \theta^{(k+1)rp^\alpha}(Q_{1,k}(\theta^{p^\alpha})$$
$$+ \pi\theta^{krp^\alpha} Q_{2,k}(\theta^{p^\alpha}))\, Q_{2,k}(\theta^{p^\alpha})) \pmod{p^\alpha}.$$

Posant

$$Q_{2,k}(X) = Q'_k(X) + \pi Q''_k(X),$$

où $Q'_k(X) \in \mathcal{O}_I[X]$ et $Q''_k(X) \in \mathcal{O}_{I'}[X]$, on en déduit (37), pour l'indice $k+1$,

$$Q_{1,k+1}(X) = Q_{1,k}(X)(1 + X^{(k+1)r} Q'_k(X)),$$
$$Q_{2,k+1}(X) = X^{kr}(Q_{2,k}(X))^2 + Q_{1,k}(X) Q''_k(X).$$

Il suffit alors de prendre k suffisamment grand pour obtenir (36).

LEMME 11. — *Pour tout polynôme $W(X) \in \mathcal{O}_I[X]$, il existe un polynôme $\tilde{W}(X) \in \mathcal{O}_I[X]$ tel que*

$$(\tilde{W}(X))^p \equiv W(X^p) \pmod{p\,\mathcal{O}_I[X]}. \tag{38}$$

Preuve. — En effet, pour tout $w \in \mathcal{O}_I$, il existe $\tilde{w} \in \mathcal{O}_I$ tel que $\tilde{w}^p \equiv w \pmod{p}$ puisque I est *non ramifiée* sur $\mathbf{Q}_p$. Alors si

$$W(X) = w_0 + w_1 X + \ldots + w_m X^m,$$

on prend $\tilde{W}(X) = \tilde{w}_0 + \tilde{w}_1 X + \ldots + \tilde{w}_m X^m$.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 3 *bis*. On construit par récurrence une suite finie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant \alpha}$ d'éléments de Λ, possédant les propriétés suivantes :

(39) $$x_i = T_i(\theta^{p^{\alpha-i}});$$

(40) $$x_i^p \equiv 1+\pi+\theta^{s(p^\alpha+p^{\alpha-1}+\ldots+p^{\alpha-i+1})}\, U_i(\theta^{p^{\alpha-i}}) \qquad (\bmod p^\alpha),$$

où $T_i(X)$ et $U_i(X)$ sont des polynômes à coefficients dans $\mathcal{O}_I$.

On part de $x_1 = 1+\theta^{rp^{\alpha-1}}\,\tilde{Q}(\theta^{p^{\alpha-1}})$, où $Q(X)$ est le polynôme du lemme 10. On a

$$x_1^p = 1+\theta^{rp^\alpha}\, Q(\theta^{p^\alpha})+p\, V(\theta^{p^{\alpha-1}}),$$

où $V(X) \in \mathcal{O}_I[X]$. D'après le lemme 10, on a alors

$$x_1^p \equiv 1+\pi+\theta^{sp^\alpha}\, P(\theta^{p^\alpha})\, V(\theta^{p^{\alpha-1}}) \qquad (\bmod p^\alpha).$$

Par récurrence, supposons donné $x_i \in \Lambda$ satisfaisant à (39) et (40). Posons

$$x_{i+1} = x_i-\theta^{s(p^{\alpha-1}+\ldots+p^{\alpha-i})}\,\tilde{U}_i(\theta^{p^{\alpha-i-1}}).$$

L'élément x_{i+1} est bien de la forme $T_{i+1}(\theta^{p^{\alpha-i-1}})$ (39) et

$$\begin{aligned} x_{i+1}^p = {} & x_i^p-\theta^{s(p^\alpha+\ldots+p^{\alpha-i+1})}\, U_i(\theta^{p^{\alpha-i}}) \\ & +p\,\theta^{s(p^{\alpha-1}+\ldots+p^{\alpha-i})}\, V_i(\theta^{p^{\alpha-i-1}}), \end{aligned}$$

où $V_i(X) \in \mathcal{O}_I[X]$.

On a donc

$$x_{i+1}^p \equiv 1+\pi+p\,\theta^{s(p^{\alpha-1}+\ldots+p^{\alpha-i})}\, V_i(\theta^{p^{\alpha-i-1}}) \qquad (\bmod p^\alpha).$$

Mais, d'après le lemme 10, on peut écrire

$$x_{i+1}^p \equiv 1+\pi+\theta^{s(p^\alpha+\ldots+p^{\alpha-i})}\, P(\theta^{p^\alpha})\, V_i(\theta^{p^{\alpha-i-1}}) \qquad (\bmod p^\alpha),$$

ce qui est bien la forme (40).

On construit donc ainsi une suite $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant\alpha}$ de Λ, satisfaisant (39) et (40).

La relation (40), appliquée à x_α, donne alors, puisque $\alpha \geqslant 2$,

$$v(x_\alpha^p-\xi_N) \geqslant \frac{s(p^\alpha+\ldots+p)}{sp^\alpha} = \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p^{\alpha-1}(p-1)}.$$

C.Q.F.D.

La proposition 4 va nous permettre de construire une forme $\bar{L}$-linéaire sur $\overline{LK_\infty}$ permettant de « projeter » des propriétés dans $L^1(\Gamma, \overline{LK_\infty})$ sur des propriétés analogues dans $L^1(\Gamma, \bar{L})$.

On peut traduire la proposition 4 par l'inclusion

$$\mathscr{M}_{LK_N} \subset \mathrm{Tr}_{LK_{N+1}/LK_N}(\mathscr{O}_{LK_{N+1}}) \subset \mathscr{O}_{LK_N},$$

la notation $\mathscr{M}_{LK_N}$ désignant l'idéal maximal de l'anneau de valuation $\mathscr{O}_{LK_N}$ (l'une de ces inclusions étant d'ailleurs une égalité).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc une suite $\eta = (\eta_N)_{N \geqslant 1}$, où $\eta_N \in LK_N$, $|\eta_N| < 1+\varepsilon$,

$$\mathrm{Tr}_{LK_{N+1}/LK_N}(\eta_{N+1}) = \eta_N \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}_{LK_1/L}(\eta_1) = 1$$

(on peut prendre $\eta_1 = 1/[LK_1 : L]$, on a alors $|\eta_1| = 1$ puisque $[LK_1 : L] < p$).

PROPOSITION 5. — *La suite des applications* $x \mapsto \mathrm{Tr}_{LK_N/L}(\eta_N x)$ $(N \geqslant 1)$ *est un systeme inductif d'applications, dont la limite inductive* t_η *est un projecteur L-linéaire continu de* LK_∞ *sur L, de norme au plus* $1+\varepsilon$.

Ce résultat est évident. L'application t_η se prolonge en un projecteur $\overline{L}$-linéaire continu de $\overline{LK_\infty}$ sur $\overline{L}$, de norme $\leqslant 1+\varepsilon$. Nous notons encore t_η ce prolongement, qu'on prolonge ensuite en un projecteur $\overline{L}$-linéaire, t_η, de $L^1(\Gamma, \overline{LK_\infty})$ sur $L^1(\Gamma, \overline{L})$, de norme $\leqslant 1+\varepsilon$, en posant, pour $f \in L^1(\Gamma, LK_\infty)$, $t_\eta(f) = t_\eta \circ f$.

2.3. *Démonstration du théorème* 6

2.3 (*a*) *Le cas où L n'est pas de différente nulle sur* $\mathbf{Q}_p$. — On reprend les notations du paragraphe 2.2 (*a*).

Soit $f \in L^1(\Gamma, E)$ telle que $\hat{f} = 0$. Soit $s \geqslant n$, et soit $x \in \mathbf{Z}_p$, $x \neq 0$. Posons $v(x) = t$. Appliquons T_s à la relation $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\, \gamma_x = 0$. Puisque $T_s(\xi) = \xi$ pour $\xi \in \Gamma_s$, et $T_s(\xi) = 0$ pour $\xi \in \Gamma - \Gamma_s$, on a donc

$$\textstyle\sum_{\gamma \in \Gamma_{s+t}} f(\gamma)\gamma^x = 0.$$

Ainsi, pour tout entier $r \geqslant 0$, pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$, tel que $v(x) \leqslant r$, et pour tout entier $N \geqslant n+r$, on a donc

$$\textstyle\sum_{\gamma \in \Gamma_N} f(\gamma)\gamma^x = 0. \tag{41}$$

Soient ε_r et f_N les fonctions de $L^1(\Gamma, E)$, définies par

$$\varepsilon_r(\gamma) = \begin{cases} \dfrac{1}{p^r} & \text{si} \quad \gamma \in \Gamma_r, \\ 0 & \text{si} \quad \gamma \notin \Gamma_r \end{cases}$$

et

$$f_N(\gamma) = \begin{cases} f(\gamma) & \text{si} \quad \gamma \in \Gamma_N, \\ 0 & \text{si} \quad \gamma \notin \Gamma_N. \end{cases}$$

Comme la restriction de la transformation de Fourier à $L^1[\Gamma, E]$ est injective, la relation (41) implique que

$$f_N = f_N \star \varepsilon_r, \tag{42}$$

i. e.

$$f(\gamma) = \frac{1}{p^r} \sum_{\delta \in \Gamma_r} f(\gamma\delta^{-1}), \tag{42'}$$

pour tout $\gamma \in \Gamma_N$. Ainsi f est constante modulo Γ_r pour tout r, et comme f tend vers zéro à l'infini, cela implique que $f = 0$.

2.3 (*b*) *Le cas où L est de différente nulle sur* $\mathbf{Q}_p$. — Avec les notations du paragraphe 2.2 (*b*), établissons tout d'abord le résultat suivant :

LEMME 12. — *Pour toute fonction* $f \in L^1(\Gamma, \overline{EK_\infty})$, *on a*

$$\| \widehat{t_\eta(f)} \| \leqslant \| \hat{f} \| (1+\varepsilon). \tag{43}$$

Preuve. — Par raison de densité, on peut se restreindre à $f \in L^1[\Gamma, LK_N]$. Soit $s \in \mathbf{N}^*$, et soit f une application de Γ dans LK_N, nulle en dehors de Γ_s. Pour tout élément σ du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(LK_N/L)$ et, pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$, on a, puisque σ est une isométrie,

$$\left| \sum_{\gamma \in \Gamma_s} \sigma(f(\gamma))(\sigma(\gamma))^x \right| \leqslant \| \hat{f} \|.$$

Mais comme il existe $\alpha \in \mathbf{Z}_p$, tel que $v(\alpha) = 0$ et que $\sigma(\gamma) = \gamma^\alpha$ pour tout $\gamma \in \Gamma_s$, on a

$$\left| \sum_{\gamma \in \Gamma_s} \sigma(f(\gamma))\gamma^x \right| \leqslant \| \hat{f} \| \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{Z}_p,$$

donc aussi

$$\left| \sum_{\gamma \in \Gamma_s} \sigma(\eta_N)\sigma(f(\gamma))\gamma^x \right| \leqslant (1+\varepsilon) \| \hat{f} \|$$

et

$$\left| \sum_{\gamma \in \Gamma_s} \sum_{\sigma \in \mathrm{Gal}(LK_N/L)} \sigma(\eta_N f(\gamma))\gamma^x \right| \leqslant (1+\varepsilon) \| \hat{f} \|,$$

c'est-à-dire

$$\left| \sum_{\gamma \in \Gamma_s} t_\eta(f(\gamma))\gamma^x \right| \leqslant (1+\varepsilon) \| \hat{f} \|. \tag{43}$$

COROLLAIRE. — *Avec les mêmes notations, si* $\hat{f} = 0$, *alors* $\widehat{t_\eta(f)} = 0$.

Comme t_η est un projecteur, on a donc $t_\eta(\mathscr{R}_{\overline{EK}_\infty}) = \mathscr{R}_E$.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 6 (*b*). Pour tout entier $d \geqslant 2$, désignons par M_d (resp. M'_d) l'ensemble des fonctions

$f \in L^1(\Gamma, \overline{EK_\infty})$ (resp. $f \in L^1(\Gamma, E)$) pour lesquelles il existe une suite strictement croissante (s_k) d'entiers > 0 et une suite (f_k) de fonctions de $L^1(\Gamma, \overline{EK_\infty})$ (resp. $L^1(\Gamma, E)$), tendant vers f, telle que f_k soit nulle en dehors de Γ_{s_k}, et que

$$\lim_{k \to +\infty} \| \hat{f}_k \| p^{s_k/d} = 0.$$

Soit $M = \bigcup_d M_d$, et $M' = \bigcup_d M'_d$. Le lemme 12 montre que $t_\eta(M) = M'$. Soient $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}_E$ les noyaux de la transformation de Fourier dans $L^1(\Gamma, \overline{EK_\infty})$ et $L^1(\Gamma, E)$ respectivement. D'après le corollaire du lemme 12, comme M est dense dans $\mathscr{R}$, M' est donc dense dans $\mathscr{R}_E$. De plus, d'après le lemme 1, les éléments de M' sont nilpotents, et $M' \neq \{0\}$ car, d'après la démonstration du théorème 1, il existe $f \in M$ tel que $f(1) = 1$, alors $t_\eta(f(1)) = 1$, donc $t_\eta(f) \neq 0$.

2.4. *L'image de la transformation de Fourier.* — Le lemme 12 permet également d'établir la dernière partie du théorème 6.

PROPOSITION 6. — *Avec les conditions du théorème* 6 (*b*), *la transformation de Fourier* $\mathscr{F}_E : L^1(\Gamma, E) \to \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{EK_\infty})$ *définit par passage au quotient, une isométrie de* $L^1(\Gamma, E)/\mathscr{R}_E$ *dans une sous-E-algèbre de* $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{EK_\infty})$.

Preuve. — Soit $f \in L^1(\Gamma, E)$. D'après le théorème 3, il existe $g \in L^1(\Gamma, \overline{EK_\infty})$ telle que $\hat{g} = \hat{f}$ et $\| g \| \leqslant (1+\varepsilon) \| \hat{f} \|$. Puisque $f - g \in \mathscr{R}$ et $t_\eta(f) = f$, on a donc $\widehat{t_\eta(g)} = \hat{f}$. Or

$$\| t_\eta(g) \| \leqslant (1+\varepsilon) \| g \| \leqslant (1+\varepsilon)^2 \| \hat{f} \|,$$

ce qui prouve le résultat cherché.

La méthode de démonstration du théorème 4 s'applique alors aussitôt pour prouver le résultat suivant.

THÉORÈME 4 *bis*. — *Dans les conditions du théorème* 6 (*b*), *le noyau* $\mathscr{R}_E$ *de la transformation de Fourier,* $\mathscr{F}_E : L^1(\Gamma, E) \to \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{EK_\infty})$, *est distinct de l'idéal* $\mathscr{N}_E$ *des éléments nilpotents de l'algèbre* $L^1(\Gamma, E)$.

La proposition 6 permet de déterminer l'image de la transformation de Fourier $\mathscr{F}_E$.

PROPOSITION 7. — *Avec les notations du théorème* 6, *soit* φ *l'homomorphisme du groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(LK_\infty/L)$ *dans le groupe multiplicatif* $\mathbf{Z}_p^* = \mathbf{Z}_p - p\,\mathbf{Z}_p$, *tel que, pour tout* $\sigma \in \mathrm{Gal}(LK_\infty/L)$, *et pour tout* $\gamma \in \Gamma$, $\sigma(\gamma) = \gamma^{\varphi(\sigma)}$.

Soit C la sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{EK_\infty})$, *formée des fonctions g, telles que* $\sigma(g(x)) = g(\varphi(\sigma)x)$ *pour tout* $\sigma \in \mathrm{Gal}(LK_\infty/L)$ *et tout* $x \in \mathbf{Z}_p$.

L'image B de la transformation de Fourier $\mathscr{F}_E$ *est contenue dans C, et y est dense. On a* $B \neq C$, *dans le cas où L est de différente non nulle sur* $\mathbf{Q}_p$, et $B = C$ dans le cas où L est de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$.

Preuve. — Précisons bien que, dans cet énoncé, σ est prolongé par continuité à $\overline{EK_\infty}$.

L'inclusion $B \subset C$ est immédiate, puisque, pour toute $f \in L^1(\Gamma, E)$, pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(LK_\infty/L)$, et tout $x \in \mathbf{Z}_p$, on a

$$\sigma(\hat{f}(x)) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma^{\varphi(\sigma)x} = \hat{f}(\varphi(\sigma)x).$$

Montrons que $\bar{B} = C$. Remarquons tout d'abord que C est l'adhérence dans $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{EK_\infty})$ du sous-ensemble C' des fonctions localement constantes, à valeurs dans LK_∞, appartenant à C. Or $C' = \mathscr{F}_E(L^1[\Gamma, L])$. En effet, la restriction de la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ à $L^1[\Gamma, LK_\infty]$ est une bijection de $L^1[\Gamma, LK_\infty]$ sur l'algèbre des fonctions localement constantes, à valeurs dans LK_∞, $\mathscr{L}_c(\mathbf{Z}_p, LK_\infty)$.

Soit $g \in C'$. Il existe $f \in L^1[\Gamma, LK_\infty]$ telle que $\hat{f} = g$. La condition que $\sigma(\hat{f}(x)) = \hat{f}(\varphi(\sigma)x)$ pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$, et pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(LK_\infty/L)$, montre que $\sigma(f) = f$, donc que f est à valeurs dans L. Ainsi

$$C = \overline{\mathscr{F}_E(L^1[\Gamma, L])} = \overline{\mathscr{F}_E(L^1(\Gamma, E))}.$$

Dans le cas (b), la conclusion résulte alors immédiatement de la proposition 6.

Dans le cas (a), elle résulte du fait que $\mathscr{F}_E$ est injective et continue, mais non bicontinue. Il serait donc contraire au théorème de Banach que, dans ce cas, l'image de $\mathscr{F}_E$ soit l'algèbre complète C.

Pour terminer, citons des exemples de chacun des cas (a) et (b).

Exemples.

$(a\,1)$ L est d'indice de ramification sauvage sur $\mathbf{Q}_p$ fini.

$(a\,2)$ $L = \bigcup L_n$, où $L_1 = K_1$, π_1 est une uniformisante de L_1 et $L_n = L_{n-1}(\pi_n)$ où π_n est racine du polynôme $X^p + \pi_{n-1}X + \pi_{n-1}$.

Alors L est sauvagement ramifiée sur $\mathbf{Q}_p$, mais n'est pas de différente nulle.

$(b\,1)$ L est une $\mathbf{Z}_p$-extension abélienne de K_n complètement ramifiée et linéairement disjointe de K_∞ sur K_n [18].

(b 2) $L = \bigcup_{n \geqslant 0} L_n$, où $L_n = \mathbf{Q}_p(\sqrt[p^n]{1-\xi})$, et où ξ est une racine primitive p-ième de l'unité ($L_0 = K_1$). Alors L est linéairement disjointe de K_∞ sur K_1, et est de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$.

3. Produits tensoriels de corps valués

La disjonction entre les cas (a) et (b) du paragraphe précédent peut s'exprimer en termes de *produits tensoriels*. Soient L et M deux extensions algébriques de $\mathbf{Q}_p$ (contenues dans $\mathbf{C}_p$). La *norme tensorielle* sur le compositum LM est définie de la façon suivante : Tout élément $z \in LM$ s'écrit sous la forme

(44) $$z = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \qquad \text{où} \quad x_i \in L, \quad y_i \in M.$$

On pose
$$\| z \| = \inf(\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} | x_i y_i |),$$
où la borne inférieure est prise, pour toutes les écritures de z, de la forme (44)

La norme tensorielle est une norme de L et de M-espace vectoriel sur LM. On a $|z| \leqslant \|z\|$ pour tout $z \in LM$, et pour $z \in L \cup M$, $|z| = \|z\|$.

La norme tensorielle est la plus grande norme de L-espace vectoriel sur LM, prolongeant la valeur absolue sur M.

Soit K un sous-corps de L et de M. Rappelons qu'il existe une application K-linéaire φ du produit tensoriel $L \otimes_K M$ *sur* LM telle que $\varphi(x \otimes y) = xy$ pour tout $(x, y) \in L \times M$. La norme tensorielle sur LM correspond alors par φ à la norme quotient de la norme tensorielle sur $L \otimes_K M$ par $\ker \varphi$. D'où la terminologie.

Remarquons d'ailleurs que si L et M sont *linéairement disjointes* sur K, l'application φ est injective, i. e. que LM, peut *s'identifier* au produit tensoriel de $L \otimes_K M$, l'application bilinéaire canonique de $L \times M$ dans LM étant alors $(x, y) \mapsto xy$.

PROPOSITION 8. — *Soit L une extension algébrique de $\mathbf{Q}_p$ (contenue dans $\mathbf{C}_p$), telle que $LK_2 \not\supset K_\infty$. La norme tensorielle sur LK_∞, comme compositum de L et K_∞ sur $L \cap K_\infty$, est équivalente à la valeur absolue si, et seulement si, L n'est pas de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$.*

Cet énoncé sera conséquent du suivant :

PROPOSITION 9. — *Soient L et M deux extensions algébriques de $\mathbf{Q}_p$, contenues dans $\mathbf{C}_p$, linéairement disjointes sur un sous-corps K, d'indice de ramification sur $\mathbf{Q}_p$ fini. Soit u une forme K-linéaire continue, non nulle, sur M. Le prolongement $\tilde{u}$ de u, en une forme L-linéaire sur LM, est continue* *pour la valeur absolue sur LM si, et seulement si, cette dernière est équivalente à la norme tensorielle sur LM.*

Preuve. — Nous faisons la convention de désigner la norme des formes linéaires sur un espace vectoriel normé, sur un corps valué, par le même symbole que la norme de cet espace vectoriel, par exemple :

$$|u| = \sup_{x \in M,\, x \neq 0} |u(x)|/|x|.$$

Le prolongement $\tilde{u}$ est toujours continu, et de norme $|u|$, relativement à la norme tensorielle sur LM. Si cette norme est équivalente à la valeur absolue, la forme L-linéaire $\tilde{u}$ est donc continue pour la valeur absolue sur LM.

Réciproquement, supposons u non nulle, et $\tilde{u}$ continue pour la valeur absolue. Soit N une sous-extension de M sur K, de degré fini, contenant un élément $\alpha \neq 0$ tel que $|u(\alpha)| = |u|\,|\alpha|$. Pour tout $x \in N$, soit u_x la forme K-linéaire sur N définie par $u_x(y) = u(xy)$ pour tout $y \in N$. L'application $x \mapsto u_x$ de N, dans son dual N' de K-espace vectoriel, est une bijection. De plus, on a

$$|u_x| = |u|.|x|. \tag{45}$$

Pour toute forme K-linéaire v sur N, désignons par $\tilde{v}^N$ le prolongement de v en une forme L-linéaire sur LN. On a

$$|\tilde{u}_x^N| \leqslant |\tilde{u}|.|x|. \tag{46}$$

On déduit de (45) et (46) que, pour toute forme K-linéaire v sur N, on a

$$|\tilde{v}^N| \leqslant \frac{|\tilde{u}|}{|u|}|v|. \tag{47}$$

Or, puisque K est valué discrètement, il existe une base $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de N, comme K-espace vectoriel, telle que tout $y \in N$ s'écrive

$$y = \textstyle\sum_{i=1}^n y_i a_i,$$

avec $y_i \in K$ et $1/p \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i| \leqslant |y| \leqslant \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |y_i|$.

Soient π_i les formes K-linéaires sur N, définies par $\pi_i(y) = y_i$.

La famille $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est aussi une L-base de LN : Tout $z \in LN$ s'écrit

$$z = \textstyle\sum_{i=1}^n z_i a_i, \qquad \text{où} \quad z_i \in L,$$

et on a $z_i = \tilde{\pi}_i^N(z)$.

Comme $|\pi_i| \leqslant p$, on a donc, d'après (47), $|z_i| \leqslant (p\,|\tilde{u}|/|u|)|z|$, et comme $\|z\| \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|$, on a donc

$$\|z\| \leqslant p\frac{|\tilde{u}|}{|u|}|z|.$$

Ainsi, la norme tensorielle sur LM est équivalente à la valeur absolue.

La proposition 8 résulte alors immédiatement des propositions 9, 3 et 5. En effet, supposons tout d'abord que $L \cap K_\infty = K_n$ ($n \geqslant 2$). Soit τ la forme K_n-linéaire continue sur K_∞ :

$$\tau = \lim\operatorname{inj}_{N \geqslant n} \frac{1}{p^{N-n}} \operatorname{Tr}_{K_N/K_n}$$

dont le prolongement τ en une forme L-linéaire sur LK_∞ est

$$\tilde{\tau} = \lim\operatorname{inj}_{N \geqslant n} \frac{1}{p^{N-n}} \operatorname{Tr}_{LK_N/L}.$$

Or, d'après les propositions 3 et 5, le prolongement $\tilde{\tau}$ est continu pour la valeur absolue sur LK_∞ si, et seulement si, L n'est pas de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$.

$$\begin{array}{ccc} L & \rightarrow & LK_\infty \\ \uparrow & & \uparrow \\ K_n & \rightarrow & K_\infty \end{array}$$

On peut toujours se ramener au cas où $L \cap K_\infty = K_n$ en remplaçant L par LK_2, grâce au lemme suivant :

LEMME 13. – *Soient L et M deux extensions de $\mathbf{Q}_p$, contenues dans $\mathbf{C}_p$, et soit L' une extension de L, contenue dans LM. Si L' est de degré fini sur L, les normes tensorielles sur LM, comme compositum de L et M, et comme compositum de L' et M, sont équivalentes.*

Preuve. – Soient $\|\;\|$ et $\|\;\|'$ les normes tensorielles respectives sur LM, comme compositum de L et M, respectivement L' et M. Remarquons que, pour tout $z \in LM$,

$$\|z\| = \inf(\sup_{1 \leqslant i \leqslant m} \|x_i\| . |y_i|)$$

et

$$\|z\|' = \inf(\sup_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i| . |y_i|),$$

où l'on considère toutes les écritures de z de la forme $z = \sum_{i=1}^m x_i y_i$, où $x_i \in L'$ et $y_i \in M$.

Il suffit alors de remarquer que la norme induite par $\| \;\|$ sur L' est équivalente à la valeur absolue. En effet, la norme $\| \;\|$ coïncide avec la norme induite par la norme tensorielle sur $\overline{L}M$, induisant sur $\overline{L}L'$ une norme équivalente à la valeur absolue.

Remarquons par ailleurs que, dans tous les cas, si f est une fonction de $L^1(\Gamma, \overline{L})$ telle que, pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$, on ait $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma^x = 0$ *dans le complété* $L \hat{\otimes} K_\infty$ *pour la norme tensorielle,* alors $f = 0$, comme on le voit aisément par projection sur K_n, et en se ramenant ainsi au théorème 6 (a) (*cf.* proposition 12).

Nous allons maintenant étudier les complétés pour la norme tensorielle.

PROPOSITION 10. — *Soit K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, et soient L et M deux extensions algébriques de K, contenues dans $\mathbf{C}_p$. Si L et M sont linéairement disjointes sur K, il en est de même de $\overline{L}$ et $\overline{M}$.*

Cet énoncé résultera du suivant :

LEMME 14. — *Soit G un groupe d'automorphismes d'un corps Ω, et soit K le corps des invariants de G. Soient L et M deux sous-corps de Ω contenant K. Si, pour tout $\sigma \in G$, il existe un L-isomorphisme σ' de LM dans Ω tel que $\sigma'_M = \sigma_M$ (σ'_M et σ_M désignant les restrictions à M de σ et σ'), alors L et M sont linéairement disjointes sur K.*

Preuve. — Soit V un sous-K-espace vectoriel de M, de dimension finie. On sait (théorème d'Artin [4]), que les restrictions à V des éléments de G, forment une base du Ω-espace-vectoriel $\mathscr{L}_K(V, \Omega)$ des applications K-linéaires de V dans Ω. Ainsi, toute application K-linéaire de V dans Ω admet un prolongement en une application L-linéaire de LV dans Ω, puisqu'il en est ainsi des restrictions à V des éléments de G. Cela prouve que L et M sont linéairement disjoints sur K.

Preuve de la proposition 10. — Soit G le groupe des K-automorphismes continus de $\mathbf{C}_p$. D'après le théorème 5 et son corollaire, comme $K = \overline{K \cap \Omega_p}$, on a $G = \widetilde{\mathrm{Gal}}(\Omega_p/K \cap \Omega_p)$, et K est donc le corps des invariants de G.

Soit $\sigma \in G$. La restriction σ_M de σ à M peut se prolonger en un L-isomorphisme $\tilde{\sigma}_M$ de LM dans $\mathbf{C}_p$, puisque L et M sont linéairement disjoints sur K. Mais $\tilde{\sigma}_M$ est continu (pour la valeur absolue) puisque LM est algébrique sur K, et par suite $\tilde{\sigma}_M$ peut se prolonger en un $\overline{L}$-isomorphisme continu σ', de $\overline{L}\overline{M}$ dans $\mathbf{C}_p$. Puisque $\sigma_M = \sigma'_M$, on a aussi $\sigma_{\overline{M}} = \sigma'_{\overline{M}}$. D'après le lemme 14, $\overline{L}$ et $\overline{M}$ sont donc linéairement disjoints sur K.

Nous allons étudier les algèbres de Banach $L \hat{\otimes} M$, complétées de LM pour la norme *tensorielle*. Remarquons qu'avec les hypothèses de la proposition 10, LM est dense dans $\overline{L.M}$ pour la norme tensorielle sur $\bar{L}.\bar{M}$, et la norme tensorielle sur LM coïncide avec la norme induite par la norme tensorielle sur $\bar{L}.\bar{M}$. On a donc $\bar{L} \hat{\otimes} \bar{M} = L \hat{\otimes} M$.

Nous désignerons maintenant par $L \otimes M$ le compositum LM, muni de la norme tensorielle, la notation LM, sans autre précision, indiquera que l'on considère le corps topologique LM, pour la valeur absolue (corps dont un complété est l'adhérence $\overline{LM}$ de LM dans $\mathbf{C}_p$).

PROPOSITION 11. — *Soit K un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$, et soient L et M deux extensions algébriques de K, contenues dans $\mathbf{C}_p$, linéairement disjointes sur K. Le complété $L \hat{\otimes} M$ est une algèbre locale, dont l'idéal maximal est le noyau de l'homomorphisme $h : L \hat{\otimes} M \to \overline{LM}$ obtenu par prolongement par continuité de l'identité $L \otimes M \to LM$.*

Preuve. — Soit $\mathscr{M}$ un idéal maximal de l'algèbre $L \hat{\otimes} M$, soit k le corps résiduel $L \hat{\otimes} M/\mathscr{M}$ muni de la norme quotient, notée $\|.\|$, de la norme tensorielle sur $L \hat{\otimes} M$. Soit $s : L \hat{\otimes} M \to k$, la surjection canonique. Comme LM est un corps, la restriction de s à LM est injective, et définit donc un isomorphisme (algébrique) s_1 de LM sur un sous-corps k' de k, dense dans k. L'isomorphisme réciproque $s_1^{-1} : k' \to LM$ est continu car la valeur absolue sur LM est inférieure ou égale à la norme image par s_1^{-1} de la norme de k' (lemme 7). On peut donc prolonger s_1^{-1} en un isomorphisme continu ψ de k *dans* $\overline{LM}$. Par densité, on a $\psi \circ s = h$, donc $\mathscr{M} = \ker h$

$$\begin{tikzcd}
L\otimes M \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[d] \arrow[ddr, "s_1"] & & LM \arrow[d] \\
L\hat{\otimes} M \arrow[rr, "h"] \arrow[dddr, "s"] & & \overline{LM} \\
 & k' \arrow[uur, "s_1^{-1}"] \arrow[d] & \\
 & k \arrow[uur, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

Nous allons maintenant étudier plus particulièrement l'algèbre $L \hat{\otimes} K_\infty$. Soit L une extension algébrique de $\mathbf{Q}_p$, contenue dans $\mathbf{C}_p$, telle que $LK_2 \not\supset K_\infty$. Pour tout $f \in L^1(\Gamma, \bar{L})$, soit $\hat{f}^{\otimes}$ la fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$, à valeurs dans $L \hat{\otimes} K_\infty$, définie par $\hat{f}^{\otimes}(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\, \gamma^x$.

L'application de $L^1(\Gamma, \bar{L})$ dans l'algèbre $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, L \hat{\otimes} K_\infty)$, $\mathscr{F}^\otimes : f \to \hat{f}^\otimes$, est un homomorphisme continu (de $\bar{L}$-algèbres). Soit h l'homomorphisme de $L \hat{\otimes} K_\infty$ dans $\overline{LK_\infty}$ obtenu par prolongement par continuité de id : $L \otimes K_\infty \to LK_\infty$. Nous désignerons également par h l'application de $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, L \hat{\otimes} K_\infty)$ dans $\mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{LK_\infty})$: $g \mapsto h \circ g$. On a $h \circ \mathscr{F}^\otimes = \mathscr{F}$:

$$\begin{tikzcd} L^1(\Gamma, \bar{L}) \arrow[r, "\mathscr{F}^\otimes"] \arrow[dr, "\mathscr{F}"'] & \mathbf{C}(\mathbf{Z}_p, L \hat{\otimes} K_\infty) \arrow[d, "h"] \\ & \mathbf{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{LK_\infty}) \end{tikzcd}$$

PROPOSITION 12. — *L'homomorphisme $\mathscr{F}^\otimes$ est injectif.*

Preuve. — Soit $(b_i)_{i \in \mathbf{N}}$ une base de L sur $L \cap K_\infty$ telle que tout $x \in \bar{L}$ s'écrive de façon unique comme somme d'une série convergente :

$$x = \sum_i x_i b_i \qquad \text{où} \quad x_i \in L \cap K_\infty,$$

et

$$\frac{1}{p} \sup_i |x_i| \leqslant |x| \leqslant \sup_i |x_i|.$$

Tout $z \in L \hat{\otimes} K_\infty$ s'écrit alors, de façon unique, comme somme d'une série convergente,

$$z = \sum_i z_i b_i \qquad \text{ou} \quad z_i \in \bar{K}_\infty,$$

et

$$\frac{1}{p} \sup_i |z_i| \leqslant \|z\| \leqslant \sup_i |z_i|.$$

Soit $f \in L^1(\Gamma, \bar{L})$, et soient f_i les fonctions de $L^1(\Gamma, L \cap K_\infty)$ telles que $f = \sum_i b_i f_i$. On a alors :

$$\hat{f}^\otimes = \sum_i b_i \hat{f}_i.$$

Si $\hat{f}^\otimes = 0$, on a $\hat{f}_i = 0$ pour chaque i, donc $f_i = 0$ (théorème 6 (a)), puisque f_i est à valeurs dans $L \cap K_\infty$. Ainsi $f = 0$.

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 7. — *Soit L une extension algébrique de $\mathbf{Q}_p$, contenue dans $\mathbf{C}_p$, telle que $LK_2 \not\supset K_\infty$, et de différente nulle sur $\mathbf{Q}_p$. L'algèbre $L \hat{\otimes} K_\infty$ n'est pas un corps. L'homomorphisme canonique $h : L \hat{\otimes} K_\infty$ dans $\overline{LK_\infty}$, est* *surjectif, et définit par passage au quotient une isométrie du quotient* $L \hat{\otimes} K_\infty/\mathscr{M}$ *de* $L \hat{\otimes} K_\infty$ *par son idéal maximal* $\mathscr{M}$, *sur* $\overline{LK_\infty}$. *L'idéal* $\mathscr{N}'$ *des nilpotents de* $L \hat{\otimes} K_\infty$ *est dense dans* $\mathscr{M}$, *mais* $\mathscr{N}' \neq \mathscr{M}$.

Preuve. — L'homomorphisme h n'est pas injectif, car sinon, comme la transformation de Fourier $\mathscr{F}^{\otimes} : L^1(\Gamma, \overline{L}) \to \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, L \hat{\otimes} K_\infty)$ est injective, la transformation de Fourier $\mathscr{F} : L^1(\Gamma, \overline{L}) \to \mathscr{C}(\mathbf{Z}_p, \overline{LK_\infty})$ le serait aussi, contrairement au théorème 6 (*b*).

Pour tout $\alpha \in \overline{LK_\infty}$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $f \in L^1(\Gamma, \overline{L})$ telle que $\hat{f}(1) = \alpha$ et $\|f\| \leqslant |\alpha|(1+\varepsilon)$.

En effet, soit φ l'homomorphisme injectif de $\widetilde{\mathrm{Gal}}(LK_\infty/L)$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{Z}_p - p\,\mathbf{Z}_p$ tel que, pour tout $\sigma \in \widetilde{\mathrm{Gal}}(LK_\infty/L)$, et tout $\gamma \in \Gamma$, on ait $\sigma(\gamma) = \gamma^{\varphi(\sigma)}$. La fonction g, définie sur $\mathbf{Z}_p$ par $g(\varphi(\sigma)) = \sigma(\alpha)$ pour tout $\sigma \in \widetilde{\mathrm{Gal}}(LK_\infty/L)$ et $g(x) = 0$ si $x \notin \mathrm{im}\,\varphi$, est continue, et, d'après les propositions 6 et 7, il existe $f \in L^1(\Gamma, \overline{L})$ telle que $\hat{f} = g$ et $\|f\| \leqslant \|g\|(1+\varepsilon)$. On a donc $\hat{f}(1) = \alpha$ et $\|f\| \leqslant |\alpha|(1+\varepsilon)$. Alors

$$h(\hat{f}^{\otimes}(1)) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \|\hat{f}^{\otimes}(1)\| \leqslant |\alpha|(1+\varepsilon),$$

ainsi h est surjectif, et définit une isométrie de $L \hat{\otimes} K_\infty/\mathscr{M}$ sur $\overline{LK_\infty}$.

Montrons maintenant que $\mathscr{N}' = \mathscr{M}$. Soit θ l'homomorphisme de $L^1(\Gamma, \overline{L})$ dans $L \hat{\otimes} K_\infty$, défini par

$$\theta(f) = \hat{f}^{\otimes}(1) = \textstyle\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma.$$

Cet homomorphisme est surjectif puisque tout élément $x \in K_\infty$ peut s'écrire

$$\textstyle\sum_{\gamma \in \Gamma} f_0(\gamma)\gamma \qquad \text{où} \quad f_0 \in L^1(\Gamma, \mathbf{Q}_p) \quad \text{et} \quad \|f_0\| \leqslant p|x|.$$

Donc tout $z \in L \hat{\otimes} K_\infty$ peut s'écrire

$$\textstyle\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)\gamma \qquad \text{où} \quad f \in L^1(\Gamma, L) \quad \text{et} \quad \|f\| \leqslant p\|z\|.$$

Montrons que $\mathscr{M}$ est l'image par θ du radical $\mathscr{R}$ de $L^1(\Gamma, \overline{L})$. Soit χ la fonction caractéristique (dans $\mathbf{Z}_p$) de l'image par φ de $\widetilde{\mathrm{Gal}}(LK_\infty/L)$, et soit $\varepsilon \in L^1[\Gamma, K_\infty]$ telle que $\hat{\varepsilon} = \chi$. On voit que $\varepsilon \in L^1[\Gamma, L \cap K_\infty]$ (démonstration de la proposition 7), donc $\varepsilon \in L^1(\Gamma, \overline{L})$, et comme $\hat{\varepsilon}^{\otimes}(1) = \hat{\varepsilon}(1) = 1$, on a donc $\theta(f) = \theta(f \star \varepsilon)$ pour toute $f \in L^1(\Gamma, \overline{L})$. Or $f \star \varepsilon$ est nulle en dehors de $\mathrm{im}\,\varphi$. Si de plus $\theta(f) \in \mathscr{M}$ (c'est-à-dire si $\hat{f}(1) = 0$), on a, pour tout $\sigma \in \widetilde{\mathrm{Gal}}\,(LK_\infty/L)$,

$$\hat{f}(\varphi(\sigma)) = \sigma(\hat{f}(1)) = 0$$

et alors $\widehat{f\star\,\varepsilon} = 0$, c'est-à-dire que $f\star\,\varepsilon \in \mathscr{R}$. Ainsi, $\mathscr{M} = \theta\,(\mathscr{R})$. Comme l'idéal $\mathscr{N}$ des nilpotents de $L^1\,(\Gamma, \bar{L})$ est dense dans $\mathscr{R}$ (théorème 6), il en résulte que l'idéal $\mathscr{N}'$ des nilpotents de $L \hat{\otimes} K_\infty$ est dense dans $\mathscr{M}$.

Enfin, pour tout entier $d > 0$, il existe $f \in L^1\,(\Gamma, \bar{L})$ telle que $f^d = 0$ et $f^{d-1} \neq 0$ (lemme 6, et théorème 4 *bis*). Puisque $\mathscr{F}^{\otimes}$ est injectif, on a $(\hat{f}^{\otimes})^d = 0$ et $(\hat{f}^{\otimes})^{d-1} \neq 0$, il existe donc $z \in L \hat{\otimes} K_\infty$ tel que $z^d = 0$ et $z^{d-1} \neq 0$, ce qui prouve, d'après le lemme 6, que $\mathscr{N}' \neq \mathscr{M}$.

Remarquons que le noyau de l'homomorphisme θ est l'idéal principal de $L^1\,(\Gamma, \bar{L})$ engendré par $1-\varepsilon$. En effet, tout L-automorphisme σ de LK_∞ est continu, comme application de $L \otimes K_\infty$ dans $L \otimes K_\infty$, et se prolonge donc en un automorphisme $\sigma^{\otimes}$ de $\bar{L}$-algèbre de $L \hat{\otimes} K_\infty$. Comme, pour tout $\sigma \in \widetilde{\mathrm{Gal}}\,(LK_\infty/L)$ on a

$$\sigma^{\otimes}(\hat{f}^{\otimes}(1)) = \hat{f}^{\otimes}(\varphi(\sigma)),$$

il en résulte que, si $\hat{f}^{\otimes}(1) = 0$, la fonction $\hat{f}^{\otimes}$ est nulle sur im φ, et ainsi $\widehat{f\star\,\varepsilon^{\otimes}} = 0$, donc $f\star\,\varepsilon = 0$. L'algèbre $L \hat{\otimes} K_\infty$ est donc isomorphe à $L^1\,(\Gamma, \bar{L})/(1-\varepsilon)$ (en tant que $\bar{L}$-algèbre).

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Y.). — Interpolation p-adique, *Bull. Soc. math. France*, t. 92, 1964, p. 117-160.

[2] AMICE (Y.) et ESCASSUT (A.). — Une solution au problème de la non-Fourier-injectivité de $\mathbf{Z}_p$, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, 1974, série A, p. 583-585.

[3] AX (J.). — Zeros of polynomials over local fields. The Galois action, *J. of Algebra*, t. 15, 1970, p. 417-428.

[4] BOURBAKI (N.). — *Algèbre*, Chap. 5 : *Corps commutatifs*. 2e édition. — Paris, Hermann, 1959. (*act. scient. et ind.*, 1102; *Bourbaki*, 11).

[5] FRESNEL (J.). — Produit tensoriel topologique de corps valués, *Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux*, 1976/1977, n° 30.

[6] FRESNEL (J.) et DE MATHAN (B.). — Sur la transformation de Fourier p-adique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 277, 1973, série A, p. 711-714.

[7] FRESNEL (J.) et DE MATHAN (B.). — L'image de la transformation de Fourier p-adique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 278, série A, 1974, p. 653-656.

[8] FRESNEL (J.) et DE MATHAN (B.). — Transformation de Fourier p-adique, « *Journées arithmétiques* [1974. Bordeaux] », *Astérisque*, n° 24-25, 1975, p. 139-155.

[9] FUCHS (L.). — *Abelian groups*, 3rd edition. — Oxford, Pergamon Press, 1960 (*Pure and applied Mathematics*, 12).

[10] GUERRAOUI (M.). — Sur la dualité p-adique, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 275, série A, 1972, p. 1281-1283.

[11] GUERRAOUI (M.) et DE MATHAN (B.). — Dualité et transformation de Fourier p-adique, *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 1971/1972, n° 3.

[12] GUERRAOUI (M.) et DE MATHAN (B.). — Groupes p-réflexifs et transformation de Fourier p-adique. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 276, série A, 1973, p. 423-426.

[13] PARMENTER (M. M.) and SEHGAL (S. K.). — Non-archimedean group algebras, *J. of Number Theory*, t. 7, 1975, p. 376-384.

[14] SCHIKHOF (W. H.). — *Non-archimedean harmonic analysis*, Thèse, Nijmegen, 1967.

[15] SEN (S.). — On automorphisms of local fields, *Annals of Math.*, t. 90, 1969, p. 33-46.

[16] SERRE (J.-P.). — *Corps locaux*, 2e édition. — Paris, Hermann, 1968 (*Act. scient. et ind.*, 1296; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 8).

[17] SERRE (J.-P.). — *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques.* — Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

[18] TATE (J.). — p-divisible groups, « *Proceeding of a conference on local fields* [1966. Driebergen] », p. 158-183. — Berlin, Springer-Verlag, 1967.

[19] WOODCOCK (C. F.). — Fourier Analysis for p-adic Lipschitz functions, *J. London math. Soc.* (Series 2, t. 7) 1974, p. 681-693.

(Texte reçu le 19 septembre 1977.)

Jean FRESNEL et Bernard DE MATHAN,
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226,
U.E.R. Math et Inform. Univ. Bordeaux-I,
351, cours de la Libération,
33405 Talence Cedex.