BULLETIN DE LA S. M. F.

ANNE DUVAL-SCHERPEREEL

Sur les topologies naturelles du complexe dualisant

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 241-259

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__241_0>

Bull. Soc. math. France,
105, 1977, p. 241-259.

SUR LES TOPOLOGIES NATURELLES DU COMPLEXE DUALISANT

PAR

ANNE DUVAL-SCHERPEREEL
[Strasbourg]

RÉSUMÉ. — Il y a deux topologies naturelles sur les espaces de cohomologie du complexe dualisant $\mathbf{K}_X^{\bullet}$ d'un espace analytique complexe. Elles coïncident grâce au lemme d'unicité de topologies en dualité établi par RAMIS et RUGET. On montre ici que cette propriété s'étend au cas relatif en construisant un complexe quasi isomorphe topologiquement à chacun des deux représentants topologiques naturels de $R f_! \mathbf{K}_X^{\bullet}$. Pour cela, on adapte aux hyper-recouvrements l'utilisation des « systèmes de FORSTER-KNORR » faite par RAMIS et RUGET dans « Résidus et Dualité » (*Invent. Math.*, t. 26, 1974, p. 89-131).

Dans cet article, on se propose de répondre à une question posée dans [R-R] (p. 92, remarque 1) : Si $f: X \to S$ est un morphisme d'espaces analytiques complexes, et si $\mathbf{K}_X^{\bullet}$ désigne le complexe dualisant de X (supposé paracompact et de dimension de Zariski bornée), il y a deux « topologies » naturelles sur $R f_! \mathbf{K}_X^{\bullet}$ correspondant l'une à un calcul fait avec des *ouverts* de Stein (c'est celle que RAMIS et RUGET ont obtenue par dualité), et l'autre à un calcul fait avec des *compacts* de Stein (c'est ce que donne dans le cas absolu la technique de VERDIER dans [10], le cas relatif étant une généralisation facile dans l'esprit de [R-R]). En construisant un troisième complexe, quasi isomorphe topologiquement à chacun des deux représentants de $R f_! \mathbf{K}_X^{\bullet}$ ainsi obtenus, on montre que ces deux topologies coïncident dans la catégorie « dérivée » [1]. Dans le cas absolu, on sait *a priori* que les deux topologies coïncident, par le lemme général de comparaison des topologies en dualité de [5], mais on a ici un résultat plus précis puisqu'on met en évidence un complexe qui « réalise » la comparaison.

---

[1] Le cadre de ce travail est la catégorie dont les objets sont les faisceaux D.F.N.-libres, et les flèches les applications linéaires continues. Bien que cette catégorie ne soit pas abélienne, on utilisera le langage des catégories dérivées.

Une conséquence est alors que les deux théorèmes de dualité de [R-R] se réduisent à un seul théorème énoncé pour des complexes bornés à cohomologie cohérente (et non plus seulement pour des complexes à composantes cohérentes).

Pour cela, on a essentiellement besoin de deux ingrédients :

– remplacer les systèmes de FORSTER-KNORR (S.F.K.) de [R-R] relatifs à un recouvrement par leur généralisation naturelle à des hyper-recouvrements : les hyper-systèmes de FORSTER-KNORR (H.S.F.K.);

– fabriquer un complexe qui comporte à la fois des liaisons covariantes et des liaisons contravariantes : en effet, le complexe de Verdier donne par trivialisation un complexe muni naturellement de liaisons covariantes, tandis que le complexe utilisé dans [R-R] pour calculer $Rf_! \mathbf{K}^\bullet_X$ a des liaisons naturelles contravariantes.

Je veux maintenant remercier J.-P. RAMIS qui, non seulement m'a indiqué ce problème, mais a eu la redoutable tâche de m'initier aux secrets des « liaisons », puis de me guider et de m'encourager dans ce travail qui n'aurait jamais été mené à bien sans ses conseils et ses indications.

Pour finir, indiquons le plan suivi. On commence par donner des énoncés précis du résultat dans le cas absolu, puis dans le cas relatif, c'est le paragraphe 0. Après avoir rappelé la topologie obtenue par dualité sur $Rf_! \mathbf{K}^\bullet_X$ et la manière de topologiser les groupes de cohomologie d'un complexe borné à cohomologie cohérente (c'est l'objet du paragraphe 1), on est amené à définir les hyper-systèmes de FORSTER-KNORR et la trivialisation d'une application analytique associée (§ 2). On peut alors décrire précisément les deux topologies à comparer. Le paragraphe 3 présente une solution algébrique au problème dans le cas absolu. Celle-ci sert de point de départ à l'obtention de la solution topologique qui fait l'objet du paragraphe 4. On termine par les conséquences annoncées ci-dessus (§ 5).

0. Énoncé des théorèmes

THÉORÈME 1 (cas absolu). — *Si X est un espace analytique complexe paracompact de dimension de Zariski finie n, dont le complexe dualisant $\mathbf{K}^\bullet_X$ a pour amplitude (s, t), il existe un hyper-système de* FORSTER-KNORR $\mathbf{D}$ *(au-dessus d'un point), un hyper-système de compacts* $\mathbf{P}$, *des complexes $L^\bullet_{\mathbf{D}}$ (resp. $\tilde{G}^\bullet_{\mathbf{D}}$, resp. $\tilde{G}^\bullet_{\mathbf{P}}$) de $\mathcal{O}_{\mathbf{D}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathbf{D}}$, resp. $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$)-modules libres de type fini à liaisons covariantes et pour tout entier $r \geqslant t+n$ des quasi-isomorphismes de niveau r tels qu'on ait le diagramme suivant de représentants de $R\Gamma_c(X, \mathbf{K}^\bullet_X)$ dont les objets sont munis de topologies* D.F.N. (*i. e. dual fort de Fréchet* *nucléaire), les applications étant linéaires continues :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathrm{Hom}_c(\mathbf{D},\, L^{\bullet}_{\mathbf{D}},\, \Delta^{\bullet}_{\mathbf{D}}) \arrow[dr] & & \Gamma(\mathbf{P},\, \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{P}}) \\ & \mathrm{Hom}_c(\mathbf{D},\, L^{\bullet}_{\mathbf{D}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{D}}} \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{D}},\, \Delta^{\bullet}_{\mathbf{D}}) \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} \Gamma(\mathbf{P},\, G^{\bullet}_{\mathbf{P}}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où $\Delta^{\bullet}_{\mathbf{D}}$ désigne le complexe d'$\mathcal{O}_{\mathbf{D}}$-modules à liaisons contravariantes constitué par la collection des complexes de faisceaux $T^{-m_\alpha}\,'\mathcal{D}^{m_\alpha,\bullet}$. ($m_\alpha = \dim D_\alpha$).

THÉORÈME 2 (cas relatif). — *On reprend les hypothèses et les notations ci-dessus, mais on se donne aussi une application analytique $f : X \longrightarrow S$, où S est un polydisque ouvert d'un $\mathbf{C}^k$. Il existe un hyper-système de* FORSTER-KNORR *au-dessus de S noté $\mathbf{V}$, un hyper-système de compacts $\mathbf{P}$ au-dessus de S, des complexes $L^{\bullet}$, $\tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{V}}$, $\tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{P}}$ d'$\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$, $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$, et $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules libres de type fini à liaisons covariantes, et des quasi-isomorphismes de niveau $r \geqslant t+2n$ de complexes d'$\mathcal{O}_S$-modules* D.F.N.*-libres « représentant » $Rf_!\,\mathbf{K}^{\bullet}_X$:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \pi_! Hom(\mathbf{V},\, L^{\bullet},\, N^{\bullet}_{\mathbf{V}}) \arrow[dr] & & \pi'_* \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{P}} \\ & \pi_! Hom(\mathbf{V},\, L^{\bullet} \otimes \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{V}},\, N^{\bullet}_{\mathbf{V}}) \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S} \pi'_* \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{P}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où $N^{\bullet}_{\mathbf{V}}$ est le complexe d'$\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$-modules à liaisons contravariantes constitué par les $N^{\bullet}_\alpha = T^{-k}\,\Omega_S \hat{\otimes} \Delta^{\bullet}_\alpha$ où Ω_S est le faisceau des formes holomorphes de degré maximal sur S.

Dans tout l'article, X désigne un espace analytique paracompact de dimension de Zariski bornée, et $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural. D'autre part, $f : X \longrightarrow S$ désignera une application analytique de X dans un polydisque ouvert S de $\mathbf{C}^k$. Le cas absolu correspond au cas où S est un point.

1. Les deux topologies naturelles sur $Rf_!\,\mathbf{K}^{\bullet}_X$

1.1. Topologie définie par dualité

On reprend les définitions et les notations de [R-R]. On rappelle ci-dessous celles qui seront indispensables à la compréhension de la suite, et on termine ce numéro en indiquant comment RAMIS et RUGET construisent la topologie de $Rf_!\,\mathbf{K}^{\bullet}_X$.

Si F est un espace vectoriel complexe de type F.N. (Fréchet nucléaire) (resp. D.F.N. (dual fort de Fréchet nucléaire)), on note $\mathcal{O}_X \hat{\otimes} F$ le faisceau associé au préfaisceau défini sur les ouverts de Stein par $U \mapsto \mathcal{O}(U) \hat{\otimes} F$ (resp. défini sur les compacts de Stein par $K \mapsto \mathcal{O}(K) \hat{\otimes} F$); un *$\mathcal{O}_X$-module* F.N. (resp. D.F.N.)-*libre* est alors un $\mathcal{O}_X$-module isomorphe à un $\mathcal{O}_X \hat{\otimes} F$.

D'autre part, une *topologie* sur $Rf_! K_X^\bullet$ (la définition du complexe dualisant est donnée dans [5], où se trouvent également les propriétés de ce complexe que nous aurons à utiliser) est par définition ([R-R], p. 116 avec $\mathscr{F} = \mathcal{O}_X$), la donnée d'une famille de complexes bornés à gauche d'$\mathcal{O}_S$-modules $\mathscr{N}^\bullet$ dont les objets soient D.F.N.-libres et les différentielles continues, telle que :

1° chaque complexe de la famille soit un représentant de $Rf_! \mathbf{K}_X^\bullet$;

2° si $\mathscr{N}_1^\bullet$ et $\mathscr{N}_2^\bullet$ sont deux complexes de la famille, il existe un diagramme

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \mathscr{N}_1^\bullet \\ \mathscr{N}_3^\bullet \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathscr{N}_2^\bullet \end{tikzcd}$$

où $\mathscr{N}_3^\bullet$ est un complexe de la famille.

(On a une définition analogue de ce qu'est une topologie sur $Rf_* \mathbf{K}_X^\bullet$ en remplaçant borné à gauche par borné à droite, D.F.N.-libre par F.N.-libre, et en retournant le sens des flèches du diagramme ci-dessus.)

Sans rappeler les définitions relatives aux systèmes de FORSTER-KNORR V au-dessus de S, et aux $\mathcal{O}_V$-modules à liaisons co- ou contravariantes pour lesquelles nous renvoyons à [R-R] (p. 106), disons simplement que si (V, π, S) est un S.F.K. au-dessus de S (par exemple une $\mathfrak{U}$-trivialisation de f, où $\mathfrak{U}$ est un recouvrement localement fini de X par des ouverts d'Oka-Weil), $\mathscr{F}$ un $\mathcal{O}_V$-module à liaisons covariantes, et $\mathscr{H}$ un $\mathcal{O}_V$-module à liaisons contravariantes, on définit :

– $\pi_* \mathscr{F}$: c'est un complexe d'$\mathcal{O}_S$-modules, nul en degrés négatifs, et dont le n-ième objet ($n \in \mathbf{Z}^+$) est $\prod_{|\alpha|=n} \pi_{\alpha_*} \mathscr{F}_\alpha$, $(\,|(i_0, i_1, \ldots, i_n)| = n)$ les flèches étant définies à partir des liaisons covariantes;

– $\pi_! \mathscr{H}$: c'est un complexe d'$\mathcal{O}_S$-modules, nul en degrés positifs, et dont le n-ième objet ($n \in \mathbf{Z}^-$) est $\coprod_{|\alpha|=-n} \pi_{\alpha\,!} \mathscr{H}_\alpha$, les flèches étant définies à partir des liaisons contravariantes.

Dans [R-R] (p. 118), on définit une topologie sur $Rf_! \mathbf{K}_X^\bullet$ en associant, à tout recouvrement localement fini $\mathfrak{U}$ de X par des ouverts d'Oka-Weil, le complexe $\pi_!$ *Hom* $(V, L^\bullet, N_V^\bullet)$, où :

– (V, π, S) est une $\mathfrak{U}$-trivialisation de f : on a donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U} \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\nu"] & V \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

où j est un plongement fermé;

— $L^{\bullet}$ est un complexe d'$\mathcal{O}_V$-modules libres de type fini, nul en degrés positifs, à liaisons covariantes, résolution de $j_* p^* \mathcal{O}_X$;

— $N_V^{\bullet}$ est le complexe d'$\mathcal{O}_V$-modules à liaisons contravariantes défini dans le théorème 2 ci-dessus.

Il y a donc un système de liaisons contravariantes sur $Hom(L^{\bullet}, N_V^{\bullet})$. Rappelons brièvement comment on obtient cette topologie.

$Rf_! \, \mathbf{K}_X^{\bullet} = f_! \, C^{\bullet}(\mathbf{K}_X^{\bullet})$, où $C^{\bullet}(\mathbf{K}_X^{\bullet})$ est la résolution de GODEMENT de $\mathbf{K}_X^{\bullet}$ qui est injective puisque $\mathbf{K}_X^{\bullet}$ est à *fibres* injectives. On regarde alors

$$j_* p^* C^{\bullet}(\mathbf{K}_X^{\bullet}) = C^{\bullet}(j_* p^* \mathbf{K}_X^{\bullet})$$

que l'on calcule en utilisant le fait que $j_* p^* \mathbf{K}_X^{\bullet} = Hom(V, j_* p^* \mathcal{O}_X, \mathbf{K}_V^{\bullet})$, puis en prenant une résolution libre $L^{\bullet}$ de $j_* p^* \mathcal{O}_X$ (ce qui est possible parce que $\mathcal{O}_X$ est cohérent), et en plongeant $\mathbf{K}_V^{\bullet}$ dans les distributions (ce qui se fait grâce à la théorie des résidus multiples d'HERRERA). Enfin, on « élimine » le $C^{\bullet}$ devant *Hom* grâce à la mollesse des distributions. Comme tous les $\mathcal{O}_V$-modules qui interviennent sont à liaisons contravariantes, on peut calculer leur image directe à support propre par π, et obtenir finalement des quasi-isomorphismes : $Rf_! \, \mathbf{K}_X^{\bullet} \simeq \pi_! j_* p^* C^{\bullet}(\mathbf{K}_X^{\bullet}) \simeq \pi_! \operatorname{Hom}(V, L^{\bullet}, N_V^{\bullet})$, où ce dernier est un complexe borné à gauche d'$\mathcal{O}_S$-modules D.F.N.-libres.

1.2. Topologie « à la Verdier »

Dans le cas absolu, il s'agit d'étudier $R\Gamma_c(X, \mathbf{K}_X^{\bullet})$; or, sur les espaces de cohomologie d'un complexe borné de faisceaux analytiques complexes à cohomologie cohérente (ce qui est bien le cas de $\mathbf{K}_X^{\bullet}$), on sait définir une topologie de type D.F.N. : c'est l'objet de [10]. Rappelons brièvement cette construction : elle consiste, par l'intermédiaire d'un hyper-recouvrement de X par des compacts de Stein (*cf.* par exemple [1] pour la définition et les principales propriétés des hyper-recouvrements), à remplacer dans la catégorie dérivée le complexe $F^{\bullet}$ (à cohomologie cohérente) par un complexe borné $G^{\bullet}$ à composantes cohérentes dont on sait topologiser les espaces de cohomologie. Plus précisément, si r est un entier positif, il existe [10] un hyper-recouvrement localement fini de X par des compacts de Stein $\mathfrak{K} \xrightarrow{\mathbf{p}'} X$, un complexe borné $G^{\bullet}$ à composantes cohérentes sur $\mathfrak{K}$ ([2]), et un quasi-isomorphisme de niveau r de $G^{\bullet}$ dans $\mathbf{p}'^* \mathbf{K}_X^{\bullet}$. Alors si (s, t) est l'amplitude de $\mathbf{K}_X^{\bullet}$, et n la dimension de X, le complexe $R\Gamma_c(X, \mathbf{K}_X^{\bullet})$ est d'amplitude

([2]) On dit qu'un faisceau F sur $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}_n)$ est cohérent si, pour tout n et toute composante K de $\mathfrak{K}_n$, le faisceau $F|_K$ est rectriction à K d'un faisceau analytique cohérent sur un voisinage ouvert de K dans X.

contenue dans $(s, t+n)$; on prend $r = t-s+n+1$ et, en tronquant cohomologiquement le complexe $R\,\Gamma_c(X, R\,\mathbf{p}'_* G^\bullet)$ en degré $t+n$, on obtient un complexe quasi isomorphe à $R\,\Gamma_c(X, \mathbf{K}^\bullet_X)$. Mais $R\,\Gamma_c(X, R\,\mathbf{p}'_* G^\bullet)$ n'est autre que $\Gamma_c(\mathfrak{K}, G^\bullet)$ (complexe simple associé au complexe double $\Gamma_c(\mathfrak{K}_n, G^\bullet_n)$) sur les composantes duquel il y a des topologies D.F.N.

Dans le cas relatif, on cherche des complexes bornés à droite dont les objets soient des $\mathcal{O}_S$-modules D.F.N.-libres et les différentielles continues. Cette fois $R f_!\, \mathbf{K}^\bullet_X$ est d'amplitude contenue dans $(s, t+2\,n)$ ([7], exposé XVII, 5.2.8.1), et la même méthode (en prenant $r = t-s+2\,n+1$) conduit en tronquant cohomologiquement en degré $t+2\,n$ à remplacer $R f_!\, \mathbf{K}^\bullet_X$ par $\mathbf{f}_!\, G^\bullet$, où $\mathbf{f} : \mathfrak{K} \to S$ est la composée $\mathfrak{K} \xrightarrow{\mathbf{p}'} X \xrightarrow{f} S$, et où $G^\bullet$ est à composantes cohérentes. Maintenant, pour obtenir des représentants D.F.N.-libres, il va falloir trivialiser $\mathbf{f}$ (par $\mathbf{j}'$), et prendre une résolution libre de $\mathbf{j}'_* G^\bullet$, ce qui sera possible puisque $G^\bullet$ est borné, à composantes cohérentes..., mais à condition de savoir travailler avec des hyper-recouvrements : c'est ce qui nécessite l'emploi d'hyper-systèmes de Forster-Knorr. Même dans le cas absolu pour pouvoir comparer ces deux topologies il faut avoir recours aux H.S.F.K. que nous allons définir maintenant.

2. Hyper-système de Forster-Knorr. Trivialisation

2.1. Définition d'un hyper-système de Foster-Knorr

On appellera hyper-système de Forster-Knorr (H.S.F.K. en abrégé) au-dessus de S (éventuellement d'un point), une famille $\mathbf{V} = (V_n)_{n \in \mathrm{N}}$ de systèmes de Forster-Knorr au-dessus de S, et la donnée pour toute application strictement croissante $\varphi : (0, n) \to (0, m)$, $n \leqslant m$ ($(0, n)$ désigne le segment de N d'extrémités 0 et n) d'un morphisme de S.F.K. au-dessus de S ([R-R], p. 106) : $\tilde{\varphi} : V_m \to V_n$.

On définit de manière naturelle un *morphisme d'*H.S.F.K. *au-dessus de S* : c'est une famille de morphismes de S.F.K. avec les conditions évidentes de commutativité. En particulier, étant donnés deux H.S.F.K. au-dessus de S, on peut en faire le produit : c'est un H.S.F.K. au-dessus de S d'où part un morphisme d'H.S.F.K. vers chacun des H.S.F.K. primitifs.

2.2. $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$-modules à liaisons co- et contra-variantes

Si $\mathbf{V}$ est un H.S.F.K., un $\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$-module à liaisons co- (resp. contra-) variantes sera la donnée d'une collection $(F_n)_{n \in \mathrm{N}}$ d'$\mathcal{O}_{V_n}$-modules à liaisons co- (resp. contra-) variantes et pour toute application croissante $\varphi : [0, n] \to [0, m]$ $(n \leqslant m)$ d'un morphisme $\tilde{\varphi}^* F_n \to F_m$ d'$\mathcal{O}_{V_m}$-modules à liaisons co- (resp. contra-) variantes.

Une telle définition est justifiée par la remarque suivante : si $\varphi : V \to V'$ est un morphisme de S.F.K. et si F est un $\mathcal{O}_{V'}$-module à liaisons co- ou contra-variantes, on peut définir $\varphi^* F$ par

$$(\varphi^* F)_\alpha = r_\alpha^* F_{\varphi(\alpha)}, \qquad \forall \alpha \in A,$$

où $\varphi(\alpha) \in A'$ et $r_\alpha : V_\alpha \to V'_{\varphi(\alpha)}$ définissent le morphisme de S.F.K. φ. L'$\mathcal{O}_V$-module ainsi fabriqué est muni de manière naturelle de liaisons de même nature que celles de F.

2.3. Trivialisation d'une application analytique (3)

Si $\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}_m)_{m \in \mathbf{N}}$ est un hyper-recouvrement de X par des ouverts d'Oka-Weil, une $\mathfrak{U}$-*trivialisation de* f (application analytique de X dans S) sera un couple $(\mathbf{V}, \mathbf{j})$, où $\mathbf{V}$ est un H.S.F.K. au-dessus de S, et $\mathbf{j} = (j_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une collection de morphismes de systèmes semi-simpliciaux $j_m : \mathfrak{U}_m \to V_m$ tels que,

$$\forall i \in I, \quad (j_m)_i : \quad U_{m,i} \to V_{m,i} = D_{m,i} \times S,$$

($D_{m,i}$: polydisque ouvert d'un $\mathbf{C}^{\alpha_{m,i}}$) soit un plongement fermé et que tous les diagrammes qu'on a envie d'écrire soient commutatifs.

On fabrique une $\mathfrak{U}$-trivialisation de f à partir des $\mathfrak{U}_m$-trivialisations de f de la manière suivante :

– au recouvrement $\mathfrak{U}_0$ de X on associe (*cf.* [R-R], p. 107) une $\mathfrak{U}_0$-trivialisation de f : c'est un S.F.K. au-dessus de S, noté V_0;

– par récurrence, supposons construit V_m qui est une $\mathfrak{U}_m$-trivialisation de f. Soient V'_{m+1} une $\mathfrak{U}_{m+1}$-trivialisation de f, et V''_{m+1} la $(\operatorname{Cosk}_m \mathfrak{U})_{m+1}$-trivialisation de f obtenue à partir de V_m en associant à un ouvert de la forme $U \cap U'$, où U appartient à $\mathfrak{U}_m$, et U' à la partie non dégénérée $\mathfrak{U}_m^0$ de $\mathfrak{U}_m$ qu'on peut supposer décomposé (c'est-à-dire :

$$\mathfrak{U}_m = (S\,k_{m-1}\,\mathfrak{U})_m \amalg \mathfrak{U}_m^0),$$

(3) Dans la suite, nous utiliserons sans rappels les quelques notions relatives aux hyper-recouvrements dont nous aurons besoin. On pourra les trouver par exemple dans [1]. Mais, intuitivement, il suffit de considérer que, si à un recouvrement on associe (par exemple en cohomologie de Čech) un complexe simplicial canonique $\mathfrak{U}_\bullet$, obtenu en prenant en degré n les intersections de $(n+1)$ éléments du recouvrement (i. e. on prend $\mathfrak{U}_{n+1} = (\operatorname{Cosk}_n \mathfrak{U}_\bullet)_{n+1}$), dans un hyper-recouvrement, $\mathfrak{U}_{n+1}$ peut être un raffinement de $(\operatorname{Cosk}_n \mathfrak{U}_\bullet)_{n+1}$.

le produit de leurs images dans V_m. On pose $V_{m+1} = V'_{m+1} \times V''_{m+1}$. Le S.F.K. V_{m+1} est une $\mathfrak{U}_{m+1}$-trivialisation de f, car $\mathfrak{U}_{m+1}$ est un recouvrement plus fin que $(\operatorname{Cosk}_m \mathfrak{U})_{m+1}$, et l'on a un morphisme de S.F.K. : $V_{m+1} \to V_m$ obtenu en composant les deux morphismes canoniques : $V_{m+1} \to V''_{m+1} \to V_m$. Pour toute application croissante $\varphi : [0, n] \to [0, m]$ $(n \leqslant m)$, on définit $\tilde{\varphi} : V_m \to V_n$ par composition des flèches obtenues en écrivant φ comme composé d'applications croissantes $[0, k] \to [0, k+1]$, $n \leqslant k < m$.

On étend maintenant le lemme 13 de [R-R] qui permet d'obtenir, après trivialisation, des résolutions libres de type fini d'un $\mathcal{O}_X$-module cohérent.

LEMME 1. — *Soit $\mathfrak{U}$ un hyper-recouvrement de X par des ouverts d'Oka-Weil, $F^\bullet$ un $\mathcal{O}_{\mathfrak{U}}$-module à composantes cohérentes; si $(\mathbf{V}, \mathbf{j})$ est une $\mathfrak{U}$-trivialisation de f, il existe un complexe $L^\bullet$ d'$\mathcal{O}_{\mathbf{V}}$-modules libres de type fini, à liaisons covariantes, nul en degrés > 0, quasi isomorphe à $\mathbf{j}_* F^\bullet$. Si l'on se donne une deuxième trivialisation $(\mathbf{V}', \mathbf{j}')$ de f (associée à un hyper-recouvrement $\mathfrak{U}'$), on fabrique $L'^\bullet$, puis $L''^\bullet$, associé au produit $(\mathbf{V}'', \mathbf{j}'')$ de $\mathbf{V}$ et de $\mathbf{V}'$, et on a les diagrammes commutatifs*

$$\begin{tikzcd} \bar{\omega}_* L''^\bullet \arrow[r] & \bar{\omega}_* \mathbf{j}''_* F^\bullet \\ L^\bullet \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{j}_* F^\bullet \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bar{\omega}'_* L''^\bullet \arrow[r] & \bar{\omega}'_* \mathbf{j}''_* F^\bullet \\ L'^\bullet \arrow[r] \arrow[u] & \mathbf{j}'_* F^\bullet \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \text{où} \quad \begin{tikzcd} & \mathbf{V} \\ \mathbf{V}'' \arrow[ur, "\bar{\omega}"] \arrow[dr, "\bar{\omega}'"'] & \\ & \mathbf{V}' \end{tikzcd}$$

Le point de départ est le lemme $\mathfrak{R}(n)$ de [2] (p. 137) : si $H^\bullet$ est un complexe borné d'$\mathcal{O}_X$-modules cohérents, et si V est un S.F.K. au-dessus de S obtenu par trivialisation de $f : X \to S$, il existe un complexe $L^\bullet$ d'$\mathcal{O}_V$-modules libres de type fini, à liaisons covariantes et un quasi-isomorphisme $L^\bullet \to \mathbf{j}_* H^\bullet$. Maintenant, par définition, si $F^\bullet$ est un complexe à composantes cohérentes sur l'hyper-recouvrement $\mathfrak{U}$, et si $\varphi : [0, p] \to [0, m]$ est une application croissante, il y a, par définition (*cf.* [10]), un morphisme $\varphi^* F^\bullet_p \to F^\bullet_m$, donc (par composition avec le morphisme d'adjonction $F^\bullet_p \to \varphi_* \varphi^* F^\bullet_p$) un morphisme $F^\bullet_p \to \varphi_* F^\bullet_m$, et aussi : $j_{p*} F^\bullet_p \to j_{p*} \varphi_* F^\bullet_m$. Mais $j_p \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ j_m$, où $\tilde{\varphi} : V_m \to V_p$ est le morphisme de la définition de $\mathbf{V}$, donc $j_{p*} \varphi_* F^\bullet_m = \tilde{\varphi}_* j_{m*} F^\bullet_m$; on obtient finalement, en composant avec la flèche d'adjonction $\tilde{\varphi}^* \tilde{\varphi}_* j_{m*} F^\bullet_m \to j_{m*} F^\bullet_m$, une flèche $\tilde{\varphi}^* j_{p*} F^\bullet_p \to j_{m*} F^\bullet_m$. La démonstration du lemme cité montre alors que la construction est fonctorielle en $H^\bullet$: c'est-à-dire qu'il y a un morphisme $\tilde{\varphi}^* L^\bullet_p \to L^\bullet_m$ si $L^\bullet_p$ (resp. $L^\bullet_m$) est la résolution de $F^\bullet_p$ (resp. $F^\bullet_m$) obtenue en appliquant ce lemme.

2.4. La deuxième topologie sur $R f_! \mathbf{K}^{\bullet}_X$

Au paragraphe 1, on a obtenu à partir de $\mathbf{K}^{\bullet}_X$ un complexe à composantes cohérentes $G^{\bullet}$ sur un hyper-recouvrement compact $\mathfrak{K}$. Par définition de la cohérence, il existe un hyper-recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ constitué par des voisinages, qu'on peut supposer d'Oka-Weil, des divers éléments de $\mathfrak{K}$ et un complexe à composantes cohérentes sur $\mathfrak{U}$ qu'on notera encore $G^{\bullet}$ et qui, en restriction à $\mathfrak{K}$, donne le complexe de départ. Le lemme 1 fournit, pour une $\mathfrak{U}$-trivialisation $(\mathbf{V}', \mathbf{j}')$ de f, un complexe $\tilde{G}^{\bullet}$ d'$\mathcal{O}_{\mathbf{V}'}$-modules libres de type fini, à liaisons covariantes quasi isomorphe à $\mathbf{j}'_* G^{\bullet}$. On peut supposer, quitte à raffiner $\mathfrak{K}$ (ce qui est licite), que $\mathbf{j}'(\mathfrak{K})$ constitue un hyper-système de compacts (H.S.C.) au-dessus de S associé à $\mathbf{V}'$ (définition évidente, calquée sur celle des systèmes de compacts associés à un S.F.K. donnée en [R-R], p. 127). On note $\mathbf{P}$ cet H.S.C. Alors si $\tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{P}}$ désigne la restriction de $\tilde{G}^{\bullet}$ à $\mathbf{P}$, on a les résultats suivants :

– dans le cas absolu, le complexe $R\,\Gamma_c(X, \mathfrak{K}^{\bullet}_X)$ est isomorphe (dans la catégorie dérivée) au complexe d'espaces D.F.N. : $\Gamma(\mathbf{P}, \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{P}})$ tronqué à l'ordre $t+n$;

– dans le cas relatif, le complexe $R f_! \mathfrak{K}^{\bullet}_X$ est isomorphe au complexe $\pi'_* \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{P}}$ tronqué à l'ordre $t+2n$, où π' est l'application $\mathbf{V}' \to S$ telle que $\mathbf{f} = \pi' \circ \mathbf{j}'$. Ce complexe $\pi'_* \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{P}}$ est constitué d'$\mathcal{O}_S$-modules D.F.N.-libres.

Il s'agit maintenant de comparer *topologiquement* $\pi_! \, \mathcal{H}om(V, L^{\bullet}, N^{\bullet}_V)$ et $\pi'_* \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{P}}$. Bien sur on peut considérer de manière naturelle un S.K.F. comme un H.S.F.K. : d'ailleurs du point de vue « technique » ces deux objets ont le même comportement et, dans la suite, on travaillera avec des H.S.F.K. même quand des S.F.K. seraient suffisants, et on adoptera la notation $\mathbf{V}$ pour désigner un H.S.F.K.

3. Solution algébrique (cas absolu)

La première difficulté tient à ce qu'on cherche à comparer un complexe borné à droite (en fait nul en degrés > 0) et un complexe borné à gauche (en fait nul en degrés < 0). Ce problème se rencontre déjà dans un cas beaucoup plus simple où la solution algébrique, que nous allons exposer dans ce paragraphe, permet de comprendre comment est fabriquée la solution topologique.

Pour calculer les groupes de cohomologie à support compact d'un faisceau F sur X, on peut :

– soit utiliser un recouvrement ouvert $\mathfrak{U}$ de X;

– soit utiliser un recouvrement compact $\mathfrak{K}$ de X (en utilisant une résolution c-molle de F). On cherche à comparer ces deux calculs par l'intermédiaire du recouvrement « mixte » $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{K}$.

Précisons tout d'abord les notations employées dans ce paragraphe. $\mathfrak{M} = (M_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X. Si $\alpha = (i_0, i_1, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$, on note $M_\alpha = M_{i_0} \cap M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_n}$ et $|\alpha| = n$.

1° Soit A un préfaisceau sur X, on désigne (quand c'est possible) par :

– $C^{\bullet}(\mathfrak{M}, A)$ le complexe de cochaînes alternées du nerf de $\mathfrak{M}$ à coefficients dans A : $C^n(\mathfrak{M}, A) = \prod_{|\alpha|=n} A(M_\alpha)$;

– $C^{\bullet}_f(\mathfrak{M}, A)$ le complexe de cochaînes alternées finies du nerf de $\mathfrak{M}$ à coefficients dans A : $C^n_f(\mathfrak{M}, A) = \coprod_{|\alpha|=n} A(M_\alpha)$;

– $C^{\bullet}_c(\mathfrak{M}, A)$ le complexe des cochaînes alternées finies à support compact du nerf de $\mathfrak{M}$ à coefficients dans A : $C^n_c(\mathfrak{M}, A) = \coprod_{|\alpha|=n} \Gamma_c(M_\alpha, A)$.

Les différentielles sont fabriquées, quand c'est possible, à partir des restrictions.

2° Soit A' un précofaisceau sur X (i. e. un foncteur covariant $U \mapsto A'(U)$ avec pour $U \subset V$ une flèche de « prolongement » : $A'(U) \mapsto A'(V)$). On désigne par :

– $C_{\bullet}(\mathfrak{M}, A')$ le complexe de *chaines* alternées du nerf de $\mathfrak{M}$ à coefficients dans A' : $C_{-n}(\mathfrak{M}, A') = \prod_{|\alpha|=n} A'(M_\alpha)$;

– $C^f_{\bullet}(\mathfrak{M}, A')$ le complexe de chaînes finies alternées du nerf de $\mathfrak{M}$ à coefficients dans A' : $C^f_{-n}(\mathfrak{M}, A') = \coprod_{|\alpha|=n} A'(M_\alpha)$.

Les différentielles sont cette fois fabriquées, si c'est possible, à partir des flèches de prolongement.

Dans chaque cas, on désignera le complexe de faisceaux correspondant en remplaçant, dans la notation, C par $\mathscr{C}$. Par exemple, $\mathscr{C}^n(\mathfrak{M}, A)$ désigne le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto C^n(\mathfrak{M} \cap U, A)$, où $\mathfrak{M} \cap U$ est le recouvrement de U constitué par les $M_i \cap U$.

3° Enfin, si F est un faisceau, on lui associe le précofaisceau F_c défini par $U \mapsto \Gamma_c(U, F)$ avec, pour $U \subset V$, la flèche de prolongement par zéro : $\Gamma_c(U, F) \mapsto \Gamma_c(V, F)$. Donc $C_{\bullet}(\mathfrak{U}, F_c) = \prod_{|\alpha|=n} \Gamma_c(U_\alpha, F)$.

La possibilité des deux méthodes de calcul annoncées tient aux deux lemmes suivants, dont le premier est classique et le second est, par exemple, établi dans [9].

LEMME 2. – *Soient X un espace analytique paracompact, $\mathfrak{K}$ un recouvrement localement fini de X par des compacts, F un faisceau c-mou, alors la suite*

$$0 \to \Gamma_c(X, F) \to C^0_f(\mathfrak{K}, F) \to C^1_f(\mathfrak{K}, F) \to \ldots \to C^n_f(\mathfrak{K}, F) \to \ldots$$

est exacte.

LEMME 3. — *Mêmes hypothèses, mais en remplaçant $\mathfrak{K}$ par un recouvrement ouvert localement fini $\mathfrak{U}$ de X. Alors la suite*

$$\ldots \to C^f_{-n}(\mathfrak{U} F_c) \to \ldots \to C^f_{-1}(\mathfrak{U}, F_c) \to C^f_0(\mathfrak{U} F_c) \to \Gamma_c(X, F) \to 0$$

est exacte.

La comparaison s'appuie alors sur les deux lemmes suivants.

LEMME 4. — *Soient X un espace paracompact, $\mathfrak{K}$ un recouvrement localement fini par des compacts, U un ouvert de X, et F un faisceau c-mou sur X, alors la suite*

$$0 \to \Gamma_c(U, F) \to C^0_c(\mathfrak{K} \cap U, F|_U) \to C^1_c(\mathfrak{K} \cap U, F|_U) \to \ldots$$

est exacte.

En effet, le faisceau sur U, $F|_U$ est encore c-mou, et le recouvrement $\mathfrak{K} \cap U$ est un recouvrement fermé localement fini de U, donc la suite

$$0 \to \Gamma_c(U, F|_U) \to \Gamma_c(U, \mathscr{C}^0(\mathfrak{K} \cap U, F|_U)) \to \Gamma_c(U, \mathscr{C}^1(\mathfrak{K} \cap U, F|_U)) \to \ldots$$

est exacte (par exemple [3]).

Or

$$\begin{aligned}&\Gamma_c(U, \mathscr{C}^n_c(\mathfrak{K} \cap U, F|_U)) \\ &\quad = \{ s = (s_\alpha)_{|\alpha|=n},\ s_\alpha \in \Gamma(\mathrm{K}_\alpha \cap U, F|_U) \\ &\qquad\qquad \text{tel que, } \exists\, \mathrm{K} \text{ compact de } U \text{ tel que } s_\alpha = 0 \text{ en dehors de } \mathrm{K}_\alpha \cap \mathrm{K} \}\end{aligned}$$

s'identifie à

$$C^n_c(\mathfrak{K} \cap U, F|_U) = \textstyle\coprod_{|\alpha|=n} \Gamma_c(\mathrm{K}_\alpha \cap U, F)$$

car, si $s \in \Gamma_c(U, \mathscr{C}^n(\mathfrak{K} \cap U, F|_U))$, s_α a un support qui est un compact de $K_\alpha \cap U$, et est donc un élément de $\Gamma_c(K_\alpha \cap U, F)$.

De plus, comme $\mathfrak{K}$ est localement fini, il n'y a qu'un nombre fini d'indices α tels que $K_\alpha \cap K \neq \emptyset$ et donc tels que $s_\alpha \neq 0$. Réciproquement, si $s \in \coprod_{|\alpha|=n} \Gamma_c(K_\alpha \cap U, F)$, en appelant K la réunion des supports des s_α, on obtient un compact de U tel que s_α soit nul en dehors de $K_\alpha \cap K$.

LEMME 5. — *Soient $\mathfrak{U}$ un recouvrement ouvert localement fini de l'espace paracompact X, K un compact de X, et F un faisceau c-mou, alors la suite*

$$\ldots \to C^f_{-1}(\mathfrak{U} \cap \mathrm{K}, (F|_K)_c) \to C^f_0(\mathfrak{U} \cap \mathrm{K}, (F|_K)_c) \to \Gamma(\mathrm{K}, F) \to 0$$

est exacte.

Comme K est fermé, $\Gamma(U_\alpha \cap K, F) = \Gamma(U_\alpha, F_K)$, où F_K est le faisceau sur X qui induit $F|_K$ sur K, et 0 sur X-K. Le faisceau F_K est c-mou, et

$\Gamma_c(U_\alpha \cap K, F) = \Gamma_c(U_\alpha, F_K)$ car un compact de $K \cap U_\alpha$ est un compact de U_α, et un compact de U_α inclus dans K est un compact de $U_\alpha \cap K$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 3 au faisceau F_K en remarquant que

$$\Gamma_c(X, F_K) = \Gamma(X, F_K) = \Gamma(\mathrm{K}, F).$$

A l'aide de ces deux lemmes on démontre la proposition suivante.

PROPOSITION 1. — *On se donne :*

— *un espace paracompact X;*

— *un recouvrement ouvert localement fini $\mathfrak{U}$ de X tel que,*

$$(\exists N, |\alpha| > N) \quad \Rightarrow \quad (U_\alpha = \varnothing);$$

— *un recouvrement compact localement fini $\mathfrak{K}$ de X avec la même condition;*

— *un complexe borné de faisceaux c-mous $I^{\bullet}$.*

Considérons le triple complexe

$$\mathrm{K}^{p,-q,r} = \coprod_{|\alpha|=p,\,|\beta|=q} \Gamma_c(U_\beta \cap \mathrm{K}_\alpha, I^r).$$

Notons $K^{\bullet}$ le complexe simple gradué par $p-q+r$ associé à ce triple complexe.

Alors les flèches d'augmentations naturelles

(1) $\quad \mathrm{C}^f_{\bullet}(\mathfrak{U}, I^{\bullet}_c) \to \mathrm{K}^{\bullet}$ (comp. simple gradué par $r-q$)

et

(2) $\quad \mathrm{K}^{\bullet} \to \mathrm{C}^{\bullet}_f(\mathfrak{K}, I^{\bullet})$ (comp. simple gradué par $p+r$)

sont des quasi-isomorphismes.

En effet, considérons tout d'abord $K^{p,-q,r}$ comme un double complexe gradué par $p+r$ et $-q$. Comme $q \geqslant 0$, et vue la condition de finitude, la première suite spectrale est régulière. Elle est aussi dégénérée à cause du lemme 5, donc (1) induit un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{H}^n(\mathrm{K}^{\bullet}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^n(\Gamma_c(X, I^{\bullet})).$$

De même, si on considère le triple complexe comme un double complexe gradué par p et $r-q$, la deuxième suite spectrale est régulière et dégénérée à cause du lemme 4, d'où la conclusion.

4. Où l'on voit enfin la solution topologique

On traitera en détails le cas absolu. Le cas relatif n'introduit aucune autre difficulté que celles dues aux notations, et nous indiquerons seulement les résultats.

Tout d'abord, le résultat du paragraphe précédent s'étend sans difficultés à des hyper-recouvrements. Partons alors d'un (hyper-) recouvrement $\mathfrak{U}$ de X par des couverts d'Oka-Weil et d'un hyper-recouvrement $\mathfrak{K}$ de X par des compacts qui permettent de remplacer $\mathbf{K}_X^{\cdot}$ par un complexe $G^{\cdot}$ à composantes cohérentes. Désignons par $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{K}$ l'hyper-recouvrement fabriqué à partir des intersections d'un ouvert de $\mathfrak{U}$ et d'un compact de $\mathfrak{K}$.

On aura donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{U} \arrow[r, "\mathbf{p}"] & X \\ \mathfrak{U} \cap \mathfrak{K} \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "\mathbf{p}''"] \arrow[r, hook, "i'"] & \mathfrak{K} \arrow[u, "\mathbf{p}'"'] \end{tikzcd},$$

où i et i' sont les inclusions.

Comme $\mathbf{K}_X^{\cdot}$ est un complexe à fibres injectives, la résolution de Godement $C^{\cdot}(\mathbf{K}_X^{\cdot})$ est à objets injectifs, donc c-mous, et on peut lui appliquer la proposition précédente. Pour simplifier l'écriture on omettra l'indice supplémentaire dû au fait qu'il s'agit d'hyper-recouvrements.

Si donc on pose

$$\Sigma^{p,\,-q,\,\cdot} = \coprod\nolimits_{|\alpha|=p,\,|\beta|=q} \Gamma_c(U_\beta \cap \mathrm{K}_\alpha,\ C^{\cdot}(\mathbf{K}_X^{\cdot}))$$

et si l'on appelle $\Sigma^{\cdot}$ le complexe simple associé, il y aura des quasi-isomorphismes (algébriques) :

$$\Sigma^{\cdot} \to \Gamma(\mathfrak{K},\ \mathbf{p}'^{*} C^{\cdot}(\mathbf{K}_X^{\cdot})) \qquad \text{et} \qquad \Gamma_c(\mathfrak{U},\ \mathbf{p}^{*} C^{\cdot}(\mathbf{K}_X^{\cdot})) \to \Sigma^{\cdot}.$$

On va maintenant « trivialiser » ces résultats pour obtenir des topologies D.F.N. sur les composantes, et des quasi-isomorphismes bicontinus :

1° On utilise les quasi-isomorphismes

$$G^{\cdot} \to \mathbf{p}'^{*}\mathbf{K}_X^{\cdot} \to C^{\cdot}(\mathbf{p}'^{*}\mathbf{K}_X^{\cdot}) = \mathbf{p}'^{*} C^{\cdot}(\mathbf{K}_X^{\cdot}),$$

puis, si $(\mathbf{P}, \mathbf{j}')$ est une $\mathfrak{K}$-trivialisation de $X \longrightarrow pt$, le quasi-isomorphisme $\tilde{G}_{\mathbf{P}}^{\cdot} \to \mathbf{j}'_{*} G^{\cdot}$ pour remplacer $\Gamma(\mathfrak{K},\ \mathbf{p}'^{*} C^{\cdot}(\mathbf{K}_X^{\cdot}))$ par $\Gamma\ (\mathbf{P},\ \tilde{G}_{\mathbf{P}}^{\cdot})$.

2° Le calcul fait au paragraphe 1 donne, pour représentant de $\Gamma_c(\mathfrak{U},\ \mathbf{p}^{*} C^{\cdot}(\mathbf{K}_X^{\cdot}))$, le complexe $\mathrm{Hom}_c(\mathbf{D},\ L^{\cdot},\ \Delta_{\mathbf{D}}^{\cdot})$, où $(\mathbf{D}, \mathbf{j})$ est une $\mathfrak{U}$-trivialisation de $X \to pt$.

3° Reste à étudier $\Sigma^{\bullet}$, ... Le produit $(\mathbf{D}\times\mathbf{P}, \mathbf{j}'' = (\mathbf{j}, \mathbf{j}'))$ est une $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{K}$-trivialisation de $X \to pt$. On a donc le diagramme commutatif :

$$
(A)\qquad
\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{U} \arrow[r, hook, "\mathbf{j}"] \arrow[dl, "\mathbf{p}"'] & \mathbf{D} \\
X & \mathfrak{U}\cap\mathfrak{K} \arrow[l, "\mathbf{p}''"'] \arrow[u, hook, "i"] \arrow[d, hook, "i'"'] \arrow[r, hook, "\mathbf{j}''"] & \mathbf{D}\times\mathbf{P} \arrow[u, "\overline{\omega}"'] \arrow[d, "\overline{\omega}'"] \\
 & \mathfrak{K} \arrow[ul, "\mathbf{p}'"] \arrow[r, "\mathbf{j}'"] & \mathbf{P}
\end{tikzcd}
$$

où $\overline{\omega}$ et $\overline{\omega}'$ sont les projections canoniques.

Remarquons que $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}'$ et $\mathbf{j}''$ étant des plongements fermés sont des applications propres, donc $\mathbf{j}_* = \mathbf{j}_!$, $\mathbf{j}'_* = \mathbf{j}'_!$ et $\mathbf{j}''_* = \mathbf{j}''_!$. Ceci sert déjà à remplacer (puisque $\Gamma_c \circ \mathbf{j}''_! = \Gamma_c$) $\Gamma_c(\mathfrak{U}\cap\mathfrak{K}, \mathbf{p}''^* C^{\bullet}(\mathbf{K}^{\bullet}_X))$ par

$$\Gamma_c(\mathbf{D}\times\mathbf{P}, \mathbf{j}''_* \mathbf{p}''^* C^{\bullet}(\mathbf{K}^{\bullet}_X)).$$

Il faut maintenant obtenir une résolution de $\mathbf{j}''_* \mathbf{p}''^* C^{\bullet}(\mathbf{K}^{\bullet}_X)$ qui préserve, sur la partie correspondant au système ouvert $\mathbf{D}$, des liaisons contravariantes et sur celle correspondant à $\mathbf{P}$ des liaisons covariantes. La proposition suivante montre que c'est possible.

PROPOSITION 2. — *Les notations sont celles qui précèdent. Alors le complexe $\Sigma^{\bullet}$ est quasi isomorphe au complexe simple associé au complexe triple dont les objets sont*

$$\coprod_{|\alpha|=p,\,|\beta|=q} \Gamma(P_\alpha, \tilde{G}^{\bullet}_{P_\alpha}) \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} \operatorname{Hom}_c(D_\beta, L^{\bullet}_\beta \otimes_{\mathcal{O}_{D_\beta}} \tilde{G}^{\bullet}_{D_\beta}, \Delta^{\bullet}_{D_\beta}),$$

ou $\tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{D}}$ est une résolution libre de $\mathbf{j}_* \mathbf{p}^* \mathbf{K}^{\bullet}_X$, et dont les flèches sont fabriquées à l'aide des liaisons covariantes du premier facteur et des liaisons contravariantes du deuxième facteur.

Ce complexe, vues ses liaisons, mérite de s'appeler

$$\Gamma(\mathbf{P}, \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{P}}) \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} \operatorname{Hom}_c(\mathbf{D}, L^{\bullet} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbf{D}}} \tilde{G}^{\bullet}_{\mathbf{D}}, \Delta^{\bullet}_{\mathbf{D}}),$$

comme annoncé dans le théorème 1.

La démarche générale est la suivante : on va utiliser la propriété (*cf.* [5]) :

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^{\bullet}_X = \mathbf{K}^{\bullet}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X &= \mathbf{K}^{\bullet}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}om(\mathbf{K}^{\bullet}_X, \mathbf{K}^{\bullet}_X) \\ &= \mathbf{K}^{\bullet}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{H}om(\mathbf{K}^{\bullet}_X, \mathcal{H}om(\mathcal{O}_X, \mathbf{K}^{\bullet}_X)\end{aligned}$$

en découpant convenablement le dernier membre pour obtenir les liaisons voulues.

On travaille avec un polydisque compact P et un polydisque ouvert D; pour simplifier l'écriture, on supprimera tous les indices (α en ce qui concerne les compacts et β en ce qui concerne les ouverts).

Alors :

$$\begin{aligned}&j''_* p''^* C^\bullet(\mathbf{K}^\bullet_X)\\ &\quad = j''_* p''^*(C^\bullet(\mathbf{K}^\bullet_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X) = j''_*(p''^* C^\bullet(\mathbf{K}^\bullet_X) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{U}\cap\mathfrak{K}}} p''^* \mathcal{O}_X)\\ &\quad = j''_* p''^* C^\bullet(\mathbf{K}^\bullet_X) \otimes_{\mathcal{O}_{D\times P}} j''_* p''^* \mathcal{O}_X,\end{aligned}$$

car j'' est un plongement fermé (*voir* par exemple [4], ch. 0 (4.2.5)).

Mais en regardant le diagramme (A), on peut écrire :

$$j''_* p''^* = j''_! p''^* = j''_! i^* p^* \simeq \overline{\omega}^* j_! p^*$$

(c'est la formule de changement de base de [8], exposé 3) $= \overline{\omega}^* j_* p^*$.

De même,

$$j''_* p''^* = \overline{\omega}'^* j'_* p'^*.$$

Donc

$$\begin{aligned}&j''_* p''^* C^\bullet(\mathbf{K}^\bullet_X) \otimes j''_* p''^* \mathcal{O}_X\\ &\quad = \overline{\omega}'^* j'_* p'^* C^\bullet(\mathbf{K}^\bullet_X) \otimes \overline{\omega}^* j_* p^* \mathcal{O}_X\\ &\quad = j_* p^* \mathcal{O}_X \mathbin{\overline{\otimes}} j'_* p'^* C^\bullet(\mathbf{K}^\bullet_X) \quad \text{(par définition de } \overline{\otimes}).\end{aligned}$$

Maintenant,

– le facteur $j'_* p'^* C^\bullet(\mathbf{K}^\bullet_X)$ se « remplace » dans la « catégorie dérivée » par $\tilde{G}^\bullet_P$.

– le facteur $j_* p^* \mathcal{O}_X$ s'écrit (toujours parce que j est un plongement fermé) :

$$\begin{aligned} j_* p^* Hom(\mathbf{K}^\bullet_X, \mathbf{K}^\bullet_X) &= Hom(j_* p^* \mathbf{K}^\bullet_X, j_* p^* \mathbf{K}^\bullet_X)\\ &= Hom(j_* p^* \mathbf{K}^\bullet_X, Hom(j_* p^* \mathcal{O}_X, \mathbf{K}^\bullet_D))\end{aligned}$$

et il n'y a plus qu'à achever le calcul en prenant une résolution libre (à liaisons covariantes) $\tilde{G}^\bullet_{\mathbf{D}}$ de $\mathbf{j}_* \mathbf{p}^* K^\bullet_X$ (*via* une résolution cohérente de $\mathbf{p}^* K^\bullet_X$ en utilisant la méthode de Verdier..., ce qui nécessite éventuellement un raffinement de $\mathfrak{U}$), en prenant une résolution libre $L^\bullet$ de $j_* p^* \mathcal{O}_X$, et en plongeant $\mathbf{K}^\bullet_D$ dans les distributions. On obtient donc :

$$Hom(\tilde{G}^\bullet_D, Hom(L^\bullet, \Delta^\bullet_D)) = Hom(\tilde{G}^\bullet_D \otimes L^\bullet, \Delta^\bullet_D).$$

Et finalement on a remplacé (en remettant les indices convenables) $j''_{(\alpha,\beta)_*} p''^*_{(\alpha,\beta)} C^\bullet(\mathbf{K}^\bullet_X)$ par $Hom(\tilde{G}^\bullet_{D_\beta} \otimes L^\bullet_\beta, \Delta^\bullet_{D_\beta}) \mathbin{\overline{\otimes}} \tilde{G}^\bullet_{P_\alpha}$ qui possède des liaisons covariantes en α et des liaisons contravariantes en β et dont il faut regarder les sections à support compact sur $D_\beta \times P_\alpha$. Mais comme tous les faisceaux qui interviennent sont des faisceaux de distributions ou de fonctions holomorphes (élevées à une puissance finie), on voit que

$$\begin{aligned}&\Gamma_c(D_\beta \times P_\alpha, Hom(\tilde{G}^\bullet_{D_\beta} \otimes L^\bullet_\beta, \Delta^\bullet_{D_\beta}) \overline{\otimes}\, \tilde{G}^\bullet_{P_\alpha})\\ &= \Gamma_c(D_\beta, Hom(\tilde{G}^\bullet_{D_\beta} \otimes L^\bullet_\beta, \Delta^\bullet_{D_\beta}) \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} \Gamma(P_\alpha, \tilde{G}^\bullet_{P_\alpha})\\ &= \mathrm{Hom}_c(D_\beta, \tilde{G}^\bullet_{D_\beta} \otimes L^\bullet_\beta, \Delta^\bullet_{D_\beta}) \hat{\otimes}_{\mathbf{C}} \Gamma(P_\alpha, \tilde{G}^\bullet_{P_\alpha}),\end{aligned}$$

qu'on pourra abréger en $\Sigma_{\alpha,\beta}$ (ici $\hat{\otimes}_{\mathbf{C}}$ désigne comme d'habitude le complété du produit tensoriel topologique : il s'agit donc d'un espace D.F.N. puisque chacune des composantes l'est).

Reste pour établir le théorème 1 à mettre en évidence les deux flèches qui relient le complexe qu'on vient de fabriquer à chacun des deux complexes de départ.

1° La flèche de $\Sigma_{\alpha,\beta} \to \Gamma(P_\alpha, \tilde{G}^\bullet_{P_\alpha})$ est simplement la flèche qui se déduit de l'intégration : $'\mathscr{D}_c^{m_\beta, m_\beta}(D_\beta) \to \mathbf{C}$ (et 0 en les autres degrés). En utilisant le théorème des noyaux de [6] et l'exactitude de $\hat{\otimes}$ pour les espaces D.F.N. ([R-R], proposition 1), on démontre (en regardant comme dans le cas algébrique la première suite spectrale du complexe double gradué par $p+r$ et $-q$ associé au complexe triple « trivialisant ») que cette application est un quasi-isomorphisme. La continuité est évidente et la bicontinuité tient à ce qu'il s'agit d'espaces D.F.N. donc D.F.S. pour lesquels le théorème du graphe fermé est valide ([5], lemme 1 *bis*).

2° La deuxième flèche est « moralement » la flèche naturelle $\mathbf{K}^\bullet_X \to \mathbf{K}^\bullet_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X$ (tensorisation par 1). Pour la lire au niveau des H.S.F.K., on peut faire les transformations suivantes : pour chaque compact P et chaque ouvert D (on ne note pas les indices), on a

$$\begin{aligned}(\star) &= Hom(\tilde{G}^\bullet_D \otimes_{\mathcal{O}_D} L^\bullet, \Delta^\bullet_D) \overline{\otimes}\, \tilde{G}^\bullet_P\\ &= \overline{\omega}^* Hom(\tilde{G}^\bullet_D \otimes L^\bullet, \Delta^\bullet_D) \otimes_{\mathcal{O}_{D\times P}} \overline{\omega}'^* \tilde{G}^\bullet_P\\ &= Hom(\overline{\omega}^* \tilde{G}^\bullet_D \otimes_{\mathcal{O}_{D\times P}} \overline{\omega}^* L^\bullet, \overline{\omega}^* \Delta^\bullet_D) \otimes_{\mathcal{O}_{D\times P}} \overline{\omega}'^* \tilde{G}^\bullet_P,\end{aligned}$$

dans lequel tous les facteurs sauf $\overline{\omega}^* \Delta^\bullet_D$ sont des $\mathcal{O}_{D\times P}$-modules libres de type fini. On va transformer ceci en utilisant le résultat suivant :

($\star\star$) Si L est un $\mathcal{O}_X$-module (localement) libre de type fini, la flèche naturelle : $Hom(L, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} F \to Hom(L, F)$ est un isomorphisme pour tout $\mathcal{O}_X$-module F ([4], ch. 0 (5.4.2.1)).

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}(\star) &= Hom(\overline{\omega}^* \tilde{G}^\bullet_D, Hom(\overline{\omega}^* L^\bullet, \overline{\omega}^* \Delta_D)) \otimes \overline{\omega}'^* \tilde{G}^\bullet_P,\\ &= (Hom(\overline{\omega}^* \tilde{G}^\bullet_D, \mathcal{O}_{D\times P}) \otimes Hom(\overline{\omega}^* L^\bullet, \overline{\omega}^* \Delta_D)) \otimes \overline{\omega}'^* \tilde{G}^\bullet_P \quad (\text{par } (\star\star)),\\ &= Hom(\overline{\omega}^* \tilde{G}^\bullet_D, \overline{\omega}'^* \tilde{G}^\bullet_P) \otimes \overline{\omega}^* Hom(L^\bullet, \Delta^\bullet_D)\end{aligned}$$

(associativité de $\otimes$, puis ($\star\star$), et on sort le $\overline{\omega}^*$ devant *Hom*).

Mais le premier membre est un représentant (libre de type fini) de (calcul dans la catégorie dérivée) :

$$Hom(\overline{\omega}^* j_* p^* \mathbf{K}_X^\bullet, \overline{\omega}'^* j'_* p'^* \mathbf{K}_X^\bullet) = Hom(j''_* p''^* \mathbf{K}_X^\bullet, j''_* p''^* \mathbf{K}_X^\bullet) = j''_* p''^* \mathcal{O}_X .$$

En utilisant le fait que $Hom\ (\mathbf{K}_X^p, \mathbf{K}_X^q) = 0$ pour $p > q$, on voit que la section 1 de $j''_*\ p''^*\ \mathcal{O}_X$ a une image canonique dans $Hom\ (\overline{\omega}^*\ j_*\ p^*\ K_X^\bullet, \overline{\omega}'^*\ j'_* p'^*\ K_X^\bullet)$, donc aussi (en composant avec la flèche $\overline{\omega}^*\ \tilde{G}_D^\bullet \to \overline{\omega}^*\ j_*\ p^*\ K_X^\bullet$) une image dans $Hom\ (\overline{\omega}^*\ \tilde{G}_D^\bullet, \overline{\omega}'^*\ j'_*\ p'^*\ K_X^\bullet)$.

Maintenant en choisissant une base du module libre de type fini $\overline{\omega}'^*\ \tilde{G}_P^\bullet$, on fabrique un représentant de 1 dans $Hom\ (\overline{\omega}^*\ \tilde{G}_D^\bullet, \overline{\omega}'^*\ \tilde{G}_P^\bullet)$. A un élément de $\mathrm{Hom}_c\ (L^\bullet, \Delta_D^\bullet)$, on associe alors, en tensoriant par le représentant de 1 qu'on vient de construire un élément de $\Sigma_{\alpha, \beta}$.

Mais le calcul précédent respecte les liaisons contravariantes en β (mais pas les liaisons covariantes en α, ce qui ne gêne pas ici : on travaille avec α fixé). On a donc, pour $\beta \subset \beta'$, un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_c\ (L_\beta^\bullet, \Delta_{D_\beta}^\bullet) \arrow[r] & \Sigma_{\alpha, \beta} \\
\mathrm{Hom}_c (L_{\beta'}^\bullet, \Delta_{D_{\beta'}}^\bullet) \arrow[r] \arrow[u] & \Sigma_{\alpha, \beta'} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Pour voir que la flèche ainsi construite est bien un quasi-isomorphisme, on peut lire algébriquement le calcul fait plus haut dans la « catégorie dérivée » selon le schéma suivant : on utilise trois représentants de $j''_* p''^*\ \mathbf{K}_X^\bullet$:

$${}^1\mathbf{K}_X^\bullet = \overline{\omega}'^*\ \tilde{G}_P^\bullet;\ {}^2\mathbf{K}_X^\bullet = \overline{\omega}^*\ \tilde{G}_D^\bullet \quad \text{(ces deux représentants sont libres)}$$

et

$${}^3\mathbf{K}_X^\bullet = \overline{\omega}^* Hom(L^\bullet, \Delta_D^\bullet),$$

et on a exprimé au niveau des représentants le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
{}^3\mathbf{K}_X^\bullet \arrow[rr] \arrow[ddd, "\sigma"'] \arrow[dddr, "\wr"] & & {}^1\mathbf{K}_X^\bullet \otimes Hom({}^2\mathbf{K}_X^\bullet, {}^3\mathbf{K}_X^\bullet) \arrow[d, "\wr"] \\
& & Hom({}^2\mathbf{K}_X^\bullet, {}^3\mathbf{K}_X^\bullet \otimes {}^1\mathbf{K}_X^\bullet) \\
& & RHom({}^2\mathbf{K}_X^\bullet, \mathcal{O}_X) \otimes ({}^3\mathbf{K}_X^\bullet \otimes {}^1\mathbf{K}_X^\bullet) \arrow[u, "\wr"] \arrow[d, "\wr"] \\
1 \otimes \sigma & & Hom({}^2\mathbf{K}_X^\bullet, {}^1\mathbf{K}_X^\bullet) \otimes {}^3\mathbf{K}_X^\bullet
\end{tikzcd}$$

où l'on voit donc que la flèche horizontale est aussi un quasi-isomorphisme. Les flèches écrites sont bien des quasi-isomorphismes grâce aux propriétés de liberté des représentants de $\mathbf{K}_X^{\bullet}$, de plus comme ${}^2\mathbf{K}_X^{\bullet}$ est libre, on peut remplacer *RHom* par *Hom*.

Maintenant la bicontinuité de ce quasi-isomorphisme algébrique s'obtient par le même argument que ci-dessus (il s'agit toujours d'espaces D.F.N.)... et ceci achève la démonstration dans le cas absolu.

Le cas relatif ne nécessite qu'une définition supplémentaire : on définit le produit tensoriel complété sur $\mathcal{O}_S$ de deux $\mathcal{O}_S$-modules D.F.N. (resp. F.N.) libres par, si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S \hat{\otimes} F$ et

$$\mathcal{G} = \mathcal{O}_S \hat{\otimes} G,$$

alors

$$\mathcal{F} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{G} = \mathcal{O}_S \hat{\otimes} (F \hat{\otimes} G)$$

qui est bien un $\mathcal{O}_S$-module D.F.N. (resp. F.N.) libre.

Il ne reste alors qu'à recopier tout ce qui vient d'être fait en tensoriant par l'$\mathcal{O}_S$-module inversible $T^{-k}\,\Omega_S$... et en effectuant les changements de notations qui s'imposent : c'est le théorème 2.

5. Une application

Signalons pour finir, sans entrer dans les détails, que l'on peut à condition de travailler avec un hyper-recouvrement obtenir des théorèmes de dualité 1′ et 2′ analogues aux théorèmes 1 et 2 de [R-R], mais où *quasi-isomorphisme* est remplacé par *quasi-isomorphisme de niveau r*, pour un complexe de faisceaux sur X, borné et à cohomologie cohérente : il suffit, grâce à la technique de VERDIER, de passer par l'intermédiaire d'un complexe à composantes cohérentes.

Mais alors, partant d'un faisceau cohérent sur X, soit F, on obtient un complexe, qui est borné à cohomologie cohérente, $F'^{\bullet} = RHom\,(\mathbf{R}, F, \mathbf{K}_X^{\bullet})$, et il y a, sur $Rf_!\,F'^{\bullet}$, deux topologies naturelles : celle qui provient du théorème 1 de [R-R] (i. e. $\pi_!\,Hom\,(\mathbf{V}, L^{\bullet}, N_{\mathbf{V}}^{\bullet})$, où $\mathbf{V}$ représente (au choix) un système ou un hyper-système de FORSTER-KNORR, et celle qui provient du théorème 2′ et qui utilise tout d'abord une résolution à composantes cohérentes de $F'^{\bullet}$. Lorsque $F = \mathcal{O}_X$, l'identité de ces deux topologies est l'objet du travail précédent. Dans le cas général, il n'y a qu'à le recopier en remplaçant $\mathbf{K}_X^{\bullet}$ par $RHom\,(X, F, \mathbf{K}_X^{\bullet})$... On obtient ainsi une réponse affirmative à la question de [R-R] : les deux théorèmes de dualité coïncident (« topologie » comprise) pour un complexe à cohomologie cohérente, à condition de l'énoncer avec *quasi-isomorphisme de niveau r*, où r est arbitraire (assez grand).

BIBLIOGRAPHIE

[R-R] RAMIS (J.-P.) et RUGET (G.). — Résidus et dualité, *Inventiones Math.*, t. 26, 1974, p. 89-131.

[1] ARTIN (M.) and MAZUR (B.). — *Etale homotopy.* — Berlin, Springer-Verlag, 1969, (*Lecture Notes in mathematics*, 100).

[2] FORSTER (O.) und KNORR (K). — Relativ-analytische Raüme und die Kohärenz von Bilgarben, *Inventiones Math.*, t. 16, 1972, p. 133-160.

[3] GODEMENT (R.). — *Topologie algébrique et Théorie des faisceaux.* — Paris, Hermann, *Act. scient. et ind.*, 1252; (*Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 13).

[4] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de géométrie algébrique*, I : *Le langage des schémas.* Paris, Presses universitaires de France, 1960 (*Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques*, 4).

[5] RAMIS (J.-P.) et RUGET (G.). — *Complexe dualisant et théorèmes de dualité en géométrie analytique complexe.* — Bures-sur-Yvette, Institut des Hautes Études scientifiques, 1970 (*Publications mathématiques*, 38).

[6] SCHWARTZ (L.). — Théorie des distributions à valeurs vectorielles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 7. 1957, p. 1-141.

[7] *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie*, 1963/1964 : *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas.* 3. — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 305).

[8] *Séminaire Heidelberg-Strasbourg*, 1966-1967 : *Dualité de Poincaré.* — Strasbourg, Institut de Recherche mathématique avancée, 1969 (*Publication I.R.M.A.*, 3).

[9] SUOMINEN (K.). — Duality for the coherent analytic sheaves on analytic manifolds, *Ann. Acad. Sc. Fennicae*, Series A, I : math., 1968, n° 424.

[10] VERDIER (J.-L.). — Topologie sur les espaces de cohomologie d'un complexe de faisceaux analytiques à cohomologie cohérente, *Bull. Soc. math. France*, *t.* 99, 1971, p. 337-343.

(Texte reçu le 13 novembre 1975.)

Mme Anne DUVAL-SCHERPEREEL,
Institut de Recherche Mathématique avancée,
Laboratoire associé au C.N.R.S.,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
67084 Strasbourd Cedex.