BULLETIN DE LA S. M. F.

YVES LEJAN

Mesures associées à une forme de Dirichlet. Applications

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 61-112
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__61_0>

Bull. Soc. math. France
106, 1978, p. 61-112.

MESURES ASSOCIÉES A UNE FORME DE DIRICHLET. APPLICATIONS

PAR

YVES LEJAN

[Univ. Pierre-et-Marie-Curie, Paris]

RÉSUMÉ. — On développe la théorie de la mesure singulière, de la mesure d'équilibre et des mesures d'énergie associées à une forme de Dirichlet. Ces mesures sont intrinsèques (indépendantes du choix d'une mesure de base), ont une interprétation probabiliste précise, et permettent d'effectuer sur l'espace de Dirichlet des calculs du type « formule d'Ito » ou « condition de Ventcel' ». Elles permettent également une nouvelle approche des problèmes de balayage (Formule de Douglas) et de reconstruction.

Introduction

La première partie de ce travail consiste à reprendre, en la développant, l'étude des mesures associées à une forme de Dirichlet que nous avions brièvement menée dans l'exposé [22] : les notions de mesures d'équilibre et de mesure singulière sont connues depuis l'origine de la théorie [6]. Celle de mesure d'énergie a été dégagée par SILVERSTEIN [27] (dans le cas classique, la mesure d'énergie d'un élément f de l'espace de Dirichlet est $\| \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \|^2 \, dx$). Chacune des mesures ainsi introduites donne lieu à une interprétation probabiliste que l'on explicite. On sait, (*cf*, [14], [8]), qu'un processus de Markov peut être associé à une forme de Dirichlet régulière.

Il importe de remarquer que ces mesures ne dépendent pas du choix d'une mesure de base m telle que $\mathbf{H}$ s'injecte dans $L^2(X, m)$.

Nous n'introduisons une telle mesure que pour effectuer des calculs approchés et disposer, à l'aide du processus de Markov associé à la $L^2(m)$ résolvante, d'une interprétation probabiliste des résultats obtenus. (Le changement de mesure de base revenant à effectuer un changement de temps sur le processus, d'où la terminologie « mesure de vitesse » parfois employée pour m.) La mesure singulière décrit les sauts du processus (d'où la terminologie « mesure de Levy ».

La mesure d'équilibre, limite vague des mesures d'équilibre d'une suite croissante de compacts recouvrant l'espace, décrit la durée de vie du processus (d'où la terminologie « mesure de meurtre »).

Les mesures d'énergie $\gamma_a(f)$, associées à la partie locale d'une forme de Dirichlet a, appelées mesures d'énergie locale, vérifient les mêmes propriétés algébriques que $\|\overrightarrow{\text{grad}}\, f\|^2\, dx$.

Elles sont associées aux processus croissants de martingales-fonctionnelles additives continues. On établit un « lemme de domination » qui se révèle fort utile : si a et b sont deux formes de Dirichlet définies sur le même espace $\mathbf{H}$ telles que $a(f) \geqslant b(f)$ pour tout $f \in \mathbf{H}$, on a aussi $\gamma_a(f) \geqslant \gamma_b(f)$ pour tout $f \in \mathbf{H}$.

Dans le deuxième paragraphe, on montre comment ces mesures permettent divers calculs sur l'espace de Dirichlet. Le résultat fondamental, qui explicite la façon dont les fonctions de classe C^2 opèrent, est une formule analogue à celle d'Ito en théorie des martingales. Nous complétons la démonstration donnée en [22].

On obtient aussi une généralisation du théorème de Beurling et Deny donnant la structure des formes de Dirichlet C^1-régulières. On en déduit que les fonctions lipschitziennes de $C^1(R^n)$ nulles en 0 opèrent continûment sur tout espace de Dirichlet.

En utilisant le lemme de domination, on retrouve de manière très simple le résultat de Hamza donnant la structure des formes de Dirichlet symétriques dont le domaine contient l'espace de Sonolev H_0^1.

Le troisième paragraphe est divisé en trois sections. La première est consacrée à l'étude des mesures associées à la forme balayée sur un fermé. Si a est une forme de Dirichlet, et si H^M et $\hat{H}^M$ sont les noyaux de Poisson sur un fermé M associés à a et à sa transposée, la forme balayée de a sur M, notée a^M, est définie par l'identité $a^M(f, g) = a(H^M f, \hat{H}^M g)$. Le résultat essentiel est l'expression des mesures d'énergie locale associées à a^M. Celles-ci sont les restrictions à M des mesures d'énergie locale associées à a. On en déduit une généralisation de la formule de Douglas:

$$\int_D \|\overrightarrow{\text{grad}}\, f\|^2\, dx = \iint_{M \times M} (f(x) - f(y))^2\, d\theta(x, y)$$

connue pour un ouvert D de $\mathbf{R}^n$ à frontière régulière M et une fonction f harmonique sur D.

Dans la seconde section, on montre comment le résultat fondamental du deuxième paragraphe permet d'effectuer des calculs du type « condition frontière de Ventcel' » et « dérivation normale à M », sans supposer l'espace de base muni d'une structure de variété.

Enfin, dans la troisième section, on présente une nouvelle démonstration du théorème de construction établi en [21], et qui était du même type que ceux établis par FUKUSHIMA [16], KUNITA [19], et SILVERSTEIN [27].

Il s'agit essentiellement d'une classification de toutes les formes de Dirichlet ayant même restriction à un ouvert donné D et même noyaux de Poisson sur son complémentaire M. Cette classification se fait à l'aide des formes balayées sur M qui sont astreintes à vérifier certaines conditions, nécessaires et suffisantes pour être induites par une telle forme. Les conditions principales sont des minorations de leurs mesures singulières et de leurs mesures d'équilibre.

Cette nouvelle démonstration présente l'avantage de donner une version du théorème à la fois plus claire et plus générale (aucune mesure de base n'étant fixée). Elle est également plus directe, puisqu'elle évite l'emploi des résolvantes.

Les démonstrations qui figurent dans l'exposé [22] n'ont en général, pas été répétées. On se réfère aussi à certains calculs effectués dans un article précédent [21].

0. Généralités

Ce paragraphe est consacré à l'exposé de notions fondamentales. On s'est efforcé de présenter des définitions intrinsèques, indépendantes du choix d'une mesure de base. On reprend ainsi le point de vue de ANCONA dans [2].

0.1 Espaces fonctionnels

0.1.1. DÉFINITION. — Étant donnés un espace X, et une partie non vide $\mathscr{P}$ de $\mathscr{P}(X)$, stable par réunion dénombrable et héréditaire à gauche pour l'inclusion, on appelle *espace fonctionnel de base* $(X, \mathscr{P})$ un e. v. t.

hilbertisable **H** de classes modulo $\mathscr{P}$ de fonctions numériques réelles tel que :

Pour toute suite (f_n) d'éléments de **H** convergeant dans **H** vers un élément f, il existe une sous-suite f'_n de (f_n) convergeant « quasi partout » vers f (i. e. telle que, $\forall g \in f$, $\forall g_n \in f'_n$, $\exists A \in \mathscr{P}$ tel que

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = g(x) \text{ sur } X - A$$

(Cette définition est due à ARONSZAJN et SMITH [4].)

0.1.2. CONTRACTIONS. — Une contraction T est une transformation 1-lipschitzienne de **R** telle que $T(0) = 0$.

On dit qu'une contraction T opère sur **H** si, et seulement si,

(*a*) $\forall f \in \mathbf{H}$, $Tf \in \mathbf{H}$;

(*b*) il existe une norme hilbertienne $\| \;\|$ définissant la topologie de **H** telle que, $\forall f \in \mathbf{H}$, $\| Tf \| \leqslant \| f \|$.

Remarque. — Il suffit de vérifier les conditions (*a*) et (*b*) pour les éléments d'une partie dense quelconque de **H**.

Soit $\mathscr{D}$ une telle partie. Si $f \in \mathbf{H}$ et si f_n est une suite d'éléments de $\mathscr{D}$ convergeant vers f, il existe une sous-suite g_k de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que :

(i) $T g_k$ converge faiblement dans **H**;

(ii) $T g_k$ converge quasi partout vers Tf.

Alors, $u_n = (1/n) \sum_{k=1}^{n} T g_k$ est une suite de Cauchy dans **H** convergeant quasi partout, vers Tf, ce qui montre que $Tf \in \mathbf{H}$.

Enfin, on a

$$\| Tf \| \leqslant \lim_k \| Tg_k \| \leqslant \lim_k \| g \|_k = \| f \|.$$

Si la contraction-module opère sur **H**, c'est un opérateur continu sur **H** (*cf.* [2]).

Si la contraction-unité $f \to f^+ \wedge 1$ opère sur **H**, toutes les contractions opèrent continûment sur **H** (*cf.* [2]). On dit alors que **H** est un espace de Dirichlet de base $(X, \mathscr{P})$.

0.1.3. RÉGULARITÉ. — Si X est un espace l. c. d., et si $\mathscr{D}$ est un sous-espace uniformément dense de $C_K(X)$, nous dirons qu'un espace fonctionnel **H**, basé sur $(X, \mathscr{P})$, est $\mathscr{D}$-régulier si, et seulement si,

(*a*) $\mathscr{P}$ ne contient aucun ouvert non vide (tout élément de **H**, qui est la classe modulo $\mathscr{P}$ d'une fonction continue, est ainsi identifié à cette fonction);

(*b*) $\mathscr{D} \cap \mathbf{H}$ est dense dans **H** et uniformément dense dans $C_K(X)$.

0.1.4. Mesures d'énergie finie. — Étant donné un espace fonctionnel régulier **H**, on note $\mathscr{E}$ (**H**) l'espace des mesures de **H**-énergie finie sur X, i. e. des mesures de Radon μ dont la restriction à $C_K(X) \cap \mathbf{H}$ est continue pour la topologie de **H**, et qui donc définissent un élément du dual de **H**, noté μ^*.

Si **H** est stable par la contraction-module, $(\mathscr{E}^+(\mathbf{H}))^*$ est le polaire de $\mathbf{H}^+$, et, d'après le théorème du bipolaire, $(\mathscr{E}^+(\mathbf{H}))^*$ sépare les éléments de **H**.

Si la contraction-module opère sur **H**, et si μ appartient à $\mathscr{E}^+(\mathbf{H})$, l'application naturelle de $\mathbf{H} \cap C_K(X)$ dans $L^1(\mu)$ se prolonge en une application continue $f \to \bar{f}$ de **H** dans $L^1(\mu)$ telle que

$$\forall f \in \mathbf{H}, \quad \mu(\bar{f}) = \mu^*(f).$$

D'après le résultat précédent, on peut choisir μ de sorte que cette application soit injective.

0.1.5. Raffinements. — Étant donné un espace fonctionnel **H**, de base $(X, \mathscr{P})$, un espace fonctionnel $\mathbf{H}^*$ de base $(X, \mathscr{P}^*)$ est dit un raffinement de **H** si, et seulement si, il existe une bijection continue u de **H** sur $\mathbf{H}^*$ telle que, pour tout $f \in \mathbf{H}$, $u(f) \subseteq f$.

En particulier, $\mathscr{P}^* = u(0)$ est alors inclus dans $\mathscr{P}$.

Un espace fonctionnel, qui n'admet d'autre raffinement que lui-même, sera dit minimal.

Exemples :

Espaces $L^2(X, m)$ basés sur $(X, \mathscr{N}(m))$, où $\mathscr{N}(m)$ désigne la famille des ensembles m-négligeables.

Espaces de « fonctions précisées » associés aux espaces $H_0^1(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ (*cf.* [11]).

Considérons un espace fonctionnel régulier **H** basé sur $(X, \mathscr{P})$ sur lequel la contraction-module opère. On peut définir sur X une notion de capacité telle que, si $\tilde{\mathscr{P}}$ désigne la famille des ensembles de capacité extérieure nulle, appelés ensembles polaires (ou **H**-polaires s'il y a risque d'ambiguïté) :

(*a*) **H** admet un raffinement $\tilde{\mathbf{H}}$ basé sur $(X, \tilde{\mathscr{P}})$;

(*b*) un ensemble analytique est polaire si, et seulement si, il est μ-négligeable pour toute mesure $\mu \in \mathscr{E}^+(\mathbf{H})$ $(= \mathscr{E}^+(\tilde{\mathbf{H}}))$;

(*c*) $\tilde{\mathbf{H}}$ est formé de classes modulo $\tilde{\mathscr{P}}$ de fonctions quasi continues. (f est dite quasi continue si, et seulement si, il existe une suite décroissante d'ouverts ω_n de capacité tendant vers zéro telle que f soit continue sur ω_n^c pour tout n. Ce résultat est dû à DENY [10];

(d) $\tilde{\mathbf{H}}$ est un espace fonctionnel minimal.

Si μ est une mesure ne chargeant pas les polaires, et si $\mathbf{H} \subseteq L^1(\mu)$, $\mu \in \mathscr{E}^+(\mathbf{H})$. (On peut montrer que μ est limite d'une suite croissante de mesures de $\mathscr{E}^+(\mathbf{H})$. On conclut en appliquant le théorème de Banach-Steinhaus.)

0.1.6. HYPOTHÈSE. — Dans toute la suite, nous supposerons donner un espace l. c. d. X, et un espace fonctionnel régulier minimal $\mathbf{H}$ de base $(X, \mathscr{P})$ sur lequel la contraction-module opère.

On note $\mathbf{H}_b$ l'algèbre des éléments bornés de $\mathbf{H}$.

Si $\mathscr{P}'$ est une partie de $\mathscr{P}(X)$ contenant $\mathscr{P}$, et héréditaire à gauche pour l'inclusion, on ne distinguera pas dans les notations un élément de $\mathbf{H}$ de sa classe modulo $\mathscr{P}'$.

Exemple : $\mathscr{P}' = \mathscr{N}(\mu)$, $\mu \in \mathscr{E}^+(\mathbf{H})$.

0.1.7. RESTRICTION A UN OUVERT. — Soit D un ouvert de X. Si l'on pose $\mathbf{H}^D = \{f \in \mathbf{H}, f = 0 \text{ quasi partout sur } D^c\}$, $\mathbf{H}^D$ est un espace fonctionnel régulier minimal basé sur $(D, \mathscr{P} \cap \mathscr{P}(D))$ sur lequel la contraction-module opère (*cf.* [27], [21], § II.2).

Si $\mathbf{H}$ est un espace de Dirichlet, il en est de même de $\mathbf{H}^D$.

0.2. Théorie du potentiel

0.2.1. FORMES BILINÉAIRES. — Si a est une forme bilinéaire définie sur $\mathbf{H}$, et T une contraction laissant stable $\mathbf{H}$, on dit que T opère sur a si, et seulement si,

$$a(f+Tf, f-Tf) \geqslant 0, \qquad \forall f \in \mathbf{H} \quad (^1).$$

On note $\overline{\mathscr{A}}(\mathbf{H})$ ($\mathscr{A}(\mathbf{H})$) le cône convexe des formes bilinéaires positives et continues (continues et coercives) sur $\mathbf{H}$, sur lesquelles la contraction-module opère. On remarque que la contraction-module opère si, et seulement si, elle opère sur la forme transposée $\hat{a}$. On pose $a = (1/2)(a+\hat{a})$.

(1) *Remarque.* — Il suffit de vérifier cette identité lorsque f appartient à une partie dense de $\mathbf{H}$. En effet, il est facile de voir que la fonction $f \mapsto a(f+Tf, f-Tf)$ est s. c. s. (en fait, elle est continue, *cf.* [2]).

Si **H** est un espace de Dirichlet, on note $\mathscr{D}(\mathbf{H})$ ($\overline{\mathscr{D}}(\mathbf{H})$) le cône convexe des formes de $\mathscr{A}(\mathbf{H})$ ($\overline{\mathscr{A}}(\mathbf{H})$) telles que la contraction-unité opère sur a et $\hat{a}$.

Les éléments de $\mathscr{D}(\mathbf{H})$ sont appelés formes de Dirichlet (formes de Dirichlet générales) de domaine **H**.

0.2.2. POTENTIELS. — Nous considérons dans la suite une forme a appartenant à $\mathscr{A}(\mathbf{H})$. On peut associer une théorie du potentiel à a (*cf.* [9], [1], [3], [7]).

On note $\mathbf{P}_a$ le cône des a-potentiels

$$\mathbf{P}_a = \{f \in \mathbf{H},\ a(f, g) \geqslant 0,\ \forall g \in \mathbf{H}^+\}.$$

On note G ($\hat{G}$) l'opérateur potentiel qui établit une bijection entre $\mathscr{E}^+(\mathbf{H})$ et $\mathbf{P}_a$ ($\mathbf{P}_{\hat{a}}$).

Si D est un ouvert de X, on note a^D la restriction de a à $\mathbf{H}^D$, et G^D l'opérateur potentiel associé.

0.2.3. NOYAUX DE POISSON ET OPÉRATEURS DE BALAYAGE (*cf.* [21], § II). — Si M est un fermé de X, si D est son complémentaire, on définit sur **H** les opérateurs de Poisson H^M et $\hat{H}^M$ de la façon suivante : si $f \in \mathbf{H}$, $f - H^M f$ ($f - \hat{H}^M f$) est la a-projection (a-projection) de f sur $\mathbf{H}^D$. H^M et $\hat{H}^M$ sont continus sur **H**. Si f est un a-potentiel, $H^M f$ est la réduite de f sur M.

On montre sans difficulté que les opérateurs H^M et $\hat{H}^M$ induisent des noyaux positifs définis sur $\mathscr{B}^+(M)$ et à valeurs dans l'espace des classes de fonctions positives définies modulo $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}(D)$.

On définit les opérateurs de balayage Π^M et $\hat{\Pi}^M$ de la façon suivante : si ν est une mesure positive ne chargeant pas les polaires et si, pour tout $\Phi \in C_K(X)$, $H^M\ \Phi$ ($H^M\ \Phi$) appartient à $L^1(\nu)$, on pose

$$\Pi^M(\nu) = \nu\, \hat{H}^M (\hat{\Pi}^M(\nu) = \nu\, H^M).$$

Π^M et $\hat{\Pi}^M$ opèrent sur $\mathscr{E}(\mathbf{H})$.

0.2.4. FONCTIONS EXCESSIVES. — Notons $\mathscr{B}^+/\mathscr{P}$ le cône des fonctions boréliennes positives définies modulo $\mathscr{P}$.

$f \in \mathscr{B}^+/\mathscr{P}$ est dite a-excessive si, et seulement si, pour tout $p \in \mathbf{P}_a$, $f \wedge p \in \mathbf{P}_a$. 1 est a-excessive si, et seulement si, la contraction-unité opère sur a et laisse stable **H**. Si a est symétrique, **H** est alors un espace de Dirichlet.

Si f est a-excessive, pour tout fermé M de X, $H^M f$ est a-excessive et majorée par f.

0.2.5. FORME BALAYÉE (*cf.* [21], § II). — Si M est un fermé de X, on peut définir la forme bilinéaire a^M sur $\mathbf{H}$ par l'identité

$$\forall \Phi, \quad \Psi \in \mathbf{H}, \qquad a^M(\Phi, \Psi) = a(H^M \Phi, \hat{H}^M \Psi)$$
$$= a(H^M \Phi, H^M \Psi) = a(\hat{H}^M \Phi, \hat{H}^M \Psi).$$

a^M appartient à $\overline{\mathscr{A}}(\mathbf{H})$. En effet, pour tout $f \in \mathbf{H}$,

$$a^M(f^+, f) = a(\hat{H}^M(f^+), \hat{H}^M(f)) = a((\hat{H}^M f)^+, (H^M f)) \geqslant 0.$$

Nous appellerons a^M la forme balayée de a sur M. Remarquons que $\widehat{a^M} = (\hat{a})^M$.

L'introduction de la forme balayée conduit à la définition suivante : on pose $\mathbf{H}^M = \{ \Phi |_M, \Phi \in \mathbf{H} \}$. $\mathbf{H}^M$ est isomorphe à l'espace quotient $\mathbf{H}/\mathbf{H}^D$.

Si la « composante polaire » de M est vide, i. e. s'il n'existe pas d'ensemble polaire non vide $P \subseteq M$ tel que $M - P$ soit fermé, $\mathbf{H}^M$, muni de la topologie-quotient, est un espace fonctionnel régulier minimal de base $(M, \mathscr{P}_M)$ avec $\mathscr{P}_M = \{ M \cap P, P \in \mathscr{P} \}$.

La contraction-module opère sur $\mathbf{H}^M$. Si $\mathbf{H}$ est un espace de Dirichlet, il en est de même de $\mathbf{H}^M$.

a^M s'identifie naturellement à un élément de $\overline{\mathscr{A}}(\mathbf{H}^M)$. $\overline{\mathscr{A}}(\mathbf{H}^M)$, (si $\mathbf{H}$ est un espace de Dirichlet), $\overline{\mathscr{D}}(\mathbf{H}^M)$, s'identifie à un sous-cône de $\overline{\mathscr{A}}(\mathbf{H})$ ($\overline{\mathscr{D}}(\mathbf{H})$).

Si R^M est l'opérateur potentiel associé à a^M, on a la décomposition

$$G = G^D + H^M R^M \Pi^M.$$

$p \in \mathbf{H}^M$ est un a^M-potentiel si, et seulement si, $H^M p$ est un a-potentiel. On en déduit que si 1 est a-excessive, elle est a^M-excessive.

En particulier, si $\mathbf{H}$ est un espace de Dirichlet, si $a \in \mathscr{D}(\mathbf{H})$, $a^M \in \mathscr{D}(\mathbf{H}^M)$.

0.3. Mesure de base et processus de Markov

0.3.1. On a vu qu'on pouvait trouver $\mu \in \mathscr{E}^+(\mathbf{H})$ telle que $\mathbf{H}$ s'injecte continûment dans $L^1(\mu)$. On peut montrer, à partir de ce résultat, qu'il existe une mesure de Radon positive m telle que $\mathbf{H}$ s'injecte continûment dans $L^2(m)$ (*cf.* [3]).

Une telle mesure m n'est pas déterminée de manière unique. Dans la suite, nous en fixerons une qui permettra, d'une part d'effectuer des calculs approchés, d'autre part d'introduire le point de vue probabiliste.

0.3.2. Pour tout $a \in \mathscr{A}$ (**H**), pour tout $\alpha > 0$, on note G_α ($\hat{G}_\alpha$) l'opérateur potentiel associé à

$$a_\alpha = a + \alpha \langle \, . , \, . \, \rangle_{L^2(m)} .$$

On pose $G_\alpha(f.m) = G_\alpha(f)$. La $L^2(m)$-résolvante ainsi définie est fortement continue : on en déduit l'identité

$$\forall f \in \mathbf{H}, \quad a(f, f) = \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha \int (f - \alpha\, G_\alpha f) f \, dm \quad (cf. \text{ [7], [3]}).$$

La résolvante G_α se prolonge en une résolvante de noyaux de $\mathscr{B}^+/\mathscr{N}(m)$ dans $\mathscr{B}^+/\mathscr{P}$. $f \in \mathscr{B}^+/\mathscr{P}$ est a-excessive si, et seulement si, elle est G_α-surmédiane.

On définit de façon évidente les opérateurs ou les noyaux

$$H_\alpha^M, \ \hat{H}_\alpha^M, \ \hat{G}_\alpha^D, \ \hat{G}_\alpha^D, \ \Pi_\alpha^M, \ \hat{\Pi}_\alpha^M.$$

0.3.3. Si la contraction-unité opère sur a et laisse stable **H**, il existe un processus de Hunt $M = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, X_t, \Theta_t, \zeta, P_x)$ associé à a, i. e. à valeurs dans $X - N$, où $N \in \mathscr{P}$, et dont la résolvante V_α induit G_α sur $\mathscr{B}^+/\mathscr{P}$. Si M est un fermé de X, et si T_M désigne le temps d'entrée dans M, on a, $\forall \alpha \geq 0$, $\forall f \in \mathscr{B}^+$,

$$H_\alpha^M f = E_0(\exp(-\alpha\, T_M)\, 1_{(T_M < \zeta)}\, f(X_{T_M})), \quad \text{quasi partout}$$

($cf.$ [14], [27], [8], [21]).

1. Mesures canoniquement associées à une forme de Dirichlet régulière

1.1. Mesure singulière

Dans la suite, Δ désigne la diagonale du produit $X \times X$. a désigne un élément de $\overline{\mathscr{A}}$ (**H**).

1.1.1. Définition. — Soit σ_a la mesure de Radon positive, définie sur $X \times X - \Delta$ par l'identité

$$\forall f, g \in C_K(X) \cap \mathbf{H}, \qquad \text{tels que} \quad \operatorname{Supp}(f) \cap \operatorname{Supp}(g) = \varnothing,$$
$$\iint f(x)\, g(y)\, d\sigma_a(x, y) = -a(f, g).$$

σ_a est appelée la mesure singulière associée à a.

Remarques :

$\sigma_a(dx, dy) = \sigma_{\hat{a}}(dy, dx)$, $\sigma_{\tilde{a}} = (1/2)(\sigma_a + \sigma_{\hat{a}})$.

Si a est coercive, σ_a est la limite vague sur $X \times X - \Delta$ des mesures $\sigma_\alpha(dx, dy)$ définies par l'identité

$$\forall f, g \in C_K(X), \quad \int f(x).g(y)\, d\sigma_\alpha(x, y) = \alpha^2 \int G_\alpha f.g\, dm.$$

Nota bene. — $\sigma_\alpha \neq \sigma_{a_\alpha}$.

1.1.2. PROPOSITION. — *Soient f_1 et f_2 deux éléments de* **H** *tels que $f_1.f_2 = 0$. Soit $\tilde{f}_i$ un représentant quasi continu de f_i $(i = 1,2)$. $\tilde{f}_1(x)\tilde{f}_2(y)$ appartient alors à $L^1(\sigma_a)$, et on a l'identité*

$$\int_{X \times X - \Delta} \tilde{f}_1(x)\tilde{f}_2(y)\, d\sigma_a(x, y) = -a(f_1, f_2).$$

Nous avons déjà donné une démonstration de cette proposition dans l'exposé [22] (proposition 1).

Remarque. — On déduit facilement de cette proposition que la mesure σ_a ne charge pas les parties de $X \times X - \Delta$ dont la projection sur un des facteurs du produit $X \times X$ est polaire.

1.1.3. COROLLAIRE. — *Soient D un ouvert de X, et M son complémentaire. Pour tout $f \in$* **H**, *nul quasi partout sur D, $1_D(y)\int_{\{x \in M\}} \tilde{f}(x)\, d\sigma_a(x, y)$ est une mesure de* $\mathbf{H}^D$*-énergie finie, et, si a est coercive, on a l'identité*

$$H^M f - f = G^D\left(\int_M \tilde{f}(x)\, d\sigma_a(x, .)\right).$$

En effet,

$$\forall \Phi \in \mathbf{H}^D, \quad a^D(H^M f - f, \Phi) = -a(f, \Phi)$$
$$= \iint \Phi(y) f(x)\, d\sigma_a(x, y).$$

1.2. Interprétation probabiliste

Supposons a coercive et 1 a-excessive. Soit M un processus de Markov associé à a.

Soit (N, H_t) un système de Lévy du processus M (*cf.* [5]). Rappelons que N est un noyau positif sur $X \cup \delta$ (où δ désigne le « cimetière » du processus).

et H_t une fonctionnelle additive continue, et de α-potentiel borné, pour tout $\alpha > 0$.

1.2.1. PROPOSITION. — *Pour* $\alpha > 0$, *tout α-potentiel local* (*cf.* [21]) *borné* $G_\alpha \mu$ *est quasi partout égal au α-potentiel borné d'une fonctionnelle additive naturelle* A_t, *et réciproquement. De plus, on a l'identité*

$$(1.1) \qquad G_\alpha(f\mu) = E.\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(X_t)\, dA_t\right), \qquad \forall f \in \mathscr{B}^+(X).$$

La fonctionnelle A_t est dite associée à la mesure μ. Si $E_x(\zeta < \infty) = 1$ sur $X-N$, la proposition se généralise à $\alpha = 0$.

La réciproque est une conséquence immédiate de [21] (2.3.2). L'identité (1.1) a été établie en [21] (2.4.3) en reprenant une démonstration de BLUMENTHAL et GETOOR.

Pour établir la partie directe de la proposition, considérons une fonction α-excessive, Φ-bornée, et égale à $G_\alpha \mu$ quasi partout. En considérant le processus de Hunt conservatif $\overline{M}$ associé à M en prolongeant chaque trajectoire par un saut en δ, on voit que toute fonction bornée, excessive pour M, est, si on la prolonge par 0 en δ, un α-potentiel naturel de $\overline{M}$.

Toute fonction α-excessive bornée peut donc s'écrire comme le α-potentiel d'une fonctionnelle additive (f. a.) naturelle généralisée, i. e. pouvant présenter un saut en ζ si $X_{\zeta-} = \delta$.

Soit A_t la f. a. ainsi associée à Φ.

Soit B_t la f. a. telle que

$$\begin{cases} B_t = A_t & \text{si} \quad t < \zeta, \\ B_t = A_{\zeta-} & \text{si} \quad t \geqslant \zeta, \end{cases}$$

B_t est une f. a. naturelle. Soit Ψ le potentiel de B_t.

Montrons que $\Phi = \Psi$ q. p. Si D_n est une suite croissante d'ouverts relativement compacts recouvrant X, on a, en posant $M_n = D_n^c$,

$$\Phi - P^\alpha_{T_{M_n}} \Phi = \Psi - P^\alpha_{T_{M_n}} \Psi \quad (\text{car } A_\zeta = B_\zeta \text{ si } X_{\zeta-} \neq \delta).$$

Or

$$\lim \downarrow P^\alpha_{T_{M_n}} \Psi = 0, \quad \text{puisque } \lim \uparrow T_{M_n} = \zeta$$

et

$$\lim \downarrow P^\alpha_{T_{M_n}} \Phi = \lim H^{Mn}_\alpha G_\alpha \mu = 0, \quad \text{q. p.},$$

ce qui permet de conclure.

Remarque 1. — Si la mesure ν est associée à une fonctionnelle additive A_t la mesure α-balayée de ν sur tout fermé M est associée à la fonctionnelle additive α-balayée de A_t sur M.

Remarque 2. — On peut montrer que toute f. a. naturelle du processus M est P_λ-continue pour toute mesure λ ne chargeant pas les polaires.

1.2.2. PROPOSITION. — *Si* ν *est la mesure associée à la fonctionnelle additive* H_t, *on a l'identité*

$$\sigma_a(dx, dy) = \nu(dy) N(y, dx) \quad \text{sur } X \times X - \Delta. \tag{1.2}$$

Considérons deux fonctions de $C_K(X) \cap \mathbf{H}$ à supports disjoints : f_1 et f_2. Soit D un ouvert de X tel que, si $D^c = M$ et $\overset{\circ}{M} = \omega$, on ait Supp $(f_1) \subseteq D$ et Supp $(f_2) \subseteq \omega$. Fixons $\alpha > 0$. Sur D, on a

$$\begin{aligned} H_\alpha^M f_2(x) &= E(\exp(-\alpha T_M) f_2(X_{T_M})), \text{ q. p.} \\ &= E(\textstyle\sum_{0 < s \leqslant TM} \exp(-\alpha s) f_2(X_s) 1_{\bar{D}}(X_{s^-})) \\ &= E\left(\int_0^{T_M} \exp(-\alpha s) N f_2(X_s) dH_s\right). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} G_\alpha^D(\nu . N f_2) &= H_\alpha^M f_2, \text{ q. p. sur } D, \\ &= G_\alpha^D\left(\int_\omega f_2(x) d\sigma_a(x, .)\right), \end{aligned}$$

d'où l'identité

$$1_D(y) \int_\omega f_2(x) d\sigma_a(x, y) = N f_2(y) d\nu(y),$$

et donc

$$\iint f_1(y) f_2(x) d\sigma_a(x, y) = \int f_1(y) N f_2(y) d\nu(y).$$

1.3. Mesure d'équilibre

On supposera dorénavant que $\mathbf{H}$ *est un espace de Dirichlet.*

1.3.1. DÉFINITION. — Si $a \in \mathscr{A}(\mathbf{H})$ et si 1 est a-excessive, on appelle mesure d'équilibre de a (notée χ_a) la mesure associée au a-potentiel local de la décomposition de Riesz de 1 (*cf.* [21], § 2.3).

Ceci équivaut à dire que, pour tout ouvert relativement compact D, si $M = D^c$, on a l'identité

$$1-H_0^M 1 = G^D \chi_a.$$

On démontre aisément que χ_a est la limite vague des mesures d'équilibre de toute suite de compacts dont les intérieurs croissent vers X, ce qui justifie la terminologie employée.

1.3.2. PROPOSITION. — *En reprenant les hypothèses et les notations de* 1.2, *on a les identités*

$$(1.3) \qquad N(y, \delta)\,\nu(dy) = \chi_a(dy),$$

$$(1.4) \qquad \forall f \in \mathscr{B}^+(X), \quad \forall \alpha > 0, \qquad G_\alpha(f.\chi_a) = E(e^{-\alpha\zeta} f(X_{\zeta-})\, 1_{\{X_{\zeta-} \neq \delta\}}).$$

Considérons un ouvert relativement compact D, et posons $M = D^c$. D'aprés les interprétations probabilistes des opérateurs G_α^D et H_α^M données en [21], on a l'identité

$$\begin{aligned} E.\left(\int_0^{T_M} e^{-\alpha t} N(X_t, \delta)\, dH_t\right) &= 1-\alpha\, G_\alpha^D 1 - H_\alpha^M 1 \\ &= G_\alpha^D(\chi_a). \end{aligned}$$

Pour conclure, on considère une suite D_n d'ouverts relativement compacts croissants vers X.

On a $\lim H_\alpha^{M_n} G_\alpha \chi_\alpha = 0$ (*cf.* [21], 2.3.2). On en déduit l'identité

$$G_\alpha \chi_a = E.\left(\int_0^\zeta e^{-\alpha t} N(X_t, \delta)\, dH_t\right).$$

On utilise alors la proposition 1.2.1 qui permet de conclure.

1.3.3. PROPOSITION. — *Si* $a \in \mathscr{D}(\mathbf{H})$, *tout élément de* $\mathbf{H}$ *appartient à* $L^2(\chi_a)$, *et on a l'identité*

$$(1.5) \qquad \forall f \in \mathbf{H}, \quad \int f^2\, d\chi_a = \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha \int (1-\alpha\, G_\alpha 1)\, f^2\, dm.$$

LEMME. — *Pour toute fonction* $\Phi \in \mathbf{H}$, *nulle en dehors d'un compact, on a l'identité*

$$\int \Phi\, d\chi_a = \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha \int (1-\alpha\, G_\alpha 1)\, \Phi\, dm.$$

Soit D un ouvert relativement compact de X contenant le support de Φ. Φ appartient alors à $\mathbf{H}^D$. Si Φ est un $\hat{a}^D$-potentiel $\hat{G}^D\Psi$, $\Psi \in L^2(m)$, on a les identités

$$\alpha \int (1-\alpha G_\alpha 1)\Phi\, dm$$

$$= \alpha \int (1-\alpha G_\alpha^D 1 - H_\alpha^M 1)\Phi\, dm + \alpha \int H_\alpha^M 1.\Phi\, dm - \alpha^2 \int H_\alpha^M G_\alpha 1.\Phi\, dm$$

$$= \int \alpha G_\alpha^D(\chi_a 1_D)\Phi\, dm + \alpha \int G_\alpha^D H_0^M 1.\Psi\, dm - \alpha^2 \int G_\alpha^D H_0^M G_\alpha 1.\Psi\, dm.$$

On conclut aisément en appliquant le théorème de convergence dominée. Pour achever la démonstration, il suffit de démontrer que les applications qui à $\Phi \in \mathbf{H}^D$ associent $\alpha \int (1-\alpha G_\alpha 1)\Phi\, dm$ sont équicontinues sur $\mathbf{H}^D$.

Si e^D est le a-potentiel capacitaire de D, on a

$$(1.6)\quad \alpha \int (1-\alpha G_\alpha 1).\Phi\, dm$$

$$= \alpha \int (1-\alpha G_\alpha 1)\Phi e^D\, dm$$

$$\leqslant \left(\alpha \int (1-\alpha G_\alpha 1)\Phi^2\, dm\right)^{1/2} \left(\alpha \int (1-\alpha G_\alpha 1)(e^D)^2\, dm\right)^{1/2}.$$

Or, si $f \in \mathbf{H}$, on a, pour tout $\alpha > 0$,

$$(1.7)\qquad 0 \leqslant \int (f(x)-f(y))^2\, d\sigma_\alpha(x, y)$$

$$= 2\alpha \int (f-\alpha G_\alpha f).f\, dm$$

$$-\alpha \int (1-\alpha G_\alpha 1) f^2\, dm - \alpha \int (1-\alpha \hat{G}_\alpha 1) f^2\, dm.$$

Du fait que $a \in \mathscr{D}(\mathbf{H})$, $\hat{G}_\alpha$ est sous-markovienne, et on en déduit l'inégalité

$$\alpha \int (1-\alpha G_\alpha 1).f^2\, dm \leqslant 2\alpha \int (f-\alpha G_\alpha f).f\, dm.$$

G_α étant fortement continue dans $\mathbf{H}$, il existe $K > 0$ tel que

$$\forall f \in \mathbf{H}, \quad \alpha \int (f - \alpha G_\alpha f) . f \, dm = a(\alpha G_\alpha f, f) \leqslant K a(f) \quad (^2).$$

On en déduit la majoration

$$\alpha \int (1 - \alpha G_\alpha 1) f^2 \, dm \leqslant 2 K a(f). \tag{1.8}$$

En appliquant (1.8) à Φ et à e^D, on peut conclure la démonstration du lemme d'après (1.6).

Ainsi, d'après (1.8), si $f \in \mathbf{H}_b$ est a support compact, on a l'inégalité

$$\int f^2 \, d\chi_a \leqslant 2 K a(f).$$

Ceci suffit à prouver que tout élément de $\mathbf{H}$ appartient à $L^2(\chi_a)$. Le reste de la proposition procède alors d'un simple raisonnement d'équicontinuité.

1.3.4. PROPOSITION. — *Si* $a \in \overline{\mathscr{A}}(\mathbf{H})$, *et si la contraction-unité opère sur* a, *si* $b \in \mathscr{D}(\mathbf{H})$, *la mesure* $\chi_a = \lim_{\varepsilon \to 0} \downarrow \chi_{a+\varepsilon b}$ *est indépendante de* b, *et caractérisée par l'identité*

$$\left\{ \begin{array}{c} \forall f, g \in \mathbf{H}, \quad \text{tels que } f.g = f, \\ a(g, f) = \displaystyle\int f \, d\chi_a + \iint f(y)(1 - g(x)) \, d\sigma_a(x, y). \end{array} \right. \tag{1.9}$$

On l'appelle mesure d'équilibre de a.

Démonstration. — Supposons a coercive, et f à support compact. Soit D un ouvert relativement compact tel que $f = 0$ quasi partout sur $D^c = M$. Soit $u \in \mathbf{H}$ égal à 1 sur $\overline{D}$.

Si $f.g = f = u.f$. On a

$$\begin{aligned} a(g, f) &= a(u, f) + a(g - u, f) \\ &= a(u, f) + \int (u(x) - g(x)) f(y) \, d\sigma_a(x, y). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} a(u, f) &= a(u - H^M u, f) \\ &= a(1 - H_0^M 1, f) + a(u - 1 - H^M(u - 1), f). \end{aligned}$$

(2) $a(f)$ signifie $a(f, f)$.

En utilisant 1.1.3, on établit aisément l'identité

$$H^M(1-u)+u-1 = G^D\left(\int (1-u(x))\, d\sigma_a(x, .)\right)$$

(on considère une suite g_n de fonctions de $\mathbf{H}$, égales à 1 sur $\overline{D}$ et croissant vers 1, et on applique 1.1.3 à $f = g_n - u$. Enfin, on fait tendre n vers l'infini).

La proposition est ainsi établie lorsque a est coercive et f à support compact.

Si f est un élément quelconque de $\mathbf{H}^+$, et si f_n est une suite de fonctions de $C_K(X) \cap \mathbf{H}^+$ convergeant fortement et quasi partout vers $\mathbf{H}$, la suite $f'_n = f \wedge f_n$ converge fortement et quasi partout vers $f\,(f - f'_n = (f-f_n)^+)$.

En utilisant la continuité de la fonction $\inf(u, v)$, $(u, v) \in \mathbf{H}^2$, on peut construire une suite croissante de naturels α_i tels que la suite croissante $g_n = \sup(f'_{\alpha_1} \ldots f'_{\alpha_n})$ converge fortement et quasi partout vers f.

(Par exemple, on posera $f'_{\alpha_1} = f_1$ et $\alpha_n = \inf$ (m tel que $\| f_m \vee g_n - f \| < 1/n$).)

Il suffit d'appliquer le résultat précédent à g_n, et de faire tendre n vers $+\infty$, pour pouvoir conclure lorsque a est coercive. Le cas non coercif ne soulève pas de difficultés.

1.3.5. PROPOSITION. — *Si* $b \in \overline{\mathcal{A}}(\mathbf{H})$, *pour que la contraction-unité opère sur* b, *il suffit que, pour tout ouvert relativement compact* D, *il existe* $g \in \mathbf{H}^+$ *tel que* $g = 1$ *sur* D *et* $a(g, f) \geqslant 0$, *pour tout* $f \in C_K(D) \cap \mathbf{H}^+$.

Il s'agit de démontrer que $\forall f \in \mathbf{H}$, $a(f+f^+ \wedge 1, f-f^+ \wedge 1) \geqslant 0$.

Du fait que la contraction-module opère, on peut supposer f positif.

D'autre part, on peut se limiter au cas où $f \in C_K(X) \cap \mathbf{H}$ (*cf.* 0.2.1, note (1).

Si f est continue à support compact, si D est un voisinage relativement compact de Supp (f) et si g satisfait aux hypothèses de la proposition, on a

$$\begin{aligned} &a(f+f \wedge 1, f-f \wedge 1) \\ &\quad = a(f-f \wedge 1) + 2a(g, f-f \wedge 1) + 2a(f \wedge 1 - g, f-f \wedge 1). \end{aligned}$$

On vérifie sans difficulté que les trois termes de la somme sont positifs.

1.4. Mesure d'énergie

Dans toute la suite, a désignera une forme de Dirichlet générale de domaine $\mathbf{H}$ (*cf.* 0.2.1).

1.4.1. PROPOSITION. — *Il existe une application* Γ_a, *unique, définie sur* $\mathbf{H}$ *et à valeurs dans le cône des mesures positives et bornées sur* X, *telle que :*

(*a*) *on a l'identité*

$$\int_X d\Gamma_a(f) = a(f) - \int f^2 \, d\chi_{\tilde{a}}; \tag{1.10}$$

(*b*) *Les contractions opèrent sur* Γ_a, *i. e. si* f' *est une contraction de* f, $\Gamma_a(f) \leqslant \Gamma_a(f')$;

(*c*) *si* f *et* g *appartiennent à* $\mathbf{H}_b$, *on a l'identité*

$$\int g \, d\Gamma_a(f) = a(f, g.f) - \frac{1}{2} a(f^2, g) - \frac{1}{2}\int f^2 . g \, d\chi_a. \tag{1.11}$$

$\Gamma_a(f)$ *est appelée la mesure d'énergie de* f.

Lorsque f est bornée, $\Gamma_a(f)$ apparaît comme la limite vague des mesures $(1/2)\int (f(x) - f(.))^2 \, d\sigma_a(x, .)$. On définit les mesures $\Gamma_a(f, g)$ par polarité.

Démonstration :

1° On peut se ramener au cas où a est coercive.

Si $f \in \mathbf{H}_b$, d'après les identités (1.5) et (1.7), on doit prendre pour $\Gamma_a(f)$ la limite vague des mesures $(1/2)\int (f(x) - f(.))^2 \, d\sigma_\alpha(x, .)$. L'identité (1.11) est ainsi vérifiée.

2° Il résulte de façon évidente de cette définition que, si $f \in \mathbf{H}_b$ et si g est une contraction de f, $\Gamma_a(g) \leqslant \Gamma_a(f)$.

3° Montrons maintenant que, si $f \in \mathbf{H}_b$, $\int_X d\Gamma_a(f) = a(f, f) - \int f^2 \, d\chi_{\tilde{a}}$.

Remarquons l'inégalité

$$\int_X d\Gamma_a(f) \leqslant \liminf_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{2}\int (f(x) - f(y))^2 \, d\sigma_\alpha(x, y) \quad \text{d'après (1.7)},$$

on a alors

$$\int_X d\Gamma_a(f) \leqslant \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha \int f.(f - \alpha\, G_\alpha f) \, dm = a(f, f).$$

Il suffit donc d'établir l'identité cherchée lorsque f est à support compact.

Soit g_n une suite croissante d'éléments de $C_K^+(X) \cap \mathbf{H}$ tels que $g_n \leqslant 1$ et $g_n = 1$ sur Supp (f). On a

$$\int_X d\Gamma_a(f) = \lim_n \uparrow \int g_n \, d\Gamma_a(f) = a(f) - \frac{1}{2}\int f^2 \, d\chi_a - \frac{1}{2}\lim \downarrow a(f^2, g_n).$$

D'après 1.3.4, cette dernière limite est égale à $\int f^2 \, d\chi_{\hat{a}}$ ce qui permet de conclure.

4° Il résulte des points 2 et 3 de la démonstration que si, pour $f \in \mathbf{H} - \mathbf{H}_b$, on définit $\Gamma_a(f)$ comme étant la limite croissante des mesures $\Gamma_a(f_n)$, avec $f_n = (f \wedge n) \vee (-n)$, l'application Γ_a ainsi définie satisfait aux conditions de la proposition.

L'unicité est immédiate. Il suffit de remarquer que, pour toute application Γ'_a satisfaisant aux conditions de la proposition, on a

$$\Gamma'_a(f) \geqslant \lim \uparrow \Gamma_a(f_n), \qquad \forall f \in \mathbf{H}$$

d'après la condition (*b*), et que cette inégalité est nécessairement une identité, d'après la condition (*a*).

Remarquons qu'en général $\Gamma_a(f)$ est l'enveloppe supérieure de mesures $\Gamma_a(g)$, où g décrit l'ensemble des fonctions de $\mathbf{H}_b$ qui sont des contractions de f.

Exemples :

1° Si X est un ouvert de $\mathbf{R}^n$, si $m = dx$, si $\mathbf{H} = H_0^1(X)$, si le générateur associé à a est un opérateur elliptique de la forme

$$\sum \frac{\partial}{\partial x_j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c_i,$$

on a

$$d\Gamma_a(f) = \sum a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx, \quad \text{pour tout } f \in \mathbf{H}.$$

2° Si a est purement singulière, i. e. si

$$\forall f \in \mathbf{H}, \quad a(f, f) = \iint (f(x) - f(y))^2 \, d\sigma_a(x, y) + \int f^2 \, d\chi_a,$$

on a

$$\Gamma_a(f)(dy) = \int_{x \neq y} (f(x) - f(y))^2 \, \sigma_a(dx, dy).$$

Remarque. — L'introduction du terme $-(1/2)f^2\,\chi_a$ dans la définition de $\Gamma_a(f)$ permet de se ramener au cas où a est conservative, i. e. au cas où $\chi_a = 0$. Sa nécessité apparaît clairement dans le cas local, où les mesures $\Gamma_a(f)$ vérifient d'intéressantes propriétés algébriques que ne vérifient pas les mesures $\Gamma_a(f)+(1/2)f^2.\chi_a$ (*cf.* 1.5.2).

Dans le premier exemple, on peut voir que

$$\Gamma_a(f, g) = \sum \tilde{a}_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} dx \qquad \text{avec} \quad \tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ji}+a_{ij}).$$

On ne peut définir $\Gamma_a(f, g)$ de manière non symétrique en f et g de manière à obtenir $\sum a_{ij}(\partial f/\partial x_i)(\partial g/\partial x_j)$. En effet, il est facile de voir que les coefficients a_{ij} ne présentent aucun caractère intrinsèque, au contraire des coefficients $\tilde{a}_{ij}$. (Dériver au sens des distributions et utiliser la symétrie de la dérivée seconde.)

1.4.2. Propriétés :

(*a*) les mesures d'énergie ne chargent pas les polaires;

(*b*) si a est coercive, si $f = G$, μ est bornée et différence de deux potentiels, $\Gamma_a(f)$ est une mesure d'énergie finie et on a

$$f^2 = G(2(f\mu-\Gamma_a(f))-f^2\chi_a); \tag{1.12}$$

(*c*) pour toute Φ mesurable, positive et bornée, $\int_X \Phi\, d\Gamma_a(f)$ est une forme quadratique positive et continue sur $\mathbf{H}$;

$$\Gamma_{\tilde{a}}(f) = \frac{1}{2}(\Gamma_a(f)+\Gamma_{\hat{a}}(f)). \tag{d}$$

La propriété (*b*) est une conséquence directe de l'identité (1.11). Pour établir (*c*), on peut supposer que Φ appartient à $C_K(X) \cap \mathbf{H}^+$, il est alors évident, d'après la définition de $\Gamma_a(f)$, que $\int \Phi\, d\Gamma_a(f)$ est une forme quadratique positive sur $\mathbf{H}_b$. On déduit de l'identité (1.10) que la forme quadratique positive $f \to \int_X \Phi\, d\Gamma_a(f)$ est uniformément continue sur $\mathbf{H}_b$ et admet donc un prolongement continu unique sur $\mathbf{H}$. On peut conclure. en remarquant que tout $f \in \mathbf{H}$ est la limite dans $\mathbf{H}$ de la suite $(f \wedge n) \vee (-n)$.

La propriété (*a*) est une conséquence directe des propriétés (*b*) et (*c*).

La propriété (d) résulte évidemment de la définition de Γ_a lorsque f est bornée. On généralise à f quelconque en utilisant par exemple la propriété (c).

1.4.3. RELATIONS AVEC LE GÉNÉRATEUR (on suppose a coercive). — D'après les propriétés (b) et (c) données ci-dessus, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) si A est le générateur infinitésimal de la L^2-résolvante G_α, $\mathscr{D}(A) \cap L^\infty(m)$ est une algèbre;

(ii) $\mathscr{D}(A) \cap L^\infty(m)$ contient une algèbre dense dans $\mathbf{H}$;

(iii) pour tout $f \in \mathbf{H}$, $\Gamma_a(f) \ll m$ et $\chi_a \ll m$.

Si $f \in \mathscr{D}(A) \cap L^\infty(m)$, l'expression

$$\frac{1}{2} A f^2 - f . A f = \frac{d\Gamma_a(f)}{dm} + \frac{1}{2} f^2 \frac{d\chi_a}{dm}$$

est appelée le carré du champ de f relatif à A (*cf.* [26]). Cette notion admet une généralisation intéressante sur des espaces de semi-martingales (*cf.* [30]).

Remarque. — Il est à noter que les mesures d'énergie, ainsi que la mesure singulière et la mesure d'équilibre sont indépendantes du choix de la mesure m.

D'autre part, on peut toujours construire une mesure de base m satisfaisant la propriété (iii) et donc la propriété (i).

1.5. Mesures d'énergie locale. Décomposition de a

Il ressort de la remarque suivant la proposition 1.1.2 que, si f_1 et f_2 sont deux fonctions boréliennes égales quasi partout,

$$f_1(x) - f_1(y) = f_2(x) - f_2(y) \quad \sigma_a \text{ p. s.}$$

Si f est un élément de $\mathbf{H}$, on notera $f(x) - f(y)$ la classe de fonctions égales σ_a p. s. ainsi associée à l'un quelconque de ses représentants quasi continus.

1.5.1. PROPOSITION :

(a) pour tout $f \in \mathbf{H}$, $f(x) - f(y)$ appartient à $L^2(d\sigma_a)$;

(b) si l'on pose

$$\gamma_a(f) = \Gamma_a(f) - \frac{1}{2} \int (f(x) - f(.))^2 \, d\sigma_a(x, .),$$

les contractions opèrent sur γ_a. $\gamma_a(f)$ est appelée la mesure d'énergie locale de f.

Démonstration (*cf.* [22]). — On peut supposer f bornée et a coercive. Considérons une suite croissante Φ_n de fonctions de $C_K(X \times X - \Delta)$, de la forme $\sum_{i=1}^{n} u_i(x)\, v_i(y)$, où u_i et v_i sont des fonctions de $C_K(x) \cap \mathbf{H}$ à supports disjoints, telles que $\lim_{n \to +\infty} \Phi_n = 1$. Si $g \in C_K^+(x) \cap \mathbf{H}$, on a, en utilisant les approximations des mesures σ_a et $\Gamma_a(f)$ à l'aide des mesures σ_α,

$$\int g\, d\Gamma_a(f) - \frac{1}{2}\iint (\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y))^2 g(y)\, \Phi_n(x, y)\, d\sigma_a(x, y)$$

$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{2}\iint (f(x) - f(y))^2 g(y)(1 - \Phi_n(x, y)\, d\sigma_\alpha(x, y).$$

Ce qui montre que les contractions opèrent sur

$$\Gamma_a(f) - \frac{1}{2}\int (\tilde{f}(x) - \tilde{f}(.))^2\, \Phi_n(x, .)\, d\sigma_a(x, .).$$

On en déduit la proposition en faisant tendre n vers $+\infty$.

Remarque. — Il ressort de la remarque suivant la proposition 1.1.2 que $\gamma_a(f)$ ne charge pas les polaires.

1.5.2. PROPRIÉTÉS :

(*a*) pour tout f, $g \in \mathbf{H}$, si $\gamma_a(f, g)$ est définie par polarité, et si $f_1 . f_2 = 0$, $\gamma_a(f_1, f_2) = 0$;

(*b*) si $f \in \mathbf{H}$ est constante sur un ouvert ω, $1_\omega\, \gamma_a(f, g) = 0$ pour tout $g \in \mathbf{H}$;

(*c*) $\gamma_a(f) = \gamma_{\hat{a}}(f) = \gamma_{\tilde{a}}(f)$ pour tout $f \in \mathbf{H}$;

(*d*) si $f \in \mathbf{H}$ et $f' \in \mathbf{H}$ sont égales quasi partout sur un ouvert ω,

$$1_\omega \gamma_a(f) = 1_\omega \gamma_a(f');$$

(*e*) on a l'identité

$$\gamma_a(f^2, h) = 2 f\, \gamma_a(f, h) \quad \text{pour tout } f \in \mathbf{H}_b \text{ et } h \in \mathbf{H}. \tag{1.13}$$

Démonstration. — La propriété (*a*) (respectivement (*b*)) est une conséquence directe de 1.1.2 (respectivement 1.3.4) et des définitions (il faut commencer par considérer des éléments bornés de $\mathbf{H}$).

Établir (c) revient à démontrer l'identité

$$\forall g \in C_K(X) \cap \mathbf{H}, \quad \forall f \in \mathbf{H},$$
$$\int g\, d\Gamma_a(f) - \int g\, d\Gamma_{\hat{a}}(f) = \frac{1}{2} \iint (f(x)-f(y))^2 (g(x)-g(y))\, d\sigma_a.$$

On peut supposer que $f \in C_K(X) \cap \mathbf{H}$ et que a est coercive.

Soit Φ une fonction de $C_K(X) \cap \mathbf{H}$ égale à 1 dans un voisinage de Supp $(f) \cap$ Supp (g).

On a alors :

$$\int g\, d\Gamma_a(f) - \int g\, d\Gamma_{\hat{a}}(f)$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \iint (f(x)-f(y))^2 (g(y)-g(x))\, d\sigma_\alpha$$
$$= \lim_{\alpha \to +\infty} \left[\iint (f(x)-f(g))^2 (g(x)-g(y))\, \Phi(x)\, \Phi(y)\, d\sigma_\alpha \right]$$
$$+ \iint f^2(y)\, g(y)(1-\Phi(x))\, d\sigma_\alpha - \iint f^2(x)\, g(x)(1-\Phi(y))\, d\sigma_\alpha.$$

D'après 1.3.3 et 1.3.4, les deux derniers termes convergent vers

$$\iint [f^2(y)\, g(y)(1-\Phi(x)) - f^2(x)\, g(x)(1-\Phi(y))]\, d\sigma_a.$$

D'autre part, $(f(x)-f(y))^2\, \sigma_a(dx, dy)$ est la limite faible, dans $X \times X - \Delta$, des mesures $(f(x)-f(y))^2\, \sigma_\alpha(dx, dy)$, qui sont de masses uniformément bornées. $(g(x)-g(y))\, \Phi(x)\, \Phi(y)$ appartenant à $C_0(X \times X - \Delta)$, le premier terme converge vers $\iint (f(x)-f(y))^2\, (g(y)-g(x))\, \Phi(x)\, \Phi(y)\, d\sigma_a$, ce qui permet de conclure.

La propriété (e) s'établit par un raisonnement analogue (*cf.* [22]).

Pour établir (d), considérons $g \in C_K^+(\omega) \cap \mathbf{H}$. On a

$$\left(\sqrt{\int g\, d\gamma_a(f)} - \sqrt{\int g\, d\gamma_a(f')} \right)^2 \leqslant \int g\, d\gamma_a(f-f').$$

Il résulte aisément de la définition de γ_a que cette dernière intégrale est nulle, du fait que g et $f-f'$ sont à supports disjoints.

1.5.3. DÉCOMPOSITION DE a.

DÉFINITION. — On appelle partie locale de a la forme bilinéaire N définie sur $\mathbf{H}$ par l'identité

$$N(f, g) = \int_X d\gamma_a(f, g) \quad \text{quels que soient } f \text{ et } g \in \mathbf{H}.$$

Nous noterons $\check{a}$ la forme bilinéaire $(1/2)((a-\hat{a}) - \langle .,. \rangle_{\chi_a - \chi_{\hat{a}}})$.

PROPRIÉTÉS :

(*a*) aux propriétés (*a*) et (*b*) de 1.5.2 correspondent des propriétés analogues de la partie locale N;

(*b*) les contractions opèrent sur N d'après 1.5.1;

(*c*) a admet la décomposition suivante :

$$(1.14)\quad \begin{cases} & \forall f, g \in \mathbf{H}, \\ a(f, g) = N(f, g) + \check{a}(f, g) & \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\displaystyle\iint (f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\, d\sigma_a(x, y) + \int fg\, d\chi_a. & \end{cases}$$

Dans le cas symétrique, cette décomposition est connue depuis l'origine de la théorie (*cf.* [6]);

(*d*) si f_1 et f_2 sont deux éléments bornés de $\mathbf{H}$, pour tout $g \in \mathbf{H}$, on a l'identité

$$(1.15)\quad \check{a}(f_1 f_2, g) = \check{a}(f_1, f_2 g) + \hat{\check{a}}(f_2, f_1 g) + \frac{1}{2}\iint (g(x)-g(y)) \times (f_1(x)-f_1(y))(f_2(x)-f_2(y))\, d\sigma_a(x, y).$$

En particulier, si $\sigma_a = \sigma_{\hat{a}}$,

$$\check{a}(f_1 f_2, g) = \check{a}(f_1, f_2 g) + \check{a}(f_2, f_1 g),$$

a apparaît ainsi dans le cas local comme un « terme de dérive ».

Démonstration. — Remarquons que

$$a(f_1, f_2 g) + a(f_2, f_1 g) = 2\int g\, d\Gamma_a(f_1, f_2) + a(f_1 f_2, g) + \int f_1 f_2 g\, d\chi_a \quad \text{(par polarité).}$$

En développant de la même façon $\hat{a}(f_2, f_1 g)+\hat{a}(f_1, f_2 g)$, on obtient l'identité cherchée.

1.5.4. PROPOSITION. — *Soit γ une application bilinéaire symétrique définie sur une sous-algèbre $\mathscr{D}$ de $\mathbf{H}_b$ dense dans $\mathbf{H}$, et à valeurs dans l'espace des mesures de Radon sur X telle que :*

(*a*) *pour tout $f \in \mathscr{D}$, $\gamma(f, f)$ est positive;*

(*b*) *il existe une constante $k > 0$ telle que $\int_X d\gamma(f, f) \leqslant k \|f\|^2$;*

(*c*) *$\gamma(f^2, g) = 2f\gamma(f, g)$ pour tout f et $g \in \mathscr{D}$.*

Sous ces conditions, il existe une forme de Dirichlet générale a définie sur $\mathbf{H}$, locale (i. e. telle que $\sigma_a = 0$), conservative (i. e. telle que $\chi_a = 0$) telle que

$$\gamma_a(f) = \gamma(f, f) \quad \text{pour tout } f \in \mathscr{B}.$$

Remarquons que cette proposition s'applique à $\gamma = \Phi.\gamma_a$ pour toute fonction Φ positive borélienne et bornée définie sur X. En particulier, si N est la partie locale de a, $\gamma_N = \gamma_a$.

Démonstration. — D'après (*a*) et (*b*), si l'on pose $a(f) = \int_X d\gamma(f, f)$, on montre aisément que a se prolonge en une forme quadratique positive et continue sur $\mathbf{H}$.

On déduit aisément de (*c*) l'identité $\gamma(\Phi(f), \Phi(f)) = (\Phi'(f))^2 \gamma(f, f)$ pour $f \in \mathscr{D}$ et pour tout polynôme Φ nul en 0.

On en déduit que si $f \in \mathscr{D}$, $a(Tf) \leqslant a(f)$ pour toute contraction T. (Si T est de classe C^1, on approchera T par une suite de polynômes T_n nuls en 0, et tels que $T_n - T$ et $T'_n - T'$ convergent vers zéro uniformément sur tout compact. Pour tout $f \in \mathscr{D}$, il existe une sous-suite n_K telle que $\sum_{k=1}^{N} T_{n_k} f$ converge vers Tf au sens fort. On passe au cas d'une contraction quelconque par un procédé analogue). Ce résultat s'étend aisément à $f \in \mathbf{H}$ (*cf.* 0.1.1, note [1], remarque). Une nouvelle utilisation de (*c*) montre alors que $\Gamma_a(f) = \gamma(f, f)$ ce qui établit le caractère conservatif de a. Pour établir son caractère local, remarquons que, si $f \in \mathbf{H}_b$, un calcul facile montre que

$$\int f\, d\Gamma_a(f^2, f) - \int 2 f^2\, d\Gamma_a(f) = \iint (f(x) - f(y))^4\, d\sigma_a(x, y).$$

On a donc $\iint (f(x)-f(y))^2 \, d\sigma_a(x, y) = 0$ pour $f \in \mathscr{D}$, ce qui permet de conclure.

1.5.5. PROPOSITION :

(*a*) *les applications définies sur* $\overline{\mathscr{D}}$ (**H**), *qui associent à* a *les mesures* σ_a, χ_a *et, pour tout* $f \in \mathbf{H}$, $\Gamma_a(f)$ *et* $\gamma_a(f)$, *sont linéaires;*

(*b*) (*lemme de domination*). *Soient* a *et* b *deux éléments de* $\overline{\mathscr{D}}$ (**H**) *tels que* $b(f) \geqslant a(f)$ *pour tout* $f \in \mathbf{H}$. *Alors,* $\gamma_b(f) \geqslant \gamma_a(f)$ *pour tout* $f \in \mathbf{H}$;

(*c*) *sous les hypothèses de* (*b*), *pour que la contraction-module* (*la contraction-unité*) *opère sur* $b-a$, *il faut et il suffit qu'on ait* $\sigma_b \geqslant \sigma_a$ ($\sigma_b \geqslant \sigma_a$ *et* $\chi_b \geqslant \chi_a$).

Démonstration. – La propriété (*a*) résulte directement des définitions pour σ, Γ et γ. Pour χ, on utilise la proposition 1.3.4.

La propriété (*b*) est une conséquence directe de (*a*) et des propositions 1.1.2 et 1.3.5.

Pour démontrer (*b*), remarquons que dès que $b(f) \geqslant a(f)$ la proprité (*c*) montre que, si N désigne le noyau local de a, $b-N$ est une forme de Dirichlet. On déduit alors de (*a*) que, pour tout $f \in \mathbf{H}$, $\gamma_b(f) - \gamma_N(f) = \gamma_{b-N}(f) \geqslant 0$.

Ceci permet de conclure, puisque $\gamma_a = \gamma_N$ (*cf.* la remarque suivant l'énoncé de la proposition précédente).

1.6. Interprétation probabiliste

Nous supposons a coercive.

1.6.1. PRÉLIMINAIRES. – Désignons par $S(a)$ l'algèbre des éléments de **H** qui sont différences de deux β-potentiels bornés, pour un réel $\beta > 0$. Du fait des identités :

$$S(a) = S(a_\alpha), \qquad d\gamma_a = d\gamma_{a_\alpha}, \qquad d\sigma_a = d\sigma_{a_\alpha}, \qquad d\chi_{a_\alpha} = d\chi_a + \alpha \, dm,$$

on ne restreindra pas la généralité des résultats qui vont suivre en supposant que $E_x(\zeta)$ est borné.

Tout élément de $S(a)$ est alors différence de deux potentiels bornés $G\mu_1$ et $G\mu_2$. Si A_t^1 et A_t^2 sont des fonctionnelles additives associées à μ_1 et μ_2 (au sens de 1.2.1), la fonctionnelle A_t sera dite associée à $\mu = \mu_1 - \mu_2$.

1.6.2. Proposition. — *Soient* $f = G\,\mu$ *un élément de* $S(a)$, A_t *une fonctionnelle additive associée à* μ, Φ *le potentiel (borné) de* A_t, $C\,\Phi\,(t)$ *la martingale* $\Phi(X_t)+A_t-\Phi(X_0)$. *La fonctionnelle additive* $(1/2)\,\langle C\,\Phi\,\rangle_t^c$ *est alors associée à* $\gamma_a(f)$.

Démonstration. — Appliquons la formule d'Ito à la semi-martingale $\Phi^2(X_t)$. On a

$$\begin{aligned}
&\Phi^2(X_t)-\Phi^2(X_0)\\
&\quad = 2\int_0^t \Phi(X_s-)\,dC\,\Phi(s)-2\int_0^t \Phi(X_s)\,dA_s+\int_0^t d\langle C\,\Phi\rangle_s^c\\
&\quad\quad +\textstyle\sum_{0<s<t}(\Phi(X_s)-\Phi(X_s-))^2\ P_x \quad \text{p.s.},\\
&\quad\quad\quad \forall x\in X-N.
\end{aligned}$$

On en déduit, en prenant une espérance et en faisant tendre t vers $+\infty$,

$$\forall x\in X-N,\quad \Phi^2(x)=E_x\left[\int_0^\infty 2\,\Phi(X_t)\,dA_t-\int_0^\infty d\langle C\,\Phi\rangle_t^c +\int_0^\infty N(X_t,\,dy)(\Phi(X_t)-\Phi(y))^2\,dH_t\right],$$

i. e.

$$f^2 = G\left(2\,f.\mu-f^2\chi_a-\int(\Phi(x)-\Phi(.))^2\,d\sigma_a(x,\,.)\right)-E.\left(\int_0^\infty d\langle C\,\Phi\rangle_t^c\right),$$

q. p. d'après les identités (1.2) et (1.4).

D'autre part, d'après l'identité (1.12), on a

$$\begin{aligned}
f^2 &= G(2(f\,\mu-\Gamma_a(f))-f^2\chi_a)\\
&= G\left(2\,f\,\mu-2\,\gamma_a(f)-\int (f(x)-f(.))^2\,d\sigma_a(x,\,.)-f^2\chi_a\right),
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

1.7. Mesures associées à la restriction à un ouvert d'une forme de Dirichlet

Proposition. — *Si* a^D *désigne la restriction de* a *à un ouvert* D, *on a :*

(i) $\gamma_{a^D}(\Phi) = \gamma_a(\Phi)$, *pour tout* $\Phi\in \mathbf{H}^D$;

(ii) $\sigma_{a^D}(dx,\,dy = \sigma_a(dx,\,dy)\,1_{D\times D}(x,\,y)$;

(iii) $\chi_{a^D}(dx) = 1_D(x)\,\chi_a(dx)+\int 1_{M-\{x\}(y)}\,\sigma_a(dy,\,dx)$.

La première identité se déduit des deux autres par un calcul facile. La deuxième identité est évidente, et la troisième est une conséquence de la proposition 1.3.4.

Si f et g sont deux éléments de $\mathbf{H}^D$ tels que $f.g = f$, on a d'une part

$$\int f\, d\chi_{a^D} = a^D(f, g) + \iint f(y)(1-g(x))\, d\sigma_{a^D}(x, y),$$

d'autre part

$$\int f\, d\chi_a = a(f, g) + \iint f(y)(1-g(x))\, d\sigma_a(x, y).$$

2. Calculs fonctionnels sur H

2.1. PROPOSITION. — *Soit f un n-uplet d'éléments de* $\mathbf{H}$:

(*a*) *soit Φ une fonction de $C^1(\mathbf{R}^n)$, nulle en* 0 *et à dérivées bornées.* $\Phi(f)$ *appartient à* $\mathbf{H}$, *et on a l'identité*

$$d\gamma_a(\Phi(f)) = \textstyle\sum_{i,j} \Phi'_i(f)\Phi'_j(f)\, d\gamma_a(f_i, f_j); \tag{2.1}$$

(*b*) *soit Φ une fonction de $C^2(\mathbf{R}^n)$, nulle en* 0 *et à dérivées premières et secondes bornées. Pour tout $g \in \mathbf{H}_b$, on a l'identité*

$$\begin{aligned} a(\Phi(f), g) &\\ = -\textstyle\sum_{i,j} &\int \Phi''_{i,j}(f)\, g\, d\gamma_a(f_i, f_j) + \textstyle\sum_i a(f_i, g\,\Phi'_i(f)) \\ &+ \int g\,(\Phi(f) - \textstyle\sum_i \Phi'_i(f) f_i)\, d\chi_a - \iint d\sigma_a(x, y)\, g(y) \\ &\times [\Phi(f(x)) - \Phi(f(y)) - \textstyle\sum_i \Phi'_i(f(y))(f_i(x) - f_i(y))]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Remarque. — Dans le cas où les f_i sont bornées, et différences de deux potentiels, la formule d'Ito et les propositions 1.2.2, 1.3.2 et 1.6.2 permettent d'établir l'identité 2.

Démonstration.

(i) On a déjà démontré cette proposition dans [22] en supposant les f_i bornées. Rappelons ici les grandes lignes de cette démonstration.

On vérifie, en utilisant les identités (1.13), (1.14) et (1.15), que la famille des fonctions de $C^2(\mathbf{R}^n)$ que vérifient les identités (1) et (2) forme une algèbre. Du fait qu'elle contient les fonctions coordonnées, elle contient les fonctions polynômes nulles en 0. On peut alors conclure en remarquant que, pour toute $\Phi \in C^2(\mathbf{R}^n)$ $(C^1(\mathbf{R}^n))$ nulle en 0, il existe une suite Φ^m de fonctions polynômes nulles en 0 telles que Φ^m et ses dérivées convergent uniformément sur tout compact vers Φ et ses dérivées.

(ii) Reste à généraliser les identités obtenues dans le cas où les f_i ne sont pas bornées. Commençons par l'identité (2.2).

Considérons $f^0 \in (\mathbf{H})^n$ et une suite f^m d'éléments bornés de $(\mathbf{H})^n$ convergeant fortement vers f_0. $\Phi(f^m)$ et $g\,\Phi'_i(f^m)$ convergent faiblement et quasi partout respectivement vers $\Phi(f^0)$ et $g\,\Phi'_i(f^0)$. Si l'on pose, pour tout $m \in \mathbf{N}$,

$$U^m(x, y) = \Phi(f^m(x)) - \Phi(f^m(y)) - \sum \Phi'_i(f(y))(f_i(x) - f_i(y))$$

la suite U^m converge σ_a presque-partout vers U^0. Il existe une constante positive $K = \sup_{i,j} \|\Phi''_{i,j}\|_\infty$ telle que

$$|U^m(x, y)| \leqslant K \sum_i |f_i^m(x) - f_i^m(y)| = V^m(x, y), \qquad \forall m \in \mathbf{N}.$$

Mais la suite V^m converge vers V^0 dans $L^1(\sigma_a)$. On en déduit que la suite U^m est équi-intégrable, et converge donc dans $L^1(\sigma_a)$ vers U_0. L'identité (2.2) est ainsi établie pour f^0.

Lorsque Φ est de classe C^2, bornée, et à dérivées bornées, (2.1) se déduit de (2.2) appliquée à Φ et à Φ^2.

Pour généraliser l'identité obtenue aux fonctions de classe C^1, à dérivées bornées et nulles à l'origine, remarquons que, pour une telle fonction, on peut trouver, par troncation et convolution, une suite Φ^n de fonctions de classe C^2 bornées, nulles en 0, et à dérivées premières uniformément bornées telles que Φ^n et $\Phi_i^{n'}$ convergent uniformément sur tout compact vers Φ et Φ'_i. Le théorème de convergence dominée, appliquée à trois reprises, montre alors que

$$\sum_{i,j} \int (\Phi'_i(f) - \Phi_i^{n'}(f))(\Phi'_j(f) - \Phi_j^{n'}(f))\, d\gamma_a(f_i, f_j) + \int (\Phi(f) - \Phi^n(f))^2\, d\chi_{\tilde a}$$
$$+ \iint [\Phi(f(x)) - \Phi^n(f(x)) - \Phi(f(y)) + \Phi^n(f(y))]^2\, d\sigma_a(x, y)$$

converge vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

On en déduit que $\Phi^n(f)$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{H}$. Elle ne peut converger que vers $\Phi(f)$, ce qui permet de conclure.

COROLLAIRE. — *Soit f un n-uplet d'éléments de* $\mathbf{H}$, *et* Φ *une fonction de* $C^1(\mathbf{R}^n)$, *nulle en* 0 *et à dérivées bornées et lipschitziennes. On a l'identité*

$$a(\Phi(f), g) = +\sum_i \left(a(f_i, g\,\Phi_i'(f)) - \int g\, d\gamma_a(\Phi_i'(f), g) \right)$$
$$+ \int g(\Phi(f) - \sum_i \Phi_i'(f).f_i)\, d\chi_a - \iint d\sigma_a(x, y) g(y)$$
$$\times [\Phi(f(x)) - \Phi(f(y)) - \sum_i \Phi_i'(f(y))(f_i(x) - f_i(y))].$$

Démonstration. — D'après la proposition précédente, cette identité est vérifiée lorsque Φ est de classe C^2. Considérons une suite Φ^n de fonctions de $C^2(\mathbf{R}^n)$, nulles en 0, à dérivées uniformément bornées, telle que Φ^n et $\Phi_i^{n'}$ convergent sur tout compact vers Φ et Φ_i'. On a vu que $\Phi^n(f)$ converge alors fortement vers $\Phi(f)$. D'autre part, pour tout i, les suites $\Phi_i^{n'}(f)$ et $g.\Phi_i^{n'}(f)$ sont faiblement compactes. On en déduit qu'elles convergent faiblement respectivement vers $\Phi_i'(f)$ et $\Phi_i'(f)\,g$, ce qui assure la convergence des deux premiers termes du deuxième membre de l'identité. La convergence des deux derniers termes résulte du théorème de convergence dominée.

Remarque. — Dans les calculs fonctionnels que nous serons amenés à effectuer dans la suite, nous utiliserons des fonctions de classe C^2, qui permettent d'obtenir des formules plus développées. On pourra chaque fois obtenir des résultats analogues en considérant des fonctions à dérivées lipschitziennes.

2.2. Applications

2.2.1. PROPOSITION. — *Soit* $\Phi \in C_1(\mathbf{R}^n)$, *nulle en* 0 *et à dérivées bornées. L'application définie sur* $(\mathbf{H})^n$: $f \mapsto \Phi(f) \in \mathbf{H}$ *est continue.*

Démonstration. — On sait que cette application est continue de $(\mathbf{H})^n$ dans $\mathbf{H}$ muni de la topologie faible. Il suffit donc de montrer que si une suite f^m converge fortement vers f dans $(\mathbf{H})^n$, $a(\Phi(f^m))$ converge vers $a(\Phi(f))$. Décomposons $q(\Phi(f^m))$ sous la forme

$$\sum_{i,j} \int \Phi_i'(f^m)\Phi_j'(f^m)[d\gamma_a(f_i^m, f_j^m) - d\gamma_a(f_i, f_j)]$$
$$+ \sum_{i,j} \int \Phi_i'(f^m)\Phi_j'(f^m)\, d\gamma_a(f_i, f_j) + \int \Phi(f^m)^2\, d\chi_a$$
$$+ \iint (\Phi(f^m)(x) - \Phi(f^m)(y))^2\, d\sigma_a(x, y).$$

Le deuxième terme converge vers la partie locale de $a(\Phi(f), \Phi(f))$, d'après le théorème de convergence dominée.

La convergence des deux derniers termes s'établit par un raisonnement d'équi-intégrabilité. Reste à démontrer que le premier terme converge vers 0. Il suffit de remarquer que si l'on pose

$$\int \Phi_i'(f^m)\Phi_j'(f^m)\,d\gamma_a(g_i, g_j) = \Phi_m(g), \qquad \forall g \in (\mathbf{H})^n,$$

q_m est une forme quadratique positive sur $(\mathbf{H})^n$. En effet,

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}^n, \quad \textstyle\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j\gamma_a(f_i, f_j) = \gamma_a(\sum_i \lambda_i f_i) \geqslant 0.$$

On a alors les inégalités

$$\begin{aligned}|q_m(f)-q_m(f^m)| &\leqslant \sqrt{q_m(f-f^m)}\left(\sqrt{q_m(f)}+\sqrt{q_m(f^m)}\right)\\ &\leqslant K\sqrt{\textstyle\sum_i a(f_i-f_i^m, f_i-f_i^m)}\end{aligned}$$

pour une constante K indépendante de m.

Remarque. — Ce résultat tombe en défaut si l'on suppose seulement Φ lipschitzienne et si on a $n > 1$ (*cf.* [2]).

2.2.2. L'identité (2.1) et le lemme de domination de la proposition 1.5.5 permettent d'établir très facilement le résultat suivant, dû à HAMZA (17).

PROPOSITION. — *Si* $a \in \overline{\mathscr{D}}(H_0^1(\Omega))$, *où* Ω *est un ouvert de* $\mathbf{R}^n$, *la partie locale de* a *s'écrit :*

$$\forall f \in C_K^1(\Omega), \quad N(f) = \textstyle\sum_{i,j}\displaystyle\int a_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx,$$

avec $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega, dx)$, *et* $\exists\, c > 0$ *tel que*

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}^n, \quad 0 \leqslant \textstyle\sum_{i,j}a_{i,j}\lambda_i\lambda_j \leqslant c(\sum_i \lambda_i^2).$$

Démonstration. — Il suffit de considérer, pour tout ouvert ω tel que ϖ soit compact et inclus dans Ω, n fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ de $H_0^1(\Omega)$ égales sur ω aux fonctions coordonnées, de remarquer que

$$\gamma_a(f) = \textstyle\sum_{i,j}\displaystyle\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\gamma_a(\Phi_i, \Phi_j) \quad \text{sur } \omega,$$

et d'appliquer le lemme de domination à $\Sigma\, \lambda_i\, \Phi_i$, pour tout n-uplet $\lambda \in \mathbf{R}^n$, ce qui donne les inégalités

$$0 \leqslant \textstyle\sum_{i,\,j} \lambda_i \lambda_j \, d\gamma_a(\Phi_i,\, \Phi_j) \leqslant C(\sum_i \lambda_i^2)\, dx, \qquad \text{si} \quad a(f,\, f) \leqslant C \,\|\, f \,\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Remarque. — On montre de la même façon, que si a est coercive sur $H^1_0(\Omega)$, il existe $c > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}^n, \quad \textstyle\sum_{i,\,j} a_{i,\,j} \lambda_i \lambda_j \geqslant c \sum_i \lambda_i^2.$$

2.2.3. PROPOSITION :

(*a*) *les fonctions de* $C^2(\mathbf{R}^n)$ *nulles en* 0 *opèrent sur* $\mathbf{H}_b \cap (\mathscr{P}_a - \mathscr{P}_a)$. *Si* Φ *est une telle fonction et si* $f = (f_i) = (G\, \mu_i)$ *est un n-uplet d'éléments de* $\mathbf{H}_b \cap (\mathscr{P}_a - \mathscr{P}_a)$, *on a l'identité*

$$\begin{aligned}(2.3)\quad & \Phi(f) - G(\Phi(f).\chi_a) \\ & = G\Big[-\textstyle\sum_{i,\,j} \Phi''_{i,\,j}(f)\, \gamma_a(f_i,\, f_j) + \sum_i \Phi'_i(f)(\mu_i - f_i \chi_a) \\ & \qquad - \displaystyle\int d\sigma_a(x,\, .)(\Phi(f(x)) - \Phi(f(.)) - \textstyle\sum_i \Phi'_i(f(.))(f(x) - f(.))\Big];\end{aligned}$$

(*b*) *les fonctions de* $C^2(\mathbf{R}^n)$ *opèrent sur* $\mathscr{D}(A) \cap L^\infty(m)$ *si, et seulement si,* $\mathscr{D}(A) \cap L^\infty(m)$ *contient une algèbre dense dans* $\mathbf{H}$.

Démonstration. — On établit d'abord le lemme suivant.

LEMME. — *Soient* f *un n-uplet d'éléments de* $\mathbf{H}_b$, *et* Φ *une fonction de* $C^2(\mathbf{R}^n)$ *nulle en* 0. *Les mesures* $\gamma_a(f_i, f_j)$ *et*

$$\int \sigma_a(dx,\, .)(\Phi(f(x)) - \Phi(f(.)) - \textstyle\sum_i \Phi'_i(f(.))(f_i(x) - f_i(.))$$

sont d'énergie finie.

En effet, on remarque les inégalités

$$|\, \gamma_a(f_i,\, f_j) \,| \leqslant \frac{1}{2}(\gamma_a(f_i) + \gamma_a(f_j))$$

et

$$\begin{aligned} & \Big|\quad \sigma_a(dx,\, .)(\Phi(f(x)) - \Phi(f(.)) - \textstyle\sum_i \Phi'_i(f(.))(f_i(x) - f_i(.)))\Big| \\ & \leqslant n \sup_{i,\,j} \sup_{\lambda \in \operatorname{Im}(f)} |\, \Phi''_{i,\,j}(\lambda) \,| \textstyle\sum_i \displaystyle\int \sigma_a(dx,\, .)(f_i(x) - f_i(.))^2.\end{aligned}$$

Mais, d'après 1.4.2 (*b*), les mesures

$$\Gamma_a(f_i) = \gamma_a(f_i) + \int \sigma_a(dx, .)(f_i(x) - f_i(.))^2$$

sont d'énergie finie, ce qui permet de conclure.

Ce lemme étant ainsi établi (2.3) est une conséquence directe de l'identité (2.2).

D'après 1.4.3, on sait que $\mathscr{D}(A) \cap L^\infty(m)$ est une algèbre. Seule la partie directe de la propriété (*b*) est à démontrer. Il suffit d'appliquer (*a*) et de remarquer que les inégalités de la démonstration du lemme précédent établissent l'absolue continuité par rapport à m de la mesure associée à $\Phi(f)$, lorsque $f_i \in \mathscr{D}(A) \cap L^\infty(m)$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$.

2.3. Fonctions convexes

La proposition précédente suggère le résultat suivant, qui est l'analogue d'un résultat établi par MEYER sur les semi-martingales [23].

PROPOSITION. — *Les fonctions lipschitziennes et convexes définies sur* $\mathbf{R}^n$ *opèrent sur* $\mathscr{P}_a - \mathscr{P}_a$.

Démonstration. — Soit Φ une telle fonction. Soit $f \in (\mathscr{P}_a - \mathscr{P}_a)^n$.

Posons $f_i = f_i' - f_i''$ avec $f_i' = G\mu_i' \in \mathscr{P}_a$ et $f_i'' = G\mu_i'' \in \mathscr{P}_a$.

Si $g \in \mathbf{H}^+$, on a

$$a(\Phi(f), g) = \lim_{\alpha \to +\infty} \iint g(y)(\Phi(f(y) - \Phi(f(x)) \, d\sigma_\alpha(x, y) + \int \Phi(f) g \, d\chi_a.$$

Pour tout $x \in X$, soit $h(x) = (h^1(x), h^2(x), \ldots, h^n(x)$, (1) une forme linéaire associée à un hyperplan d'appui au point $(f_1(x) \ldots f_n(x)$, $\Phi(f(x))$ du convexe fermé de $\mathbf{R}^{n+1}$ défini par Φ. Si l'on suppose Φ k-lipschitzienne, on a $-k \leqslant h^i(x) \leqslant k$.

On a

$$\begin{aligned} &\iint g(y)(\Phi(f(y)) - \Phi(f(x)) \, d\sigma_\alpha \\ &\quad \leqslant \textstyle\sum_i \displaystyle\iint g(y) h^i(y)(G\mu_i'(y) - G\mu_i'(x)) \, d\sigma_\alpha \\ &\qquad - \iint g(y) h^i(y)(G\mu_i''(y) - G\mu_i''(x)) \, d\sigma_\alpha. \end{aligned}$$

Cette dernière expression peut s'écrire :

$$\sum_i \int \alpha\, \hat{G}_\alpha (gh^i)(d\mu'_i - d\mu''_i) + \sum_i \alpha \int (1-\alpha\, G_\alpha 1)\, gh^i f_i\, dm,$$

et elle est donc majorée par

$$k \sum_i \int \alpha\, \hat{G}_\alpha\, g\, (d\mu'_i + d\mu''_i) - \alpha \int (1-\alpha\, G_\alpha 1)\, \Phi(f)\, dm.$$

Par un passage à la limite en α, puis en m, on en déduit :

$$a(\Phi(f), g) \leqslant +k \sum_i \int g\, (d\mu'_i + d\mu''_i).$$

Remarque. — Si, de plus, Φ est décroissante sur $(\mathbf{R}^+)^n$ muni de son ordre propre, on peut montrer, par les mêmes méthodes, que $-\Phi$ opère sur $\mathscr{P}_a$.

3. Forme balayée. Opérateur de Ventcel'

Nous supposerons dans ce chapitre que a est une forme de Dirichlet de domaine $\mathbf{H}$ et que M est un fermé de X de composante polaire vide dont le complémentaire est noté D. Nous reprenons les notations de 0.2.5.

3.1. Mesures associées à la forme de Dirichlet balayée

3.1.1. CALCUL DE γ_{aM}.

PROPOSITION. — *Pour tout* $\Phi \in \mathbf{H}$, $\gamma_{aM}(\Phi|_M) = 1_M\, \gamma_a(\Phi)$.

C'est le résultat fondamental de cette section.

Il est à noter qu'en particulier, a^M n'a pas de partie locale dès que les mesures d'énergie ne chargent pas M. (Dans le cas classique, ceci signifie que M est de mesure de Lebesgue nulle.)

Démonstration. — Considérons la forme symétrique b définie sur $\mathbf{H}$ par l'identité

$$b(\Phi) = \int_M d\gamma_a(\Phi), \qquad \forall \Phi \in \mathbf{H}.$$

LEMME. — *Si* $\Phi = \Phi'$ *quasi partout sur* M, $\gamma_a(\Phi) = \gamma_a(\Phi')$ *sur* M.

En effet, si nous considérons une suite D_n d'ouverts relativement compacts croissants vers D et tels que $\overline{D_n} \subseteq D$, on a

$$1_M \cdot \gamma_a(\Phi) = 1_M \gamma_a(H^{M_n}\Phi), \quad \text{pour tout } n,$$

en notant M_n le complémentaire de D_n.

Mais il suffit de remarquer que $H^{M_n}\Phi$ converge fortement vers $H^M\Phi$ (*cf.* [21], 2.2.1) pour établir l'identité

$$1_M \cdot \gamma_a(\Phi) = 1_M \cdot \gamma_a(H^M\Phi),$$

ce qui permet de conclure.

Ce lemme montre en particulier que, pour tout $\Phi \in \mathbf{H}$, $a^M(\Phi) \geqslant b(\Phi)$.

D'après le lemme de domination de 1.5.5, on a alors :

$$\forall \Phi \in \mathbf{H}, \qquad \gamma_{a^M}(\Phi) \geqslant \gamma_b(\Phi).$$

Mais d'après la remarque suivant la proposition 1.5.4, on a

$$\gamma_b(\Phi) = 1_M \cdot \gamma_a(\Phi).$$

Reste à établir l'inégalité $1_M \gamma_a(\Phi) \geqslant \gamma_{a^M}(\Phi)$. On voit immédiatement, d'après les définitions, que $\Gamma_{a^M}(\Phi)$ et $\gamma_{a^M}(\Phi)$ sont portées par M. Il suffit donc d'établir l'inégalité $\gamma_a(\Phi) \geqslant \gamma_{a^M}(\Phi)$.

Dans le cas où a est symétrique, on a $a^M(\Phi) \leqslant a(\Phi)$ pour tout Φ, et l'inégalité cherchée résulte alors directement du lemme de domination.

Le cas non symétrique est plus délicat.

D'après le lemme de domination et la remarque suivant la proposition 1.5.4, il suffit d'établir l'inégalité

$$a(\Phi) \geqslant \int d\gamma_{a^M}(\Phi), \qquad \forall \Phi \in \mathbf{H},$$

i. e.

$$(3.1) \quad a^D(\Phi - H^M\Phi, \Phi - \hat{H}^M\Phi) + \frac{1}{2}\iint (\Phi(x) - \Phi(y))^2 \, d\sigma_{a^M} + \int f^2 \, d\chi_{\tilde{a}^M} \geqslant 0, \quad \text{d'après (1.14).}$$

Pour pouvoir conclure la démonstration, nous allons utiliser des formes approchées.

3.1.2. APPROXIMATION DE σ_{a^M} ET χ_{a^M}. — Il est clair que σ_{a^M} et χ_{a^M} sont portées par M (pour χ_{a^M}, on utilise 1.3.4).

Dans les calculs approchés qui vont suivre nous utilisons constamment la relation : $H^M - H^M_\alpha = \alpha\, G^D_\alpha\, H^M$.

(a) Si nous considérons *formellement* deux masses infinitésimales distinctes dx et dy portées par M comme des éléments de $\mathbf{H}$, on a

$$\begin{aligned}\sigma_{a^M}(dx, dy) &= -a^M(dx, dy)\\ &= -a(dx, dy) + a^D(dx - H^M(dx), dy - \hat{H}^M(dy))\\ &= \sigma_a(dx, dy)\\ &\quad + \lim_{\alpha\to+\infty} \alpha \int_D (\mathrm{Id} - \alpha\, G^D_\alpha)(dx - H^M(dx)).(dy - \hat{H}^M(dy))\, dm\\ &= \sigma_a(dx, dy) + \lim_{\alpha\to+\infty} \alpha \int_D H^M_\alpha(dx)\, \hat{H}^M_0(dy)\, dm.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\chi_{a^M}(dx) = a^M(1, dx) &= a(1, dx) - a^D(1 - H^M 1, dx - \hat{H}^M(dx))\\ &= \chi_a(dx) + \lim_{\alpha\to+\infty} \alpha \int_D (1 - H^M 1).(\mathrm{I} - \alpha\, \hat{G}^D_\alpha)(dx - \hat{H}^M(dx))\, dm\\ &= \chi_a(dx) + \lim_{\alpha\to+\infty} \alpha \int_D (1 - H^M 1)\, \hat{H}^M_\alpha(dx)\, dm.\end{aligned}$$

Si nous considérons les mesures

$$U^M_{0,\alpha}(dx, dy) = \alpha \int H^M_\alpha(dx)\, \hat{H}^M_0(dy)\, dm$$

et

$$\chi^M_{0,\alpha}(dx) = \alpha \int_D (1 - H^M_0 1)\, \hat{H}^M_\alpha(dx)\, dm,$$

un calcul élémentaire (*cf.* [21], 3.1.1) montre que

$$U^M_{0,\alpha} - U^M_{0,\beta} = U^M_{\beta,\alpha} = (\beta - \alpha) \int H^M_\alpha(dx)\, \hat{H}^M_\beta(dy)\, dm$$

et

$$\chi^M_{0,\alpha} - \chi^M_{0,\beta} = \chi^M_{\alpha,\beta} = (\beta - \alpha) \int_D (1 - \beta\, G^D_\beta 1 - H^M_\beta 1)\, \hat{H}^M_\alpha(dx)\, dm,$$

ce qui établit la croissance en α de $U^M_{0,\alpha}$ et $\chi^M_{0,\alpha}$.

Nous sommes ainsi amenés à démontrer les identités suivantes.

$$\sigma_{a^M} = 1_{M\times M-\Delta}\,\sigma_a + \lim_{\alpha\to+\infty}\uparrow U^M_{0,\alpha}, \tag{3.2}$$

$$\chi_{a^M} = 1_M\,\chi_a + \lim_{\alpha\to+\infty}\uparrow \chi^M_{0,\alpha}. \tag{3.3}$$

(*b*) Pour établir la première identité, considérons deux fonctions f et g de $\mathbf{H}^+$ à supports disjoints.

On a

$$\iint f(x)\,g(y)\,d\sigma_{a^M}(x, y)$$

$$= -a^M(f, g) = -a(f, g) + a^D(f - H^M f,\ g - \hat{H}^M g)$$

$$= \iint f(x)\,g(y)\,d\sigma_a + \lim_{\alpha\to+\infty}\alpha\int(\mathrm{Id} - \alpha\,G^D_\alpha)(f - H^M f).(g - \hat{H}^M g)\,dm.$$

L'expression sous la limite peut s'écrire :

$$\alpha\int_D H^M_\alpha f.\hat{H}^M g\,dm - \alpha^2\int G^D_\alpha f.g\,dm - \alpha\int_D f\,\hat{H}^M_\alpha g\,dm - \alpha\int g.H^M_\alpha f\,dm.$$

Les trois derniers termes de cette somme étant négatifs, on a

$$\sigma_{a^M} - \sigma_a \leqslant \lim_{\alpha\to+\infty}\uparrow U^M_{0,\alpha},$$

$U^M_{0,\alpha}$ étant portée par $M\times M$, on a en fait

$$\sigma_{a^M} \geqslant U^M_{0,\alpha} + 1_{M\times\mathring{M}-\Delta}\,\sigma_a,$$

D'autre part, on établit facilement la relation

$$a(H^M f,\ \hat{H}^M g) = a_\alpha(H^M_\alpha f,\ \hat{H}^M_\alpha g) - \iint f(x)\,g(y)\,dU^M_{0,\alpha} \tag{3.4}$$

(cette relation est valable pour f et g quelconques dans $\mathbf{H}$).

On a en particulier

$$\sigma_{a^M} = U^M_{0,\alpha} + \sigma_{(a_\alpha)^M}.$$

Il suffit donc pour pouvoir conclure, de démontrer l'inégalité $\sigma_{a^M} \geqslant 1_{M\times M}\,\sigma_a$, et d'appliquer ce résultat à a_α.

LEMME 1. — $\sigma_{a^M} \geqslant 1_{M\times M}\,\sigma_a$.

Si M_n est la suite de fermés envisagée dans la démonstration précédente, σ_{a^M} est limite vague des mesures $\sigma_{a^{M_n}}$.

Il suffit donc de démontrer l'inégalité

$$\sigma_{a^{M_n}} \geqslant 1_{\mathring{M}_n \times \mathring{M}_n} \sigma_a \quad \text{pour tout } n.$$

Or si f et g sont deux éléments de $C_K^+(\mathring{M}_n)$ à supports disjoints, $H^{M_n} f - f(\hat{H}^{M_n} g - g)$ est un a^{D_n} $(\hat{a}^{D_n})$-potentiel d'après 1.1.3.

On en déduit :

$$\iint f(x) g(y) \, d\sigma_{a^{M_n}} = a(H^{Mn} f, H^{Mn} g) \geqslant a(f, g) = \iint f(x) g(y) \, d\sigma_a.$$

(*c*) Pour démontrer la deuxième identité, nous suivrons essentiellement la même voie.

Nous commençons par établir l'inégalité

$$\chi_{a^M} \geqslant 1_M \chi_a + \lim_{\alpha \to +\infty} \uparrow \chi^M_{0,\alpha}.$$

D'après (3.4), on a

$$\chi_{a^M}(dx) = \chi_{(a_\alpha)^M}(dx) + \int H_0^M 1 \, \hat{H}_\alpha^M(dx) \, dm.$$

Il suffit, pour pouvoir conclure, d'établir l'inégalité $\chi_{a^M} \geqslant \chi_a \hat{H}^M$ et de l'appliquer à a_α. On aura en effet

$$\chi_{(a_\alpha)^M} \geqslant 1_M \chi_a + \alpha \, m \, \hat{H}_\alpha^M.$$

LEMME 2. — *La mesure d'équilibre de a^M est plus grande que la mesure balayée sur M de la mesure d'équilibre de a. Si D est relativement compact, ces deux mesures sont identiques.*

Démonstration. — Notons $\underline{\prec}^a$ l'orde fort dans le cône des fonctions a-excessives (*cf.* [1] et [21]; dans [21], ces fonctions sont appelées surmédianes).

Si μ est une mesure sur M positive et ne chargeant pas les polaires, on a (*cf.* 1.3.1, et [21] 2.3) :

$$\begin{aligned} \mu \leqslant \chi_{a^M} \Leftrightarrow R^M \mu \underline{\prec}^{a^M} 1 \Leftrightarrow G\mu = H^M R^M \mu \underline{\prec}^a H^M 1 \\ \Rightarrow \quad G\mu \underline{\prec}^a G(\chi_a \hat{H}_0^M) \quad \Leftrightarrow \quad \mu \leqslant \chi_a \hat{H}_0^M. \end{aligned}$$

L'implication peut être remplacée par une équivalence lorsque D est relativement compact.

Remarque. — Si M est compact, χ_{a^M} est la mesure d'équilibre de M.

Pour établir l'identité (3.3), il suffit maintenant de démontrer l'inégalité

$$\int f\, d\chi_{a^M} \leqslant \int f\, d\chi_a + \lim_{\alpha\to+\infty} \uparrow \int f\, d\chi_{0,\alpha}^M$$

lorsque f décrit une partie totale de $\mathbf{H}^+$.

On peut prendre f dans $\mathbf{H}^\omega$, où ω est un ouvert relativement compact quelconque, puis f, a^ω-potentiel d'une mesure bornée. Une telle fonction est également le a-potentiel d'une mesure bornée. Il suffit donc de prendre f positive, à support compact et potentiel d'une mesure bornée.

Considérons une suite g_n de fonctions de $\mathbf{H}^+$, égales à 1, sur le support de f, et croissant vers 1. On a

$$\begin{aligned}\int f\, d\chi_{a^M} &= \lim_{n\to+\infty} a^M(g_n, f)\\ &= \lim_{n\to+\infty}(a(g_n, f) - a^D(g_n - H^M g_n, f - \hat{H}^M f)).\end{aligned}$$

Si $f = G\mu$, cette limite peut s'écrire :

$$\begin{aligned}&\int f\, d\chi_a - \int (1 - H_0^M 1)\, d\mu\\ &= \int f\, d\chi_a - \lim_{\alpha\to+\infty} \int \alpha\, G_\alpha^D(1 - H_0^M 1)\, d\mu\\ &= \int f\, d\chi_a + \lim_{\alpha\to+\infty} \uparrow \int f\, d\chi_{0,\alpha}^M - \lim_{\alpha\to+\infty} \alpha \int (1 - H_0^M 1)(\mathrm{Id} - \alpha\, \hat{G}_\alpha^D) f\, dm.\end{aligned}$$

(*d*) Nous pouvons maintenant achever la démonstration de 3.1.1. Le premier membre de l'inégalité (3.1) est minoré par $lim_{\alpha\to+\infty}\, r_{(\alpha)}^M(\Phi)$ avec

$$\begin{aligned}r_{(\alpha)}^M(\Phi) = \alpha \int (\mathrm{Id} - \alpha\, G_\alpha^D)(\Phi - H^M \Phi).(\Phi - \hat{H}^M \Phi)\, dm + \frac{1}{2}\int \Phi^2\, d\chi_{0,\alpha}^M\\ + \frac{1}{2}\int \Phi^2\, d\hat{\chi}_{0,\alpha}^M + \frac{1}{2}\iint (\Phi(x) - \Phi(y))^2\, dU_{0,\alpha}^M(x, y)\end{aligned}$$

$$\left(\hat{\chi}_{0,\alpha}^M(dx) = \alpha \int (1 - \hat{H}_0^M 1)\, H_\alpha^M(dx)\, dm;\ \lim \uparrow \hat{\chi}_{0,\alpha} = \chi_{\hat{a}^M} - 1_M\, \chi_{\hat{a}}\right).$$

En reprenant le calcul de [21] (3.1.3), on établit l'identité

$$(3.5)\quad \begin{aligned}r_{(\alpha)}^M(\Phi) = \frac{\alpha}{2}\iint (\Phi(x) - \Phi(y))^2 (H_\alpha^M(x, dy) + \hat{H}_\alpha^M(x, dy) + \alpha\, G_\alpha^D(x, dy))\\ + \frac{\alpha}{2}\int \Phi^2 (1 - \alpha\, G_\alpha^D 1 - H_\alpha^M 1 + 1 - \alpha\, \hat{G}_\alpha^D 1 - \hat{H}_\alpha^M 1)\, dm\end{aligned}$$

pour tout $\Phi \in L^2(\Pi_\alpha^M(m)+\hat{\Pi}_\alpha^M(m)+m)$, ce qui permet de conclure à la positivité de $r_{(\alpha)}^M$.

(On remarquera que $1-\alpha\, G_\alpha^D 1 - H_\alpha^M 1 = (\mathrm{Id}-\alpha\, G_\alpha^D)\,(1-H_0^M 1)$ est positif.) La proposition 3.1.1 est ainsi démontrée.

3.1.3. MESURE Θ^M ET χ_M. FORMULE DE DOUGLAS. FORMES n^M ET r^M.

(*a*) DÉFINITIONS. — On appelle *bimesure de Naïm* associée à M la bimesure $\Theta^M = \sigma_{aM} - 1_{M\times M-\Delta}\,\sigma_a$.

On note χ_M ($\hat{\chi}_M$) la mesure $\chi_{aM} - 1_M\,\chi_a$ ($\chi_{\hat{a}M} - 1_M\,\chi_{\hat{a}}$).

D'après 2.1.2, on a

$$\Theta^M = \lim_{\alpha\to+\infty}\uparrow U_{0,\alpha}^M, \tag{3.6}$$

$$\chi_M = \lim_{\alpha\to+\infty}\uparrow \chi_{0,\alpha}^M\,(\hat{\chi}_M = \lim_{\alpha\to+\infty}\uparrow \hat{\chi}_{0,\alpha}^M). \tag{3.7}$$

La terminologie « bimesure de Naïm » évoque le noyau introduit par NAÏM [24]. Le lien avec le noyau de Naïm apparaît clairement dans la « formule de Douglas généralisée » que nous allons énoncer. On peut aussi remarquer que l'identité (3.6) a été démontrée par DOOB pour le noyau de Naïm [12].

(*b*) FORMULE DE DOUGLAS GÉNÉRALISÉE. — Pour tout $\Phi \in \mathbf{H}$,

$$\begin{aligned}\int_D d\gamma_{\tilde{a}}(\Phi)+\Phi^2\,d\chi_a = {} & \frac{1}{2}\iint_{M\times M-\Delta}(\Phi(x)-\Phi(y))^2\,d\Theta^M(x,y)\\ & -\frac{1}{2}\iint_{D\times X\cup X\times D-\Delta}(\Phi(x)-\Phi(y))^2\,d\sigma_a(x,y)\\ & +\frac{1}{2}\int\Phi\,(d\chi_M+d\hat{\chi}_M)+a^D(\Phi-H^M\Phi,\ \Phi-\hat{H}^M\Phi).\end{aligned}$$

Il suffit d'écrire $\int_D d\gamma_a(\Phi)$ sous la forme

$$\begin{aligned} & a^M(\Phi)+a^D(\Phi-H^M\Phi,\ \Phi-\hat{H}^M\Phi)-\int_M d\gamma_a(\Phi)\\ & -\frac{1}{2}\iint(\Phi(x)-\Phi(y))^2\,d\sigma_a(x,y)-\int\Phi^2\,d\chi_{\tilde{a}}\end{aligned}$$

et de développer $a^M(\Phi)$ en utilisant les définitions précédentes et la proposition 3.1.1.

Remarque. – Cette formule fut d'abord établie par DOUGLAS [13] dans le cas classique et en supposant que D est un disque. Θ était alors calculé explicitement. OSBORN [25] généralisa ce résultat à des domaines plans limités par des courbes régulières. DOOB [12] donna un résultat plus général en utilisant la frontière de Martin et le noyau de NAÏM [24]. Son travail fut ensuite généralisé par KUNITA au cas des diffusions [19] et par T. KORI au cas des espaces harmoniques symétriques [18]. Une formule analogue a été établie par SILVERSTEIN, en utilisant des méthodes probabilistes (*cf.* [28], 6.34, et [27] dans le cas symétrique).

(*c*) En utilisant la formule (3.7), on démontre aisément le résultat suivant :

$$\chi_M = \sup_{\mu \in A} \mu \hat{H}^M \qquad \text{et} \qquad \hat{\chi}_M = \sup_{\mu \in \hat{A}} \mu H^M, \tag{3.8}$$

où A $(\hat{A})$ désigne la famille des mesures positives définies sur D, ne chargeant pas les polaires, et telles que

$$G^D \mu \leqslant 1 - H^M 1 \, (\hat{G}^D \mu \leqslant 1 - \hat{H}^M 1).$$

(*d*) Posons

$$n^M(f) = \frac{1}{2}\iint (f(x) - f(y))^2 \, d\theta^M(x, y) + \frac{1}{2}\int f^2 \, (d\chi_M + d\hat{\chi}_M)$$

et

$$r^M(f) = a^D(f - H^M f, \, f - \hat{H}^M f) + n^M(f).$$

La formule de Douglas montre que

$$r^M(f) = \int_D d\gamma_a(f) + f^2 \, d\chi_a^{\sim} + \frac{1}{2}\iint_{D \times X \cup X \times D - \Delta} f(x) - f(y))^2 \, d\sigma_a(x, y) \tag{3.9}$$

Les formes bilinéaires symétriques associée à r^M et n^M sont donc des éléments de $\overline{\mathscr{D}}(\mathbf{H})$.

Enfin, on peut noter que

$$r^M(f) = \lim_{\alpha \to +\infty} r^M_{(\alpha)}(f) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathbf{H}.$$

3.2. Opérateur de Ventcel'. Dérivée normale

L'objet de cette section est de montrer comment, dans notre cadre, nous pouvons introduire un « opérateur de Ventcel' » permettant essentiellement d'énoncer une « condition frontière » pour qu'une fonction de classe C^2

opère sur le domaine du générateur, dans le cas où la mesure de base m ne charge que l'intérieur de X (dans les travaux effectués jusqu'ici sur ce sujet, X était une variété à bord) : c'est la proposition 3.2.3.

Dans un deuxième temps, on voit comment peut être introduit, essentiellement dans le cas symétrique, un opérateur de « dérivation normale » à M satisfaisant à la formule de Green et opérant effectivement comme une dérivation.

3.2.1. Définitions :

(*a*) on note $\mathcal{P}_a(D)$ le cône des fonctions de $\mathbf{H}$ telles que $f - H^M f = G^D \mu$, où μ est une mesure positive de a-énergie finie;

(*b*) on appelle opérateur de Ventcel' de M, et on note L^M, l'application définie sur $\mathcal{P}_a(D) - \mathcal{P}_a(D)$ et à valeurs dans $(\mathbf{H}^M)'$ telle que $\forall\, \Phi \in \mathbf{H}^M$, $\forall f \in \mathcal{P}_a(D) - \mathcal{P}_a(D)$, si $f - H^M f = G^D \mu$,

$$\langle L^M(f), \Phi \rangle = a(f, \hat{H}^M \Phi) - \int_D \hat{H}^M \Phi \, d\mu.$$

Remarques :

(i) si $f = G\nu$, $L^M(f)$ s'identifie à la mesure $1_M . \nu$;

(ii) on établit aisément l'identité :

$$(3.10) \qquad \langle L^M(f), \Phi|_M \rangle = a(f, \Phi) - \int_D \Phi \, d\mu, \qquad \forall \Phi \in \mathbf{H};$$

(iii) pour tout $f, g \in \mathbf{H}^M$ $\langle L^M(H^M f), g \rangle = a^M(f, g)$.

3.2.2. Calculs fonctionnels

Notation. — Si $g \in \mathbf{H}_b$, on note $\tau(g)$ l'opérateur de multiplication par g, défini sur $\mathbf{H}_b$.

Propositions. — *Si f est un n-uplet de fonctions de $(\mathcal{P}_a(D) - \mathcal{P}_a(D)) \cap \mathbf{H}_b$, si Φ est une fonction de $C^2(\mathbf{R}^n)$ nulle en* 0,

(*a*) $\Phi(f) \in (\mathcal{P}_a(D) - \mathcal{P}_a(D)) \cap \mathbf{H}_b$;

(*b*) *si $\Phi(f) - H^M \Phi(f) = G^D \mu$ et $f_i - H^M f_i = G^D \mu_i$ pour tout*

$$i \in \{1, \ldots, n\},$$

on a les identités :

$$(3.11)\quad \mu-1_D\Phi(f)\chi_a = \sum_i \Phi_i'(f).(\mu_i-1_D f_i\chi_a) -\sum_{i,j}\Phi_{i,j}''(f)\gamma_a(f_i, f_j)1_D-\int d\sigma_a(x, .) \times[\Phi(f(x))-\Phi(f(.))-\sum_i\Phi_i'(f(.))(f_i(x)-f_i(.))]1_D(.),$$

$$(3.12)\quad \Pi^M(\mu)-\Phi(f).\chi_M = \sum_i \Pi^M(\mu_i)-f_i.\chi_M -\int[\Phi(f(x))-\Phi(f(.))-\sum_i\Phi_i'(f(.))(f_i(x)-f_i(.))] \times(d\Theta^M(x, .)-1_{D\times M}(x, .)\,d\sigma_a(x, .)),$$

$$(3.13)\quad L^M(\Phi(f))-1_M\Phi(f).\chi_a = \sum_i((L^M(f_i)\circ\tau(\Phi_i'(f))-1_M\Phi_i'(f)f_i.\chi_a) -1_M\Big[\sum_{i,j}\Phi_{i,j}''(f)\gamma_a(f_i, f_j)+\int d\sigma_a(x, .) \times(\Phi(f(x))-\Phi(f(.))-\sum_i\Phi_i'(f(.))(f_i(x)-f_i(.))\Big];$$

(*c*) *si* $f_1 = G^D\nu$, *on a l'identité*

$$(3.14)\quad L^M(\Phi(f))-1_M.\Phi(f).\chi_a = -\Phi_1'(f).\Pi^M(\nu)-\sum_{i>1,j>1}\Phi_{i,j}''(f)1_M.\gamma_a(f_i, f_j) +\sum_{i>1}(L^M(f_i)\circ\tau(\Phi_i'(f))-1_M\Phi_i'(f)f_i.\chi_a)-1_M\int d\sigma_a(x, .) \times[\Phi(f(x)(-\Phi(f(.))-\sum_{i\geqslant 1}\Phi_i'(f(.))(f_i(x)-f_i(.))].$$

(Dans les deux identités précédentes, on considère que $L^M(\Phi(f))$ opère sur $\mathbf{H}_b^M$.)

Remarque. — L'identité (3.14) justifie la terminologie employée : dans le cas où a est associé à une diffusion sur une variété à bord et où les f_i sont des coordonnées d'une carte locale, elle permet d'identifier L^M avec l'opérateur frontière introduit par VENTCEL' [29]. Toutefois, la démarche suivie ici est plus proche de celle de KUNITA [20].

Démonstration. — La propriété (*a*) et l'identité (3.11) sont des conséquences directes de l'identité (2.2) et du lemme établi dans la démonstration de 2.2.3.

Pour l'identité (3.13), il suffit, dans la définition de $L^M(\Phi(f))$ de développer a en utilisant (2.2), et de développer μ en utilisant l'identité (3.11). L'identité (3.14) est une conséquence de l'identité (3.13) et du résultat suivant :

Si $f \in \mathbf{H}^D$, $1_M \gamma_a(f, g) = 0$, $\forall g \in \mathbf{H}$. En effet,

$$\forall \Phi \in b\mathscr{B}^+(X), \quad \left(\int_M \Phi\, d\gamma_a(f, g)\right)^2 \leqslant \int_M \Phi\, d\gamma_a(f) \times \int_M \Phi\, d\gamma_a(g).$$

Le premier terme du produit est nécessairement nul, ce qui permet de conclure.

Pour l'identité (3.12), il suffit d'utiliser l'identité

$$-L^M(\Phi(f), g) + a^M(f, g) = \int g\, d\Pi^M(\mu), \qquad \forall g \in \mathbf{H}^M,$$

et en prenant g borné, de développer L^M en utilisant l'identité (3.13), et a^M en utilisant les résultats de 3.1, et l'identité (2.2). Cette identité permet de calculer, pour tout Φ appartenant à $\mathbf{H}_b^M$, la balayée sur M de la mesure de a^D-potentiel : $H^M \Phi^2 - (\mathbf{H}^M \Phi)^2$, et ainsi de généraliser un résultat de Doob (*cf.* [12], *voir* aussi Kunita [19]).

3.2.3. Proposition (*condition frontière*).

(*A*) *Supposons que M est de m mesure nulle (en particulier, $M = \partial D$). Si A^D désigne le générateur de G_α^D, $f \in \mathbf{H}$ appartient à $\mathscr{D}(A)$ si, et seulement si,*

(i) $f - H^M f \in \mathscr{D}(A^D)$;

(ii) $L^M(f) = 0$.

(*B*) *Supposons de plus que :*

(*a*) $1_D . \Gamma_a(f) \leqslant m$, *pour tout* $f \in \mathbf{H}$. *et*

(*b*) $1_D . \chi_a \leqslant m$.

Ces conditions sont en particulier vérifiées dès que :

(*a'*) $1_{X \times D} . \sigma_a = 0$ *et*

(*b'*) $\mathscr{D}(A^D) \cap L^\infty(m)$ *est une algèbre.*

Soit f un n-uplet de fonctions de $\mathbf{H}_b$ telles que $f_i - H^M f_i \in \mathscr{D}(A^D)$ (par exemple, $f_i \in \mathscr{D}(A)$) pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit Φ une fonction de

$C^2(\mathbf{R}^n)$, *supposée nnlle en* 0. *Alors*, $\Phi(f)$ *appartient à* $\mathscr{D}(A)$ *si, et seulement si*, $L^M(\Phi(f)) = 0$ (*cf.* (3.13) *et* (3.14) *pour une expresston développée*).

Démonstration. — La propriété (A) est une conséquence directe des définitions.

Pour (B), le problème est de vérifier que $\Phi(f) - \mathrm{H}^M\Phi(f)$ appartient à $\mathscr{D}(A^D)$. D'après (3.11), et les inégalités de la démonstration du lemme de 2.2.3, si $\Phi(f) - H^M(\Phi(f)) = G^D\mu$ et si $f_i - H^M f_i = G^D\mu_i$, on a l'inégalité

$$|\mu| \leqslant \sum_i \|\Phi_i'\|_\infty |\mu_i| + n \sup_{i,j} \|\Phi_{i,j}''\|_\infty 1_D \sum_i (\Gamma_a(f_i) + f_i^2 \chi_a),$$

ce qui permet de conclure.

Démontrons enfin que les conditions (a') et (b') entraînent les conditions (a) et (b). Remarquons que, d'après (a'), pour tout ouvert relativement compact ω tel que $\varpi \subseteq D$, pour tout $f \in \mathbf{H}$, pour tout $f' \in \mathbf{H}^D$ égal à f sur ω, on a l'identité $1_\omega \gamma_a(f') = 1_\omega \Gamma_a(f)$. On a également $1_D \chi_a = \chi_{a_D}$; il suffit alors d'appliquer 1.4.3 à a^D pour pouvoir conclure.

D'un point de vue probabiliste, la condition (a') signifie que le processus de Markov associé à a n'a presque sûrement pas de sauts partant de D.

3.2.4. Dérivée normale.

(a) Si les mesures d'énergie ne chargent pas M, nous noterons $\partial/\partial n^M$ l'opérateur $f \mapsto L^M(f) - f.1_M \chi_a$ nous l'appellerons l'opérateur de dérivation normale à M associé à a. En effet, il est alors facile de voir que, en reprenant les notations de 3.2.2 (b) :

$$\frac{\partial}{\partial n^M}(\Phi(f)) = \sum_i \frac{\partial}{\partial n^M}(f_i) \circ \tau(\Phi_i'(f)) \quad \text{sur } \mathbf{H}_b^M;$$

cette identité justifie le terme de dérivation.

D'autre part, l'identité (3.10) peut alors s'écrire :

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial n^M} f, g_M \right\rangle = \int_D d\Gamma_a(f, g) - \int_D g(d\mu - f\, d\chi_a),$$

$$\forall f, g \in \mathbf{H} \quad \text{(formule de Green)}.$$

(b) Si la forme a est *symétrique* et si $1_{M\times D}.\sigma_a$ est nulle, on peut toujours définir l'opérateur de dérivation normale à M : il suffit de remplacer a par r^M.

Si $f \in \mathscr{P}_a(D) - \mathscr{P}_a(D)$ avec $f - H^M f = G^D \mu$, on pose donc :

$$\forall \Phi \in \mathbf{H}^M, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial n^M}(f), \Phi \right\rangle = r^M(f, H^M \Phi) - \int_D H^M \Phi \, d\mu - \int_D f H^M \Phi \, d\chi_a.$$

On a les identités :

$$\text{(i)} \quad \forall g \in \mathbf{H}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial n^M} H^M f, g|_M \right\rangle = n^M(f, g) = r^M(H^M f, H^M g);$$

$$\text{(ii)} \quad \forall g \in \mathbf{H}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial n^M} f, g|_M \right\rangle = \int_D d\Gamma_a(f, g) - \int_D g(d\mu - f\, d\chi_a)$$

(formule de Green).

(iii) En reprenant les notations de 2.2.2,

$$\frac{\partial}{\partial n^M}(\Phi(f)) = \sum_i \frac{\partial}{\partial n^M}(f_i) \circ \tau(\Phi_i'(f)) \quad \text{sur } \mathbf{H}_b^M.$$

Les identités (i) et (ii) sont des conséquences directes de la définition. Pour établir (iii), on appliquera l'identité (2.2) à $r^M_{\mathfrak{a}}$ et l'identité (3.13).

(*c*) *Restriction à un fermé.* — Reprenons les hypothèses de (*b*). La forme $\lambda^M = a^M - n^M$ appartient à $\mathscr{D}(\mathbf{H}^M)$ (et donc à $\mathscr{D}(\mathbf{H})$). D'après les résultats de 3.1, on a, pour tout $f \in \mathbf{H}$,

$$\sigma_{\lambda^M} = 1_{M \times M} \cdot \sigma_a, \qquad \chi_{\lambda^M} = 1_M \cdot \chi_a \qquad \text{et} \qquad \gamma_{\lambda^M}(f_M) = 1_M \cdot \gamma_a(f).$$

On peut appeler λ^M la restriction de a à M.

Dans $\mathscr{D}(\mathbf{H})$, on a $a = r^M + \lambda^M$ et $a^M = n^M + \lambda^M$.

Enfin, on a l'identité

$$\forall f \in \mathscr{P}_a(D) - \mathscr{P}_a(D), \quad \langle L^M(f), . \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial n^M}(f), . \right\rangle + \lambda^M(f_M, .).$$

3.3. Un théorème de construction

Les résultats de la section 3.2 permettent d'améliorer l'énoncé et la démonstration du théorème de construction établi dans [21] (*cf.* aussi [16], [19], [27] et [28]).

Il s'agit de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'étant donnée une forme de Dirichlet définie sur un espace fonctionnel basé sur M, on puisse construire une forme de Dirichlet définie sur un espace fonctionnel basé sur X, induisant a^D et ayant H^M et $\hat{H}^M$ pour noyaux de Poisson sur M, dont elle soit la balayée.

Dans ce paragraphe, tous les espaces de Dirichlet envisagés seront *a priori* supposés réguliers et minimaux.

3.3.1. Préliminaires. — Posons

$$\mathscr{L} = \{f \in C_K(M) \text{ tel que } f(x) - f(y) \in L^2(\Theta^M)\}.$$

$\mathscr{L}$, qui contient $\mathbf{H}^M \cap C_K(M)$, est uniformément dense dans $C_K(M)$. Pour tout $f \in \mathscr{L}$, on pose

$$n^M(f) = \frac{1}{2}\iint (f(x) - f(y))^2 \, d\Theta^M + \frac{1}{2}\int f^2 (d\chi_M + d\hat{\chi}_M).$$

Proposition :

(*a*) *si* $f \in \mathscr{L}$, $H^M f - \hat{H}^M f \in \mathbf{H}^D$, *et on a l'inégalité*

$$n^M(f) \geqslant \frac{1}{4} a^D (H^M f - \hat{H}^M f);$$

(*b*) *soit* $\mathscr{H} = H^M(\mathscr{L}) \oplus \mathbf{H}^D = \hat{H}_M(\mathscr{L}) \oplus \mathbf{H}^D$.

Pour tout $f \in \mathscr{H}$, *on pose*

$$r^M(f) = a^D(f - H^M f, f - \hat{H}^M f) + n^M(f_M).$$

Si T *est une contraction de* $\mathbf{R}$, *si* $f \in \mathscr{H}$,

$$Tf \in \mathscr{H} \quad \text{et} \quad r^M(Tf) \leqslant r^M(f).$$

Il est à remarquer que la propriété (*a*) est fondamentale pour établir le théorème de construction dans le cas non symétrique, et qu'elle ne peut apparemment pas être établie à l'aide de la « formule de Douglas » démontrée sur $\mathbf{H}$.

Démonstration :

(*a*) si $f \in \mathscr{L}$, en explicitant la positivité de $r^{M(\alpha)}((H^M f + \hat{H}^M f)/2)$, (*cf.* 3.1.2 (*d*)), on obtient l'inégalité

$$n^{M(\alpha)}(f) \geqslant \frac{1}{4} a^{D(\alpha)}(H^M f - \hat{H}^M f),$$

avec

$$n^{M(\alpha)}(f) = r^{M(\alpha)}(H^M f)$$
$$= r^{M(\alpha)}(\hat{H}^M f) = \frac{1}{2}\iint (f(x)-f(y))^2\, dU^M_{0,\alpha}$$
$$+\frac{1}{2}\int \hat{H}^M_0 f\,(1-\alpha\, G^D_\alpha 1 - H^M_\alpha 1)\, dm$$
$$+\frac{1}{2}\int H^M_0 f\,(1-\alpha\, \hat{G}^D_\alpha 1 - \hat{H}^M_\alpha 1)\, dm$$

et en posant

$$a^{D(\alpha)}(g) = \alpha \int (g-\alpha\, G^D_\alpha g)\, g\, dm, \quad \text{pour tout } g \in L^2(m).$$

Il reste alors à faire tendre α vers $+\infty$, en utilisant les identités (3.6) et (3.7) et le résultat suivant :

Si $g \in L^2(m)$ et si lim inf. $a^{D(\alpha)}(g) < +\infty$, alors $g \in \mathbf{H}^D$ et

$$\lim_{a\to+\infty} a^{D(\alpha)}(g) = a^D(g)$$

(*cf.* [3] dans le cas non symétrique);

(*b*) pour tout $f \in L^2(\Pi^M_\alpha(m) + \hat{\Pi}^M_\alpha(m) + m)$, posons

$$r^{M(\alpha)}(f) = a^{D(\alpha)}(f-H^M f,\ f-\hat{H}^M f) + n^{M(\alpha)}(f).$$

D'après l'identité (3.5), $r^{M(\alpha)}$ est une forme quadratique sur laquelle les contractions opèrent.

Si $f \in \mathscr{H}$, $r^{M(\alpha)}(f)$ tend vers $r^M(f)$ quand α tend vers $+\infty$.

Si T est une contraction de $\mathbf{R}$, si $f \in \mathscr{H}$, $H^M\, Tf \in \mathscr{H}$. D'autre part,

$$a^{D(\alpha)}(Tf - H^M\, Tf) = r^{M(\alpha)}(Tf - H^M\, Tf)$$
$$\leqslant 2\, r^{M(\alpha)}(Tf) + 2\, r^{M(\alpha)}(H^M\, Tf)$$
$$\leqslant 2\, r^{M(\alpha)}(f) + 2\, n^{M(\alpha)}(f_M).$$

On en déduit l'inégalité

$$\limsup_{\alpha\to+\infty} a^{D(\alpha)}(Tf - H^M\, Tf) < +\infty,$$

ce qui montre que $Tf - H^M\, Tf \in \mathbf{H}^D$ (*cf.* démonstration de (*a*)).

On en déduit que les contractions laissent stable $\mathscr{L}$. Du fait qu'elles opèrent sur $r^{M(\alpha)}$, elles opèrent alors sur r^M.

On pose

$$\mathscr{D}'_M = \{f \in C_K(M) \text{ tel que } \exists\, \psi \in C_K(X) \text{ tel que } \psi - H^M f \in \mathbf{H}^D\}$$

et

$$\mathscr{D}_M = \mathscr{L} \cap \mathscr{D}'_M.$$

$\mathscr{D}_M$, qui contient l'espace des traces sur M des fonctions de $C_K(X) \cap \mathbf{H}$, est uniformément dense dans $C_K(M)$.

3.3.2. PROPOSITION. — *Pour qu'une forme de Dirichlet k, définie sur un espace* $\mathbf{K}$ *basé sur M, soit la forme balayée sur M d'une forme de Dirichlet g, définie sur un espace* $\mathbf{G}$ *basé sur X, tel que* $\mathbf{G}^D = \mathbf{H}^D$, *et admettant* a^D *comme restriction à* $\mathbf{H}^D$, H^M *et* $\hat{H}^M$ *comme noyaux de Poisson sur M, il faut et il suffit qu'elle vérifie les conditions suivantes :*

(*a*) $\sigma_k \geqslant \Theta^M$;

(*b*) $\chi_k \geqslant \chi_M$ *et* $\chi_{\hat{k}} \geqslant \hat{\chi}_M$;

(*c*) $\mathbf{K}$ *est* $\mathscr{D}_M$*-régulier* (*i. e.* $\mathscr{D}'_M$*-régulier, d'après* (*a*));

(*d*) *il existe* $\gamma > 1$ *tel que* $k(f) \geqslant (\gamma/4)\, a^D(H^M f - \hat{H}^M f)$ *pour tout* $f \in \mathscr{D}^M \cap \mathbf{K}$;

(*e*) *si A est* $\mathbf{K}$*-polaire*, $H^M 1_A = \hat{H}^M 1_A = 0$, *q.p. sur D.*

Remarques :

(*a*) l'hypothèse (*d*) est automatiquement vérifiée pour $\gamma = 1$, du fait de l'hypothèse (*a*) et de la proposition précédente. (*d*) est donc une hypothèse de coercivité.

Les hypothèses (*a*) et (*b*) sont les deux hypothèses « essentielles », qu'on retrouvera, sous cette forme ou sous une autre, dans tout énoncé de ce genre;

(*b*) dans le cas où toutes les formes de Dirichlet envisagées sont symétriques, les hypothèses (*a*) et (*b*) peuvent être remplacées par l'hypothèse suivante (à énoncer après l'hypothèse (*c*)) :

Les contractions opèrent sur la forme $k - n^M$ définie sur $\mathscr{D}_M \cap \mathbf{K}$ (on utilise la proposition 1.5.5. La forme n^M se prolonge en un élément de $\overline{\mathscr{D}}(\mathbf{K})$).

Démonstration.

(*A*) *Partie directe :* (*a*) et (*b*) sont des conséquences directes des identités (3.6) et (3.7). (*e*) est évidente. (*c*) provient du fait que $\mathscr{D}_M \cap \mathbf{H}^M$ est la trace sur M de $C_K(X) \cap \mathbf{H}$.

(*d*) Il existe un réel $\alpha \geqslant 1$ tel que $a^M(\Phi) \leqslant \alpha\, a(\Phi)$, $\forall\, \Phi \in \mathbf{H}$.

En prenant $\Phi = (H_0^M \Phi + \hat{H}_0^M \Phi)/2$, on obtient l'identité :

$$(\alpha - 1)\, a^M(\Phi) \geq \frac{\alpha}{4} a^D (H^M \Phi - \hat{H}^M \Phi),$$

ce qui permet de conclure.

(B) *Réciproque :* Soit $\mathscr{P}'$ l'ensemble des parties de X dont la trace sur M est **K**-polaire et dont la trace sur D est $\mathbf{H}^D$-polaire.

D'après l'hypothèse (e), l'espace $\mathbf{G} = \{ f + H^M g, f \in \mathbf{H}^D, g \in \mathbf{K} \}$, muni de la topologie de l'espace produit $\mathbf{H}^D \times \mathbf{K}$ auquel il est naturellement isomorphe, est un espace fonctionnel de base $(X, \mathscr{P}')$. L'hypothèse (c) en assure la régularité.

H^M définit un opérateur continu sur **G**. $H^M - \hat{H}^M$ opère continûment de **G** dans $\mathbf{H}^D$, d'après la proposition 3.3.1 (a) et la régularité de **K**.

La forme bilinéaire g, définie sur **G**, par l'identité :

$$\forall f, \quad h \in \mathbf{G}, \qquad g(f, h) = k(f_M, h_M) + a^D(f - H^M f, h - \hat{H}^M h)$$

est évidemment continue sur **G**.

Sa coercivité résulte de l'hypothèse (d). En effet,

$$\begin{aligned}\forall f \in \mathbf{G}, \quad g(f) &= k(f_M) + a^D(f - H^M f, f - \hat{H}^M f)\\ &= k(f_M) + a^D(f - H^M f) + a^D(f - H^M f, H^M f - \hat{H}^M f)\\ &\geq k(f_M) + a^D(f - H^M f) - \frac{2}{\sqrt{\gamma}} \sqrt{k(f_M)} \sqrt{a^D(f - H^M f)}\\ &\geq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)[k(f_M) + a^D(f - H^M f)].\end{aligned}$$

Montrons maintenant que les contractions opèrent sur **G**.

$\mathscr{H} \cap \mathbf{G}$ étant dense dans **G**, et g étant coercive, il suffit (*cf.* 0.1.2, remarque) de vérifier les propriétés :

(i) $\forall f \in \mathscr{H} \cap \mathbf{G}$, $Tf \in \mathscr{H} \cap \mathbf{G}$;

(ii) $g(Tf) \leq g(f)$, $\forall f \in \mathscr{H} \cap \mathbf{G}$, pour toute contraction T.

(i) est évidente, d'après 3.3.1 (b), et du fait que

$$\mathscr{H} \cap \mathbf{G} = \{ f \in \mathscr{H} \text{ tel que } f_M \in \mathbf{K} \}.$$

Pour vérifier (ii), remarquons que $g(f) = r^M(f) + k(f_M) - n^M(f_M)$.

Les hypothèses (a) et (b) font que les contractions opèrent sur $k - n^M$. D'autre part, elles opèrent sur r^M d'après 3.3.1 (b). **G** est donc un espace de Dirichlet : il est facile de voir que $\mathscr{P}'$ coïncide avec la famille des ensembles **G**-polaires, et que $\mathbf{G}^D = \mathbf{H}^D$. A moins qu'on ne se place dans le cas symétrique, il reste à vérifier que la contraction unité $f \to f^+ \wedge 1$ opère sur g et $\hat{g}$.

Montrons tout d'abord que la contraction-module opère :

$$\forall f \in \mathbf{G},$$

$$\begin{aligned} g(f^+, f^-) &= a^D(f^+ - H^M f^+, f^- - \hat{H}^M f^-) - \iint f^+(x) f^-(y)\, d\sigma_k \\ &= \lim_{\alpha \to +\infty} a^{D(\alpha)}(f^+ - H^M f^+, f^- - H^M \hat{f^-}) \\ &\quad - \iint f^+(x) f^-(y)\, d\sigma_k \\ &= \lim_{\alpha \to +\infty} \Big[-\int (f^- . \alpha\, G_\alpha^D f^+ + f^+ \hat{H}_\alpha^M f^- \\ &\qquad + f^- H_\alpha^M f^+)\, dm + \iint f^+(x) f^-(y) (dU_{0,\alpha}^M - d\sigma_k) \Big]. \end{aligned}$$

La négativité du premier terme est évidente. Celle du deuxième terme procède de l'hypothèse (a) et de l'identité (3.6).

Pour établir que la contraction-unité opère sur g (on raisonne de la même façon pour $\hat{g}$), il suffit, d'après 1.3.5, de montrer que, pour tout $f \in C_K^+(X) \cap \mathbf{G}$, si $h \in \mathbf{G}$ est tel que $0 \leqslant h \leqslant 1$ et $h = 1$ sur Supp (f), on a $g(h, f) \geqslant 0$.

Or, on a

$$\begin{aligned} g(h, f) &= k(h_M, f_M) + a^D(h - H^M h, f - \hat{H}^M f) \\ &= \int f\, d\chi_k + \iint f(y)(1 - h(x))\, d\sigma_k \\ &\quad + \lim_{\alpha \to +\infty} a^{D(\alpha)}(h - H^M h, f - \hat{H}^M f). \end{aligned}$$

Le dernier terme peut s'écrire :

$$\begin{aligned} &\lim_{\alpha \to +\infty} \alpha \int (f - \hat{H}^M f)(h - \alpha\, G_\alpha^D h - H_\alpha^M h)\, dm \\ &\quad = \lim_{\alpha \to +\infty} \alpha \int f(1 - \alpha\, G_\alpha^D h - H_\alpha^M h)\, dm - \alpha \int \hat{H}^M f(1 - \alpha\, G_\alpha^D 1 - H_\alpha^M 1)\, dm \\ &\qquad + \alpha \int \hat{H}_\alpha^M f(1 - h)\, dm - \iint f(y)(1 - h(x))\, dU_{0,\alpha}^M. \end{aligned}$$

Le premier et le troisième terme sont positifs. Le deuxième terme est minoré par $-\int f\,d\chi_M$ d'après l'identité (3.7). Le quatrième est minoré par $\iint f(y)\,(1-h(x))\,d\Theta^M$.

La négavité de $g(h, f)$ résulte alors des hypothèses (a) et (b) de la proposition. On montre facilement que H^M et $\hat{H}^M$ sont les noyaux de Poisson associés à g. Ceci conclut la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANCONA (A.). — Sur les espaces de Dirichlet : Principes, fonction de Green, *J. Math. pures et appl.*, t. 54, 1975, p. 75-124.

[2] ANCONA (A.). — Continuité des contractions dans les espaces de Dirichlet, *Séminaire de théorie du potentiel*, n° 2, p. 1-26. — Berlin, Springer-Verlag, 1976 (*Lecture Notes in Mathematics*, 563).

[3] ANCONA (A.). — *Théorie du potentiel dans les espaces fonctionnels à forme coercive*, Secrétariat de l'équipe d'analyse et théorie du potentiel de l'Université Pierre-et-Marie-Curie.

[4] ARONSZJAN (N.) and SMITH (K.). — Functional spaces and fonctionnal completion. *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 6, 1955/1956, p. 125-185.

[5] BENVENISTE (A.) et JACOD (J.). — Systèmes de Levy des processus de Markov, *Invent. Math.*, Berlin, t. 21, 1973, p. 183-198.

[6] BEURLING (A.) and DENY (J.). — Dirichlet spaces, *Proc. nat. Acad. Sc. U.S.A.*, t. 45, 1959, p. 208-215.

[7] BLIEDTNER (J.). — Fonctional spaces and their exceptional sets, *Seminar on potential theory*, II, p. 1-13. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lectures Notes in Mathematics*, 226).

[8] CARRILLO MENENDEZ (S.). — Processus de Markov associé à une forme de Dirichlet non symétrique, *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 33, 1975, p. 139-154.

[9] DENY (J.). — Méthodes hilbertiennes en théorie du potentiel, *C.I.M.E.*, 1° *ciclo*, *Potential theory* [1969. Stresa], p. 121-202. — Rome, Cremonese, 1970.

[10] DENY (J.). — Théorie de la capacité dans les espaces fonctionnels, *Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du potentiel*, 9e année, 1964/1965, n° 1, 13 p.

[11] DENY (J.) et LIONS (J.-L.). — Les espaces du type Beppo-Levi, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 5, 1953/1954, p. 305-370.

[12] DOOB (J. L.). — Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 12, 1962, p. 573-621.

[13] DOUGLAS (J.). — Solution of the problem of Plateau, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 33, 1931, p. 263-321.

[14] FUKUSHIMA (M.). — On the generation of Markov processes by symmetric forms, *Proceedings of the 2nd Japan-USSR symposium on probability theory* [1972, Kyoto]. — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 330).

[15] FUKUSHIMA (M.). — On Feller's kernel and the Dirichlet norm, *Nagoya math. J.*, t. 24, 1964, p. 167-175.

[16] FUKUSHIMA (M.). — On boundary conditions for multidimensional brownian motion with symmetric resolvents, *J. math. Soc. Japan*, t. 21, 1969, p. 485-526.

[17] HAMZA (M.). — *Détermination des formes de Dirichlet sur* $\mathbf{R}^n$, Thèse 3^e cycle, Orsay 1975.

[18] KORI (T.). — *Théorie des espaces fonctionnels à nullité* 1 *et problème de Neumann sur les espaces harmoniques*, Thèse Sc. math., Paris 1976.

[19] KUNITA (H.). — General boundary conditions for multidimensional diffusion processes, *J. math. Kyoto Univ.*, t. 10, 1970, p. 273-335.

[20] KUNITA (H.). — Absolute continuity of Markov processes and generators, *Nagoya math. J.*, t. 36, 1969, p. 1-26.

[21] LEJAN (Y.). — Balayage et formes de Dirichlet, *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. 37, 1977, p. 297-319.

[22] LEJAN (Y.). — Mesures associées à une forme de Dirichlet, *Séminaire de théorie du potentiel*, n° 2, p. 179-192. — Berlin, Springer-Verlag, 1976 (*Lecture Notes in Mathematics*, 563).

[23] MEYER (P. A.). — Théorie des intégrales stochastiques, *Séminaire de Probabilités*, 10 (Université de Strasbourg), p. 245-354. — Berlin, Springer-Verlag, 1976 (*Lecture Notes in Mathematics*, 511).

[24] NAÏM (L.). — Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 7, 1957, p. 183-281.

[25] OSBORN (H.). — The Dirichlet functional, I, *J. math. Analysis and Appl.*, t. 1, 1960, p. 61-112.

[26] ROTH (J. P.). — *Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctions continues*, Thèse Sc. math. Orsay 1975.

[27] SILVERSTEIN (M.). — *Symetric Markov processes.* — Berlin, Springer-Verlag, 1974 (*Lecture Notes in Mathematics*, 426).

[28] SILVERSTEIN (M.). — *Application of coercivity to the classification of submarkovian semigroups* (Preprint).

[29] VENTCEL' (A. D.). — On boundary conditions for multidimensional diffusion processes, *Theory Prob. and Appl.*, t. 4, 1959, p. 164-177.

[30] YOR (M.). — Une remarque sur les formes de Dirichlet et les semi-martingales, *Séminaire de Théorie du potentiel*, n° 2, p. 283-292. — Berlin, Springer-Verlag, 1976 (*Lecture Notes in Mathematics*, 563).

(Texte reçu le 2 mars 1977.)

Yves LEJAN,
Laboratoire de Probabilités
associé au C.N.R.S. n° 224,
Tour 56,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.